中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

(鄉土)教材獎

050409

二次曲線上蝴蝶形的探究

學校名稱：國立斗六高級中學

作者：	指導老師：
高二 何碩宸 高二 黃韻璇 高一 張宗瑋	陳俊名 洪百佑

關鍵詞：蝴蝶形、二次曲線

摘要

從蝴蝶定理（Butterfly theorem）的圖形進行發想，在前人作品發想出研究方向，除了在圓與正方形以外，在其他圖形上討論蝴蝶形的其他性質是否有不同的發現？我們在圓、橢圓、拋物線與雙曲線之重疊圖形上作出對稱與非對稱蝴蝶形，對其面積、邊長、角度進行計算與歸納，再推廣到在拋物線上另找任意兩點做蝴蝶形；在研究過程中，我們也發現了圖形上一些特殊的性質，進行一連串的研究。且以普通高級中學課程綱要中數學科課程綱要內容為我們推論工具，希望能讓多數高中程度的學生均能了解我們的發現。

壹、研究動機

之前在網路上看到全國科展第 55 屆的參展作品：正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究（張華恩、吳尚澂、葉承恩，2015），討論蝴蝶定理在正方形內的推廣，引起我們對這方面的興趣。但在搜尋的過程中，我們發現大部分資料主要在講述蝴蝶形的邊長的特性（ej0cl6，2009；Weisstein, Eric W.，2019；王銳騰，2019），並無對面積的討論，因此我們想對蝴蝶形面積進行更進一步的研究。另外，我們以二次曲線為研究主題，運用高中教材裡的圓、橢圓、拋物線與雙曲線作圖，以普通高級中學課程綱要中數學科課程綱要內容為我們推論工具，希望能讓多數高中程度的學生均能了解我們的發現。

貳、研究目的

一、尋找蝴蝶形中間點位置與蝴蝶線的關係

二、尋找二次曲線上之蝴蝶形面積和角度與座標數值之關係

三、拋物線上蝴蝶形之邊長與y軸上蝴蝶形中間點之關係

四、尋找拋物線上蝴蝶形兩外邊延長而得的交點與蝴蝶形中間點之關係

五、尋找圓與拋物線之重疊圖形上的對稱蝴蝶形中，特定線段長度與點座標數值之關係

六、尋找拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍面積之關係

參、研究設備及器材

紙筆和其餘文書用具、電腦、GeoGebra 軟體

肆、研究過程或方法

一、符號與名詞定義

定義 一 任意凸四邊形的對角線相連，所產生四個三角形中，取兩個不相鄰的三角形為蝴蝶形。且以四條組成蝴蝶形的線段命名，如圖 1 為蝴蝶形 $ABCD$，即是以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$所圍成。（張華恩等人，2015）

定義 二 蝴蝶形中，兩個三角形的共用頂點，稱為蝴蝶形中間點，如圖 2 的 E。（張華恩等人，2015）

定義 三 組成蝴蝶形的其中一個三角形中，頂點為蝴蝶形中間點的內角，稱為蝴蝶形內夾角，如圖 2 的$\angle DEC$。

定義 四 作一直線通過蝴蝶形的中間點，交蝴蝶形的兩側，當一側交點到蝴蝶形中間點的距離等於另一側交點到蝴蝶形中間點的距離，這條直線即是蝴蝶線，如圖 2 的$\overleftrightarrow{FG}$。（張華恩等人，2015）

定義 五 為方便閱讀，我們將點$A(x,y)$的x座標以A_x，y座標以A_y表示。例：若$F(-4,8)$為坐標上一點，則$F_x=-4$，$F_y=8$。

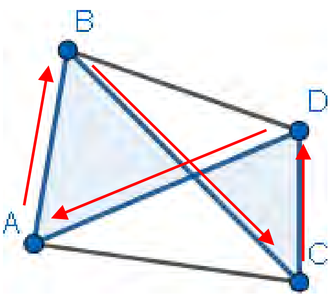


圖 1

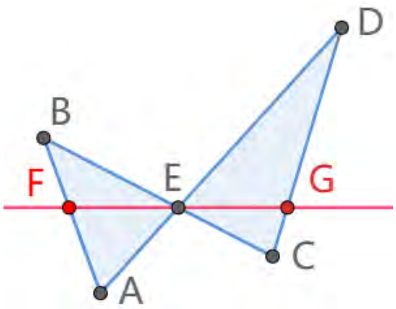


圖 2

研究一：尋找蝴蝶形中間點位置與蝴蝶線的關係

一開始，我們先觀察一種作圖，試圖找出它的特性：

（一）以特定情況討論：拋物線：$y=\frac{1}{2}x^2$、圓：$x^2+(y-4)^2=16$及拋物線上一點$(-2,2)$

作圖（圖 3）

(1) 作拋物線：$y=\frac{1}{2}x^2$、圓：$x^2+(y-4)^2=16$，其中圓心為 $A\,(0\,,4)$，經計算後可得兩方程式交點分別為 $(-2\sqrt{3},6)$、$(2\sqrt{3},6)$、$(0,0)$，其中取$(-2\sqrt{3},6)$為 B，並在拋物線上取一點 $C\,(-2\,,2)$

(2) 設 F 為 y 軸上一動點

(3) 作$\overrightarrow{BF}$交拋物線於 E，再作$\overrightarrow{CF}$交拋物線於 G

(4) 作 $\overline{CB}$、$\overline{BE}$、$\overline{EG}$、$\overline{GC}$，得蝴蝶形 $CBEG$

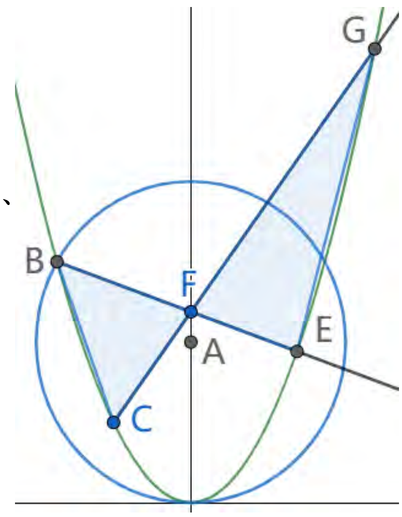


圖 3

$$\frac{E_y-B_y}{E_x-B_x}=\frac{F_y-B_y}{F_x-B_x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}E_x^2-6}{E_x+2\sqrt{3}}=\frac{F_y-6}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}{E_x}^2-12\sqrt{3}=E_xF_y+2\sqrt{3}F_y-6E_x-12\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}{E_x}^2+(6-F_y)E_x-2\sqrt{3}F_y=0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}E_x-F_y)(E_x+2\sqrt{3})=0$$

$\Rightarrow E_x=\dfrac{F_y}{\sqrt{3}}\ or-2\sqrt{3}\qquad \therefore E\left(\dfrac{F_y}{\sqrt{3}},\dfrac{{F_y}^2}{6}\right)$ or $(-2\sqrt{3},6)$(不合，因與B相同)

$$\frac{G_y-C_y}{G_x-C_x}=\frac{F_y-C_y}{F_x-C_x}$$

$$\Rightarrow \frac{G_y-2}{G_x+2}=\frac{F_y-2}{2}$$

$$\Rightarrow (G_x+2)(G_x-F_y)=0$$

$\Rightarrow G_x=F_y\ or-2\qquad \therefore G\left(F_y,\dfrac{1}{2}{F_y}^2\right)or(-2,2)$(不合，因與$C$相同)

因此，圖 3 中的$E\left(\dfrac{F_y}{\sqrt{3}},\dfrac{{F_y}^2}{6}\right)$、$G\left(F_y,\dfrac{1}{2}{F_y}^2\right)$

而我們在電腦作圖時發現，依照上述方式作圖並改變 E 點在拋物線上的位置，蝴蝶線似乎會與x軸平行，證明如下：

設蝴蝶形$CBEG$的蝴蝶線過蝴蝶形中間點$F(0,k)$分別交$\overline{BC}$、$\overline{GE}$於P、Q（圖 4），

由於 F 為 P、Q 中點，可設$P(-a,k-b)$、$Q(a,k+b)$

由圖 3 的計算及$F_y=k$，可得$B(-2\sqrt{3},6)$、$C(-2,2)$、$E\left(\frac{k}{\sqrt{3}},\frac{k^2}{6}\right)$、$G\left(k,\frac{1}{2}k^2\right)$

$$\begin{cases}\dfrac{P_x-C_x}{P_y-C_y}=\dfrac{C_x-B_x}{C_y-B_y}\\[2mm] \dfrac{Q_x-E_x}{Q_y-E_y}=\dfrac{G_x-E_x}{G_y-E_y}\end{cases}$$

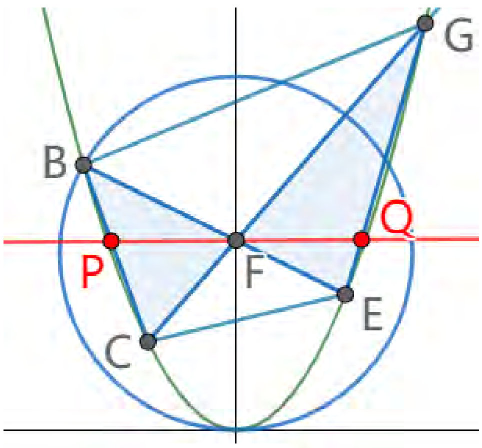


圖 4

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-a-(-2)}{(k-b)-2}=\dfrac{-2-\left(-2\sqrt{3}\right)}{2-6}\\[2mm] \dfrac{a-\frac{k}{\sqrt{3}}}{(k+b)-\frac{k^2}{6}}=\dfrac{k-\frac{k}{\sqrt{3}}}{\frac{k^2}{2}-\frac{k^2}{6}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{-a+2}{(k-b)-2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\[1mm] \frac{a-\frac{k}{\sqrt{3}}}{(k+b)-\frac{k^2}{6}}=\frac{3-\sqrt{3}}{k}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a=k-k\sqrt{3}-b+b\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}\_\_①\\ 2ka=(\sqrt{3}-1)k^2+6b-2b\sqrt{3}+6k-2k\sqrt{3}\_\_②\end{cases}$$

$$①\times k\ \Rightarrow\begin{cases}-2ka=k^2-k^2\sqrt{3}-bk+bk\sqrt{3}-6k+2k\sqrt{3}\_\_③\\ 2ka=(\sqrt{3}-1)k^2+6b-2b\sqrt{3}+6k-2k\sqrt{3}\_\_④\end{cases}$$

$$③+④\Rightarrow\ bk\sqrt{3}-bk+6b-2b\sqrt{3}=0\Rightarrow b\left[\left(\sqrt{3}-1\right)k-\left(2\sqrt{3}-6\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\ k=\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}-1}\left(\text{不合，因為}k\text{非定值}\right)\ or\ b=0$$

$\therefore P(-a,k)$、$Q(a,k)$，故$\overline{PQ}\parallel x$軸

$\Rightarrow$ 蝴蝶線與x軸平行■

根據此結果，可以得知：若蝴蝶線交蝴蝶形於$\overline{BC}$、$\overline{GE}$，蝴蝶線會平行 x 軸，而當$F_y>B_y$時（圖 5），顯然通過F且平行x軸的$\overleftrightarrow{PQ}$不會通過$\overline{BC}$、$\overline{GE}$，而是通過$\overline{BG}$、$\overline{CE}$，因此讓我們懷疑：蝴蝶形$BGCE$的蝴蝶線是否就是$\overleftrightarrow{PQ}$？

設蝴蝶形$BGCE$的蝴蝶線過蝴蝶形中間點$F(0,k)$分別交$\overline{BG}$、$\overline{CE}$於P、Q（圖 5），

由於 F 為 P、Q 中點，可設$P(-a,k-b)$、$Q(a,k+b)$

由圖 3 的計算及$F_y=k$，可得$B\left(-2\sqrt{3},6\right)$、$C(-2,2)$、$E\left(\frac{k}{\sqrt{3}},\frac{k^2}{6}\right)$、$G\left(k,\frac{1}{2}k^2\right)$

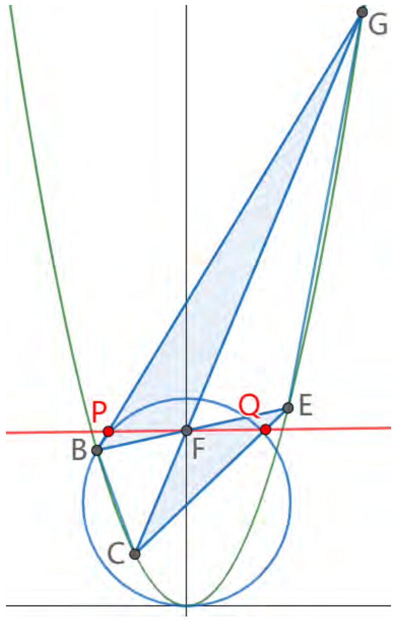


圖 5

$$\begin{cases}\dfrac{G_x-B_x}{G_y-B_y}=\dfrac{B_x-P_x}{B_y-P_y}\\ \dfrac{E_x-C_x}{E_y-C_y}=\dfrac{Q_x-C_x}{Q_y-C_y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{k+2\sqrt{3}}{\frac{k^2}{2}-6}=\dfrac{-2\sqrt{3}-(-a)}{6-(k-b)}\\ \dfrac{\frac{k}{\sqrt{3}}-(-2)}{\frac{k^2}{6}-2}=\dfrac{a-(-2)}{(k+b)-2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2k+4\sqrt{3}}{k^2-12}=\dfrac{a-2\sqrt{3}}{6-k+b}\\ \dfrac{2\sqrt{3}k+12}{k^2-12}=\dfrac{a+2}{k+b-2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12k+24\sqrt{3}-2k^2+2bk-4\sqrt{3}k+4\sqrt{3}b=ak^2-12a-2\sqrt{3}k^2+24\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3}k^2+2\sqrt{3}bk+12k+12b-4\sqrt{3}k-24=ak^2-12a+2k^2-24\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ak^2-12a=2\left(\sqrt{3}-1\right)k^2+\left(12+2b-4\sqrt{3}\right)k+4\sqrt{3}b\_\_⑤\\ ak^2-12a=2\left(\sqrt{3}-1\right)k^2+\left(12+2\sqrt{3}b-4\sqrt{3}\right)k+12b\_\_⑥\end{cases}$$

$$⑥-⑤\Rightarrow\left(2\sqrt{3}-2\right)bk+\left(12-4\sqrt{3}\right)b=0\Rightarrow b\left(k+2\sqrt{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ k=-2\sqrt{3}(\text{不合，因為}k\text{非定值})\ or\ b=0$$

$\therefore P(-a,k)$、$Q(a,k)$，故$\overline{PQ}\parallel x$軸

$\Rightarrow$ 蝴蝶線與x軸平行■

由上述兩個證明可知：

依前述作圖（圖 3）得出的蝴蝶形之蝴蝶線必與 x 軸平行

已經知道在原本限制重重的作圖中，當蝴蝶形中間點在 y 軸上時，蝴蝶線就會平行x軸，於是我們想知道：在任意一個四個頂點都在拋物線上的蝴蝶形中，若蝴蝶形中間點在 y 軸上且有蝴蝶線時，蝴蝶線是否平行x軸？

（二）一般情況：開口朝上的拋物線方程式

作圖（圖 6）

(1) 作拋物線：$y = ax^2 (a > 0)$

(2) 取拋物線上兩點$B(b, ab^2)$、$C(c, ac^2)$

$(0 > c > b)$

(3) 取y軸上一動點$G(0, d)\left(B_y > d > 0\right)$

(4) 作$\overrightarrow{BG}$、$\overrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5) 作$\overrightarrow{HF}$、$\overrightarrow{BC}$分別交x軸於J、K

(6) 作蝴蝶形 $CBFH$ 的蝴蝶線分別交$\overrightarrow{HF}$、$\overrightarrow{BC}$於 P、Q

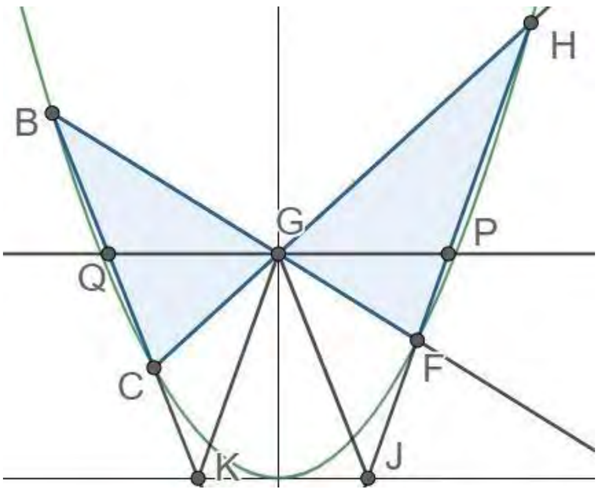


圖 6

$$\frac{F_y - G_y}{F_x - G_x} = \frac{B_y - G_y}{B_x - G_x}$$

$$\Rightarrow \frac{aF_x^2 - d}{F_x} = \frac{ab^2 - d}{b}$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{d}{ab}\text{，}F_y = \frac{d^2}{ab^2}$$

$$\frac{H_y - G_y}{H_x - G_x} = \frac{C_y - G_y}{C_x - G_x}$$

$$\Rightarrow \frac{aH_x^2 - d}{H_x} = \frac{ac^2 - d}{c}$$

$$\Rightarrow H_x = -\frac{d}{ac}\text{，}H_y = \frac{d^2}{ac^2}$$

$\overleftrightarrow{BC}$斜率：$(ab^2 - ac^2) \div (b - c) = a(b + c)$

$\overleftrightarrow{HF}$斜率：$\dfrac{d^2(b^2 - c^2)}{ab^2c^2} \div \dfrac{-d(b - c)}{abc} = \dfrac{-d(b + c)}{bc}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{HF}$方程式：$y = \dfrac{-d(b + c)}{bc}x - \dfrac{d^2}{abc}$

$\Rightarrow$ 再將$y = 0$ 代入得 $J_x = \dfrac{d^2}{abc} \cdot \dfrac{bc}{-d(b + c)} = \dfrac{-d}{a(b + c)}$

$\overleftrightarrow{GJ}$斜率：$d \div \dfrac{d}{a(b + c)} = a(b + c) = \overleftrightarrow{BC}$斜率

$\Rightarrow$ 得$\overleftrightarrow{GJ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$，同理$\overleftrightarrow{GK} \parallel \overleftrightarrow{HF}$

$\because \overline{QG} = \overline{GP}$(蝴蝶線)

$\angle KQG = \angle JGP$(因$\overleftrightarrow{GJ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$)

$\angle QGK = \angle GPJ$(因$\overleftrightarrow{GK} \parallel \overleftrightarrow{HF}$)

$\therefore \triangle QGK \cong \triangle GPJ$($ASA$全等)

故$\triangle QGK$中$\overline{QG}$的高 $= \triangle GPJ$中$\overline{GP}$的高

$\Rightarrow \overline{QP} \parallel x$軸■

因此，圖 6 中的$F\left(-\frac{d}{ab}, \frac{d^2}{ab^2}\right)$、$H\left(-\frac{d}{ac}, \frac{d^2}{ac^2}\right)$，且$\overleftrightarrow{GJ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{GK} \parallel \overleftrightarrow{HF}$、$\overleftrightarrow{PQ} \parallel x$軸

根據此結果，可以得知：若蝴蝶線交蝴蝶形於$\overline{BC}$、$\overline{HF}$，蝴蝶線會平行 x 軸，而當$G_y > B_y$時(圖 7)，顯然通過G且平行x軸的直線不會通過$\overline{BC}$、$\overline{HF}$，而是經過$\overline{BH}$、$\overline{CF}$，因此讓我們懷疑：蝴蝶形$BHCF$的蝴蝶線是否就是此線？

作圖（圖 7）

(1) 作拋物線：$y = ax^2 (a > 0)$

(2) 取拋物線上兩點$B(b, ab^2)$、$C(c, ac^2)$ $(0 > c > b)$

(3) 取y軸上一動點$G(0, d)$$(d > B_y)$

(4) 作$\overrightarrow{BG}$、$\overrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5) 作$\overrightarrow{HB}$與$\overrightarrow{FC}$分別交x軸於N、M

(6) 作蝴蝶形$BHCF$的蝴蝶線分別交$\overrightarrow{FC}$、$\overrightarrow{HB}$於 P、Q

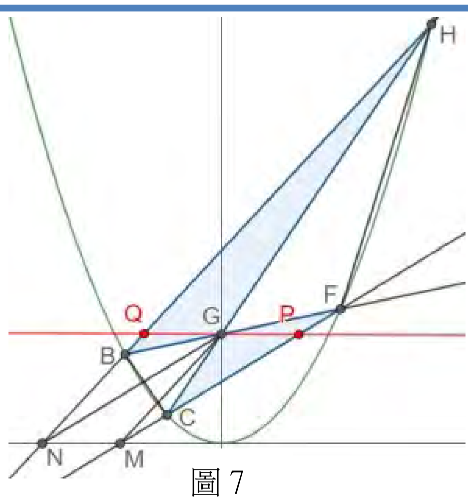


圖 7

圖 6 中，$F\left(\frac{-d}{ab}, \frac{d^2}{ab^2}\right)$、$H\left(\frac{-d}{ac}, \frac{d^2}{ac^2}\right)$

$\overleftrightarrow{BH}$斜率：$\left(ab^2 - \frac{d^2}{ac^2}\right) \div \left[b - \left(-\frac{d}{ac}\right)\right] = \frac{abc - d}{c}$，同理，$\overleftrightarrow{CF}$斜率為$\frac{abc - d}{b}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BH}$方程式：$y = \frac{abc - d}{c}x - \frac{b}{c}(abc - d) + ab^2 = \frac{abc - d}{c}x + \frac{bd}{c}$，

$\Rightarrow$ 再將$y = 0$ 帶入得 $N_x = \frac{-bd}{abc - d}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{NG}$斜率：$d \div \frac{bd}{abc - d} = \frac{abc - d}{b} = \overleftrightarrow{CF}$斜率

$\Rightarrow$ 得$\overleftrightarrow{NG} \parallel \overleftrightarrow{CF}$，同理$\overleftrightarrow{MG} \parallel \overleftrightarrow{BH}$

$\because \overline{QG} = \overline{GP}$(蝴蝶線)

$\angle NQG = \angle MGP$(因$\overleftrightarrow{QN} \parallel \overleftrightarrow{GM}$)

$\angle QGN = \angle GPM$(因$\overleftrightarrow{GN} \parallel \overleftrightarrow{PM}$)

$\therefore \triangle QGN \cong \triangle GPM$($ASA$全等)

故$\triangle QGN$中$\overline{QG}$的高 $=\triangle GPM$中$\overline{GP}$的高

$\Rightarrow \overline{QP} \parallel x$軸■

因此，圖 7 中的$\overleftrightarrow{NG} \parallel \overleftrightarrow{CF}$、$\overleftrightarrow{MG} \parallel \overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{PQ} \parallel x$軸

由以上的作圖（圖 7）可知：只要蝴蝶形中間點在y軸上，則它的蝴蝶線必平行x軸，也就是說，它的蝴蝶線只有一個：平行x軸的直線，換句話說，如果作一條平行x軸且過蝴蝶形中間點的直線，那麼這條直線就是這個蝴蝶形的蝴蝶線。

結論

１. 若蝴蝶形中間點在y軸上，則蝴蝶線平行x軸

２. 若平行x軸的直線L通過蝴蝶形中間點且蝴蝶形中間點在y軸上，則直線L就是蝴蝶線

研究二：尋找二次曲線上之蝴蝶形面積和角度與座標數值之關係

在研究二中，我們分別以a、b表示拋物線與圓方程式的係數，從圓與二次曲線既有的交點著手，繪製出幾種相異的蝴蝶形：

（一） 蝴蝶形在拋物線與圓的重疊圖形上

1. 非對稱蝴蝶形

作圖（圖 8）

(1) 作拋物線: $y = ax^2$、圓: $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ $(a、b > 0)$，得圓心$A(0,b)$及三個交點，取其中位於第二象限的點B

(2) 作 $\overrightarrow{BA}$ 交拋物線於D

(3) 取拋物線上一點$E(k, ak^2)(k<0)$，作$\overrightarrow{EA}$交拋物線於C

(4) 連接$\overline{BE}$、$\overline{CD}$，得蝴蝶形$EBDC$

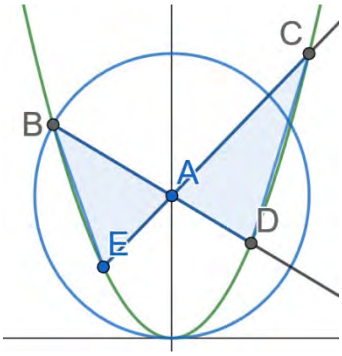


圖 8

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ x^2 + (y-b)^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (ax^2 - b)^2 = b^2 \Rightarrow x^2[a^2x^2 + (1-2ab)] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{2ab-1}}{a} \ or\ 0$$

$$\therefore B\left(\frac{-\sqrt{2ab-1}}{a}, \frac{2ab-1}{a}\right)(2ab-1>0\text{ 時，拋物線與圓才有交點})$$

$$\frac{A_y - B_y}{A_x - B_x} = \frac{D_y - A_y}{D_x - A_x}$$

$$\Rightarrow \frac{b - \frac{2ab-1}{a}}{\frac{\sqrt{2ab-1}}{a}} = \frac{aD_x^2 - b}{D_x}$$

$$\Rightarrow \frac{1-ab}{\sqrt{2ab-1}} = \frac{aD_x^2 - b}{D_x}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2ab-1}D_x{}^2 + (ab-1)D_x - b\sqrt{2ab-1} = 0$$

$$\Rightarrow D_x = \frac{1 - ab \pm (3ab-1)}{2a\sqrt{2ab-1}}$$

$$\Rightarrow D_x = \frac{b}{\sqrt{2ab-1}} or \frac{-4ab+2}{2a\sqrt{2ab-1}}(\text{不合，因值同}B_x)$$

$$\therefore D\left(\frac{b}{\sqrt{2ab-1}}, \frac{ab^2}{2ab-1}\right)$$

$$\frac{C_y - A_y}{C_x - A_x} = \frac{E_y - A_y}{E_x - A_x}$$

$$\Rightarrow \frac{a{C_x}^2 - b}{C_x} = \frac{ak^2 - b}{k}$$

$$\Rightarrow akC_x^2 + (b - ak^2)C_x - bk = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{ak^2 - b \pm (b + ak^2)}{2ak}$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{-b}{ak} \ or \ k\left(不合，因值同E_x\right)$$

$$\therefore \ C(\frac{-b}{ak}, \frac{b^2}{ak^2})$$

得知各點座標後，即可用行列式求面積（圖 8）：

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{\sqrt{2ab-1}} & \frac{-b}{ak} & 0 \\ b & \frac{ab^2}{2ab-1} & \frac{b^2}{ak^2} & b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^3}{ak^2\sqrt{2ab-1}} - \frac{b^2}{ak} - \frac{b^2}{\sqrt{2ab-1}} + \frac{b^3}{k(2ab-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{b^2\sqrt{2ab-1}(b - ak^2) - ab^3k + b^2k}{ak^2(2ab-1)})$$

$$\triangle ABE = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{2ab-1}}{a} & k & 0 \\ b & \frac{2ab-1}{a} & ak^2 & b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-k^2\sqrt{2ab-1} + bk + \frac{b\sqrt{2ab-1}}{a} + \frac{k(1-2ab)}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2ab-1}(b - ak^2) + k}{a} - bk\right]$$

但計算完後發現，得出的面積並不簡潔，所以我們朝其他方向發展。

2. 接圓蝴蝶形

作圖（圖 9）

(1) 作$y = ax^2$、$x^2 + (y-b)^2 = b^2\left(a、b > 0\right)$，得圓心 $A(0, b)$及交點B、C、原點

(2) 作$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CA}$分別交拋物線於 D、E

(3) 連接$\overline{BE}$、$\overline{CD}$，得一左右對稱之蝴蝶形 $EBDC$

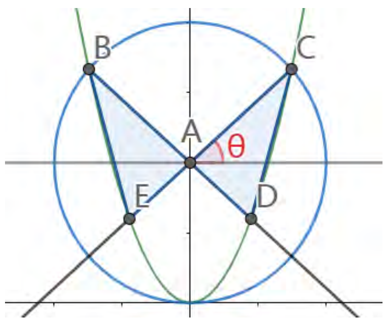


圖 9

圖 8 中，$B\left(\frac{-\sqrt{2ab-1}}{a},\frac{2ab-1}{a}\right)$、$D\left(\frac{b}{\sqrt{2ab-1}},\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$，

因圖形左右對稱，可知$C\left(\frac{\sqrt{2ab-1}}{a},\frac{2ab-1}{a}\right)$、$E\left(\frac{-b}{\sqrt{2ab-1}},\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$

若令$\frac{\angle CAD}{2}=\theta$，則$\tan\theta=\frac{C_y-A_y}{C_x-A_x}=\frac{\frac{2ab-1}{a}-b}{\frac{\sqrt{2ab-1}}{a}}=\frac{\frac{ab-1}{a}}{\frac{\sqrt{2ab-1}}{a}}=\frac{ab-1}{\sqrt{2ab-1}}$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & \frac{b}{\sqrt{2ab-1}} & \frac{\sqrt{2ab-1}}{a} & 0\\ b & \frac{ab^2}{2ab-1} & \frac{2ab-1}{a} & b\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{2ab-1}}\times\frac{2ab-1}{a}+\frac{\sqrt{2ab-1}}{a}\times b-\frac{b}{\sqrt{2ab-1}}\times b-\frac{\sqrt{2ab-1}}{a}\times\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2b\sqrt{2ab-1}}{a}-\frac{2b^2}{\sqrt{2ab-1}}\right)$$

$$=\frac{b(ab-1)}{a\sqrt{2ab-1}}=\frac{b}{a}\tan\theta$$

因左右對稱，得蝴蝶形$EBDC$總面積$=\frac{2b(ab-1)}{a\sqrt{2ab-1}}\ or\ \frac{2b}{a}\tan\theta$

（二） 蝴蝶形在拋物線與橢圓的重疊圖形上

1. 接橢圓蝴蝶形

作圖（圖 10）

(1) 作拋物線: $y=ax^2$橢圓$\frac{x^2}{c^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1(a、b、c>0)$

得橢圓中心$F(0,b)$及交點B、C、原點

(2) 作$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{CF}$分別交拋物線於 D、E

(3) 連接$\overline{BE}$、$\overline{CD}$，得一左右對稱之蝴蝶形 $EBDC$

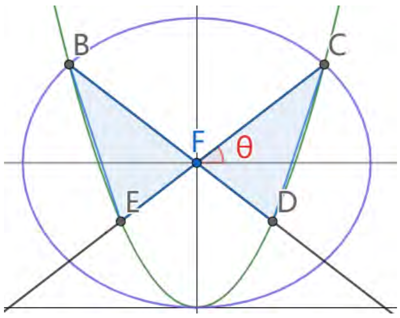


圖 10

$$\begin{cases}y=ax^2\\ \frac{(y-b)^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{(ax^2-b)^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1$$

$$\Rightarrow a^2c^2x^4-2abc^2x^2+b^2c^2+b^2x^2=b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^2c^2x^2=2abc^2-b^2\Rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}\quad\therefore C\left(\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac},\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}\right)$$

由於此作圖為對稱圖形，所以B座標為$\left(-\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac},\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}\right)$

另外，代表平面上符合$2abc^2-b^2>0$時，拋物線與橢圓才會有交點。

$$\frac{D_y-F_y}{D_x-F_x}=\frac{F_y-C_y}{F_x-C_x}\Rightarrow\frac{aD_x^2-b}{D_x}=\frac{b-\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}}{\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}}=\frac{b^2-abc^2}{c\sqrt{2abc^2-b^2}}$$

$$\Rightarrow ac\sqrt{2abc^2-b^2}D_x^2+(abc^2-b^2)D_x-bc\sqrt{2abc^2-b^2}=0$$

判別式 $=(abc^2-b^2)^2+4abc^2(2abc^2-b^2)=(3abc^2-b^2)^2$

$$D_x=\frac{(b^2-abc^2)\pm(3abc^2-b^2)}{2ac\sqrt{2abc^2-b^2}}$$

$$\Rightarrow D_x=\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}}\ or\ -\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}$$(不合，因值同B_x)

$\therefore D$座標為$\left(\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}},\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}\right)$

由於此作圖為對稱圖形，所以E點座標為$\left(\frac{-bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}},\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}\right)$

若令$\frac{\angle CFD}{2}=\theta$，則$\tan\theta=\frac{C_y-F_y}{C_x-F_x}=\left(\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}-b\right)\times\frac{ac}{\sqrt{2abc^2-b^2}}=\frac{b(ac^2-b)}{c\sqrt{2abc^2-b^2}}$

$$\triangle CFD=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & \frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}} & \frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac} & 0\\ b & \frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2} & \frac{2abc^2-b^2}{ac^2} & b\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}}\times\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}+\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}\times b-\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}}\times b-\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}\times\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}+\frac{b\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac}-\frac{b^2c}{\sqrt{2abc^2-b^2}}-\frac{b^2c}{\sqrt{2abc^2-b^2}}\right)$$

$$=\frac{b(2abc^2-b^2)-ab^2c^2}{ac\sqrt{2abc^2-b^2}}=\frac{ab^2c^2-b^3}{ac\sqrt{2abc^2-b^2}}=\frac{b^2(ac^2-b)}{ac\sqrt{2abc^2-b^2}}=\frac{b}{a}\tan\theta$$

因左右對稱，得蝴蝶形$EBDC$總面積 $=\frac{2b^2(ac^2-b)}{ac\sqrt{2abc^2-b^2}}\ or\ \frac{2b}{a}\tan\theta$

（三） 蝴蝶形在拋物線上

1. 任兩點蝴蝶形

現在把條件簡化成拋物線上任意兩點與蝴蝶形中間點在y軸：

作圖（圖 11）

(1) 在拋物線: $y = ax^2(a > 0)$上任取二點

$A(b, ab^2)$、$B(c, ac^2)$，且$b < c < 0$

(2) 以y軸為對稱軸作$A'(-b, ab^2)$、$B'(-c, ac^2)$

(3) 連接$\overline{BA}$、$\overline{AB'}$、$\overline{B'A'}$、$\overline{A'B}$，得一蝴蝶形$BAB'A'$

(4) 設$\overline{AB'}$、$\overline{A'B}$交於C

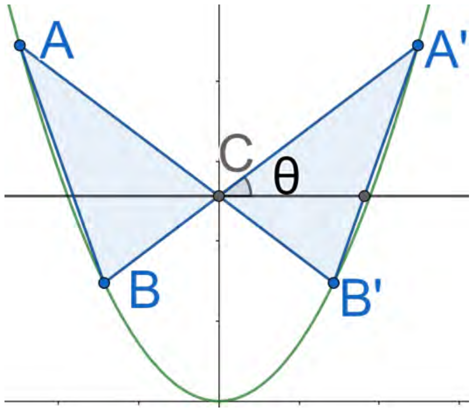


圖 11

$$\frac{C_y - B_y}{C_x - B_x} = \frac{B_y - A'_y}{B_x - A'_x}$$

$$\Rightarrow (C_y - B_y)(B_x - A'_x) = (C_x - B_x)(B_y - A'_y)$$

$$\Rightarrow (C_y - ac^2)[c - (-b)] = (-c)(ac^2 - ab^2)$$

$$\Rightarrow C_y = abc = aA_xB_x \qquad \therefore C(0, abc)$$

若令$\dfrac{\angle A'CB'}{2} = \theta$，

則$$\tan\theta = \left|\frac{A'_y - C_y}{A'_x}\right| = \left|\frac{ab^2 - abc}{-b}\right| = |ac - ab| = |a(c - b)| = a(c - b) = a(B_x - A_x)$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & b & c & 0 \\ abc & ab^2 & ac^2 & abc \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(abc^2 + abc^2 - ab^2c - ab^2c)$$

$$= abc(c - b) = aA_xB_x(B_x - A_x) = A_xB_x\tan\theta$$

$\therefore$ 蝴蝶形$BAB'A'$總面積 $= 2aA_xB_x(B_x - A_x)$ or $2A_xB_x\tan\theta$

（四） 雙曲線上的對稱蝴蝶形

1. 接雙曲線蝴蝶形 I

作圖（圖 12）

(1) 在$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a、b>0)$上任取二點$A$、$B$，

且A_x、$B_x<0$、$B_y<A_y$

(2) 以 y軸為對稱軸作 A'、B'

(3) 連接$\overline{BA}$、$\overline{AB'}$、$\overline{B'A'}$、$\overline{A'B}$，得一蝴蝶形$BAB'A'$

(4) 設$\overline{AB'}$、$\overline{A'B}$交於C

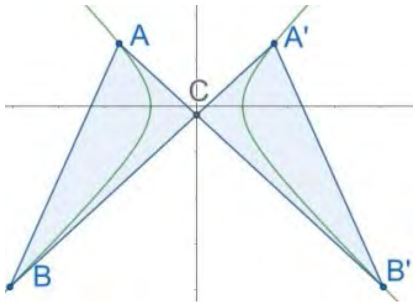


圖 12

由$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得$|x|=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}$，若令$A_y=A'_y=c$、$B_y=B'_y=d$，

則座標可表示為：

$A\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2},c\right)$ 、$A'\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2},c\right)$ 、$B\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2},d\right)$ 、$B'\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2},d\right)$

$$\overleftrightarrow{A'B}\text{斜率}=\frac{A'_y-B_y}{A'_x-B_x}=\frac{c-d}{\frac{a}{b}(\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2})}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{A'B}\text{方程式}：y=\frac{c-d}{\frac{a}{b}(\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2})}x-(c-d)\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}}+c$$

$\Rightarrow$ 將$x=0$ 代入可得：

$$C_y=\frac{d\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}$$

若令$\frac{\angle A'CB'}{2}=\theta$,則$\tan\theta=\frac{A'_y-B_y}{A'_x-B_x}=\frac{A'_y-B'_y}{A'_x+B'_x}$

$$\triangle CB'A'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & B'_x & A'_x & 0\\ \frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x} & B'_y & A'_y & \frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[B'_xA'_y-A'_xB'_y+(A'_x-B'_x)\frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}\right]$$

$$=\frac{A'_xB'_x(A'_y-B'_y)}{A'_x+B'_x}=A'_xB'_x\tan\theta$$

2. 接雙曲線蝴蝶形Ⅱ

作圖（圖 13）

(1) 在$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a、b>0)$上任取二點$A$、$B$，

且A、B分別位於第二、三象限

(2) 以y軸為對稱軸作 A'、B'

(3) 連接$\overline{BA}$、$\overline{AB'}$、$\overline{B'A'}$、$\overline{A'B}$，得一蝴蝶形$BAB'A'$

(4) 設$\overline{AB'}$、$\overline{A'B}$交於C

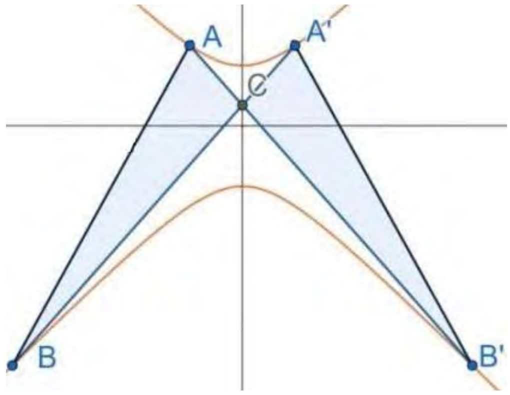


圖 13

由$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 得$|y|=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+x^2}$，若令$A_x=c$、$A'_x=-c$、$B_x=d$、$B'_x=-d$，

則座標可表示為：

$$A\left(c,\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2}\right)、A'\left(-c,\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2}\right)、B\left(d,-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2}\right)、B'\left(-d,-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2}\right)$$

$$\overleftrightarrow{A'B}\text{斜率}=\frac{A'_y-B_y}{A'_x-B_x}=\frac{\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2}-\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2}\right)}{-c-d}=\frac{-\frac{a}{b}\left(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}\right)}{c+d}$$

$$\Rightarrow\overleftrightarrow{A'B}\text{方程式：}y=\frac{-\frac{a}{b}\left(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}\right)}{c+d}x-\frac{\frac{ac}{b}\left(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}\right)}{c+d}+\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow\text{將}x=0\text{ 代入可得：}C_y=\frac{\frac{a}{b}\left(-c\sqrt{b^2+c^2}-c\sqrt{b^2+d^2}+c\sqrt{b^2+c^2}+d\sqrt{b^2+c^2}\right)}{c+d}$$

$$=\frac{\frac{a}{b}\left(d\sqrt{b^2+c^2}-c\sqrt{b^2+d^2}\right)}{c+d}=\frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}$$

$$\text{若令}\frac{\angle A'CB'}{2}=\theta,\text{則}\tan\theta=\frac{A'_y-B_y}{A'_x-B_x}=\frac{A'_y-B'_y}{A'_x+B'_x}$$

$$\triangle CB'A'=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & B'_x & A'_x & 0\\ \frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x} & B'_y & A'_y & \frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[B'_xA'_y-A'_xB'_y+(A'_x-B'_x)\frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}\right]$$

$$=\frac{A'_xB'_x\left(A'_y-B'_y\right)}{A'_x+B'_x}=A'_xB'_x\tan\theta$$

除了非對稱蝴蝶形以外，其餘作圖皆為對稱的蝴蝶形，且以座標數值表示得出的結果相似，

所以我們去除二次曲線的限制，直接在座標平面作圖，得出一個簡潔的結論：

1. 如圖 14，並以 A、B的座標數值直接計算：

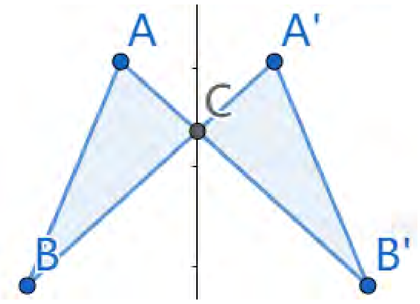


圖 14

$$\frac{A_y - C_y}{A_x - 0} = \frac{C_y - B'_y}{0 - B'_x}$$

$$\Rightarrow (A_y - C_y)(-B'_x) = A_x(C_y - B'_y)$$

$$\Rightarrow -A_xC_y + B'_xC_y = -A_xB'_y + A_yB'_x$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{A_yB'_x - A_xB'_y}{-A_x + B'_x}$$

$$= \frac{-A_xB_y - A_yB_x}{-(A_x + B_x)} \left(因B'_x = -B_x、B'_y = B_y\right) = \frac{A_xB_y + A_yB_x}{A_x + B_x}$$

$$\therefore C\left(0, \frac{A_xB_y + A_yB_x}{A_x + B_x}\right)$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & A_x & B_x & 0 \\ \frac{A_xB_y + A_yB_x}{A_x + B_x} & A_y & B_y & \frac{A_xB_y + A_yB_x}{A_x + B_x} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[A_xB_y + \frac{B_x(A_xB_y + A_yB_x)}{A_x + B_x} - \frac{A_x(A_xB_y + A_yB_x)}{A_x + B_x} - B_xA_y\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{{A_x}^2B_y + 2A_xB_xB_y + {B_x}^2A_y - {A_x}^2B_y - 2A_xB_xA_y + {B_x}^2A_y}{A_x + B_x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2A_xB_xB_y - 2A_xB_xA_y}{A_x + B_x}\right)$$

$$= A_xB_x \cdot \frac{B_y - A_y}{A_x + B_x}$$

$\therefore$ 蝴蝶形$BAB'A'$ 總面積 $= 2A_xB_x \cdot \dfrac{B_y - A_y}{A_x + B_x}$

2. 如圖 15，令蝴蝶形 $BAB'A'$內夾角為2θ，

且同樣以 A、B的座標數值計算：

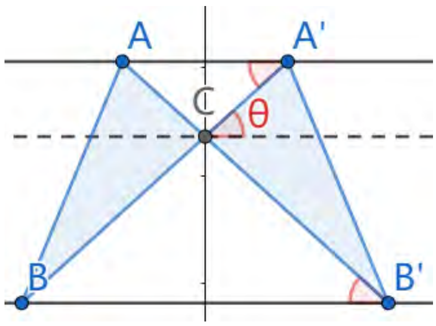


圖 15

$$\tan\theta = \frac{A'_y - C_y}{A'_x - 0} = \frac{A_y - \frac{A_xB_y + A_yB_x}{A_x + B_x}}{-A_x}$$

$$= \frac{A_xA_y + A_yB_x - A_xB_y - A_yB_x}{-A_x(A_x + B_x)}$$

$$= \frac{A_x(A_y - B_y)}{-A_x(A_x + B_x)} = \frac{B_y - A_y}{A_x + B_x}$$

$$\triangle ABC = A_xB_x \cdot \frac{B_y - A_y}{A_x + B_x} = A_xB_x \cdot \tan\theta$$

$\therefore$ 蝴蝶形$BAB'A'$ 總面積 $= 2A_xB_x \cdot \tan\theta$

結論

在座標平面上作一對稱軸為y軸的對稱蝴蝶形，其面積可以表示成：

1. $\left|2\times\text{兩點}x\text{座標之積}\times\frac{\text{兩點}x\text{座標之差}}{\text{兩點}x\text{座標之和}}\right|$

2. $\left|2\times\text{兩點}x\text{座標之積}\times tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right|$

研究三：拋物線上蝴蝶形之邊長與y軸上蝴蝶形中間點之關係

經研究一的計算後得圖 3 的$E\left(\frac{1}{\sqrt{3}}F_y,\frac{1}{6}{F_y}^2\right)$、$G\left(F_y,\frac{1}{2}{F_y}^2\right)$，觀察後可發現 $G_y：E_y=3：1$，讓我們提出疑問：若圖形上 B、C為定點，F為y軸上動點，F、E、G座標關係是否會因 F 改變而異動？

作圖（圖 16）

(1) 作拋物線：$y=ax^2(a>0)$

(2) 取拋物線上兩點$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)(0>c>b)$，

取y軸上一動點$F(0,d)(d>0)$

(3) 作$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{CF}$分別交拋物線於E、G

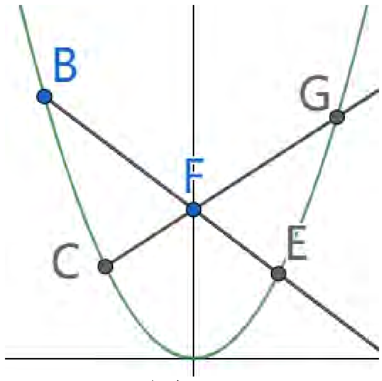


圖 16

$$\frac{E_y-F_y}{E_x-F_x}=\frac{B_y-F_y}{B_x-F_x}$$

$$\Rightarrow\frac{a{E_x}^2-d}{E_x}=\frac{ab^2-d}{b}$$

$$\Rightarrow ab{E_x}^2+(d-ab^2)E_x-bd=0$$

$$\Rightarrow E_x=\frac{ab^2-d\pm(d+ab^2)}{2ab}(\text{取}-\text{，因取}+\text{時值為}B_x)=\frac{-d}{ab}$$

$$\therefore\ E(\frac{-d}{ab},\frac{d^2}{ab^2})$$

依此同理求 G座標，得$G(\frac{-d}{ac},\frac{d^2}{ac^2})$

即可推得F、E、G 座標關係：

$$F_y : E_x : E_y : G_x : G_y = d : \frac{-d}{ab} : \frac{d^2}{ab^2} : \frac{-d}{ac} : \frac{d^2}{ac^2} = ab^2c^2 : -bc^2 : c^2d : -b^2c : b^2d$$

故F、E、G坐標關係會因F改變而異動。

但$F_y : E_x : G_x = ab^2c^2 : -bc^2 : -b^2c$、$E_y : G_y = c^2 : b^2$，兩關係不隨$G$改變而異動。

因G、F、C共線和B、F、E共線，運用平行線截比例線段的性質，可得出：

$$\overline{GF} : \overline{FC} = (G_x - F_x) : (F_x - C_x) = G_x : -C_x = \frac{-d}{ac} : -c = \frac{d}{ac^2}$$

$$\overline{EF} : \overline{FB} = (E_x - F_x) : (F_x - B_x) = E_x : -B_x = \frac{-d}{ab} : -b = \frac{d}{ab^2}$$

由上可知：若B、C為固定點且F為y軸上動點，必滿足$\frac{\overline{GF}}{\overline{FC}} \propto \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} \propto \overline{FO}$

結論

在拋物線上作任意蝴蝶形，只要蝴蝶形中點位於 y 軸，左右兩個三角形上過同一直線的邊長之比值會與蝴蝶形中點的y座標數值成正比

研究四：尋找拋物線上蝴蝶形兩外邊延長而得的交點與蝴蝶形中間點之關係

在研究二中的任兩點蝴蝶形(圖 11)中，我們可以發現（圖 17）：

若作$\overleftrightarrow{A'B'} : y = -a(b+c)x - abc$、$\overleftrightarrow{AB} : y = a(b+c)x - abc$

$(a > 0$、$b < c < 0)$，其中a為拋物線二次項係數、b為A_x、c為B_x，

則兩直線交於一點$D(0, -abc)$，又在研究二時計算出$C(0, abc)$，

因此可推得：D和C到x軸的距離相等。

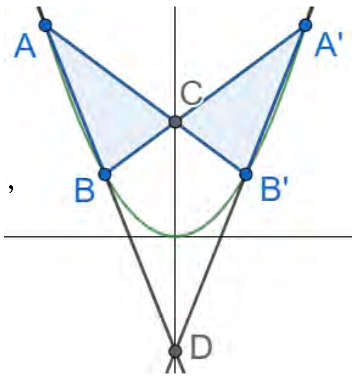


圖 17

如果延長任兩點蝴蝶形兩外邊(即$\overline{AB}$、$\overline{A'B'}$)，其交點與蝴蝶形中間點到 x 軸距離相等(即$|C_y| = |D_y|$)。我們一開始認為是因為任兩點蝴蝶形對稱，而兩外邊延長所得出的交點一定在 y 軸上，才能使得此關係成立，故我們仿研究一圖 6 的作圖方式使得兩外邊延長而得的交點不在 y 軸，進而驗證我們的假設是否成立。

作圖（圖 18）

(1) 作拋物線：$y = ax^2(a > 0)$

(2) 取拋物線上兩點$B(b, ab^2)$、$C(c, ac^2)(0 > c > b)$

(3) 取 y 軸上一動點 $G(0, d)(d > 0)$

(4) 作$\overrightarrow{BG}$、$\overrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5) 作$\overleftrightarrow{HF}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於I

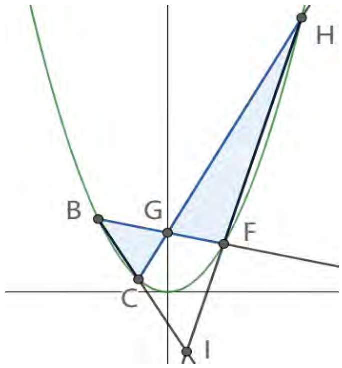


圖 18

圖 6 中，$F\left(\frac{-d}{ab}, \frac{d^2}{ab^2}\right)$、$H\left(\frac{-d}{ac}, \frac{d^2}{ac^2}\right)$

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{BC}\text{方程式：}y = a(b+c)x - abc \text{\_①} \\ \overleftrightarrow{HF}\text{方程式：}y = \dfrac{-d(b+c)}{bc}x - \dfrac{d^2}{abc}\text{\_②} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ① - ②：\left[a(b+c) + \frac{d(b+c)}{bc}\right]x - abc + \frac{d^2}{abc} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{abc - \frac{d^2}{abc}}{a(b+c) + \frac{d(b+c)}{bc}} = \frac{abc - d}{a(b+c)}$$

再代入①得$y = -d$ $\Rightarrow I\left(\frac{abc - d}{a(b+c)}, -d\right)$ $\therefore |G_y| = |I_y| = d$

經由上述證明可知，蝴蝶形中間點在 y 軸上時，即使交點(圖 18 中的 I 點)不在 y 軸，交點與蝴蝶形中間點到 x 軸距離相等。

在圖 18 中，我們將 $\overline{BC}$、$\overline{HF}$ 延長，得到 I 與 G 的關係，另外，我們也試著將 $\overline{BH}$、$\overline{CF}$ 延長，觀察其交點與 G 點的關係。

作圖（圖 19）

(1) 作拋物線：$y = ax^2(a > 0)$

(2) 取拋物線上兩點$B(b, ab^2)$、$C(c, ac^2)(0 > c > b)$

(3) 取 y 軸上一動點 $G(0, d)(d > 0)$

(4) 作$\overrightarrow{BG}$、$\overrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5) 作$\overleftrightarrow{HB}$、$\overleftrightarrow{FC}$交於L

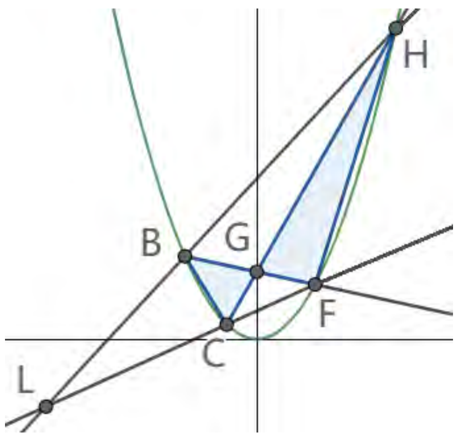


圖 19

由圖 6 可知：$H\left(\frac{-d}{ac},\frac{d^2}{ac^2}\right)$、$F\left(\frac{-d}{ab},\frac{d^2}{ab^2}\right)$

$\overleftrightarrow{HB}$斜率：$\frac{B_y-H_y}{B_x-H_x}=\frac{a^2b^2c^2-d^2}{ac^2}\div\frac{abc+d}{ac}=\frac{abc-d}{c}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{HB}$方程式：$y=\frac{abc-d}{c}x-\frac{b}{c}(abc-d)+ab^2$

$\Rightarrow y=\frac{abc-d}{c}x+\frac{bd}{c}$

$\Rightarrow (abc-d)x=cy-bd$__①

同理，$\overleftrightarrow{FC}$斜率 $=\frac{abc-d}{b}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{FC}$方程式：$y=\frac{abc-d}{b}x+\frac{cd}{b}$

$\Rightarrow (abc-d)x=by-cd$__②

由①、②可得：$cL_y-bd=bL_y-cd$

$\Rightarrow (c-b)L_y=bd-cd\Rightarrow L_y=-d$再代入①

$\Rightarrow (abc-d)x=-bd-cd\Rightarrow L_x=\frac{-d(b+c)}{abc-d}$

$\Rightarrow L\left(\frac{-d(b+c)}{abc-d},-d\right)\quad \therefore |G_y|=|L_y|=d$

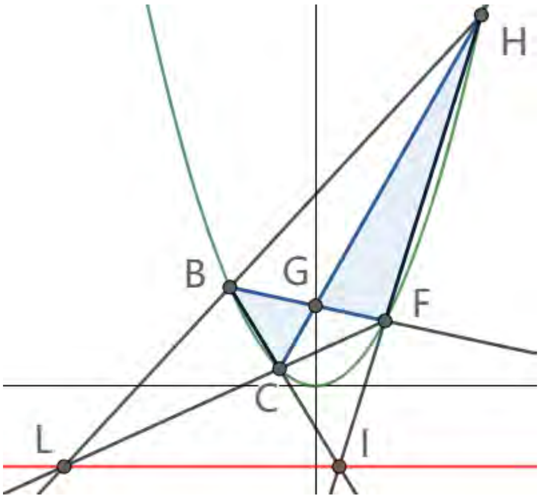


圖 20

將圖 18 及圖 19 作圖結合後，可以得到圖 20，

而由圖 18 的計算結果可得$I\left(\frac{abc-d}{a(b+c)},-d\right)$

故$\overleftrightarrow{LI}$為一條平行x軸的直線

結論

1. 在拋物線$y=ax^2$上作一蝴蝶形，且蝴蝶形中間點y軸上，則此蝴蝶形的兩外邊延長而得的交點到x軸的距離與蝴蝶形中間點到x軸的距離相等
2. 在拋物線$y=ax^2$上作一蝴蝶形，且蝴蝶形中間點y軸上，則包含此蝴蝶形的凸四邊形，兩組對邊延長而得的兩個交點連線會平行x軸

而我們也試著將拋物線上蝴蝶形與其他二次曲線疊合，再將兩外邊延長：

作圖（圖 21）

(1) 作橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(a、b>0\right)$、拋物線：$y=cx^2(c>0)$

(2) 設雙曲線與拋物線交於第二象限的 A、B、第一象限的 A'、B'，且$A'_x>B'_x$、$A_x<B_x$

(3) 連接$\overline{AB}$、$\overline{BA'}$、$\overline{A'B'}$、$\overline{B'A}$，得蝴蝶形$ABA'B'$及蝴蝶形中間點C

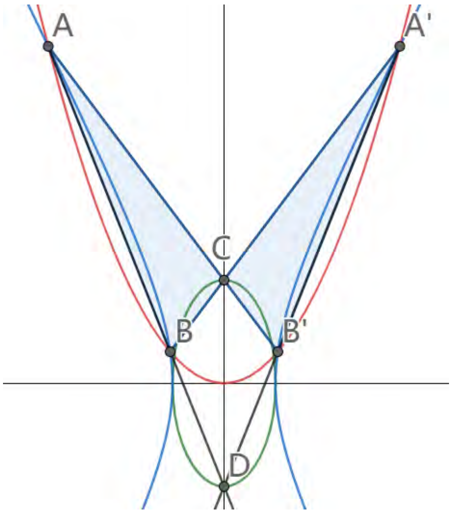


圖 21

我們使用 *GeoGebra* 繪製圖形後發現：無論 a、b、c 數值怎麼改變，只要能產生蝴蝶形 $ABA'B'$，蝴蝶形中間點與兩外邊延長而得的交點會在橢圓上

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=cx^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ x^2=\dfrac{y}{c}\end{cases}\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{a^2c}+1=0\Rightarrow y=\frac{\frac{1}{a^2c}\pm\sqrt{\frac{1}{a^4c^2}-\frac{4}{b^2}}}{\frac{2}{b^2}}$$

若令$\sqrt{\dfrac{1}{a^4c^2}-\dfrac{4}{b^2}}=h$，則$y=\dfrac{\frac{1}{a^2c}\pm h}{\frac{2}{b^2}}$，再將此式代入$y=cx^2$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}\pm b^2h}{2c}}\ \therefore A'\left(\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}+b^2h}{2c}},\frac{\frac{1}{a^2c}+h}{\frac{2}{b^2}}\right)、B'\left(\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}-b^2h}{2c}},\frac{\frac{1}{a^2c}-h}{\frac{2}{b^2}}\right)$$

由圖 11 的性質可知：

$$C_y=cA_xB_x=cA'_xB'_x=c\cdot\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}+b^2h}{2c}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}-b^2h}{2c}}=c\sqrt{\frac{\frac{b^4}{a^4c^2}-b^4h^2}{4c^2}}$$

$$=c\sqrt{\frac{\frac{b^4}{a^4c^2}-b^4\left(\frac{1}{a^4c^2}-\frac{4}{b^2}\right)}{4c^2}}=c\cdot\frac{b}{c}=b$$

而由上文中的性質得知$\left|C_y\right|=\left|D_y\right|$，故$C(0,b)$、$D(0,-b)$

$\therefore C$、D皆在橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上■

結論

在座標平面上，作橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a、b>0\right)$、拋物線：$y=cx^2(c>0)$，由拋物線與雙曲線產生的四個交點作一左右對稱的蝴蝶形中，蝴蝶形中間點與兩外邊延長而得的交點皆在橢圓上

研究五：尋找圓與拋物線之重疊圖形上的對稱蝴蝶形中，特定線段長度與點座標數值之關係

計算完接圓蝴蝶形的面積後，試著計算各邊邊長，其中$\overline{AD}$具有特殊的性質：（圖 22）

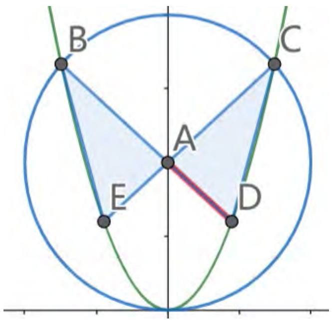


圖 22

圖 9 中，$A(0,b)$、$D\left(\frac{b}{\sqrt{2ab-1}},\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$

$$\overline{AD}=\sqrt{(D_x-A_x)^2+\left(D_y-A_y\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{2ab-1}+\frac{(ab^2-2ab^2+b)^2}{(2ab-1)^2}}$$

$$=\frac{b}{2ab-1}\sqrt{(1-ab)^2+2ab-1}=\frac{ab^2}{2ab-1}$$

因此，在圖 22 的接圓蝴蝶形作圖中，$\overline{AD}$與D_y相等

試圖以幾何方式說明兩線段相等時，我們發現拋物線有以下的特殊關係：

作拋物線：$y=ax^2$，再作一條割線交其於(b,ab^2)、(c,ac^2)，則：

割線斜率：$(ab^2-ac^2)\div(b-c)=a(b+c)$

$\Rightarrow$ 割線方程式：$y=a(b+c)x-abc$

再將$x=0$ 代入割線方程式得$y=-abc$

因此，若一條拋物線$(y=ax^2)$的割線交其於(b,ab^2)、(c,ac^2)，

則此割線與 y 軸交於 $(0,-abc)$

我們可以再將其作延伸：

作圖（圖 23）

(1) 作拋物線$y=ax^2(a>0)$

(2) 取$O(0,0)$、拋物線上一點A、y軸上一點$B\left(B_y>0\right)$

(3) 作$\overleftrightarrow{AB}$交拋物線於C

(4) 作 A、C在x軸上的投影點A'、C'

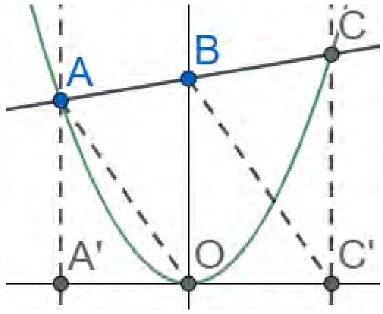


圖 23

割線$\overleftrightarrow{AC}$交y軸於B，故可由上述性質得出：

$B_y=-aA_xC_x\Rightarrow\overline{BO}=a\overline{A'O}\times\overline{OC'}$

又$A_y=aA_xA_x\ \ \Rightarrow\overline{AA'}=a\overline{A'O}\times\overline{A'O}$

$\Rightarrow\overline{AA'}:\overline{BO}=\overline{A'O}:\overline{OC'}$

在$\triangle AA'O$和$\triangle BOC'$中

$\because\overline{AA'}:\overline{BO}=\overline{A'O}:\overline{OC'}$

$\angle AA'O=90°=\angle BOC'$

$\therefore\triangle AA'O\sim\triangle BOC'$ (SAS相似)

故$\angle AOA'=\angle BC'O$ (對應角相等)

$\Rightarrow\overleftrightarrow{BC'}\,//\overleftrightarrow{AO}$ (同位角相等)

在$\triangle ABO$和$\triangle BCC'$中

$\because\angle ABO=\angle BCC'$ (因$\overleftrightarrow{BO}\,//\overleftrightarrow{CC'}$，同位角相等)

$\angle BAO=\angle CBC'$ (因$\overleftrightarrow{AO}\,//\overleftrightarrow{BC'}$，同位角相等)

$\therefore\triangle ABO\sim\triangle BCC'$ (AA相似)

由此可知$\overline{AB}:\overline{BO}=\overline{BC}:\overline{CC'}$

因此，在此作圖中，$\overleftrightarrow{BC'}\,//\overleftrightarrow{AO}$且$\overline{AB}:\overline{BO}=\overline{BC}:\overline{CC'}$

將此結果套用在接圓蝴蝶形(圖 24)上，可發現

當$\overline{BA}=\overline{AO}$ (圓半徑等長)，則$\overline{AD}=\overline{DD'}=D_y$

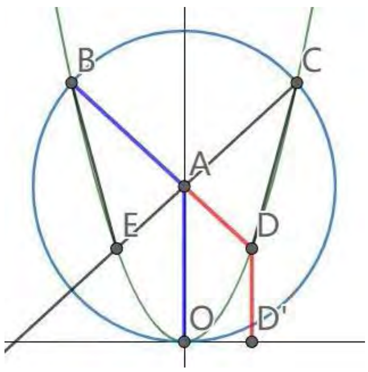


圖 24

因為在接圓蝴蝶形中發現$\overline{AD}=D_y$，我們想知道在接橢圓蝴蝶形上此性質是否成立？

圖 10 中，$F(0,b)$、$D\left(\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}},\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}\right)$

$$\overline{DF}=\sqrt{(D_x-F_x)^2+\left(D_y-F_y\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}}\right)^2+\left(\frac{ab^2c^2-2ab^2c^2+b^3}{2abc^2-b^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2c^2}{2abc^2-b^2}+\left[\frac{b^2(b-ac^2)}{2abc^2-b^2}\right]^2}$$

$$=\frac{\sqrt{bc^2(2ac^2-b)+(b^2-abc^2)^2}}{2ac^2-b}\neq\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}$$

$\therefore\ \overline{DF}\neq D_y$，故在橢圓圖形上此性質不成立。

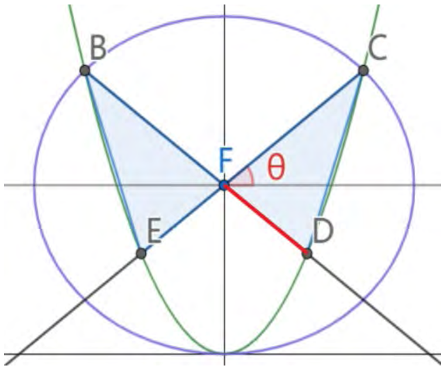


圖 25

研究六：尋找拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍面積之關係

在計算蝴蝶形面積的過程中，我們注意到弧線與直線所形成的圖形，如圖 26 中的藍色部分，用積分計算此面積：

已知拋物線為$y=ax^2$、θ 為$\frac{\angle BAC}{2}$ 、$\tan\theta=a(C_x-B_x)$、

$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$

由B、C座標可得$\overleftrightarrow{BC}$方程式：$y=a(B_x+C_x)x-aB_xC_x$

$$\text{面積}=\int_{B_x}^{C_x}(-ax^2+a(B_x+C_x)\,x-aB_xC_x)\,dx$$

$$=\left(\frac{-ac^3}{3}+\frac{a(b+c)c^2}{2}-abc^2\right)-\left(\frac{-ab^3}{3}+\frac{a(b+c)b^2}{2}-ab^2c\right)$$

$$=\frac{a(c-b)(-2b^2-2bc-2c^2+3c^2+6bc+3b^2-6bc)}{6}$$

$$=\frac{a(c-b)^3}{6}$$

$$=\frac{a(C_x-B_x)^3}{6}=\frac{1}{6a^2}\tan^3\theta$$

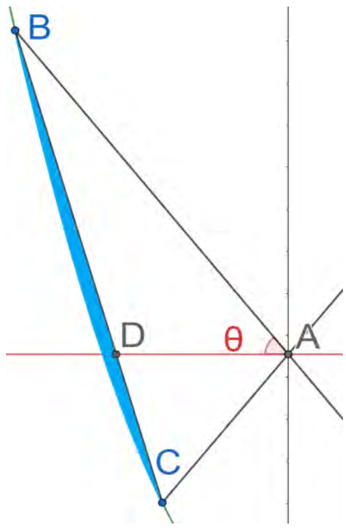


圖 26

結論

在座標平面上，拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍成的圖形，其面積可以表示成：

1．$\frac{1}{6} \times \left|(\text{拋物線二次項係數}) \times (\text{兩點}x\text{座標之差})^3\right|$

2．$\frac{1}{6} \times \left|\frac{1}{(\text{拋物線二次項係數})^2} \times \left(tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right)^3\right|$

伍、結論

一、　在頂點皆於拋物線上的蝴蝶形中：

（一）　若蝴蝶形中間點在y軸上，則蝴蝶線平行x軸

（二）若平行x軸的直線L通過蝴蝶形中間點且蝴蝶形中間點在y軸上，則直線L就是蝴蝶線

二、　在座標平面上作一對稱軸為y軸的對稱蝴蝶形，其面積可以表示成：

（一）　$\left|2 \times \text{兩點}x\text{座標之積} \times \frac{\text{兩點}x\text{座標之差}}{\text{兩點}x\text{座標之和}}\right|$

（二）　$\left|2 \times \text{兩點}x\text{座標之積} \times tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right|$

三、　在拋物線上作任意蝴蝶形，只要蝴蝶形中點位於 y 軸，左右兩個三角形上過同一直線的邊長之比值會與蝴蝶形中點的y座標數值成正比。

四、　（一）　在拋物線$y = ax^2$上作一蝴蝶形，且蝴蝶形中間點y軸上，則此蝴蝶形的兩外邊延長而得的交點到x軸的距離與蝴蝶形中間點到x軸的距離相等。

（二）　在橢圓：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$、雙曲線：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a、b > 0)$、拋物線：$y = cx^2(c > 0)$，無論 a、b、c 數值怎麼改變，雙曲線和拋物線所產生的蝴蝶形，蝴蝶形中間點與兩外邊延長而得的交點皆會在橢圓上。

五、　在接圓蝴蝶形上，可發現蝴蝶形中間點到拋物線上非圓跟拋物線交點的頂點，其距離與頂點的y座標數值相同。

六、　在座標平面上，拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍成的圖形，其面積可以表示成：

（一）　$\frac{1}{6} \times \left|(\text{拋物線二次項係數}) \times (\text{兩點}x\text{座標之差})^3\right|$

（二）　$\frac{1}{6} \times \left|\frac{1}{(\text{拋物線二次項係數})^2} \times \left(tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right)^3\right|$

陸、未來展望

我們希望在未來可以對拋物線上的蝴蝶形作更廣泛的討論，像在非對稱蝴蝶形上作更進一步的研究，並討論蝴蝶形中間點不在y軸的情況。

柒、參考資料及其他

一、 張華恩、吳尚澂、葉承恩（2015）。**正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究**。中華民國第55 屆中小學科學展覽會，台南市。

二、 ej0cl6（2009 年 1 月 30 日）。[幾何定理]蝴蝶定理【部落格文字資料】。取自 http://ej0cl6.pixnet.net/blog/post/25673414-%5B%E5%B9%BE%E4%BD%95%E5%AE%9A%E7%90%86%5D%E8%9D%B4%E8%9D%B6%E5%AE%9A%E7%90%86

三、 Weisstein, Eric W.（2019 年 5 月 24 日）。Butterfly theorem【線上論壇】。取自 http://mathworld.wolfram.com/ButterflyTheorem.html?fbclid=IwAR0PYJzzkMon5FLfYogXXm1R_PYWpp7eCGUjs3OHQuiCo8VAnczt8YZNmmU

四、 王銳騰（2019 年 4 月 10 日）。圓錐曲線蝴蝶定理及以其為構型的題目選講【線上論壇】。取自 https://read01.com/MJe2KK7.html?fbclid=IwAR0rLf8QoAdQUIAecn6F_1wuwsXgC_bhTdJC1pZTTuf1eRv2aJ8DQXqQyV0#image-5

【評語】050409

作品內容主要是探討二次曲線之「拋物線」圖形，並在分項中，分別加入雙曲線、圓、橢圓等三種圖形，建議作品可以呈現多種二次曲線之結合圖形，以符合主題名稱「二次曲線」。作品呈現多為「對稱型」的蝴蝶形線之探討結果，但實驗記錄中有詳細的書寫「非對稱型」之研究產出，卻沒有展示出來，建議可以在研究報告中展現此努力的成果，這會是此報告之特色亮點所在。建議也可以考慮更深入的問題，如：蝴蝶線是唯一的嗎？給定一條平行於 x 軸，可不可以求做出所有的蝴蝶形以這條直線為蝴蝶線嗎？

作品海報

壹、研究動機

之前在網路上看到全國科展第55屆的參展作品：〈正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究〉，討論蝴蝶定理在正方形內的推廣，引起我們對這方面的興趣。但在搜尋的過程中，我們發現大部分資料主要在講述蝴蝶形的邊長的特性，並無對面積的討論，因此我們想對蝴蝶形面積進行更進一步的研究。以普通高級中學課程綱要中數學科課程綱要內容為我們推論工具，希望能讓多數高中程度的學生均能了解我們的發現。

貳、研究目的

一、尋找蝴蝶形中間點位置與蝴蝶線的關係

二、拋物線上蝴蝶形之邊長與y軸上蝴蝶形中間點之關係

三、尋找二次曲線上之蝴蝶形面積和角度與座標數值之關係

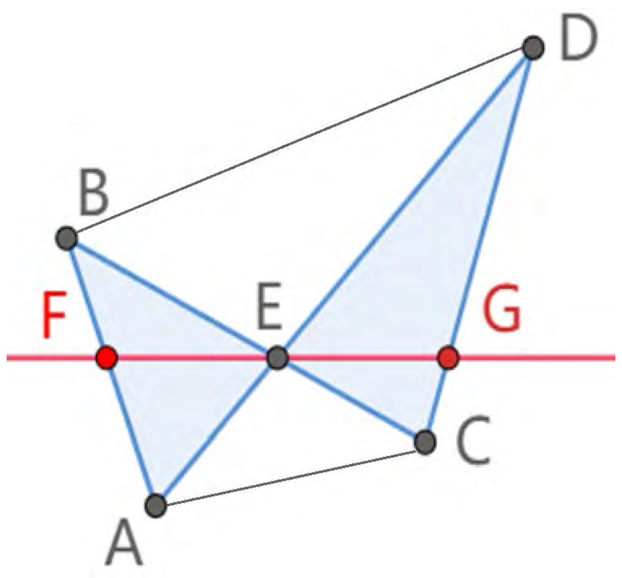
四、尋找圓與拋物線之重疊圖形上的對稱蝴蝶形中，特定線段長度與點座標數值之關係

五、尋找拋物線上蝴蝶形兩外邊延長而得的交點與蝴蝶形中間點之關係

六、尋找拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍面積之關係

參、名詞定義

一、任意凸四邊形的對角線相連，所產生四個三角形中，取兩個不相鄰的三角形為蝴蝶形。且以四條組成蝴蝶形的線段命名，如圖中為蝴蝶形 $ABCD$，即是以$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$所圍成。



二、蝴蝶形中，兩個三角形的共用頂點，稱為蝴蝶形中間點，如圖中的E。

三、組成蝴蝶形的其中一個三角形中，頂點為蝴蝶形中間點的內角，稱為蝴蝶形內夾角，如圖中的 $\angle DEC$。

四、作一直線通過蝴蝶形的中間點，交蝴蝶形的兩側，當一側交點到蝴蝶形中間點的距離等於另一側交點到蝴蝶形中間點的距離，這條直線即是蝴蝶線，如圖中的 $\overleftrightarrow{FG}$ 過中間點 E 且 $\overline{EF}=\overline{EG}$，為一蝴蝶線。

五、為方便閱讀，我們將點$A(x,y)$的x座標以A_x，y座標以A_y表示。例：若$F(-4,8)$為坐標上一點，則 $F_x=-4$，$F_y=8$。

肆、研究過程或方法

研究一：尋找蝴蝶形中間點位置與蝴蝶線的關係

(1)作拋物線：$y=ax^2(a>0)$

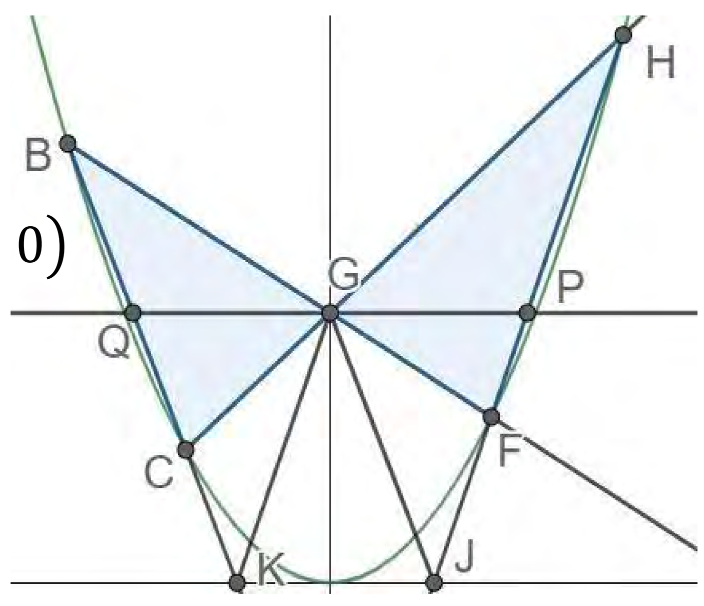
(2)取拋物線上兩點$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$　$(b<c<0)$

(3)取y軸上一動點$G(0,d)$$(B_y>d>0)$

(4)作$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5)作$\overleftrightarrow{HF}$、$\overleftrightarrow{BC}$分別交x軸於J、K

(6)作蝴蝶形$CBFH$的蝴蝶線分別交$\overline{HF}$、$\overline{BC}$於P、Q



由點B、C、G計算後可得$F\left(-\dfrac{d}{ab},\dfrac{d^2}{ab^2}\right)$、$H\left(-\dfrac{d}{ac},\dfrac{d^2}{ac^2}\right)$

$\overleftrightarrow{BC}$斜率：$(ab^2-ac^2)\div(b-c)=a(b+c)$

$\overleftrightarrow{HF}$斜率：$\dfrac{d^2(b^2-c^2)}{ab^2c^2}\div\dfrac{-d(b-c)}{abc}=\dfrac{-d(b+c)}{bc}$

$\overleftrightarrow{HF}$方程式：$y=\dfrac{-d(b+c)}{bc}x-\dfrac{d^2}{abc}\Rightarrow y=0$代入得$J_x=\dfrac{-d}{a(b+c)}$

$\overleftrightarrow{GJ}$斜率：$d\div\dfrac{d}{a(b+c)}=a(b+c)=\overleftrightarrow{BC}$斜率

$\Rightarrow$得$\overleftrightarrow{GJ}/\!/\overleftrightarrow{BC}$，同理$\overleftrightarrow{GK}/\!/\overleftrightarrow{HF}$

$\because\overline{QG}=\overline{GP}$(蝴蝶線)

$\angle KQG=\angle JGP$ (因$\overleftrightarrow{GJ}/\!/\overleftrightarrow{BC}$)

$\angle QGK=\angle GPJ$ (因$\overleftrightarrow{GK}/\!/\overleftrightarrow{HF}$)

$\therefore\triangle QGK\cong\triangle GPJ(ASA$全等$)$

故$\triangle QGK$中$\overline{QG}$的高 $=\triangle GPJ$中$\overline{GP}$的高 $\Rightarrow\overline{QP}/\!/x$軸■

(1)作拋物線：$y=ax^2\ (a>0)$

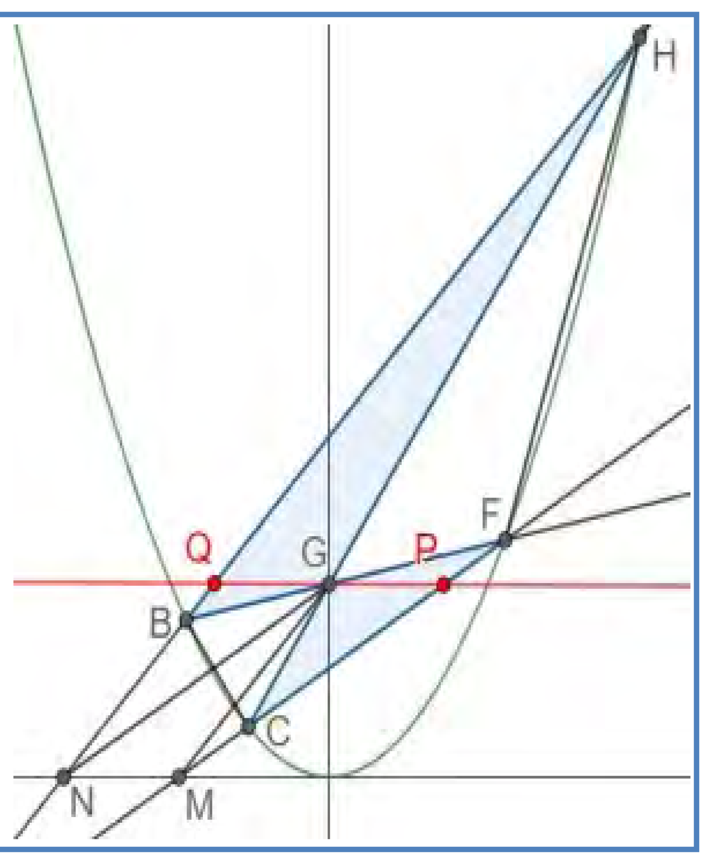
(2)取拋物線上兩點$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$　$(b<c<0)$

(3)取y軸上一動點$G(0,d)$$(d>B_y)$

(4)作$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5)作$\overleftrightarrow{HB}$與$\overleftrightarrow{FC}$分別交x軸於N、M

(6)作蝴蝶形$BHCF$的蝴蝶線分別交$\overline{FC}$、$\overline{HB}$於P、Q



經計算得$F\left(\dfrac{-d}{ab},\dfrac{d^2}{ab^2}\right)$、$H\left(\dfrac{-d}{ac},\dfrac{d^2}{ac^2}\right)$

$\overleftrightarrow{BH}$斜率：$\left(ab^2-\dfrac{d^2}{ac^2}\right)\div\left[b-\left(-\dfrac{d}{ac}\right)\right]=\dfrac{abc-d}{c}$

$\overleftrightarrow{BH}$方程式：$y=\dfrac{abc-d}{c}x+\dfrac{bd}{c}\Rightarrow y=0$代入得 $N_x=\dfrac{-bd}{abc-d}$

$\overleftrightarrow{NG}$斜率 $=\dfrac{abc-d}{b}=\overleftrightarrow{CF}$斜率

$\Rightarrow$得$\overleftrightarrow{NG}/\!/\overleftrightarrow{CF}$，同理$\overleftrightarrow{MG}/\!/\overleftrightarrow{BH}$

$\because\overline{QG}=\overline{GP}$(蝴蝶線)

$\angle NQG=\angle MGP$(因$\overleftrightarrow{QN}/\!/\overleftrightarrow{GM}$)

$\angle QGN=\angle GPM$(因$\overleftrightarrow{GN}/\!/\overleftrightarrow{PM}$)

$\therefore\triangle QGN\cong\triangle GPM(ASA$全等$)$

故$\triangle QGN$中$\overline{QG}$的高 $=\triangle GPM$中$\overline{GP}$的高 $\Rightarrow\overline{QP}/\!/x$軸■

研究二：拋物線上蝴蝶形之邊長與y軸上蝴蝶形中間點之關係

作拋物線$(y=ax^2)$並取其上兩點$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$及y軸上一動點$F(0,d)$，再作$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CF}$分別交拋物線於E、G

$\dfrac{E_y-F_y}{E_x-F_x}=\dfrac{B_y-F_y}{B_x-F_x}\Rightarrow E_x=\dfrac{ab^2-d\pm(d+ab^2)}{2ab}$(取$-$，因取$+$時值為$B_x$)$=\dfrac{-d}{ab}$

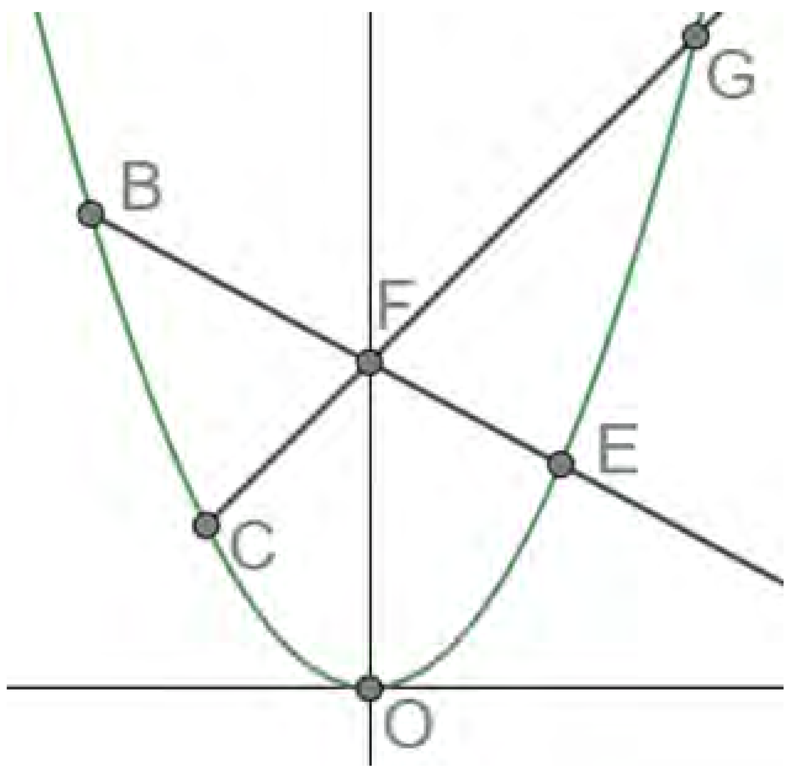
$\therefore E\left(\dfrac{-d}{ab},\dfrac{d^2}{ab^2}\right)$、$G\left(\dfrac{-d}{ac},\dfrac{d^2}{ac^2}\right)$

$F_y:E_x:E_y:G_x:G_y=ab^2c^2:-bc^2:c^2d:-b^2c:b^2d$

G、F、C共線和B、F、E共線，運用平行線截比例線段的性質，可得出：

$\overline{GF}:\overline{FC}=(G_x-F_x):(F_x-C_x)=G_x:-C_x=\dfrac{-d}{ac}:-c=\dfrac{d}{ac^2}$

$\overline{EF}:\overline{FB}=(E_x-F_x):(F_x-B_x)=E_x:-B_x=\dfrac{-d}{ab}:-b=\dfrac{d}{ab^2}$



由上可知：若B、C為固定點且F為y軸上動點，必滿足$\dfrac{\overline{GF}}{\overline{FC}}\propto\dfrac{\overline{EF}}{\overline{FB}}\propto\overline{FO}$

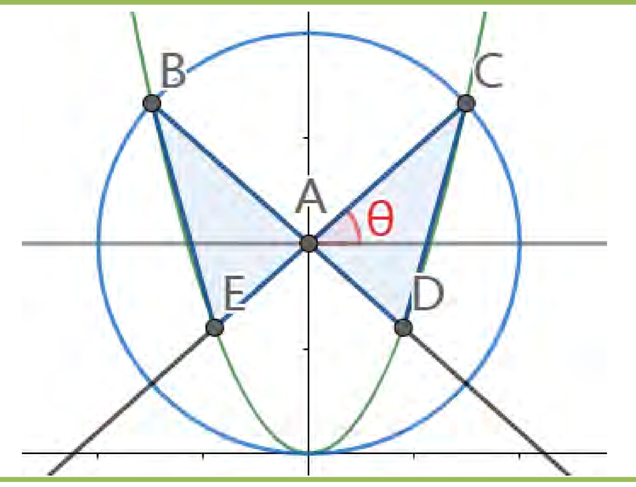
研究三：尋找二次曲線上之蝴蝶形面積和角度與座標數值之關係

接圓蝴蝶形

(1)作$y=ax^2$、$x^2+(y-b)^2=b^2(a、b>0)$，得圓心$A(0,b)$及交點B、C、原點

(2)作$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CA}$分別交拋物線於D、E

(3)連接$\overline{BE}$、$\overline{CD}$，得一左右對稱之蝴蝶形$EBDC$



已知$B\left(\frac{-\sqrt{2ab-1}}{a},\frac{2ab-1}{a}\right)$、$C\left(\frac{\sqrt{2ab-1}}{a},\frac{2ab-1}{a}\right)$、

$D\left(\frac{b}{\sqrt{2ab-1}},\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$、$E\left(\frac{-b}{\sqrt{2ab-1}},\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$

若令$\frac{\angle CAD}{2}=\theta$，則$\tan\theta=\frac{ab-1}{\sqrt{2ab-1}}$

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & \frac{b}{\sqrt{2ab-1}} & \frac{\sqrt{2ab-1}}{a} & 0\\ b & \frac{ab^2}{2ab-1} & \frac{2ab-1}{a} & b\end{vmatrix}=\frac{b(ab-1)}{a\sqrt{2ab-1}}=\frac{b}{a}\tan\theta$$

蝴蝶形$EBDC$總面積$=\frac{2b(ab-1)}{a\sqrt{2ab-1}}=\frac{2b}{a}\tan\theta$

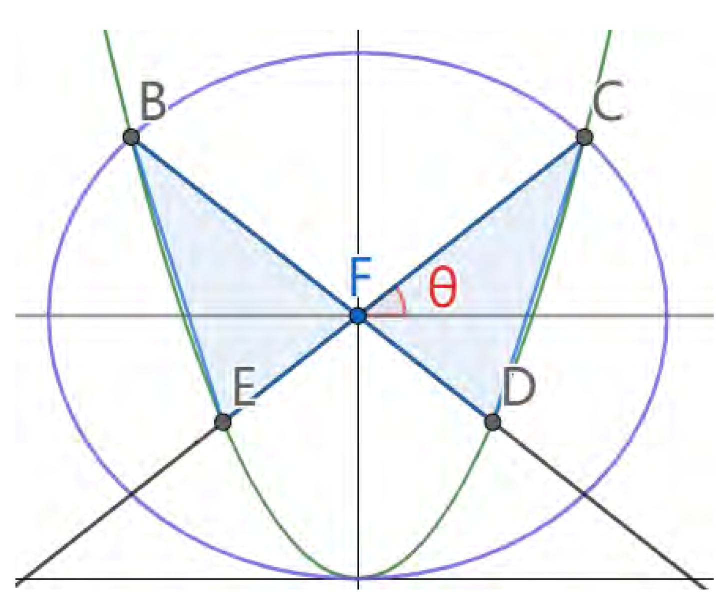
接橢圓蝴蝶形

(1)作拋物線:$y=ax^2$、橢圓：$\frac{x^2}{c^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$ $(a、b、c>0)$

(2)得橢圓中心$F(0,b)$及交點B、C、原點

(3)作$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{CF}$分別交拋物線於D、E

(4)連接$\overline{BE}$、$\overline{CD}$得一左右對稱之蝴蝶形$EBDC$



已知$C\left(\frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac},\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}\right)$、$B\left(\frac{-\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac},\frac{2abc^2-b^2}{ac^2}\right)$、

$D\left(\frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}},\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}\right)$、$E\left(\frac{-bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}},\frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2}\right)$

若令$\frac{\angle CFD}{2}=\theta$，則$\tan\theta=\frac{b(ac^2-b)}{c\sqrt{2abc^2-b^2}}$

$$\triangle CFD=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & \frac{bc}{\sqrt{2abc^2-b^2}} & \frac{\sqrt{2abc^2-b^2}}{ac} & 0\\ b & \frac{ab^2c^2}{2abc^2-b^2} & \frac{2abc^2-b^2}{ac^2} & b\end{vmatrix}=\frac{b^2(ac^2-b)}{ac\sqrt{2abc^2-b^2}}=\frac{b}{a}\tan\theta$$

蝴蝶形$EBDC$總面積$=\frac{2b^2(ac^2-b)}{ac\sqrt{2abc^2-b^2}}=\frac{2b}{a}\tan\theta$

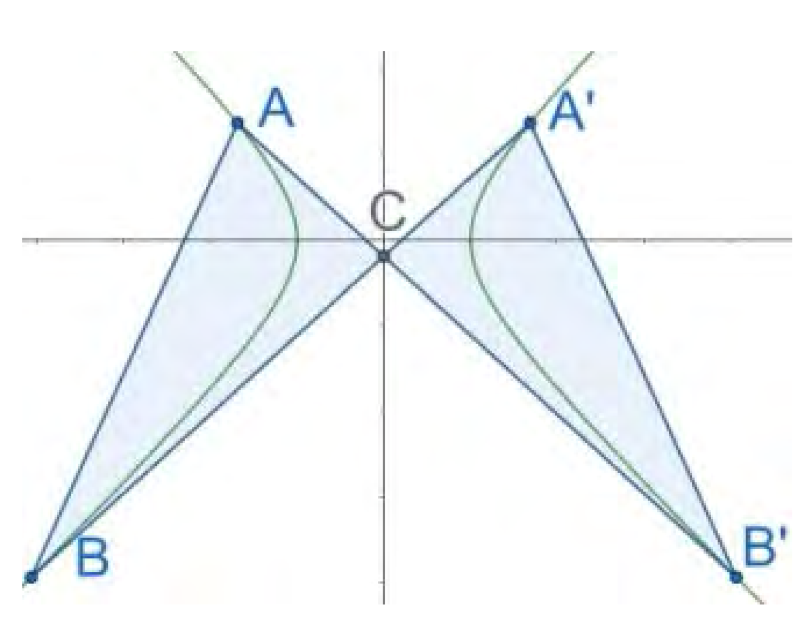
接雙曲線蝴蝶形

(1)在$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上任取二點$A$、$B$，且$A_x$、$B_x<0$、$B_y<A_y$

(2)以y軸為對稱軸作A'、B'

(3)連接$\overline{BA}$、$\overline{AB'}$、$\overline{B'A'}$、$\overline{A'B}$，得一蝴蝶形$BAB'A'$

(4)設$\overline{AB'}$、$\overline{A'B}$交於C



由雙曲線方程式：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得$|x|=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}$，

此時若令$A_y=A'_y=c$、$B_y=B'_y=d$，則座標可表示為：

$A\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2},c\right)$、$A'\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+c^2},c\right)$、$B\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2},d\right)$、$B'\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+d^2},d\right)$

$$\overleftrightarrow{A'B}\text{斜率}=\frac{A'_y-B_y}{A'_x-B_x}=\frac{c-d}{\frac{a}{b}\left(\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{A'B}:y=\frac{c-d}{\frac{a}{b}\left(\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)}x-(c-d)\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}}+c$$

$\Rightarrow$將$x=0$代入可得：

$$C_y=\frac{d\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{b^2+d^2}+\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}$$

若令$\frac{\angle A'CB'}{2}=\theta$,則$\tan\theta=\frac{A'_y-B_y}{A'_x-B_x}=\frac{A'_y-B'_y}{A'_x+B'_x}$

$$\triangle CB'A'=\frac{1}{2}\left[B'_xA'_y-A'_xB'_y+(A'_x-B'_x)\frac{A'_xB'_y+B'_xA'_y}{A'_x+B'_x}\right]$$

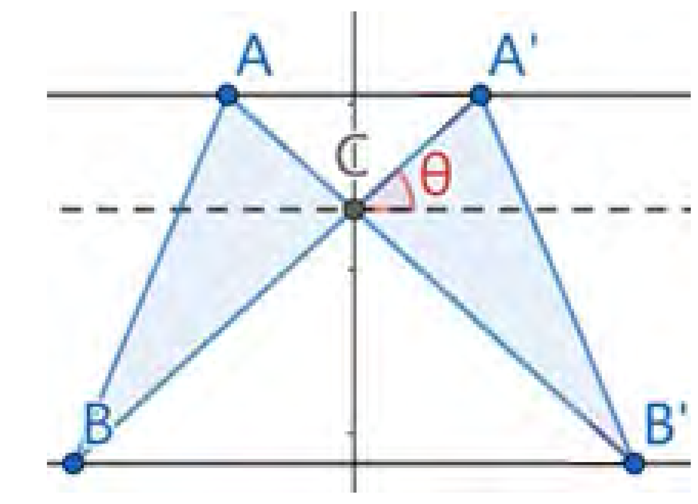
$$=\frac{A'_xB'_x(A'_y-B'_y)}{A'_x+B'_x}=A'_xB'_x\tan\theta$$

我們去除二次曲線的限制，直接在座標平面作對稱於y軸的蝴蝶形並以A、B的座標數值計算，得出一個簡潔的結論：

$$\frac{A_y-C_y}{A_x-0}=\frac{C_y-B'_y}{0-B'_x}\Rightarrow -A_xC_y+B'_xC_y=-A_xB'_y+A_yB'_x$$

$$\Rightarrow C_y=\frac{A_yB'_x-A_xB'_y}{-A_x+B'_x}=\frac{A_xB_y+A_yB_x}{A_x+B_x}$$

$$\therefore C\left(0,\frac{A_xB_y+A_yB_x}{A_x+B_x}\right)$$



若令$\frac{\angle A'CB'}{2}=\theta$，則$\tan\theta=\frac{A'_y-C_y}{A'_x-0}=\frac{A_y-\frac{A_xB_y+A_yB_x}{A_x+B_x}}{-A_x}=\frac{B_y-A_y}{A_x+B_x}$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & A_x & B_x & 0\\ \frac{A_xB_y+A_yB_x}{A_x+B_x} & A_y & B_y & \frac{A_xB_y+A_yB_x}{A_x+B_x}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2A_xB_xB_y-2A_xB_xA_y}{A_x+B_x}\right)=A_xB_x\cdot\frac{B_y-A_y}{A_x+B_x}=A_xB_x\cdot\tan\theta$$

蝴蝶形$BAB'A'$總面積$=2A_xB_x\cdot\frac{B_y-A_y}{A_x+B_x}=2A_xB_x\cdot\tan\theta$

在座標平面上作一對稱軸為 y 軸的對稱蝴蝶形，其面積可以表示成：

1. $\left|2\times\text{兩點}x\text{座標之積}\times\frac{\text{兩點}y\text{座標之差}}{\text{兩點}x\text{座標之和}}\right|$

2. $\left|2\times\text{兩點}x\text{座標之積}\times\tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right|$

研究四：尋找圓與拋物線之重疊圖形上的對稱蝴蝶形中特定線段長度與點座標數值之關係

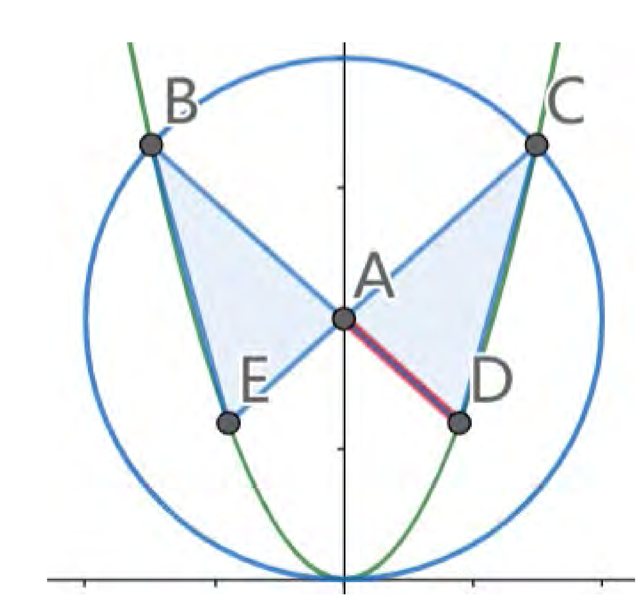
算完面積後，試著計算接圓蝴蝶形各邊邊長，我們發現$\overline{AD}$與D_y相等：

已知$A(0,b)$、$D\left(\frac{b}{\sqrt{2ab-1}},\frac{ab^2}{2ab-1}\right)$

$$\overline{AD}=\sqrt{(D_x-A_x)^2+\left(D_y-A_y\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2}{2ab-1}+\frac{(ab^2-2ab^2+b)^2}{(2ab-1)^2}}$$

$$=\frac{b}{2ab-1}\sqrt{(1-ab)^2+2ab-1}=\frac{ab^2}{2ab-1}$$



試圖以幾何方式說明兩線段相等時，我們發現拋物線有以下的特殊關係：

作拋物線：$y=ax^2$，再作一條割線交其於(b,ab^2)、(c,ac^2)，則：

割線斜率：$(ab^2-ac^2)\div(b-c)=a(b+c)$

$\Rightarrow$割線方程式：$y=a(b+c)x-abc$

再將$x=0$代入割線方程式得$y=-abc$

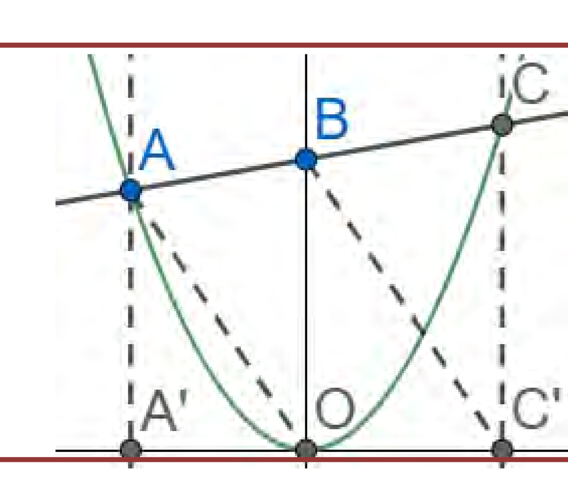
我們可以再將其作延伸：

(1)作拋物線$y=ax^2(a>0)$

(2)取$O(0,0)$、拋物線上一點A、y軸上一點B

(3)作$\overleftrightarrow{AB}$交拋物線於C

(4)作A、C在x軸上的投影點A'、C'



$B_y=-aA_xC_x\Rightarrow\overline{BO}=a\overline{A'O}\times\overline{OC'}$

又$A_y=aA_xA_x\Rightarrow\overline{AA'}=a\overline{A'O}\times\overline{A'O}$

利用上面發現的關係$\Rightarrow\overline{AA'}:\overline{BO}=\overline{A'O}:\overline{OC'}$

在$\triangle AA'O$和$\triangle BOC'$中

$\because\overline{AA'}:\overline{BO}=\overline{A'O}:\overline{OC'}$

$\angle AA'O=90°=\angle BOC'$

$\therefore\triangle AA'O\sim\triangle BOC'(SAS$相似$)$

故$\angle AOA'=\angle BC'O$(對應角相等)$\Rightarrow\overleftrightarrow{BC'}/\!/\overleftrightarrow{AO}$(同位角相等)

在$\triangle ABO$和$\triangle BCC'$中

$\angle ABO=\angle BCC'$ (因$\overleftrightarrow{BO}/\!/\overleftrightarrow{CC'}$，同位角相等)

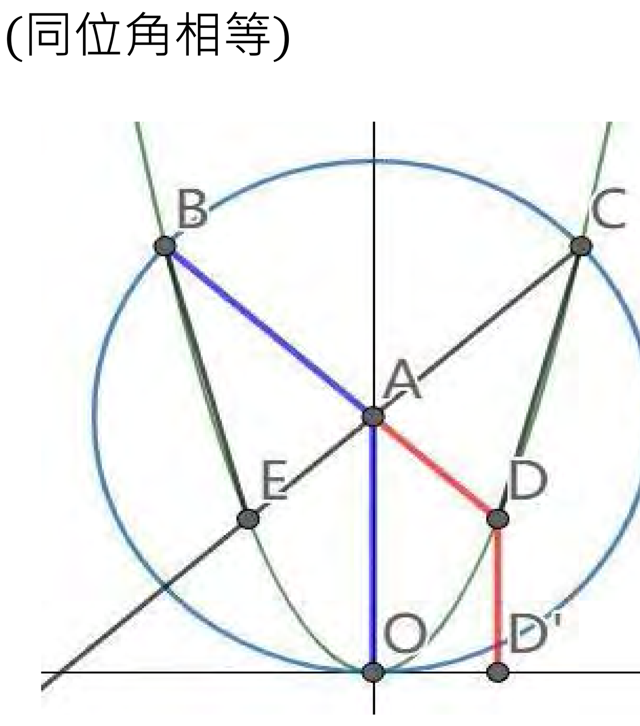
$\angle BAO=\angle CBC'$ (因$\overleftrightarrow{AO}/\!/\overleftrightarrow{BC'}$，同位角相等)

$\therefore\triangle ABO\sim\triangle BCC'$ $(AA$相似$)$

由此可知$\overline{AB}:\overline{BO}=\overline{BC}:\overline{CC'}$

將此結果套用在接圓蝴蝶形上，可發現

當$\overline{BA}=A_y$ (圓半徑等長)，則$\overline{AD}=D_y$



研究五：尋找拋物線上蝴蝶形兩外邊延長而得的交點與蝴蝶形中間點之關係

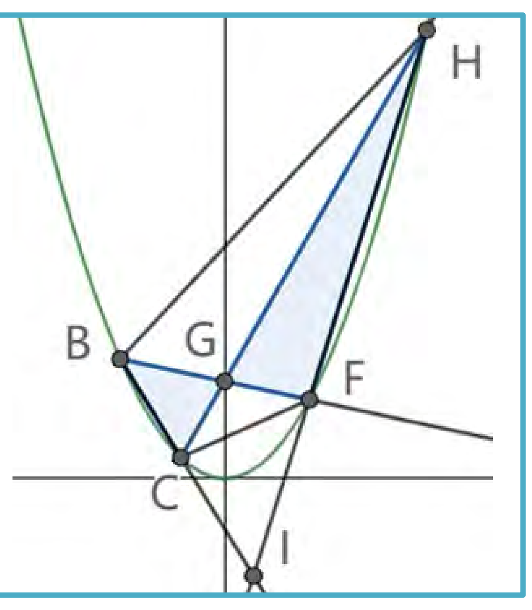
(1)作拋物線：$y=ax^2(a>0)$

(2)取拋物線上兩點$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$ $(b<c<0)$

(3)取y軸上一動點$G(0,d)(d>0)$

(4)作$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5)作$\overleftrightarrow{HF}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於I



計算後可得：$H\left(\frac{-d}{ac},\frac{d^2}{ac^2}\right)$、$F\left(\frac{-d}{ab},\frac{d^2}{ab^2}\right)$

$$\begin{cases}\overleftrightarrow{BC}\text{方程式}：y=a(b+c)x-abc\_\_① \\ \overleftrightarrow{HF}\text{方程式}：y=\frac{-d(b+c)}{bc}x-\frac{d^2}{abc}\_\_②\end{cases}$$

$$\Rightarrow ①-②：\left[a(b+c)+\frac{d(b+c)}{bc}\right]x-abc+\frac{d^2}{abc}=0\Rightarrow x=\frac{abc-d}{a(b+c)}$$

再代入①得$y=-d\Rightarrow I\left(\frac{abc-d}{a(b+c)},-d\right)\therefore |G_y|=|I_y|=d$

(1)作拋物線：$y=ax^2(a>0)$

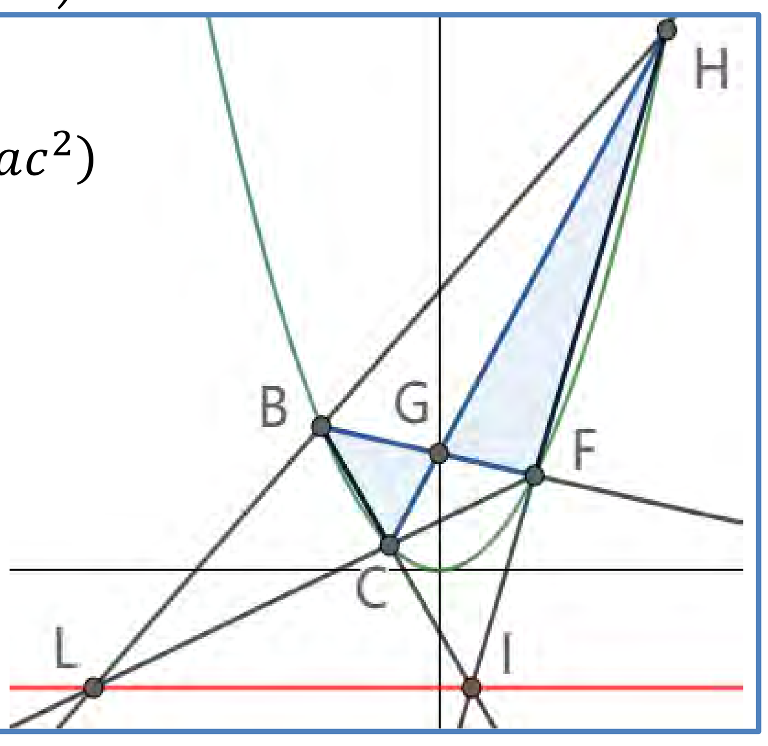
(2)取拋物線上兩點$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$ $(b<c<0)$

(3)取y軸上一動點$G(0,d)(d>0)$

(4)作$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交拋物線於F、H

(5)作$\overleftrightarrow{HF}$、$\overleftrightarrow{BC}$交於I

(6)作$\overleftrightarrow{HB}$、$\overleftrightarrow{FC}$交於L



$\overleftrightarrow{HB}$斜率：$\frac{B_y-H_y}{B_x-H_x}=\frac{a^2b^2c^2-d^2}{ac^2}\div\frac{abc+d}{ac}=\frac{abc-d}{c}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{HB}$方程式：$y=\frac{abc-d}{c}x+\frac{bd}{c}$

$\Rightarrow (abc-d)x=cy-bd\_\_①$

同理，$\overleftrightarrow{FC}$斜率$=\frac{abc-d}{b}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{FC}$方程式：$y=\frac{abc-d}{b}x+\frac{cd}{b}$

$\Rightarrow (abc-d)x=by-cd\_\_②$

由①、②可得：$cL_y-bd=bL_y-cd$

$\Rightarrow (c-b)L_y=bd-cd\Rightarrow L_y=-d$ ，再代入①

$\Rightarrow (abc-d)x=-bd-cd\Rightarrow L_x=\frac{-d(b+c)}{abc-d}$

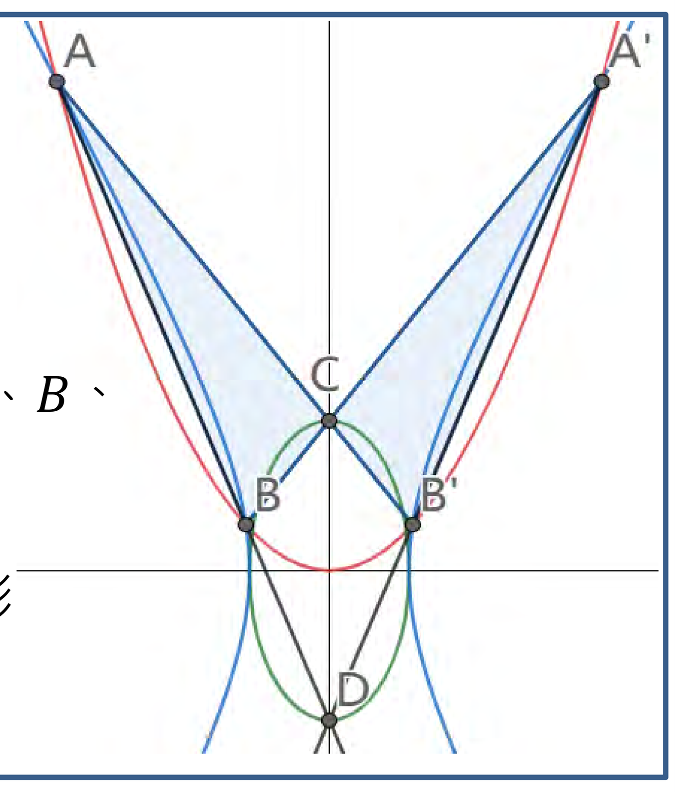
$\Rightarrow L\left(\frac{-d(b+c)}{abc-d},-d\right)\therefore |G_y|=|L_y|=d$

而由計算結果可得$I\left(\frac{abc-d}{a(b+c)},-d\right)$，故$\overleftrightarrow{LI}$為一條平行$x$軸的直線

(1)作橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$、拋物線：$y=cx^2$ (a、b、$c>0$)

(2)設雙曲線與拋物線交於第二象限的A、B、第一象限的A'、B'

(3)連接$\overline{BA}$、$\overline{AB'}$、$\overline{B'A'}$、$\overline{A'B}$，得蝴蝶形$BAB'A'$及蝴蝶形中間點C



我們試著將拋物線上蝴蝶形與其他二次曲線疊合，再將兩外邊延長，經$GeoGebra$繪製圖形後發現：無論a、b、c數值怎麼改變，只要能產生蝴蝶形$BAB'A'$，中間點與兩外邊延長而得的交點會在橢圓上：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=cx^2\end{cases}\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{a^2c}+1=0\Rightarrow y=\frac{\frac{1}{a^2c}\pm\sqrt{\frac{1}{a^4c^2}-\frac{4}{b^2}}}{\frac{2}{b^2}}$$

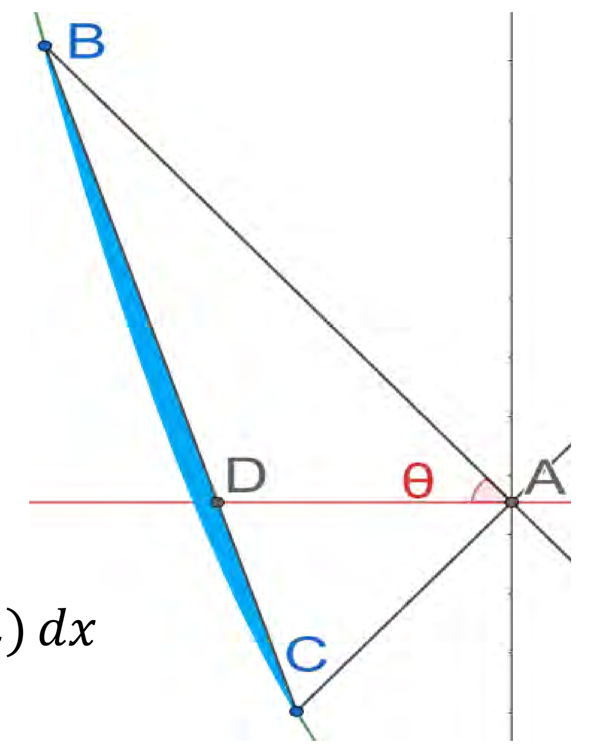
若令$\sqrt{\frac{1}{a^4c^2}-\frac{4}{b^2}}=h$，再將此式代入$y=cx^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}\pm b^2h}{2c}}$

$$\therefore A'\left(\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}+b^2h}{2c}},\frac{\frac{1}{a^2c}+h}{\frac{2}{b^2}}\right)、B'\left(\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}-b^2h}{2c}},\frac{\frac{1}{a^2c}-h}{\frac{2}{b^2}}\right)$$

$$C_y=cA_xB_x=cA'_xB'_x=c\cdot\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}+b^2h}{2c}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2c}-b^2h}{2c}}=c\cdot\frac{b}{c}=b$$

$|C_y|=|D_y|$，故$C(0,b)$、$D(0,-b)\therefore C$、D皆在橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上■

研究六：尋找拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍面積之關係



已知拋物線為$y=ax^2$、$\theta=\frac{\angle BAC}{2}$、

$\tan\theta=a(C_x-B_x)$、$B(b,ab^2)$、$C(c,ac^2)$

由B、C座標可得

$\overleftrightarrow{BC}$方程式：$y=a(B_x+C_x)x-aB_xC_x$

面積$=\int_{B_x}^{C_x}(-ax^2+a(B_x+C_x)x-aB_xC_x)\,dx$

$$=\left(\frac{-ac^3}{3}+\frac{a(b+c)c^2}{2}-abc^2\right)-\left(\frac{-ab^3}{3}+\frac{a(b+c)b^2}{2}-ab^2c\right)$$

$$=\frac{a(c-b)(-2b^2-2bc-2c^2+3c^2+6bc+3b^2-6bc)}{6}$$

$$=\frac{a(c-b)^3}{6}=\frac{a(C_x-B_x)^3}{6}=\frac{1}{6a^2}\tan^3\theta$$

伍、結論

一、在拋物線$y=ax^2$上作蝴蝶形：

（一）若蝴蝶形中間點在y軸上，則蝴蝶線平行x軸。

（二）若平行x軸的直線L通過蝴蝶形中間點且蝴蝶形中間點在y軸上，則直線L就是蝴蝶線。

二、在拋物線$y=ax^2$上作中間點位於y軸的蝴蝶形，若固定同一側的蝴蝶形頂點，則無論中間點如何移動，左右兩個三角形過同一直線的邊長之比值會與中間點的y座標數值成正比。

三、在座標平面上作一對稱軸為y軸的對稱蝴蝶形，其面積可以表示成：

（一）$\left|2\times\text{兩點}x\text{座標之積}\times\frac{\text{兩點}y\text{座標之差}}{\text{兩點}x\text{座標之和}}\right|$

（二）$\left|2\times\text{兩點}x\text{座標之積}\times\tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right|$

四、接圓蝴蝶形中非於圓上的兩個頂點，其與中間點的距離與其y座標數值相同。

五、（一）在拋物線$y=ax^2$上作一蝴蝶形，且蝴蝶形中間點y軸上，則此蝴蝶形的兩外邊延長而得的交點到x軸的距離與蝴蝶形中間點到x軸的距離相等。

（二）在橢圓：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$、雙曲線：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a$、$b>0)$、拋物線：$y=cx^2(c>0)$，無論$a$、$b$、$c$數值怎麼改變，雙曲線和拋物線所產生的蝴蝶形，蝴蝶形中間點與兩外邊延長而得的交點皆會在橢圓上。

六、在座標平面上，拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍成的圖形，其面積可以表示成：

（一）$\frac{1}{6}\times|(\text{拋物線二次項係數})\times(\text{兩點}x\text{座標之差})^3|$

（二）$\frac{1}{6}\times\left|\frac{1}{(\text{拋物線二次項係數})^2}\times\left(\tan\frac{\text{蝴蝶形內夾角}}{2}\right)^3\right|$

陸、參考資料及其他

[1]張華恩、吳尚澂、葉承恩（2015）。**正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究**。中華民國第55屆中小學科學展覽會，台南市。

[2]ej0cl6（2009年1月30日）。[幾何定理]蝴蝶定理【部落格文字資料】。

[3]Weisstein, Eric W.（2019年5月24日）。Butterfly theorem【線上論壇】。

[4]王銳騰（2019年4月10日）。圓錐曲線蝴蝶定理及以其為構型的題目選講【線上論壇】。