中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050408

二元3平衡n字串之排列數探討

學校名稱：臺中市立臺中第一高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 曹　瑋 高二 李　謙	董展宏

關鍵詞：字串、階差數列、排列組合

摘要

本研究旨在探討由 0 與 1 組成長度為 n 的二元字串中滿足000-子字串數和111-子字串數相同（稱為平衡）之排列方法數。我們從 3 個面向來探討：一、首先將直接推導出之算式，輸入 *python* 計算在各種 n 值下，觀察平衡與非平衡字串個數之規律性；二、接著我們發現非平衡字串個數在000-子字串和111-子字串之差值為一固定形式時，不同長度之字串符合個數會形成一階差數列，我們對此猜測提出證明並嘗試利用此性質推導出二元 3 平衡 n 字串個數之一般式；三、最後探討二元 3 平衡 n 字串個數之成長速度，推論當 n 值極大時，其個數會以趨近 2 倍速成長。同時，我們也將 3 平衡推廣至 r 平衡，提出一些相關的結果。

壹、 研究動機

在 100 學年度全國高中數學能力競賽的題目中，有一道題目內容如下：「由 0, 1 排成長度 n 的字串，稱為二元 n 字串。若一個二元 n 字串中出現字串 00 和字串 11 的個數一樣多，則稱為長度的 n 二元平衡字串。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，已知 $a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 6$，試求 a_n 的一般公式。」但題目給出的解法卻是特例解，只有在 00-子字串, 11-子字串平衡的狀況下才適用，因此我們便想要改變作法，試圖用一個一般化的解法來處理這個問題。此外，我們也想將此問題拓展，討論在 000-子字串,111-子字串平衡時，n 位數列排列之符合個數是否也有一般解，也就是二元 3 平衡 n 字串個數是否有一般式。因此，我們便展開了一段有趣的數學研究之旅。

貳、 研究目的

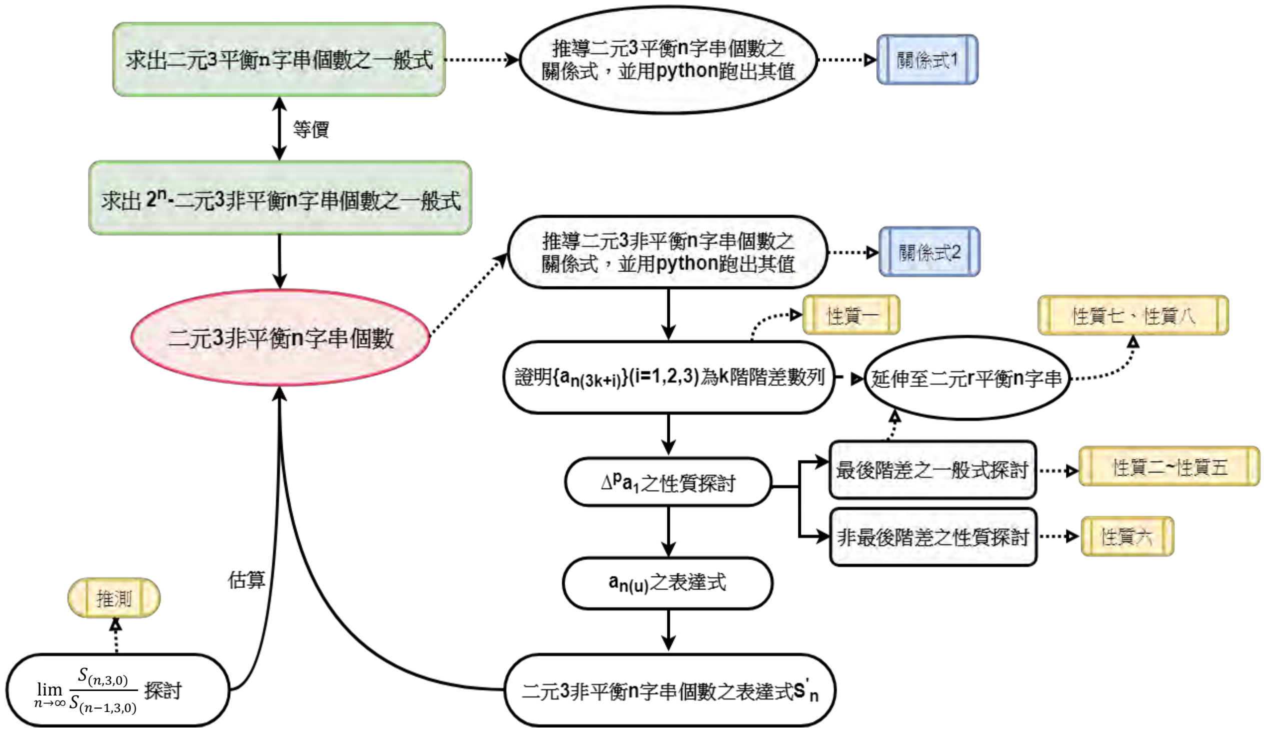
一、原題目之非特例解。
二、二元 3 平衡 n 字串之關係式探討。
三、二元 r 平衡 n 字串在滿足字串中無連續 r 個 0 或連續 r 個 1 時之個數遞迴式探討。
四、二元 3 非平衡 n 字串之關係式探討。
五、觀察二元 3 非平衡 n 字串在改變 000-子字串及 111-子字串之差值或字串之長度時，符合個數彼此間有何性質存在？
六、階差數列中各階階差首項值之求解過程與性質。
七、將第五點推廣至二元 r 非平衡 n 字串。
八、二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}$ (i = 2,3) 探討，其中$S_{(n,i,0)}$代表長度為n的字串中滿足i-0-子字串(連續i個 0 所形成的子字串)與i-1-子字串(連續i個 1 所形成的子字串)數目相同的個數。

參、 研究設備及器材

一、利用 python 幫助我們算出不同下之字串符合個數
二、利用 excel 幫助我們列出研究中各個階差數列

肆、 研究過程或方法

一、研究架構



二、先備知識

(一) 組合數與費氏數列$\{F_n\}$之恆等式

恆等式 1

$$C_0^n + C_1^{n-1} + \cdots + C_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{\left[\frac{n+3}{2}\right]} + C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_i^{n-i} = F_{n+1},\quad n \ge 1$$

【證明】

以下利用數學歸納法來證明此恆等式。

1. 當 $n = 1$ 時，$C_0^1 = 1 = F_2$
2. 當 $n = 2$ 時，$C_0^2 + C_1^1 = 2 = F_3$
3. 設 k 是正整數，且$k \ge 2$。證明：若 $n = k$、$n = k - 1$ 時原式成立，則 $n = k + 1$ 時原式亦成立。

假設 $n = k$，$n = k - 1$ 時原式成立，考慮 $n = k + 1$ 時情形：

(1) $k + 1$ 為偶數時

$$C_0^{k+1} + C_1^k + \cdots + C_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+4}{2}\right]} + C_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} = C_0^{k+1} + C_1^k + \cdots + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+3}{2}} + C_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}$$

$$= C_0^k + \left(C_0^{k-1} + C_1^{k-1}\right) + \cdots + \left(C_{\frac{k-3}{2}}^{\frac{k+1}{2}} + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\right) + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}}$$

$$= \left(C_0^k + C_1^{k-1} + \cdots + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k+1}{2}}\right) + \left(C_0^{k-1} + C_1^{k-2} + \cdots + C_{\frac{k-3}{2}}^{\frac{k+1}{2}} + C_{\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} C_i^{k-i} + \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} C_i^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_i^{k-i} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} C_i^{k-1-i} = F_{k+1} + F_k = F_{k+2}.$$

(2) $k+1$ 為奇數時

$$C_0^{k+1} + C_1^k + \cdots + C_{\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+4}{2}\right]} + C_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} = C_0^{k+1} + C_1^k + \cdots + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k+4}{2}} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+2}{2}}$$

$$= C_0^k + \left(C_0^{k-1} + C_1^{k-1}\right) + \cdots + \left(C_{\frac{k-4}{2}}^{\frac{k+2}{2}} + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k+2}{2}}\right) + \left(C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}\right)$$

$$= \left(C_0^k + C_1^{k-1} + \cdots + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k+2}{2}} + C_{\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}\right) + \left(C_0^{k-1} + C_1^{k-2} + \cdots + C_{\frac{k-4}{2}}^{\frac{k+2}{2}} + C_{\frac{k-2}{2}}^{\frac{k}{2}}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} C_i^{k-i} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} C_i^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_i^{k-i} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} C_i^{k-1-i} = F_{k+1} + F_k = F_{k+2}.$$

綜合步驟1、2、3，由數學歸納法得證原式成立。

(二) 階差數列的定義

「階差數列」又名高階等差數列，其定義如下：「設 $\{a_n\}$ 是一個給定的數列，定義 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,\ n = 1,2,3 \dots$，稱$\{\Delta a_n\}$為 $\{a_n\}$ 的一階等差數列，定義$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n),\ \mathrm{n} = 1,2,3 \dots$，稱它為 $\{a_n\}$ 的二階等差數列，一般定義$\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n)$, $n = 1,2,3 \dots$， k 為自然數，稱它為 $\{a_n\}$ 的 k 階等差數列。設 $\{a_n\}$ 是一個給定的數列，若其 p 階等差數列 $\{\Delta^p a_n\}$ 是一非零的常數數列，而 $p+1$ 階等差數列 $\{\Delta^{p+1} a_n\}$ 是零數列，就稱 $\{a_n\}$ 是一個 p 階等差數列。」[參考資料-二]

(三) p 階等差數列之組合公式表達

p 階等差數列的通項可表示為

$$a_n = a_1 + \Delta a_1 C_1^{n-1} + \Delta^2 a_1 C_2^{n-1} + \cdots + \Delta^p a_1 C_p^{n-1}$$ **[參考資料-二]**

(四) 差分關係式

組合數之差分關係式

$$\Delta C_p^n = C_p^{n+1} - C_p^n = C_{p-1}^n$$ **[參考資料-三]**

伍、 名詞定義

一、**區塊($block$)**：一個二元 n 字串由一或多個區塊組成，每個區塊內所有的字元均相同，且與每個區塊相鄰的左右兩個字元均與該區塊內所有的字元相異。在此令由 k 個字元組成的區塊記做 $\boldsymbol{k-block}$，由 α 個 0 組成的區塊記做$\boldsymbol{\alpha-0-block}$ (1 個 0 組成的區塊記做 $\boldsymbol{0-block}$，2 個 0 組成的區塊記做 $\boldsymbol{00-block}$)，同理，由 β 個 1 組成

的區塊記做 $\boldsymbol{\beta-1-block}$ (1 個 1 組成的區塊記做 $\boldsymbol{1-block}$，2 個 1 組成的區塊記做 $\boldsymbol{11-block}$)。

二、$l_k(0)$表示在二元 n 字串中k-0-子字串的數目， $l_k(1)$ 表示在二元 n 字串中k-1-子字串的數目。(例如：10011010001, $l_2(0)=3,\ l_3(0)=1,\ l_2(1)=1$)。

三、**二元 $\boldsymbol{r}$ 平衡 $\boldsymbol{n}$ 字串**表示二元 n 字串中滿足 $l_r(0)=l_r(1)$ 的字串(以下二元 n 字串中滿足 $l_2(0)=l_2(1)$ 簡稱為二元平衡 n 字串)

四、$S_{(n,r,m)}$表二元 n 字串滿足 $|l_r(0)-l_r(1)|=m$ 之個數

陸、 研究結果

一、原題目之非特例解

定理一

二元平衡 n 字串個數之一般式為 $\begin{cases} S_{(1,2,0)}=S_{(2,2,0)}=2 \\ S_{(n,2,0)}=2C^{n-2}_{\left[\frac{n}{2}\right]-1},\ n\geq 3 \end{cases}$

【證明】

將二元 n 字串分成 a 個區塊，限制 0 只能放入奇數區塊(從最左邊算起)，1 只能放入偶數區塊內。依對稱性可知，其符合條件之方法數會與 1 放入奇數區塊，0 放入偶數區塊之方法數相同，因此只需考慮一種情況即可。起初，先在每個奇數區塊內各填入 1 個 0 並在每個偶數區塊內各填入 1 個 1 保持奇偶交錯。以下將 n 分為奇、偶討論：

(一) n 為偶數

$n=2$ 時，$S_{(2,2,0)}=2$。當 $n\geq 4$， $a=1$時，$l_2(0)=n-1>0,\ l_2(1)=0$，矛盾。因此當 $n\geq 4$ 時，有 $2\leq a\leq n$。

1. a 為偶數時，令 $a=2a'(a'=1,2,\dots,\frac{n}{2})$，由於各區塊內皆已有 1 個字元，因此之後再放入的字元皆會使 $l_2(0)$ 或 $l_2(1)$ 增加 1，故此字串滿足 $l_2(0)+l_2(1)=n-a$ ，且為了符合二元平衡 n 字串之條件，故有 $l_2(0)=l_2(1)=\frac{n-a}{2}$ 。因此，應在 a' 個奇數區塊中填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 0，其方法數為 $H^{\frac{a}{2}}_{\frac{n-a}{2}}=C^{\frac{n}{2}-1}_{\frac{n-a}{2}}=C^{\frac{n}{2}-1}_{\frac{a}{2}-1}=C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}$ ，相同的，在 a' 個偶數區塊中亦須填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 1，其方法數為 $C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}$ 。可得總方法數為 $C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}\times C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1}=(C^{\frac{n}{2}-1}_{a'-1})^2$ 。

2. a 為奇數時， $l_2(0)+l_2(1)=n-a$ ，且需符合 $l_2(0)=l_2(1)=\frac{n-a}{2}$，但 n 為偶數， a 為奇數，故 $\frac{n-a}{2}$ 不為整數，在此情況下找不到符合的二元平衡 n 字串。

根據上述，當 n 為偶數時，二元平衡 n 字串之個數為

$$S_{(n,2,0)} = 2\sum_{a'=1}^{\frac{n}{2}} (C_{a'-1}^{\frac{n}{2}-1})^2 = 2\sum_{a'=1}^{\frac{n}{2}} C_{a'-1}^{\frac{n}{2}-1} \times C_{\frac{n}{2}-a'}^{\frac{n}{2}-1}$$

以生成多項式的角度來看，可將其視為求

$2\times(x+1)^{n-2} = 2\times(x+1)^{\frac{n}{2}-1}\times(x+1)^{\frac{n}{2}-1}$ 之 $x^{\frac{n}{2}-1}$ 項係數，故

$$S_{(n,2,0)} = 2\sum_{a'=1}^{\frac{n}{2}} C_{a'-1}^{\frac{n}{2}-1} \times C_{\frac{n}{2}-a'}^{\frac{n}{2}-1} = 2C_{\frac{n}{2}-1}^{n-2} = 2C_{[\frac{n}{2}]-1}^{n-2}$$

(二) n 為奇數

$n=1$ 時，$S_{(1,2,0)} = 2$，當$n \ge 3, a = 1$時，$l_2(0) \ne l_2(1)$，矛盾，因此 $2 \le a \le n$。

1. a 為偶數時，$l_2(0) + l_2(1) = n - a$，須符合 $l_2(0) = l_2(1) = \frac{n-a}{2}$，但 n 為奇數，a 為偶數，故 $\frac{n-a}{2}$ 不為整數，在此情況下找不到符合的二元平衡 n 字串。

2. a 為奇數時，令 $a = 2a' + 1,\ a' = 1,2,\dots,\frac{n-1}{2}$，$l_2(0) + l_2(1) = n - a$，則 $l_2(0) = l_2(1) = \frac{n-a}{2}$。因此，應在 $\frac{a+1}{2}$ 個奇數區塊中填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 0，其方法數為 $H_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{a+1}{2}} = C_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{n+1}{2}-1} = C_{\frac{a-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} = C_{a'}^{\frac{n-1}{2}}$，並在 $\frac{a-1}{2}$ 個偶數區塊中填入 $\frac{n-a}{2}$ 個 1，其方法數為 $H_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{a-1}{2}} = C_{\frac{n-a}{2}}^{\frac{n-1}{2}-1} = C_{\frac{a-3}{2}}^{\frac{n-3}{2}} = C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}$，所以總方法數為 $C_{a'}^{\frac{n-1}{2}} \times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}$。

根據上述，當 n 為偶數時，二元平衡 n 字串之個數為

$$S_{(n,2,0)} = 2\sum_{a'=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{a'}^{\frac{n-1}{2}} \times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}} = 2\sum_{a'=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{\frac{n-1}{2}-a'}^{\frac{n-1}{2}} \times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}}$$

以生成多項式的角度來看，可將其視為求

$2\times(x+1)^{n-2} = 2\times(x+1)^{\frac{n-1}{2}}\times(x+1)^{\frac{n-3}{2}}$之$x^{\frac{n-3}{2}}$項係數，故

$$S_{(n,2,0)} = 2\sum_{a'=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{\frac{n-1}{2}-a'}^{\frac{n-1}{2}} \times C_{a'-1}^{\frac{n-3}{2}} = 2C_{\frac{n-3}{2}}^{n-2} = 2C_{[\frac{n}{2}]-1}^{n-2}.$$

二、二元 3 平衡 n 字串之關係式

關係式 1

定義$M_{(n,a,b_1,b_2)}$為在$\left[\frac{a+1}{2}\right]$個區塊中取$b_1$個區塊、在$\left[\frac{a}{2}\right]$個區塊中取$b_2$個區塊之總方法數；

$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$為在b_1個區塊中填入c個0、b_2個區塊中填入c個1之總方法數；

$$\text{集合}A_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}\ \middle|\ \begin{array}{c} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}, \\ a\geq 2;\ b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c\geq 1, \\ a+b_1+b_2+2c=n \end{array}\right\},$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\times H_c^{b_2}$$

定義 $n(T)$ 代表集合 T 內所有元素的個數；

則有以下公式：

$$S_{(n,3,0)}=2\left(F_{n+1}+\sum_{i=1}^{n(A_n)}x_i\right),$$

其中 $x_i\in A_n$.

【說明】

在推導二元 3 平衡 n 字串之關係式時，我們將利用二元平衡 n 字串之解法加以延伸。並將 $l_3(0)=l_3(1)=0$ 與 $l_3(0)=l_3(1)>0$ 之個數分開討論。

(一) $l_3(0)=l_3(1)=0$

假設字串有 x 個單字元區塊($0-block$ 或 $1-block$)， y 個雙字元區塊($00-block$或 $11-block$)，而字串必須符合 $l_3(0)=l_3(1)=0$，因此，不會出現長度為 3 以上的區塊，故有 $x+2y=n,x,y\in\mathbb{N}_0$。我們先討論單字元區塊與雙字元區塊的所有排列情形。

1. 當 n 為奇數時，其解為$(\mathrm{n},0)$, $(n-2,1)\ldots\left(3,\frac{n-3}{2}\right)$, $\left(1,\frac{n-1}{2}\right)$ ，則排列數總和為

$$C_0^n+C_1^{n-1}+\cdots+C_{\frac{n-3}{2}}^{\frac{n+3}{2}}+C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C_i^{n-i}$$

2. 當 n 為偶數時，其解為$(\mathrm{n},0)$, $(n-2,1)\ldots\left(2,\frac{n-2}{2}\right)$, $\left(0,\frac{n}{2}\right)$，則排列數總和為

$$C_0^n+C_1^{n-1}+\cdots+C_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n+2}{2}}+C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}C_i^{n-i}$$

當字串內區塊的排列已決定後，只剩下考慮「第奇數個區塊皆填入 0 且第偶數個區塊皆填入 1」和「第奇數個區塊皆填入 1 且第偶數個區塊皆填入 0」兩種可能。綜合上述二式，得二元 3 平衡 n 字串之個數為

$$2\left(C_0^{n}+C_1^{n-1}+\cdots+C_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}^{\left[\frac{n+3}{2}\right]}+C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)=2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_i^{n-i},$$

由文獻探討及前置研究(二)得

$$2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_i^{n-i}=2F_{n+1}.$$

(二) $l_3(0)=l_3(1)>0$

在這個情況中，$l_3(0),\ l_3(1)\geq 1$，故 $n\geq 6$。以下分三個步驟來解決此問題。

1. 將二元 n 字串分成 a 個區塊，並限制 0 只能放入第奇數個區塊內，而 1 只能放入第偶數個區塊內。起初，先在奇數區塊內各放入 1 個 0，並在偶數區塊內各放入 1 個 1。此外，因為 $l_3(0),\ l_3(1)>0$，故 $a\geq 2$。(說明：步驟 1 結束後，此二元 3 平衡 n 字串處於未完成的狀態，每一個區塊皆僅放入 1 個字元。)
2. 接著，在奇數區塊中取 b_1 個再各填入 1 個 0 使其成為 $\mathbf{00-block}$，而奇數區塊有 $\left[\frac{a+1}{2}\right]$ 個，且須符合 $l_3(0)>0$，故 $1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right]$。在偶數區塊中取 b_2 個再各填入 1 個 1 使其成為 $\mathbf{11-block}$，而偶數區塊有 $\left[\frac{a}{2}\right]$ 個，且需符合 $l_3(1)>0$，故 $1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right]$。其解的個數為 $M_{(n,a,b_1,b_2)}$，則

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}.$$

(說明：步驟 2 結束後，此二元 3 平衡 n 字串仍處於未完成的狀態，然而有些區塊已放入 2 個字元，這些區塊成為了 $\boldsymbol{k-block\ (for\ k\geq 3)}$ 的候補。)
3. 將剩下的字元填入雙字元區塊中，當每填一個字元進入 $\mathbf{2-block}$時，$l_3(0)$或 $l_3(1)$ 便會增加 1，而為符合$l_3(0)=l_3(1)$，剩餘$\mathrm{n-a}-b_1-b_2$個字元必為偶數，0,1各 $\frac{\mathrm{n-a}-b_1-b_2}{2}$ 個。令 $c=\frac{n-a-b_1-b_2}{2}$，為滿足 $l_3(0)=l_3(1)>0$，故 $c\geq 1$。其方法數為 $M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$，則

$$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}=H_c^{b_1}\times H_c^{b_2}=C_c^{c+b_1-1}\times C_c^{c+b_2-1}.$$

其關係式可被歸納為為

$$(a,b_1,b_2,c)\begin{cases} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}\\ a\geq 2;\ b_1\leq\left[\dfrac{a+1}{2}\right];\ b_2\leq\left[\dfrac{a}{2}\right];\ c\geq 1\\ a+b_1+b_2+2c=n\end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\times H_c^{b_2}$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$A_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}\ \middle|\ \begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N},\\ a\geq 2;\ b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c\geq 1,\\ a+b_1+b_2+2c=n\end{array}\right\}，則在$$

$l_3(0)=l_3(1)>0$ 之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為 $2\sum_{i=1}^{n(A_n)}x_i$。

綜上，

$$S_{(n,3,0)}=2\left(F_{n+1}+\sum_{i=1}^{n(A_n)}x_i\right).$$

我們將上式利用 Python 程式運算 $S_{(n,3,0)}$ 之值，計算 $n=1$ 至 $n=100$，皆與 OEIS 資料吻合(參考資料四)，其中前幾項為$2,4,6,10,16,28,46,82,142,256,460$，由於其規律隱晦不明，於是我們轉而探討二元 3 非平衡 n 字串之關係式，並觀察其性質。

三、二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 之遞迴式探討

定理二

二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 個數之遞迴式 r_n 為：

$$r_n=\sum_{i=1}^{r-1}r_{(n-i)}\text{ ,當 }n\geq r$$

【說明】

將滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 的二元 r 平衡 n 字串分成 $r-1$ 種情況討論：

1. 若此二元 r 平衡 n 字串的開頭為一長度 1 的 $block$，則在此情況下剩餘字元 $n-1$ 個字元的排列方法數須滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$，故方法數為 $r_{(n-1)}$。
2. 若此二元 r 平衡 n 字串的開頭為一長度 2 的 $block$，則在此情況下剩餘字元 $n-2$ 個字元的排列方法數須滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$，故方法數為 $r_{(n-2)}$。

以此類推， 若此二元 r 平衡 n 字串的開頭為一長度 $r-1$ 的 $block$，則在此情況下剩餘字元 $n-r+1$ 個字元的排列方法數須滿足 $l_r(0)=l_r(1)=0$，故方法數為 $r_{(n-r+1)}$。故二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0)=l_r(1)=0$ 之遞迴式 r_n 為

$$r_n=\sum_{i=1}^{r-1}r_{(n-i)}\text{ ,當 }n\geq r$$

四、二元 3 非平衡 n 字串之關係式探討

關係式 2

$$\text{定義集合 } B_n=\left\{C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_2}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0,\\ a\geq 2;\ b_1=0;1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c=m,\\ a+b_2=n-m\end{matrix}\right\};$$

$$\text{集合 } C_n=\left\{C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0,\\ a\geq 1;1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2=0;c=m,\\ a+b_1=n-m\end{matrix}\right\};$$

$$\text{集合 } D_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N},\\ a\geq 2;\ 1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c\geq m,\\ a+b_1+b_2+2c=n+m\end{matrix}\right\};$$

其中，定義$M_{(n,a,b_1,b_2)}$為在$\left[\frac{a+1}{2}\right]$個區塊中取$b_1$個區塊、$\left[\frac{a}{2}\right]$個區塊中取$b_2$個區塊之方法數；

$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$為在b_1個區塊中填入c個0、b_2個區塊中填入$c-m$個1 或在b_1個區塊中填入$c-m$個0、b_2個區塊中填入c個1之總方法數。

因此 $M_{(n,a,b_1,b_2)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}, M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=H_c^{b_1}\times H_{c-m}^{b_2}+H_{c-m}^{b_1}\times H_c^{b_2},$

則有以下公式：

$$S_{(n,3,m)}=2\left(\sum_{i=1}^{n(B_n)}x_i+\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(C_n)}y_i+\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)}z_i\right),\mathrm{m}\geq 1,$$

其中$x_i\in B_n,\ y_i\in C_n,\ z_i\in D_n.$

【說明】

我們將二元 3 平衡 n 字串的討論方法延伸以解決此問題，以下變數的涵義亦與其相同。

先考慮 0 為開頭時的個數。假設 $|l_3(0)-l_3(1)|=m$，當 $m=0$ 時，字串為一個二元 3 平衡 n 字串，並非我們要討論的範圍，故 $m\geq 1$，且$n\geq 3$。而 $\max(m)$ 發生在字串 n 個字元全部為 0 時，$l_3(0)=n-2$，故可知 $m\leq n-2$，因此 $1\leq m\leq n-2$，$m\in\mathbb{N}$。假設 $n-2\geq c\geq 1$，則當 $l_3(0)=c$ 時，$l_3(1)=c-m$；當 $l_3(0)=c-m$ 時，$l_3(1)=c$。在討論二元 3 平衡 n 字串時，需符合之條件為 $l_3(0)=l_3(1)=c$，而此狀況為$(\,l_3(0),l_3(1)\,)=(c,c-m)$或$(c-m,c)$，故滿足之前狀況的方程式 $a+b_1+b_2+2c=n$ 須改為 $a+b_1+b_2+c+(c-m)=n$，以下我們將 b_1、b_2 分成 4 個狀況討論。

(一) $b_1=b_2=0$

因為$b_1=b_2=0$，代表字串 $l_2(0)=l_2(1)=0$，由此可知 $l_3(0)=l_3(1)=0$, $c=0$，所以$m=0<1$，矛盾。

(二) $b_1=0,\ b_2>0$

1. 因為 $b_2>0$，代表此字串必包含 1，故 $a\geq 2$，且根據二元 3 平衡 n 字串之討論，

   $1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right]$。

2. 因為 $b_1=0$，則由(一)知 $l_3(0)=0$，但 $c\geq 1$，故在此狀況下 $l_3(0)\neq c$，因此

$l_3(0),\ l_3(1)$只有 1 種可能，即為 $l_3(0)=c-m=0$，$l_3(1)=c$，並可得 $c=m$。

3. (a,b_1,b_2,c)須滿足方程式 $a+b_1+b_2+c+(c-m)=a+b_2+m=n$，移項後得$a+b_2=n-m$。

根據上述，$M_{(n,a,b_1,b_2)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}=C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}$；$M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=H_c^{b_2}$，故其關係式可歸納為

$$(a,b_1,b_2,c)\begin{cases} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0, \\ a\geq 2;\ b_1=0;1\leq b_2\leq\left[\dfrac{a}{2}\right];c=m, \\ a+b_2=n-m \end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_2}.$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$B_n=\left\{C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_2}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0, \\ a\geq 2;\ b_1=0;1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c=m, \\ a+b_2=n-m \end{matrix}\right\}$$

，則在 $b_1=0,\ b_2>0$、$|l_3(0)-l_3(1)|=m$ 之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為$2\sum_{i=1}^{n(B_n)}x_i$，其中 $x_i\in B_n$。

(三) $b_1>0,\ b_2=0$

1. 因為 $b_2=0$，代表此字串有可能不包含 1，故 $a\geq 1$。根據二元 3 平衡 n 字串之討論，可知 $1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right]$。
2. 因為 $b_2=0$，由(一)知 $l_3(1)=0$，但 $c\geq 1$，故在此狀況下 $l_3(1)\neq c$，因此 $l_3(0),\ l_3(1)$只有 1 種可能，即為 $l_3(0)=c, l_3(1)=c-m=0$，並可得 $c=m$。
3. (a,b_1,b_2,c)須滿足方程式 $a+b_1+b_2+c+(c-m)=a+b_1+m=n$，移項後得$a+b_1=n-m$。

根據上述，$M_{(n,a,b_1,b_2)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}$；$M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=H_c^{b_1}$，故其關係式可歸納為

$$(a,b_1,b_2,c)\begin{cases} a,b_1,b_2,c\ \epsilon\mathbb{N}_0, \\ a\geq 1;1\leq b_1\leq\left[\dfrac{a+1}{2}\right];\ b_2=0;\ c=m\ , \\ a+b_1=n-m \end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times H_c^{b_1}.$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$C_n=\left\{C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\ \middle|\ \begin{matrix} a,b_1,b_2,c\epsilon\mathbb{N}_0, \\ a\geq 1;1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2=0;c=m, \\ a+b_1=n-m \end{matrix}\right\}$$

，則在 $b_1>0,\ b_2=0$、$|l_3(0)-l_3(1)|=m$之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為

$2\sum_{i=1}^{n(C_n)} y_i$，其中 $y_i \in C_n$。

(四) $b_1,\ b_2 > 0$

1. 因為$b_1,\ b_2 > 0$，因此 $a \geq 2$。根據二元 3 平衡 n 字串之討論，可知

   $1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]$。

2. $b_1, b_2 > 0$，代表0, 1皆有 $\boldsymbol{2-block}$，故其皆可再填入最後剩餘字元，因此當 $l_3(0) = \mathrm{c}$ 時，$l_3(1) = c - m$；$l_3(0) = c - m$ 時，$l_3(1) = c$。

3. (a, b_1, b_2, c)須滿足方程式$a + b_1 + b_2 + c + (c - m) = n$，移項後得

$$a + b_1 + b_2 + 2c = n + m$$

根據上述，$M_{(n,a,b_1,b_2)} = \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times \mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}$；而放入最後剩餘 $2\mathrm{c} - \mathrm{m}$ 個字元時會有兩種狀況，分別是 0 放 c 個，1 放 $c - m$ 個，其方法數為 $H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2}$ ，及 0 放 $c - m$ 個，1 放 c 個，其方法數為 $H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2}$ ，故 $M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2} + H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2}$，故其關係式可歸納為

$$(a, b_1, b_2, c)\begin{cases} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \geq 2;\ 1 \leq b_1 \leq \left[\dfrac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\dfrac{a}{2}\right]; c \geq m\,, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n + m \end{cases}$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = \mathrm{C}_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times \mathrm{C}_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]} \times (H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2} + H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2})$$

將字串對稱後即可得 1 開頭之所有組合。定義一集合

$$D_n = \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} \middle| \begin{matrix} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \geq 2;\ 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c \geq m, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n + m \end{matrix} \right\}，則$$

在$b_1, b_2 > 0$、$|l_3(0) - l_3(1)| = m$ 之狀況中，二元 3 平衡 n 字串之個數為 $2\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)} z_i$，

其中 $z_i \in D_n$。

綜上所述，

$$S_{(n,3,m)} = 2\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{n}(B_n)} x_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(C_n)} y_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)} z_i\right), \mathrm{m} \geq 1,$$

其中 $x_i \in B_n,\ y_i \in C_n,\ z_i \in D_n$.

三、觀察二元 3 非平衡 n 字串改變 m,n 值時彼此間關係

(一)利用 Python 跑出 $S_{(n,3,m)}$ 之值，並製成以下表格

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
n-2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
n-3		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
n-4			10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
n-5				20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
n-6					44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
n-7						84	100	116	132	148	164	180	196	212
n-8							172	214	258	304	352	402	454	508
n-9								332	430	536	650	772	902	1040
n-10									654	876	1122	1392	1686	2004
n-11										1264	1752	2312	2946	3656
n-12											2466	3516	4754	6190
n-13												4760	6972	9652
n-14													9258	13880
n-15														17908

在表格中我們發現了一些性質並加以探討。以下研究令 $m=n-2$ 所形成的數列為 $\{a_{n(1)}\}$ ， $m=n-(u+1)$ 所形成之數列為 $\{a_{n(u)}\}$。

(二) $\{a_{n(i)}\}$ 之階差探討

> 性質一
>
> $\{a_{n(3k+1)}\},\{a_{n(3k+2)}\},\{a_{n(3k+3)}\}$為一 k 階等差數列，$\mathrm{k}\geq 0$

【證明】

由文獻探討及前置研究(四)可知，若一數列$\{b_n\}$為 p 階等差數列，則有 $\deg b_n=p$。因此我們將問題改為：證明 $\{a_{n(3k+1)}\},\{a_{n(3k+2)}\},\{a_{n(3k+3)}\}$一般式之 $\deg a_{n(3k+1)}=\deg a_{n(3k+2)}=\deg a_{n(3k+3)}=k$。

(說明：$\{a_{n(3k+1)}\}$為$m=n-2-3k, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-3}{3}\right], n\geq 3$所形成的數列，也就是此部分字串皆滿足$|l_3(0)-l_3(1)|=m=n-2-3k$；

而$\{a_{n(3k+2)}\}$為$m=n-3-3k, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-4}{3}\right], n\geq 4$所形成的數列；

$\{a_{n(3k+3)}\}$則為$n-4-3k, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-5}{3}\right], n\geq 5$所形成的數列。)

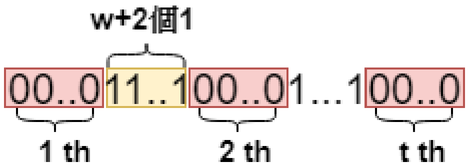
不失一般性，當 $m=n-i-3k$，$i=2,3,4$ 時，假設 $l_3(0)>l_3(1)$、$l_3(1)=w$，則 $l_3(0)=m+l_3(1)=n-i-3k+w$。接著，假設字串中 $\alpha\geq 3$ 之 $\alpha-0-block$ 個數為 t，注意到每個區塊中的前 2 個 0 不能構成一000-子字串，從第三個0起每增加一個0才會多組成一組000子字串，則在 $\alpha-0-block$ 裡0的總數為 $l_3(0)+2t=n-i-3k+w+2t$；同樣地，假設 $\beta\geq 3$ 之 $\beta-1-block$ 個數為 t'，則在 $\beta-1-block$ 裡1的總數為 $l_3(1)+2\,t'=w+2\,t'$，因此，剩餘字元個數為 $n-(n-i-3k+w+2t)-(w+2\,t')=i+3k-2w-2(t+\,t')$。我們先在 t 個 $\alpha-0-block$中各填入 3 個 0，此時 $l_3(0)=t$，之後在這 t 個區塊中再任意放入 $n-i-3k+w-t$ 個 0 以滿足 $l_3(0)=n-i-3k+w$，其方法數為 $H^t_{n-i-3k+w-t}=C^{n-i-3k+w-1}_{t-1}$，也就是此時 n 之最高冪次為 $t-1$；而構成 $\beta-1-block$ 之字元 1 與剩餘字元可填入 $t-1$ 個 $\alpha-0-block$ 之間隔與字串頭尾內，共有 $t+1$ 個位置可選擇，然而其並不會影響 n 之冪次。因此，得出 $\deg a_{n(3k+i)}=\max(t-1)$，$i=1,2,3$，故我們將問題再改為：

證明 $\deg a_{n(3k+i)}=\max(t-1)=k$，也就是證明當

$$m=\begin{cases} n-2-3k, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-3}{3}\right], n\geq 3 \\ n-3-3k, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-4}{3}\right], n\geq 4 \\ n-4-3k,, k=0,1,\ldots,\left[\frac{n-5}{3}\right], n\geq 5 \end{cases},\ l_3(0)>l_3(1)\text{時，}$$

$\alpha\geq 3$ 之 $\alpha-0-block$ 個數 t 最多為 $k+1$ 個。

字串中$\alpha\geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數為 t，且 $\alpha-0-block$ 內 0 之總數為 $n-2-3k+w+2t$ 個。再者，這 t 個區塊彼此間必須包含至少 1 個 1 作為間隔，總共為 $t-1$個，且 $l_3(1)=w$，故至少需再放 $w+1$個 1 進入 1 個 $1-block$內。如下圖所示：(紅色框代表$\alpha-0-block$，黃色框代表$\beta-1-block$)



綜合上述，可得出以下關係式

$$n-i-3k+w+2t+(t-1)+(w+1)\leq n$$

移項後得

$$(2w+1)+3t\leq 3k+1+i, i=2,3,4$$

當 $w=0$ 時 $w+1$ 個 1 亦不需放入 $1-block$ 內，此時不等式為

$$3t\leq 3k+1+i\longrightarrow t\leq k+\left[\frac{1+i}{3}\right], i=2,3,4\longrightarrow t\leq k+1$$

可得 $\max(t-1)=k$，故得證。

(三) k 階等差數列之 $\Delta^k a_n$ 一般式

性質二
$$\Delta^k a_{n(3k+1)} = 2,\ \mathrm{k} \geq 0.$$

【證明】

由文獻探討及前置研究(三)、(四)可知，p 階等差數列 $\{a_n\}$ 一般式之 $\deg a_n = p$，且 $\{\Delta^{p+1} a_n\}$ 為一零數列，因此求 $\Delta^k a_{n(3k+1)}$ 不須考慮其一般式之 n^i 項，其中 $i = 0,1,\dots,k-1$。由性質一：$\{a_{n(3k+1)}\}$為一 k 階等差數列，意即其一般式之 $\deg a_n = k$ ，因此我們只需討論 n^k項即可，而又由性質一之討論可知：此字串為一 $m =\ n-2-3k$形式之字串，且產生 n^k 之字串發生在 $w =\ 0,\ t = k+1$ ，也就是字串滿足 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$個數$= k+1$時。

以下我們將上述情況之排列方法分為兩個部分來討論，分別是字串滿足 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$個數$= k+1$時。

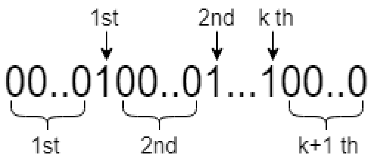
1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha - 0 - block$ 內排列方法的個數

   此時區塊內0的總數為$n-2-3k+2t = n-2-3k+2(k+1) = n-k$個，且因為每個區塊內0之個數必$\geq 3$，因此我們先在區塊內各填入3個0，則剩餘 $n-4k-3$ 個0則可任意填入這 $k+1$ 個區塊中，其方法數為

   $$H_{n-4k-3}^{k+1} = C_k^{n-3k-3}.$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

   由 1.知所有 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數內 0 的總數為 $n-k$ 個，故剩餘字元為 k 個，而 $k+1$ 個區塊兩兩間必須用至少 1 個 1 區隔，總共為 k 個，故剩餘字元之排列方法只有 1 個，所成字串為：



由上述 2 點可得，在 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k+1$之條件下，二元 3 非平衡 n 字串排列個數為

$$C_k^{n-3k-3} \times 1 = C_k^{n-3k-3}.$$

依據對稱性，$l_3(1) = n-2-3k,\ l_3(0) = 0$且$\alpha \geq 3$之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k+1$之個數亦為 C_k^{n-3k-3}，故其總數為 $2C_k^{n-3k-3}$ 。

由文獻探討及前置研究(五)—差分關係式可知，$\Delta C_p^n = C_p^{n+1} - C_p^n = C_{p-1}^n$，由此可延伸推出：$\Delta^p C_p^n = \Delta^{p-1} C_{p-1}^n = \Delta^{p-2} C_{p-2}^n = \cdots = \Delta C_1^n = C_0^n = 1$，故

$$\Delta^k a_{n(3k+1)} \equiv \Delta^k 2C_k^{n-3k-3} = 2\Delta^k C_k^{n-3k-3} = 2.$$

性質三
$$\Delta^k a_{n(3k+2)} = 2k+4,\ \mathrm{k} \geq 0.$$

【證明】

由性質一知$\deg a_{n(3k+2)} = k$，又由性質二可知：求 $\Delta^k a_{n(3k+2)}$ 不須考慮其一般式之 n^i 項，其中 $i = 0,1,\dots,k-1$ ，因此在此狀況中也只需考慮 n^k 項即可。依性質

一，其發生於 $w=\ 0, t=k+1$ ，也就是字串滿足 $l_3(0)=n-3-3k, l_3(1)=0$且 $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$=k+1$時。

以下將上述情況之排列方法分為兩個部分來討論，分別是$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內排列方法的個數和剩餘字元排列方法的個數。

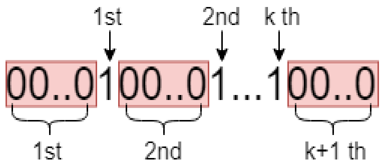
1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內排列方法個數

此時區塊內0之總數為 $n-2-3k+2t=n-3-3k+2(k+1)=n-k-1$ 個，先在各個區塊內填入3個0，因此剩餘 $n-4k-4$ 個0可任意填入這 $k+1$ 個區塊中，其方法數為

$$H_{n-4k-4}^{k+1}=C_k^{n-3k-4}$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

由 1.知所有$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內 0 的總數為 $n-k-1$ 個，故剩餘字元為 $k+1$ 個，而其中有 k 個 1 必須作為 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha-0-block$ 間彼此之區隔，而最後一個字元的擺放方法如下圖所示(紅色區域內不可放置)：



若最後一個字元為0，不難發現不管將它擺放於字串何處都會使 $l_3(0)$ 增加 1，而違反條件，故最後一個字元必為1，且1不能放入$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內(紅色方框範圍)，否則會違反原先規則，並改變$l_3(0)$之值，故它只能放入區塊間的間隙與頭尾，共 $k+2$ 個位置，故剩餘字元之排列方法個數為 $k+2$ 個。

由上述 2 點可得：在 $l_3(0)=n-3-3k,\ l_3(1)=0$ 且 $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$=k+1$之條件下，二元 3 非平衡 n 字串排列個數為

$$C_k^{n-3k-4}\times(k+2)=(k+2)C_k^{n-3k-4}.$$

依據對稱性，$l_3(1)=n-3-3k,\ l_3(0)=0$且 $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$=k+1$之個數亦為 $(k+2)C_k^{n-3k-4}$，故其總數為 $(2k+4)C_k^{n-3k-4}$。因此，

$$\Delta^k a_{n(3k+2)}\equiv\Delta^k(2k+4)C_k^{n-3k-4}=(2k+4)\Delta^k C_k^{n-3k-4}=2k+4.$$

性質四
$$\Delta^k a_{n(3k+3)}=k^2+5k+10.$$

【證明】

由性質一知 $a_{n(3k+3)}$ 為一 k 階多項式，又由性質二之敘述可知，求 $\Delta^k a_{n(3k+3)}$不需考慮其一般式之 n^i 項，其中 $i=0,1,\ldots,k-1$ ，因此我們也只需考慮 n^k 項即可。依性質一，其發生於 $w=\ 0, t=k+1$ ，也就是字串滿足 $l_3(0)=n-4-3k,\ l_3(1)=0$ 且$\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 個數$=k+1$時。

以下分為兩個部分討論上述情況之排列方法。

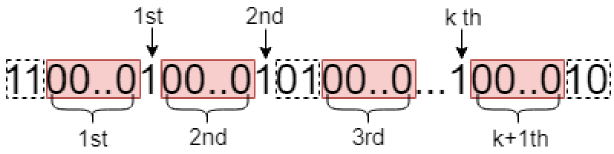
1. $\alpha \geq 3$之 $\alpha-0-block$ 內排列方法個數

此時區塊內0之總數為 $n-4-3k+2t=n-k-2$ 個，且先在各個區塊內填入3個0，因此剩餘 $n-4k-5$ 個0可任意填入這 $k+1$ 個區塊中，其方法數為

$$H_{n-4k-5}^{k+1} = C_k^{n-3k-5}.$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

由 1.知所有 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內0的總數為 $n-k-2$ 個，故剩餘字元為 $k+2$ 個，而其中有 k 個1必須作為 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 間彼此之區隔，而最後兩個字元的擺放方法如下圖所示：



若最後兩個字元一起填入頭尾，如虛線方框所示，一個位置只有 2 種方法，總共有 2 個位置，故為 4 種方法；若最後兩個字元一起填入 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 之間隙內，如虛線方框所示，一個位置只有 1 種方法，總共有 k 個位置，故為 k 種方法；若最後兩個字元填入不同位置，則如性質三之討論，字元皆必須為 1，故其方法數為從 $k+2$ 個位置中任取兩個，即 C_2^{k+2} ，故總數為

$$4 + \mathrm{k} + C_2^{k+2} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5$$

由上述 2 點可得，在 $l_3(0) = n - 4 - 3k, l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數$= k+1$ 之條件下，二元 3 平衡 n 字串排列個數為

$$C_k^{n-3k-5} \times \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5\right) = \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5\right) C_k^{n-3k-5}$$

依據對稱性，$l_3(1) = n - 4 - 3k,\ l_3(0) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數$=$ $k+1$之個數亦為 $\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 5\right) C_k^{n-3k-5}$，故其總數為 $(k^2 + 5k + 10)C_k^{n-3k-5}$ 。

因此，

$$\Delta^k a_{n(3k+3)} \equiv \Delta^k (k^2 + 5k + 10) C_k^{n-3k-5}$$
$$= (k^2 + 5k + 10)\Delta^k C_k^{n-3k-5} = (k^2 + 5k + 10)$$

以下表格為 k 值不同時之 $\Delta^k a_{n(3k+j)},\ j = 1,2,3$

	$\Delta^k a_{n(3k+1)}$	$\Delta^k a_{n(3k+2)}$	$\Delta^k a_{n(3k+3)}$
$k=0$	2	4	10
$k=1$	2	6	16
$k=2$	2	8	24
$k=3$	2	20	44
$k=4$	2	12	56
$k=5$	2	14	70
$k=6$	2	16	86
$k=7$	2	18	104

性質五
$$\Delta^k a_{n(3k+j)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+j+1)} = \Delta^k a_{n(3k+j+1)}, k \geq 1, j = 1,2$$

【證明】

以下分為 $j = 1, j = 2$來討論

1. $j = 1$

$$\Delta^k a_{n(3k+1)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+2)} = 2 + 2(k-1) + 4 = 2k + 4 = \Delta^k a_{n(3k+2)}$$

2. $j = 2$

$$\Delta^k a_{n(3k+2)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+3)} = 2k + 4 + (k-1)^2 + 5(k-1) + 10$$
$$= k^2 + 5k + 10 = \Delta^k a_{n(3k+3)}.$$

綜上述兩點，原式得證。

四、 $\Delta^t a_1$ 求解過程與性質

以下我們列出一部分在不同 m 值下之 $\Delta^t a_1$ 值：

m	a_1	$\Delta^1 a_1$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^3 a_1$	$\Delta^4 a_1$	$\Delta^5 a_1$	$\Delta^6 a_1$
n − 2	2						
n − 3	4						
n − 4	10						
n − 5	20	2					
n − 6	44	6					
n − 7	84	16					
n − 8	172	42	2				
n − 9	332	98	8				
n − 10	654	222	24				
n − 11	1246	488	72	2			
n − 12	2466	1050	188	10			
n − 13	4760	2212	468	34			
n − 14	9258	4622	1126	112	2		
n − 15	17908	9528	2612	324	12		
n − 16	34792	19520	5918	874	46		
n − 17	67488	29708	13164	2270	164	2	
n − 18	131232	80402	28790	5642	518	14	
n − 19	255168	162080	62172	13618	1504	60	
n − 20	497062	325796	132828	32106	4174	230	2

(將每一橫排的 $\Delta^t a_1$ 值帶入前置研究及文獻探討(四)—
$a_n = a_1 + \Delta^1 a_1 C_1^{n-1} + \Delta^2 a_1 C_2^{n-1} + \cdots + \Delta^p a_1 C_p^{n-1}$中即可得出
$m = n - i - 3k,\ i = 2, 3, 4$ 時，其形成的 k 階等差數列之組合表達式。)

將上表每行直排之 $\Delta^t a_1$ 向上移 $3t$ 格，發現每一橫排會形成一 r 階等差數列 $(r = 0,1,2 \ldots)$，其對應到之 $\Delta^t a_1$ 依 m 值不同其值亦不同，紅、綠、藍排分別表示

$m = n-2-3k, m = n-3-3k, m = n-4-3k$三種 m 之不同形式。令第一列數列為 $b_{(u,0)}$，第μ列數列為$b_{(u,\mu-1)}$。如下表：

		a_1	$\Delta^1 a_1$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^3 a_1$	$\Delta^4 a_1$	$\Delta^5 a_1$	$\Delta^6 a_1$	$\Delta^7 a_1$
0 階	$b_{(u,0)}$ $\Delta^k a_1$	2	2	2	2	2	2	2	2
1 階	$b_{(u,1)}$ $\Delta^k a_1$	4	6	8	10	12	14	16	18
2 階	$b_{(u,2)}$ $\Delta^k a_1$	10	16	24	34	46	60	76	94
3 階	$b_{(u,3)}$ $\Delta^{k-1} a_1$	20	42	72	112	164	230	312	412
4 階	$b_{(u,4)}$ $\Delta^{k-1} a_1$	44	98	188	324	518	784	1138	1598
5 階	$b_{(u,5)}$ $\Delta^{k-1} a_1$	84	222	468	874	1504	2436	3764	5600
6 階	$b_{(u,6)}$ $\Delta^{k-2} a_1$	172	488	1126	2270	4174	7176	11714	18344
7 階	$b_{(u,7)}$ $\Delta^{k-2} a_1$	332	1050	2612	5642	11048	20112	34596	56866
8 階	$b_{(u,8)}$ $\Delta^{k-2} a_1$	654	2212	5918	13618	28232	54164	97824	168280
9 階	$b_{(u,9)}$ $\Delta^{k-3} a_1$	1246	4622	13164	32106	70200	141438	267320	479822

性質六

$$\{b_{(u,s)}\}\text{為一s階等差數列，}s \geq 0$$

【證明】

依上表可知，證明$\{b_{(u,s)}\}$為一s階等差數列，等價於證明當 $m = n-i-3k$ $(i = 2,3,4)$時，$\{\Delta^{k-j} a_1\}$ $(j = 0,1,2\ldots k)$為一 $3j+i'(i' = 0,1,2)$階等差數列，又等價於證明$\deg \Delta^{k-j} a_1 = 3j + i'$(在此將$\Delta^{k-j} a_1$視為一對於 k 值之函數)。

在性質二、三、四中我們已證明了 $j = 0$ 時之一般式，也就是 $\Delta^k a_1$ (因為 $m = n-i-3k$ $(i = 2,3,4)$所形成之數列$\left\{ a_{n(3k+i')} \right\}$ $(i' = 1,2,3)$ 其 $\deg a_{n(3k+i')} = k$，故 $\{\Delta^k a_n\}$ 為一常數數列，意即$\Delta^k a_n = \Delta^k a_1$)，分別是：$m = n-2-3k, \Delta^k a_1 = 2$ (0階等差數列)；$m = n-3-3k, \Delta^k a_1 = 2k+4$ (1 階等差數列)；$m = n-4-3k$, $\Delta^k a_1 = k^2+5k+10$(2階等差數列)，其做法皆為在會出現 n^k 之狀況中(即字串滿足 $l_3(0) = n-2-3k,\ l_3(1) = 0$ 且 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 個數 $= k+1$)，討論 $\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 外之剩餘字元排列方法數，相似地，在求 $\deg \Delta^{k-j} a_1$ 時，我們考慮

數列$\left\{ a_{n(3k+i')} \right\}$ $(i' = 1,2,3)$ 一般式之 n^{k-j} 項係數。

由文獻探討及前置研究(四)-- p 階等差數列之組合表達式可知，會影響 n^{k-j} 之係數的有 $\Delta^k a_1 C_k^{n-1}$, $\Delta^{k-1} a_1 C_{k-1}^{n-1} \dots \Delta^{k-j} a_1 C_{k-j}^{n-1}$，且由性質二、三、四可知，$C_{k-\mu}^{n-1}$影響的是n 的冪次(也就是字串 $\alpha \geq 3$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內排列方法個數)，而 $\Delta^{k-\gamma} a_1$ $(\gamma = 0, 1 \dots j)$影響的則是係數冪次(也就是剩餘字元排列方法個數)。

$\Delta^{k-\gamma} a_n$ $(\gamma = 0, 1 \dots j)$所對應到的 n 之最高冪次為$k - \gamma$，代表$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - \gamma + 1$。假設 $l_3(0) = n - i - 3k + w, l_3(1) = w$ $(i = 2, 3, 4)$，則 $\alpha - 0 - block$ 內0的總數為 $n - i - 3k + w + 2(k - \gamma + 1) = n - i - k + 2 - 2\gamma + w$ 個，因此剩餘個數為 $i + k - 2 + 2\gamma - w$ 個(此時 i, k 為定值)。顯然，$\deg$ $\boldsymbol{n^{k-j}}$**之係數** (其亦為一對於 k 之函數)發生在剩餘個數最多之時，即$\max(i + k - 2 + 2\gamma - w)$，其為字串在$\gamma = j, w = 0$之狀況下，因此$\max(i + k - 2 + 2\gamma - w) = i + k - 2 + 2j$，也就是$\deg$ $\boldsymbol{n^{k-j}}$**之係數** $= \deg \Delta^{k-j} a_1$。

以下將其分為 3 個部分來討論：

1. 當$m = n - 2 - 3k$，

此時 $i = 2$，$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - j + 1,$

max(剩餘個數) $= i + k - 2 + 2j = k + 2j$個，而其中有 $k - j$ 個 1 必須作為區塊彼此間之間隔，則剩餘字元個數為 $3j$ 個，因此剩餘之 $3j$ 個字元可以放入 $k - j$ 個間隔與頭尾 2 個位置中，其方法數為

$$H_{3j}^{k-j+2} = C_{3j}^{k+2j+1},$$

故得其最高冪次為 $3j$ ，即 $\deg$ $\boldsymbol{n^{k-j}}$**之係數** $= 3j$。

2. 當$m = n - 3 - 3k$，

此時 $i = 3$，$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - j + 1,$

max(剩餘個數) $= i + k - 2 + 2j = k + 2j + 1$個，而其中有 $k - j$ 個 1 必須作為區塊彼此間之間隔，則剩餘字元個數為 $3j + 1$ 個，因此剩餘之 $3j + 1$ 個字元可以放入 $k - j$ 個間隔與頭尾 2 個位置中，其方法數為

$$H_{3j+1}^{k-j+2} = C_{3j+1}^{k+2j+1},$$

故得其最高冪次為 $3j + 1$ ，即 $\deg$ $\boldsymbol{n^{k-j}}$**之係數** $= 3j + 1$。

3. 當$m = n - 4 - 3k$，

此時 $i = 4$，$\alpha \geq 3, \alpha - 0 - block$ 個數$= k - j + 1,$

max(剩餘個數) $= i + k - 2 + 2j = k + 2j + 2$個，而其中有 $k - j$ 個 1 必須作為區塊彼此間之間隔，則剩餘字元個數為 $3j + 2$ 個，因此剩餘之 $3j + 2$ 個字元可以放入 $k - j$ 個間隔與頭尾 2 個位置中，其方法數為

$$H_{3j+2}^{k-j+2} = C_{3j+2}^{k+2j+1},$$

故得其最高冪次為 $3j + 1$，即 $\deg$ $\boldsymbol{n^{k-j}}$**之係數** $= 3j + 2$。

綜合上述，當$m = n - i - 3k$ $(i = 2, 3, 4)$時，

$\deg$ $\boldsymbol{n^{k-j}}$**之係數** $= 3j + i'(i' = 0,1,2) = \deg \Delta^{k-j} a_1$，故性質得證。

五、二元 3 平衡 n 字串個數之表達式

以下我們列出一些 $\{b_{(u,s)}\}, s \geq 0$ 之組合表達式：

$b_{(u,0)}$	2
$b_{(u,1)}$	$2C_1^{u-1}+4$
$b_{(u,2)}$	$2C_2^{u-1}+6C_1^{u-1}+10$
$b_{(u,3)}$	$2C_3^{u-1}+8C_2^{u-1}+22C_1^{u-1}+20$
$b_{(u,4)}$	$2C_4^{u-1}+10C_3^{u-1}+36C_2^{u-1}+54C_1^{u-1}+44$
$b_{(u,5)}$	$2C_5^{u-1}+12C_4^{u-1}+52C_3^{u-1}+108C_2^{u-1}+138C_1^{u-1}+84$
$b_{(u,6)}$	$2C_6^{u-1}+14C_5^{u-1}+70C_4^{u-1}+184C_3^{u-1}+322C_2^{u-1}+316C_1^{u-1}+172$
$b_{(u,7)}$	$2C_7^{u-1}+16C_6^{u-1}+90C_5^{u-1}+284C_4^{u-1}+624C_3^{u-1}+844C_2^{u-1}+718C_1^{u-1}+332$

接著，將其帶入 $a_{n(u)}\ (u=1,2\ldots)$之組合表達式內可得

$$a_{n(3k+1)}=b_{(k+1,0)}C_k^{n-1}+b_{(k,3)}C_{k-1}^{n-1}+\cdots+b_{(1,3k)}C_0^{n-1}=\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i)}C_{k-i}^{n-1}\,;$$

$$a_{n(3k+2)}=b_{(k+1,1)}C_k^{n-1}+b_{(k,4)}C_{k-1}^{n-1}+\cdots+b_{(1,3k+1)}C_0^{n-1}=\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+1)}C_{k-i}^{n-1}\,;$$

$$a_{n(3k+3)}=b_{(k+1,2)}C_k^{n-1}+b_{(k,5)}C_{k-1}^{n-1}+\cdots+b_{(1,3k+2)}C_0^{n-1}=\sum_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+2)}C_{k-i}^{n-1}\,.$$

歸納上式，則

$$a_{n(u)}=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+1\\ \sum\limits_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+1)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+2\\ \sum\limits_{i=0}^{k}b_{(k+1-i,3i+2)}C_{k-i}^{n-1}, & u=3k+3\end{cases}.$$

有了 $a_{n(u)}$ 之表達式後，就能將二元3非平衡 n 字串個數之表達式表示出來。二元 3 非平衡 n 字串之個數為 $\sum_{m=1}^{n-2}S_{(n,3,m)}$，以下將其令為 $S'_n(n\geq 3)$。二元 3 非平衡 n 字串個數之表達式為：

S'_3	$a_{1(1)}$
S'_4	$a_{2(1)}+a_{1(2)}$
S'_5	$a_{3(1)}+a_{2(2)}+a_{1(3)}$
S'_6	$a_{4(1)}+a_{3(2)}+a_{2(3)}+a_{1(4)}$
S'_7	$a_{5(1)}+a_{4(2)}+a_{3(3)}+a_{2(4)}+a_{1(5)}$
S'_8	$a_{6(1)}+a_{5(2)}+a_{4(3)}+a_{3(4)}+a_{2(5)}+a_{1(6)}$

由上表可得

$$S'_n = a_{n-2(1)} + a_{n-3(2)} + \cdots + a_{1(n-2)} = \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1-i(i)}.$$

因此，二元平衡 n 字串個數之表達式為

$$S_{(n,3,0)} = \begin{cases} 2, & n=1 \\ 4, & n=2 \\ 2^n - S'_n, & n \geq 3 \end{cases}.$$

六、二元 r 非平衡 n 字串改變 m, n 值時彼此間關係

當我們將二元3非平衡 n 字串之特性推廣到二元 r 非平衡 n 字串時，能得出相關特性與特徵方程式。以下之研究令 $m = n-(r-1)$ 所形成的數列為 $\{c_{n(1)}\}$，$m = n-(r+i-2)$ 所形成之數列為 $\{c_{n(i)}\}$。

性質七
二元 r 非平衡 n 字串$\{c_{n(rk+1)}\}, \{c_{n(rk+2)}\}, \dots, \{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階等差數列，$k \geq 0$

【證明】

由性質一之證明可知，證明 $\{c_{n(rk+1)}\}, \{c_{n(rk+2)}\}, \dots, \{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階等差數列等價於證明 $\deg c_{n(rk+1)} = \deg c_{n(rk+2)} = \cdots = \deg c_{n(rk+r)} = k$。(此為一關於 n 之函數)

(說明：$\{c_{n(rk+1)}\}$為一 $\mathrm{m} = n-(r-1)-rk, k = 1,2,\dots,\left[\frac{n-r}{r}\right], n \geq r$

所形成之數列，也就是此部分字串皆滿足$|l_r(0)-l_r(1)| = m = n-(r-1)-rk$；而

$\{c_{n(rk+2)}\}$為一 $n-r-rk, k=1,2,\dots,\left[\frac{n-r-1}{r}\right], n \geq r+1$ 所形成之數列，以此類推；

$\{c_{n(rk+r)}\}$為 $\mathrm{m} = n-(2r-2)-rk, k = 1,2,\dots,\left[\frac{n-2r+1}{r}\right], n \geq 2r-1$ 所形成之數列。)

不失一般性，當 $m = n-i-rk, i = (r-1), r, \dots, (2r-2)$ 時，

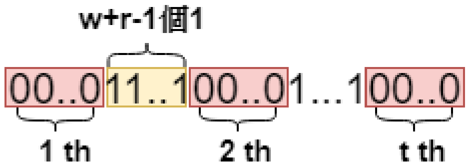
假設 $l_r(0) > l_r(1)$、 $l_r(1) = w$，則$l_r(0) = m + l_r(1) = n-i-rk+w$。接著，

假設$\alpha \geq \mathrm{r}$ 之 $\alpha-0-block$ 個數為 t，注意到每個區塊中的前 $\mathrm{r}-1$個0不能構成一r-0-子字串，從第r個0起每增加一個0才會多組成一組r-0子字串，則在 $\alpha-0-block$ 裡0的總數為$l_r(0)+(r-1)t = n-i-rk+w+rt-t$；同樣地，假設$\beta \geq r$ 之 $\beta-1-block$ 個數為 t'，則在 $\beta-1-block$ 裡1的總數為 $l_r(1)+(r-1)t' = w+rt'-t'$個，因此，剩餘字元個數為 $n-(n-i-rk+w+rt-t)-(w+rt'-t')$

$= i+rk-2w-(r-1)(t+t')$ 個。我們先在t 個 $\alpha-0-block$中各填入 r 個 0，此時 $l_r(0) = t$，之後在這 t 個區塊中再任意填入 $n-i-rk+w-t$ 個0以滿足 $l_r(0) = n-i-rk+w$，其方法數為 $H^t_{n-i-rk+w-t} = C^{n-i-rk+w-1}_{t-1}$，其形成 n 之最高冪次為 $t-1$，而構成 $\beta-1-block$ 之字元1與剩餘字元可填入 $t-1$ 個 $\alpha-0-block$ 之間隔與字串頭尾內，共有 $t+1$ 個位置可選擇，然而其並不會影響 n 之冪次。因此能得出 $\deg c_{n(rk+i)} = \max(t-1), i = 1,2\dots r$，故我們將問題改為：

證明$\deg c_{n(rk+i)} = \max(t-1) = k$，意即證明 $\max t = k+1$。

字串中$\alpha \geq r$之 $\alpha-0-block$ 個數為 t ，且 $\alpha-0-block$ 內 0 的總數為$n-i-rk+w+rt-t$個。再者，而在 t 個區塊兩兩間至少需填入 1 個 1 作為區隔，總共為 $t-1$個，且 $l_r(1)=w$，因此至少需再填入 $w+r-2$ 個 1 進入其中一個區塊間隔內。如下圖所示：(紅色框為$\alpha-0-block$，黃色框為$\beta-1-block$)



故能得出以下關係式

$$(n-i-rk+w+tr-t)+(t-1)+(w+r-2) \leq n，$$

移項後得

$$tr+(2w+r-2) \leq rk+1+i, i=r-1,r,\dots,2r-2$$

當 $w=0$ 時，$w+r-2$個 1 亦不須放入$1-block$內，此時不等式為

$$tr \leq rk+1+i, i=r-1,r,\dots,2r-2$$

$$\Rightarrow t \leq k+\left[\frac{j}{r}\right], j=r,r+1,\dots,2r-1$$

$$\Rightarrow t \leq k+1,$$

可得 $\max(t-1)=k$，故得證。

性質八

$$\Delta^k c_{n(u)}=\begin{cases} 2, & u=rk+1 \\ 2k+4, & u=rk+2 \\ 2\times\left(\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{a-1}\times 2^{\delta}\right), & u=rk+i\ (i=3,4\dots r-1) \\ 2\times\left[\left(\sum_{\delta=0}^{r-2} C_{r-1-\delta}^{k+2}\times C_{\delta}^{r-2}\times 2^{\delta}\right)-k\right], & u=rk+r \end{cases}$$

$$(a=i-(r-1))$$

【證明】

由性質七知，$\{c_{n(rk+1)}\},\{c_{n(rk+2)}\},\dots,\{c_{n(rk+r)}\}$一般式之 $\deg c_{n(rk+1)}=\deg c_{n(rk+2)}=\cdots=\deg c_{n(rk+r)}=k$，且由性質二之敘述可知，求 $\Delta^k c_{n(rk+i)}, i=1,2,\dots,r$ 不需考慮其一般式之 $n^{i'}$ 項，其中$i'=0,1,\dots,\ k-1$，因此只需考慮 n^k 項即可。依性質七， n^k 項對應的排列情形為$w=0,\ t=k+1$，也就是字串滿足$l_r(0)=n-i-rk\ (i=r-1,r,\dots,2r-2),\ l_r(1)=0$，且$\alpha \geq r$之 $\alpha-0-block$ 個數為$k+1$時。

首先討論 $l_r(0)>l_r(1)$之狀況。以下將此排列情形分成兩部分討論。

1. $\alpha \geq r$之$\alpha-0-block$內排列方法個數

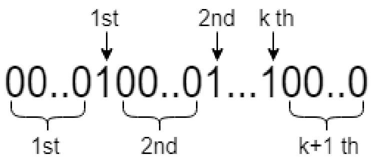
   此時$\alpha \geq r$ 之 $\alpha-0-block$ 內 0 的總數為 $n-i-rk+(r-1)(k+1) = n+r-k-1-i, i=r-1,r,\dots,2r-2$個。我們先在 $k+1$ 個區塊內各放入 r 個 0，而剩餘 $n-rk-k-1-i$ 個 0 則可任意填入 $k+1$ 個區塊內，方法數為：

$$H_{n-rk-k-1-i}^{k+1} = C_k^{n-rk-1-i}$$

2. 剩餘字元排列方法的個數

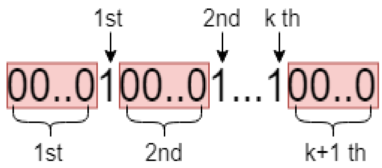
I. $i = r-1 \Rightarrow m = n-(r-1)-rk$

由 1.知 $\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n+r-k-1-i = n+r-k-1-(r-1) = n-k$個，則剩餘字元數為 k 個。在 $k+1$ 個區塊彼此間至少須用 1 個 1 作為區隔，總共為 k 個，故此排列方法為 1 個。其形式如下：



II. $i = r \Rightarrow m = n-r-rk$

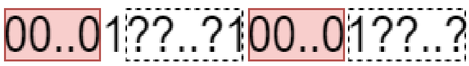
由 1.知$\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n+r-k-1-i = n+r-k-1-r = n-k-1$個，則剩餘字元數為 $k+1$ 個。將 k 個作為區塊間之間隔後還剩餘 1 個，它可填入方式如下圖所示：



若最後一個字元為 0，不管將它擺放於字串何處都會使$l_r(0)$增加 1，違反條件，故最後一個字元為 1，且 1 不能放入 $\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內(紅色方框範圍)，否則會違反規則且改變 $l_r(0)$ 之值，故它只能放入區塊間的間隙與字串頭尾，共 $k+2$ 個位置，因此剩餘字元之排列方法個數為 $k+2$ 個。

III. $m = n-i-rk,\ i = r+1, r+2 \ldots 2r-3$

由 1.知$\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n+r-k-1-i$, $i = r+1, r+2, \ldots, 2r-3$個，故剩餘字元數為 $k+i-(r-1)$個，將 k 個字元作為區塊間之間隔後還剩下 $i-(r-1)$ 個字元。設 $a = i-(r-1)$, $i = r+1, r+2 \ldots 2r-3$，則 $a = 2,3,\ldots,r-2$，其填入字串方法如圖所示：



字串共有 $k+2$ 個位置可使剩餘字元填入，假設填入位置數量為 j, $j = 1,2,\ldots,a$，則其選擇位置方法有 C_j^{k+2} 種方式。再者，每個選擇的位置皆會有一個字元與紅色方框相鄰，故其只能填入1以保持 $l_r(0)$ 不變，共有j個 (即虛線方框中的1，前虛線方框為間隙之填法，而後虛線方框為字串頭尾之填法)，共有 j 個。而剩下 $a-j$ 個字元可任意填入 j 個位置內，方法數為 $H_{a-j}^{j} = C_{j-1}^{a-1}$, $j = 1,2,\ldots,a$，且$\max(\text{任一間隙中的字元數目}) = a+1$

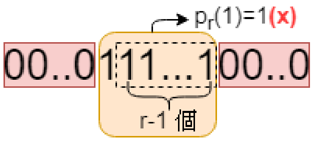
$= r-1$，無法組成任何一組 $r-0-block$ 或 $r-1-block$，故剩餘 $a-j$

個字元可填入 0 或 1，方法數為 2^{a-j}。令 $\delta = a - j$ ，其總方法數為

$$\sum_{j=1}^{a} C_j^{k+2} \times C_{j-1}^{a-1} \times 2^{a-j} = \sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{a-1} \times 2^{\delta}$$

IV. $i = 2r - 2 \Rightarrow m = n - (2r - 2) - rk$

由 1.知$\alpha \geq r$ 之 $\alpha - 0 - block$ 內 0 的總數為 $n + r - k - 1 - i = n + r - k - 1 - (2r - 2) = n - r - k + 1$個，故剩餘字元數為 $r + k - 1$ 個，將 k 個字元作為區塊間之間隔後還剩$r - 1$ 個字元。其填入方法與情況三類似，差異在當 $j = 1$ 時，若其位置為兩兩區塊間的間隙，且全部字元均為 1，會與原本作為區隔的 1 形成一組 $r - 1 - block$，$l_r(1) = 1$，違反條件，故須扣除此情形，因共有 k 個間隙，故不符合之情形為 k 個。不符合方法如下圖所示：



在此狀況下 $a = r - 1$，故總方法數為

$$\left(\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{a-1} \times 2^{\delta}\right) - k = \left(\sum_{\delta=0}^{r-2} C_{r-1-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{r-2} \times 2^{\delta}\right) - k.$$

依據對稱性，$l_r(1) > l_r(0)$之個數= $l_r(0) > l_r(1)$之個數，故總數需× 2。由性質二、三、四可知，$\Delta^k C_k^{n-rk-1-i} = 1$，故

$$\Delta^k c_{n(rk+s)}, s = 1,2, \ldots, r = 2 \times (\text{剩餘字元排列方法的個數})$$

七、二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}$ $(i = 2, 3)$之探討

(一)二元平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}}$探討

定理三

二元平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}} = 2$

【證明】

由研究結果二可得二元平衡 n 字串個數之一般式為 $\begin{cases} S_{(1,2,0)} = S_{(2,2,0)} = 2 \\ n \geq 3, S_{(n,2,0)} = 2C_{[\frac{n}{2}]-1}^{n-2} \end{cases}$，以下將 n 分為奇偶來證明。

1. n 為奇數

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2C^{n-2}_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}{2C^{n-3}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{C^{n-2}_{\frac{n-3}{2}}}{C^{n-3}_{\frac{n-3}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\times\frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\frac{n-1}{2}}=2.$$

2. n 為偶數

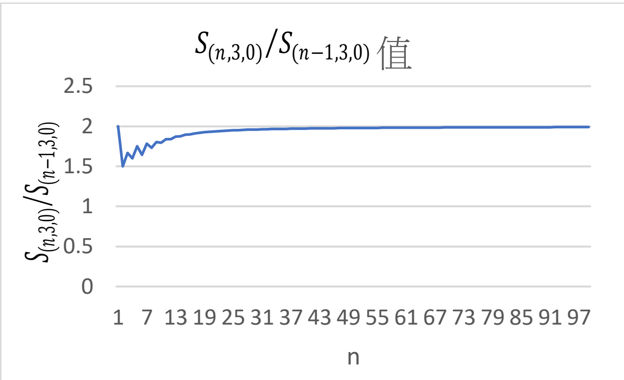
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2C^{n-2}_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}{2C^{n-3}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}}{C^{n-3}_{\frac{n-4}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\times\frac{\left(\frac{n-4}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{(n-3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\frac{n-2}{2}}=2.$$

故得證。

(二)二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$ 探討

在這個狀況中我們尚無法給出完整的證明，但將 $\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$ 值製作成折線圖，如下：



由折線圖可以觀察到，隨著 n 值變大，$\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$ 會漸趨近於 2，因此我們推測

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}=2$。

柒、討論

一、在進行本研究時，我們曾嘗試不同方式來解決二元 3 平衡 n 字串之一般式。我們從討論 $\alpha\geq 3, \boldsymbol{\alpha-0-block}$的數目，發現其不同數目之排列情形可前後對應，據此推導出**二元 3 非平衡 n 字串滿足 $l_3(0)=m, l_3(1)=0$個數之遞迴式**，這方法雖然突破了先前方法無法求得的結果。然而其缺點在於當$l_3(1)$變大時，需討論的排列狀況會越來越繁雜，故我們也還未能利用此法解決二元 3 平衡 n 字串之一般式。

二、本研究希望利用$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$來估算二元3平衡$n$字串個數之成長速度。而我們認為未來可以先利用**證明當字串數目增加1時，排列方法數增加的量不會比原本字串數目之排列方法數多**，證明$\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$會收斂，接著可以嘗試利用**夾擠定理**探討 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}}$之值。

三、未來，我們除了繼續探討二元3平衡n字串之一般式外，也希望能將二元3平衡n字串諸多性質延伸至二元r平衡n字串上，最後能推導出二元r平衡n字串之一般式。再者，此專題是探討有關 0, 1 排列的問題，未來若有進一步的研究與探討，可以將其應用在**密碼學**上，拓展加解密之方法。

捌、 結論

我們先給出二元平衡 n 字串的新解法，接著延伸探討二元 3 平衡 n 字串、二元 3 非平衡 n 字串之個數，給出其關係式並用 $python$ 跑出其值，其關係式如下：

一、二元平衡 n 字串個數之一般式為 $\begin{cases} S_{(1,2,0)} = S_{(2,2,0)} = 2 \\ S_{(n,2,0)} = 2C^{n-2}_{[\frac{n}{2}]-1}, n \geq 3 \end{cases}$ 。

二、二元 3 平衡 n 字串個數之關係式為

$$S_{(n,3,0)} = 2\left(F_{n+1} + \sum_{i=1}^{n(A_n)} x_i\right)$$

$$\text{其中 } x_i \in A_n \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c)} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N} \\ a \geq 2;\ b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c \geq 1 \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n \end{array} \right\},$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c)} = \mathrm{C}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}_{b_1} \times \mathrm{C}^{\left[\frac{a}{2}\right]}_{b_2} \times H^{b_1}_{c} \times H^{b_2}_{c}.$$

三、二元 r 平衡 n 字串 $l_r(0) = l_r(1) = 0$ 個數之遞迴式 r_n 為

$$r_n = \sum_{i=1}^{r-1} r_{(n-i)}\ \text{, 當 } n \geq r.$$

四、二元 3 非平衡 n 字串個數之關係式為

$$S_{(n,3,m)} = 2\left(\sum_{i=1}^{n(B_n)} x_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(C_n)} y_i + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}(D_n)} z_i\right), \mathrm{m} \geq 1$$

$$\text{其中} x_i \in A_n = \left\{ \mathrm{C}^{\left[\frac{a}{2}\right]}_{b_2} \times H^{b_2}_{c} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \geq 2;\ b_1 = 0; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c = m, \\ a + b_2 = n - m \end{array} \right\};$$

$$y_i \in B_n = \left\{ \mathrm{C}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}_{b_1} \times H^{b_1}_{c} \middle| \begin{array}{c} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}_0, \\ a \geq 1; 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2 = 0; c = m, \\ a + b_1 = n - m \end{array} \right\};$$

$$z_i \in C_n = \left\{ M_{(n,a,b_1,b_2)} \times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} \middle| \begin{matrix} a, b_1, b_2, c \epsilon \mathbb{N}, \\ a \geq 2;\ 1 \leq b_1 \leq \left[\frac{a+1}{2}\right]; 1 \leq b_2 \leq \left[\frac{a}{2}\right]; c \geq m, \\ a + b_1 + b_2 + 2c = n + m \end{matrix} \right\};$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)} = C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]} \times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}, M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)} = H_c^{b_1} \times H_{c-m}^{b_2} + H_{c-m}^{b_1} \times H_c^{b_2}.$$

接著，我們發現二元 3 非平衡 n 字串個數在不同 n, m 值時會產生如下之特性：

五、$\{a_{n(3k+1)}\}, \{a_{n(3k+2)}\}, \{a_{n(3k+3)}\}$為一 k 階等差數列，$k \geq 0$。

六、k 階等差數列之 $\Delta^k a_n$ 一般式：$\begin{cases} \Delta^k a_{n(3k+1)} = 2 \\ \Delta^k a_{n(3k+2)} = 2k + 4 \\ \Delta^k a_{n(3k+3)} = k^2 + 5k + 10 \end{cases}, k \geq 0.$

七、$\Delta^k a_{n(3k+j)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+j+1)} = \Delta^k a_{n(3k+j+1)}, k \geq 1,\ j = 1,2.$

進一步地，我們探討$\Delta^t a_1$的性質：

八、$\{b_{(u,s)}\}$為一s階等差數列，$s \geq 0$。

綜合上述性質，將二元 3 平衡 n 字串之表達式表示出來：

九、以下列出一些 $\{b_{(n,s-1)}\}$ 之組合表達式：

$b_{(n,0)}$	2
$b_{(n,1)}$	$2C_1^{n-1} + 4$
$b_{(n,2)}$	$2C_2^{n-1} + 6C_1^{n-1} + 10$
$b_{(n,3)}$	$2C_3^{n-1} + 8C_2^{n-1} + 22C_1^{n-1} + 20$
$b_{(n,4)}$	$2C_4^{n-1} + 10C_3^{n-1} + 36C_2^{n-1} + 54C_1^{n-1} + 44$
$b_{(n,5)}$	$2C_5^{n-1} + 12C_4^{n-1} + 52C_3^{n-1} + 108C_2^{n-1} + 138C_1^{n-1} + 84$
$b_{(n,6)}$	$2C_6^{n-1} + 14C_5^{n-1} + 70C_4^{n-1} + 184C_3^{n-1} + 322C_2^{n-1} + 316C_1^{n-1} + 172$

十、$a_{n(u)}$ 之表達式：

$$a_{n(u)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i)} C_{k-i}^{n-1}, & u = 3k+1 \\ \sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i+1)} C_{k-i}^{n-1}, & u = 3k+2 \\ \sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i+2)} C_{k-i}^{n-1}, & u = 3k+3 \end{cases}.$$

十一、　二元 3 非平衡 n 字串⇒二元 3 平衡 n 字串個數之表達式：

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1-i(i)} \ \Rightarrow\ S_{(n,3,0)} = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 4, & n = 2 \\ 2^n - S'_n, & n \geq 3 \end{cases}.$$

我們將其推廣到二元非 r 平衡 n 字串，發現也有類似性質。如下：

十二、　二元 r 平衡 n 字串$\{c_{n(rk+1)}\}, \{c_{n(rk+2)}\}, \dots, \{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階等差數列，$k \geq 0$。

十三、　二元 r 平衡 n 字串之最高階差一般式（以下$a = i - (r-1)$）

$$
\Delta^k c_{n(u)} = \begin{cases} 2, & u = rk+1 \\ 2k+4, & u = rk+2 \\ 2 \times \left(\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{a-1} \times 2^{\delta} \right), & u = rk+i \ (i = 3,4 \ldots r-1) \\ 2 \times \left[\left(\sum_{\delta=0}^{r-2} C_{r-1-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{r-2} \times 2^{\delta} \right) - k \right], & u = rk+r \end{cases}
$$

最後，我們探討二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,i,0)}}{S_{(n-1,i,0)}}, i = 2, 3$。如下：

十四、　二元平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}} = 2$。

十五、　推測二元 3 平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}} = 2$。

總結來說，本研究以三個面向來探討二元 3 平衡 n 字串個數的問題，其成果分別為：**直接推導出算式**：可將算式輸入 *python*，計算二元 3 平衡/非平衡 n 字串之符合個數，幫助我們發現非平衡時字串的諸多性質；**反面解法**：此為本研究重點，發現、證明了非平衡字串個數彼此間存在漂亮的階差性質，並嘗試利用這些性質推導二元 3 平衡 n 字串個數的一般式；**個數成長速度**：推論當 n 很大時，二元 3 平衡 n 字串個數會以趨近於 2 倍速成長。

玖、 參考資料及其他

[1]　全國高中數學能力競賽歷屆試題

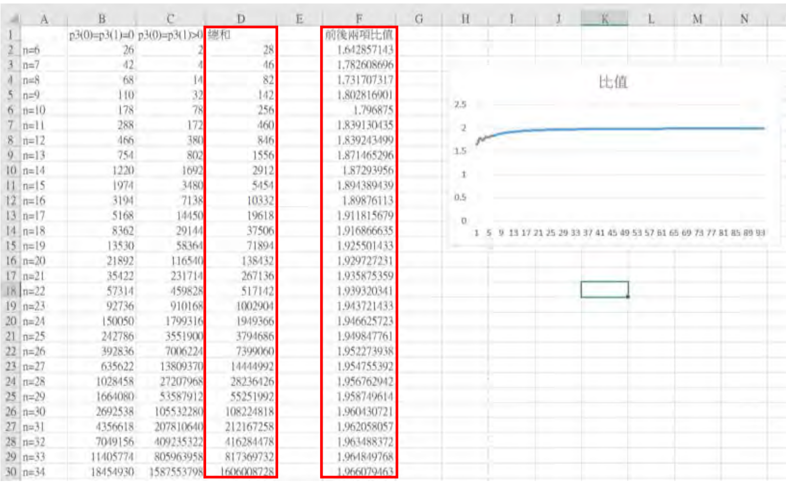
[2]　王佳怡、吳思穎—階差數列的解法初探
http://www.shs.edu.tw/works/essay/2011/11/2011110815042866.pdf

[3]　林開亮—微積分之前奏(或變奏)：高階等差數列的求和
https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d411/41107.pdf

[4]　https://oeis.org/A158422

附錄

一、二元 3 平衡 n 字串之個數及其前後項比值



	A	B	C	D	E	F
1		p3(0)=p3(1)=0	p3(0)=p3(1)>0	總和		前後兩項比值
2	n=6	26	2	28		1.642857143
3	n=7	42	4	46		1.782608696
4	n=8	68	14	82		1.731707317
5	n=9	110	32	142		1.802816901
6	n=10	178	78	256		1.796875
7	n=11	288	172	460		1.839130435
8	n=12	466	380	846		1.839243499
9	n=13	754	802	1556		1.871465296
10	n=14	1220	1692	2912		1.87293956
11	n=15	1974	3480	5454		1.894389439
12	n=16	3194	7138	10332		1.89876113
13	n=17	5168	14450	19618		1.911815679
14	n=18	8362	29144	37506		1.916866635
15	n=19	13530	58364	71894		1.925501433
16	n=20	21892	116540	138432		1.929727231
17	n=21	35422	231714	267136		1.935875359
18	n=22	57314	459828	517142		1.939320341
19	n=23	92736	910168	1002904		1.943721433
20	n=24	150050	1799316	1949366		1.946625723
21	n=25	242786	3551900	3794686		1.949847761
22	n=26	392836	7006224	7399060		1.952273938
23	n=27	635622	13809370	14444992		1.954755392
24	n=28	1028458	27207968	28236426		1.956762942
25	n=29	1664080	53587912	55251992		1.958749614
26	n=30	2692538	105532280	108224818		1.960430721
27	n=31	4356618	207810640	212167258		1.962058057
28	n=32	7049156	409235322	416284478		1.963488372
29	n=33	11405774	805963958	817369732		1.964849768
30	n=34	18454930	1587553798	1606008728		1.966079463

二、二元 3 非平衡 n 字串之個數及前後項差值(即數列$\{a_{n(u)}\},\{\Delta^1 a_{n(u)}\},\{\Delta^2 a_{n(u)}\}$)

- $a_{n(u)}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1		m=n-2	m=n-3	m=n-4	m=n-5	m=n-6	m=n-7	m=n-8	m=n-9	m=n-10	m=n-11	m=n-12	m=n-13	m=n-14	m=n-15	m=n-16	m=n-17	m=n-18	m=n-19	m=n-20	m=n-21	m=n-22
2	n=3	2																				
3	n=4	2	4																			
4	n=5	2	4	10																		
5	n=6	2	4	10	20																	
6	n=7	2	4	10	22	44																
7	n=8	2	4	10	24	50	84															
8	n=9	2	4	10	26	56	100	172														
9	n=10	2	4	10	28	62	116	214	332													
10	n=11	2	4	10	30	68	132	258	430	654												
11	n=12	2	4	10	32	74	148	304	536	876	1264											
12	n=13	2	4	10	34	80	164	352	650	1122	1752	2466										
13	n=14	2	4	10	36	86	180	402	772	1392	2312	3516	4760									
14	n=15	2	4	10	38	92	196	454	902	1686	2946	4754	6972	9258								
15	n=16	2	4	10	40	98	212	508	1040	2004	3656	6190	9652	13880	17908							
16	n=17	2	4	10	42	104	228	564	1186	2346	4444	7834	12834	19628	27436	34792						
17	n=18	2	4	10	44	110	244	622	1340	2712	5312	9696	16552	26614	39576	54312	67488					
18	n=19	2	4	10	46	116	260	682	1502	3102	6262	11786	20840	34952	54652	79750	107196	131232				
19	n=20	2	4	10	48	122	276	744	1672	3516	7296	14114	25732	44758	73000	111980	160068	211634	255168			
20	n=21	2	4	10	50	128	292	808	1850	3954	8416	16690	31262	56150	94968	151922	228374	320826	417248	497062		
21	n=22	2	4	10	52	134	308	874	2036	4416	9624	19524	37464	69248	120916	200542	314548	464450	641500	822858	968652	
22	n=23	2	4	10	54	140	324	942	2230	4902	10922	22626	44372	84174	151216	258852	421190	648666	941542	1281482	1621594	189
23	n=24	2	4	10	56	146	340	1012	2432	5412	12312	26006	52020	101052	186252	327910	551068	880166	1332496	1905040	2555688	319
24	n=25	2	4	10	58	152	356	1084	2642	5946	13796	29674	60442	120008	226420	408820	707120	1166188	1831048	2729812	3845036	509
25	n=26	2	4	10	60	158	372	1158	2860	6504	15376	33640	69672	141170	272128	502732	892456	1514530	2455508	3796482	5574788	774
26	n=27	2	4	10	62	164	388	1234	3086	7086	17054	37914	79744	164668	323796	610842	1110360	1933564	3225870	5150370	7841926	1135
27	n=28	2	4	10	64	170	404	1312	3320	7692	18832	42506	90692	190634	381856	734392	1364292	2432250	4163872	6841666	10756064	1615

- $\Delta^1 a_{n(u)}$

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	6	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	6	16	42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2	6	16	44	98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	6	16	46	106	222	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	2	6	16	48	114	246	488	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	6	16	50	122	270	560	1050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	2	6	16	52	130	294	634	1238	2212	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	2	6	16	54	138	318	710	1436	2680	4622	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	2	6	16	56	146	342	788	1644	3182	5748	9528	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	2	6	16	58	154	366	868	1862	3718	6986	12140	19520	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	2	6	16	60	162	390	950	2090	4288	8338	15076	25438	39708	0	0	0	0	0	0	0	0
18	2	6	16	62	170	414	1034	2328	4892	9806	18348	32230	52872	80402	0	0	0	0	0	0	0
19	2	6	16	64	178	438	1120	2576	5530	11392	21968	39942	68306	109192	162080	0	0	0	0	0	0
20	2	6	16	66	186	462	1208	2834	6202	13098	25948	48620	86174	143624	224252	325796	0	0	0	0	0
21	2	6	16	68	194	486	1298	3102	6908	14926	30300	58310	106642	184216	300042	458624	652942	0	0	0	0
22	2	6	16	70	202	510	1390	3380	7648	16878	35036	69058	129878	231500	390954	623558	934094	1306122	0	0	0
23	2	6	16	72	210	534	1484	3668	8422	18956	40168	80910	156052	286022	498552	824772	1289348	1896762	2607860	0	0
24	2	6	16	74	218	558	1580	3966	9230	21162	45708	93912	185336	348342	624460	1066670	1729752	2655600	3840556	5200154	0
25	2	6	16	76	226	582	1678	4274	10072	23498	51668	108110	217904	419034	770362	1353888	2267138	3610868	5449620	7758526	10357138
26	2	6	16	78	234	606	1778	4592	10948	25966	58060	123550	253932	498686	938002	1691296	2914138	4793234	7505252	11148624	15641582
27	2	6	16	80	242	630	1880	4920	11858	28568	64896	140278	293598	587900	1129184	2084000	3684200	6235878	10084828	15540736	22744888
28	2	6	16	82	250	654	1984	5258	12802	31306	72188	158340	337082	687292	1345772	2537344	4591604	7974568	13273212	21125262	32071928

- $\Delta^2 a_{n(u)}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	8	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	8	24	72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	2	8	24	74	188	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	8	24	76	198	468	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	8	24	78	208	502	1126	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	2	8	24	80	218	536	1238	2612	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2	8	24	82	228	570	1352	2936	5918	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	8	24	84	238	604	1468	3272	6792	13164	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	2	8	24	86	248	638	1586	3620	7712	15434	28790	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	8	24	88	258	672	1706	3980	8678	17868	34432	62172	0	0	0	0	0	0	0
13	2	8	24	90	268	706	1828	4352	9690	20468	40592	75790	132828	0	0	0	0	0	0
14	2	8	24	92	278	740	1952	4736	10748	23236	47284	90912	164934	281152	0	0	0	0	0
15	2	8	24	94	288	774	2078	5132	11852	26174	54522	107598	201214	355254	590640	0	0	0	0
16	2	8	24	96	298	808	2206	5540	13002	29284	62320	125908	241898	440404	758838	1232696	0	0	0
17	2	8	24	98	308	842	2336	5960	14198	32568	70692	145902	287218	537386	955268	1609064	2558372	0	0
18	2	8	24	100	318	876	2468	6392	15440	36028	79652	167640	337408	647000	1182366	2055632	3390098	5284444	0
19	2	8	24	102	328	910	2602	6836	16728	39666	89214	191182	392704	770062	1442644	2579576	4392112	7103306	10870298
20	2	8	24	104	338	944	2738	7292	18062	43484	99392	216588	453344	907404	1738690	3188384	5584526	9327040	14811474
21	2	8	24	106	348	978	2876	7760	19442	47484	110200	243918	519568	1059874	2073168	3889858	6988590	12009810	19698886
22	2	8	24	108	358	1012	3016	8240	20868	51668	121652	273232	591618	1228336	2448818	4692116	8626710	15209544	25673972

三、二元 4 非平衡 n 字串之個數

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		m=n-3	m=n-4	m=n-5	m=n-6	m=n-7	m=n-8	m=n-9	m=n-10	m=n-11	m=n-12	m=n-13	m=n-14	m=n-15	m=n-16	m=n-17	m=n-18	m=n-19	m=n-20	m=n-21	m=n-22
2	n=4	2																			
3	n=5	2	4																		
4	n=6	2	4	10																	
5	n=7	2	4	10	24																
6	n=8	2	4	10	24	52															
7	n=9	2	4	10	24	54	116														
8	n=10	2	4	10	24	56	122	244													
9	n=11	2	4	10	24	58	128	262	516												
10	n=12	2	4	10	24	60	134	280	564	1070											
11	n=13	2	4	10	24	62	140	298	612	1194	2220										
12	n=14	2	4	10	24	64	146	316	660	1320	2526	4536									
13	n=15	2	4	10	24	66	152	334	708	1448	2840	5260	9288								
14	n=16	2	4	10	24	68	158	352	756	1578	3162	6012	10974	18846							
15	n=17	2	4	10	24	70	164	370	804	1710	3492	6792	12744	22680	38264						
16	n=18	2	4	10	24	72	170	388	852	1844	3830	7600	14598	26756	46890	77240					
17	n=19	2	4	10	24	74	176	406	900	1980	4176	8436	16536	31076	56176	96314	155996				
18	n=20	2	4	10	24	76	182	424	948	2118	4530	9300	18558	35642	66132	117102	197878	313908			
19	n=21	2	4	10	24	78	188	442	996	2258	4892	10192	20664	40456	76768	139644	244096	404842	631778		
20	n=22	2	4	10	24	80	194	460	1044	2400	5262	11112	22854	45520	88094	163980	294784	506448	828050	1268728	
21	n=23	2	4	10	24	82	200	478	1092	2544	5640	12060	25128	50836	100120	190150	350076	619148	1050112	1689022	2548090
22	n=24	2	4	10	24	84	206	496	1140	2690	6026	13036	27486	56406	112856	218194	410106	743366	1299218	2170414	3443962
23	n=25	2	4	10	24	86	212	514	1188	2838	6420	14040	29928	62232	126312	248152	475008	879528	1576634	2716434	4482722
24	n=26	2	4	10	24	88	218	532	1236	2988	6822	15072	32454	68316	140498	280064	544916	1028062	1883638	3330666	5673976

四、二元非平衡 n 字串、二元 3 非平衡 n 字串個數之程式碼

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Jan 29 16:31:57 2019

"""

def ex(i):
    re=1
    if(i==0):
        return 1
    for x in range(1,i+1):
        re=re*x
    return re

def combine(a,b):
    l=ex(a)//ex(b)//ex(a-b)
    return l

def calc(a,c,m):
    l=combine((a+1)//2+c-1,c)
    m1=combine((a//2)+c-m-1,c-m)
    n=combine((a+1)//2+c-m-1,c-m)
    o=combine((a//2)+c-1,c)
    return l*m1+n*o

while (1):
    n=int(input('輸入n: '))
    if(n==0):
        break
    for m in range(1,n):
        sum=0
        for a in range(2,n+m):
            c=(n+m-a)//2
            if((n+m-a)%2==0 and c>=m and (n+m-a)>=0):
                sum+=calc(a,c,m)
        print(2*sum)
```

二元非平衡 n 字串個數之程式碼

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat Jan 19 14:01:37 2019
"""

def 階乘(a):
    if(a<=0):
        return 1
    return a*階乘(a-1)


def combine(a,b):
    u=階乘(a)//階乘(b)//階乘(a-b)
    return u


def calc(a,b1,b2,c,m1):
    if(b1==0):
        l=combine(a//2,b2)*combine(b2+c-1,c)
        return l
    if(b2==0):
        l=combine((a+1)//2,b1)*combine(b1+c-1,c)
        return l
    l=combine(a//2,b2)
    m=combine((a+1)//2,b1)
    n=combine(b1+c-1,c)
    o=combine(b2+c-m1-1,c-m1)
    p=combine(b1+c-m1-1,(c-m1))
    q=combine(b2+c-1,c)
    return l*m*n*o+l*m*p*q

while (1):
    n=int(input('輸入n: '))
    if(n==0):
        break
    for m in range(1,n-1):
        sum=0
        for a in range(1,n+m):
            for b1 in range(0,(a+1)//2+1):
                for b2 in range(0,a//2+1):
                    c=(n+m-(a+b1+b2))
                    if(c%2==0):
                        c=c//2
                    else:
                        continue
                    if((b1==b2 and b2==0)or(c>m and b1*b2==0)):
                        continue
                    if(c<m):
                        break
                    else:
                        sum=sum+calc(a,b1,b2,c,m)
        print(2*sum)
```

二元 3 非平衡 n 字串之程式碼

(二元 4 非平衡 n 字串個數之程式碼同理)

【評語】050408

本作品研究在一個 n 位元的 0、1 字串中，出現連續 r 個 0 與連續 r 個 1 的子字串個數相同的情況(稱為二元 r 平衡 n 字串)共有幾種。對於 r=2，作者靠著分析與觀察「區塊數」，得出二元 2 平衡 n 字串的個數公式。對於 r=3，基於同樣對「區塊數」的觀察，作者得出二元 3 平衡 n 字串的個數的「關係式」。但是這個關係式，卻不是一個可以簡單化出這種方式不易被推廣至 r≥4 的情況；建議改採遞迴關係式來表達所希望獲得的答案。

作品海報

摘要

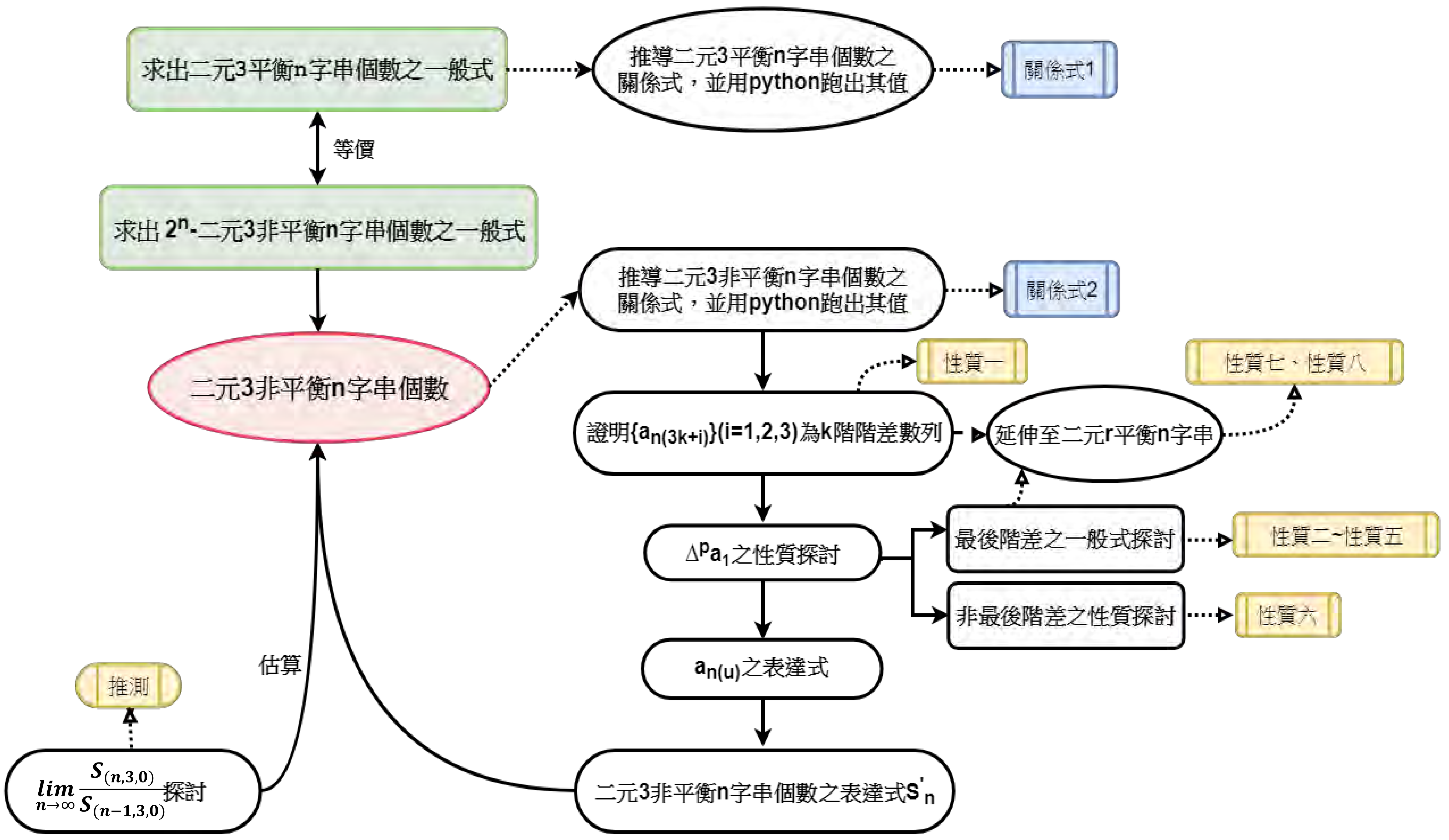
本研究旨在探討由0與1組成長度為n的二元字串中滿足000−子字串數和111−子字串數相同（稱為平衡）之排列方法數。我們從3個面向來探討：一、首先將直接推導出之算式，輸入$python$計算在各種n值下，觀察平衡與非平衡字串個數之規律性；二、接著我們發現非平衡字串個數在000−子字串和111−子字串之差值為一固定形式時，不同長度之字串符合個數會形成一階差數列，我們對此猜測提出證明並嘗試利用此性質推導出二元 3 平衡 n 字串個數之一般式；三、最後探討二元 3 平衡 n 字串個數之成長速度，推論當 n 值極大時，其個數會以趨近2倍速成長。同時，我們也將3平衡推廣至r平衡，提出一些相關的結果。

壹、研究動機

在100學年度全國高中數學能力競賽的題目中，有一道題目內容如下：「由0, 1排成長度 n 的字串，稱為二元 n 字串。若一個二元 n 字串中出現字串00和字串11的個數一樣多，則稱為長度的 n 二元平衡字串。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，已知 $a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 6$，試求 a_n 的一般公式。」但題目給出的解法卻是特例解，只有在00−子字串, 11−子字串平衡的狀況下才適用，因此我們便想要改變作法，試圖用一個一般化的解法來處理這個問題。此外，我們也想將此問題拓展，討論在000−子字串, 111−子字串平衡時，n 位數列排列之符合個數是否也有一般解，也就是二元 3 平衡 n 字串個數是否有一般式。因此，我們便展開了一段有趣的數學研究之旅。

貳、研究目的及過程

[**研究架構**]



參、研究結果

[**名詞定義**]

1. **區塊($block$)**：一個二元 n 字串由一或多個區塊組成，每個區塊內所有的字元均相同，且與每個區塊相鄰的左右兩個字元均與該區塊內所有的字元相異。在此令由 k 個字元組成的區塊記做 $\boldsymbol{k-block}$，由 α 個0組成的區塊記做$\boldsymbol{\alpha-0-block}$（1個0組成的區塊記做 $\boldsymbol{0-block}$，2個0組成的區塊記做 $\boldsymbol{00-block}$），同理，由 β 個1組成的區塊記做 $\boldsymbol{\beta-1-block}$（1個1組成的區塊記做 $\boldsymbol{1-block}$，2個1組成的區塊記做 $\boldsymbol{11-block}$）。
2. $l_k(0)$表示在二元 n 字串中k−0−子字串的數目，$l_k(1)$ 表示在二元 n 字串中k−1−子字串的數目。(例如：$10011010001,\ l_2(0) = 3,\ l_3(0) = 1,\ l_2(1) = 1$)。
3. **二元 $\boldsymbol{r}$ 平衡 $\boldsymbol{n}$ 字串**表示二元 n 字串中滿足 $l_r(0) = l_r(1)$ 的字串(以下二元 n 字串中滿足 $l_2(0) = l_2(1)$ 簡稱為二元平衡 n 字串)
4. 若二元 n 字串滿足 $|l_r(0) - l_r(1)| = m$，令其個數為 $S_{(n,r,m)}$
5. 令$a_{n(u)} = S_{(n,3,n-(u+1))}$，其中 $n \geq u+2, u \in \mathrm{N}$
6. 令$c_{n(u)} = S_{(n,r,n-(r+u-2))}$，其中 $n \geq r+u-1, u \in \mathrm{N}$

- *Part* 1：二元 3 (非)平衡 n 字串個數之**關係式**

Theorem 1

二元平衡 n 字串個數之一般式為
$$\begin{cases} S_{(1,2,0)} = S_{(2,2,0)} = 2 \\ S_{(n,2,0)} = 2C^{n-2}_{\left[\frac{n}{2}\right]-1},\ n \geq 3 \end{cases}$$

關係式一

定義$M_{(n,a,b_1,b_2)}$為在$\left[\frac{a+1}{2}\right]$個區塊中取$b_1$個區塊、在$\left[\frac{a}{2}\right]$個區塊中取$b_2$個區塊之總方法數；

$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$為在b_1個區塊中填入c個0、b_2個區塊中填入c個1之總方法數；

$$\text{集合}A_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}\;\middle|\;\begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\in\mathbb{N},\\ a\geq 2;\ b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c\geq 1,\\ a+b_1+b_2+2c=n\end{array}\right\},$$

$$M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\times H_c^{b_2}$$

則有以下公式：

$$S_{(n,3,0)}=2\left(F_{n+1}+\sum_{i=1}^{n(A_n)}x_i\right)\text{，其中 }x_i\in A_n$$

Theorem 2

二元 r 平衡 n 字串 $p_r(0)=p_r(1)=0$ 個數之遞迴式 $r_n=\sum_{i=1}^{r-1}r_{(n-i)}$，其中 $n\geq r$

關係式二

$$\text{定義集合 }B_n=\left\{C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\times H_c^{b_2}\;\middle|\;\begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\in\mathbb{N}_0,\\ a\geq 2;\ b_1=0;1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c=m,\\ a+b_2=n-m\end{array}\right\};$$

$$\text{集合 }C_n=\left\{C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times H_c^{b_1}\;\middle|\;\begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\in\mathbb{N}_0,\\ a\geq 1;1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];\ b_2=0;c=m,\\ a+b_1=n-m\end{array}\right\};$$

$$\text{集合 }D_n=\left\{M_{(n,a,b_1,b_2)}\times M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}\;\middle|\;\begin{array}{c}a,b_1,b_2,c\in\mathbb{N},\\ a\geq 2;\ 1\leq b_1\leq\left[\frac{a+1}{2}\right];1\leq b_2\leq\left[\frac{a}{2}\right];c\geq m,\\ a+b_1+b_2+2c=n+m\end{array}\right\};$$

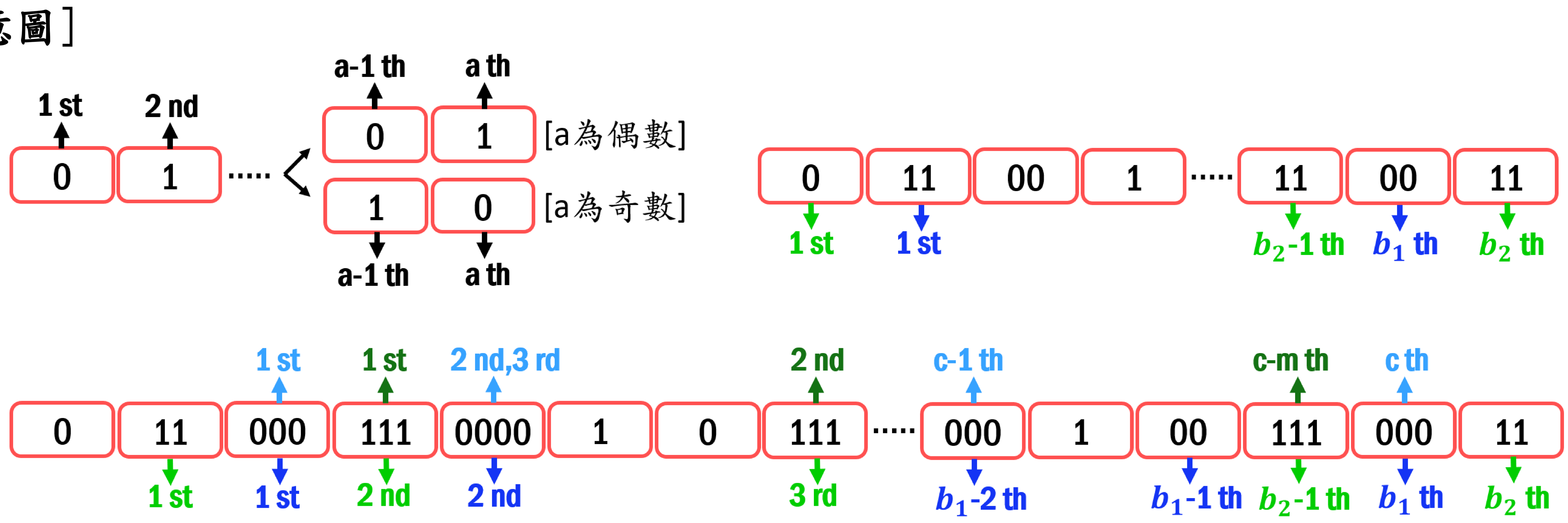
其中，定義$M_{(n,a,b_1,b_2,c)}$為在b_1個區塊中填入c個0、b_2個區塊中填入$c-m$個1或在b_1個區塊中填入$c-m$個0、b_2個區塊中填入c個1之總方法數；

$$\text{因此 }M_{(n,a,b_1,b_2)}=C_{b_1}^{\left[\frac{a+1}{2}\right]}\times C_{b_2}^{\left[\frac{a}{2}\right]},M_{(n,a,b_1,b_2,c,m)}=H_c^{b_1}\times H_{c-m}^{b_2}+H_{c-m}^{b_1}\times H_c^{b_2}$$

則有以下公式：

$$S_{(n,3,m)}=2\left(\sum_{i=1}^{n(B_n)}x_i+\sum_{i=1}^{n(C_n)}y_i+\sum_{i=1}^{n(D_n)}z_i\right),m\geq 1\text{，其中}x_i\in B_n,y_i\in C_n,z_i\in D_n$$

［做法示意圖］



【 $S_{(n,3,m)}$ 值】

m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
n-2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	$\{a_{n(1)}\}$
n-3		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	$\{a_{n(2)}\}$
n-4			10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	$\{a_{n(3)}\}$
n-5				20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	$\{a_{n(4)}\}$
n-6					44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	$\{a_{n(5)}\}$
n-7						84	100	116	132	148	164	180	196	212	$\{a_{n(6)}\}$
n-8							172	214	258	304	352	402	454	508	$\{a_{n(7)}\}$
n-9								332	430	536	650	772	902	1040	$\{a_{n(8)}\}$
n-10									654	876	1122	1392	1686	2004	$\{a_{n(9)}\}$
n-11										1264	1752	2312	2946	3656	$\{a_{n(10)}\}$
n-12											2466	3516	4754	6190	$\{a_{n(11)}\}$
n-13												4760	6972	9652	$\{a_{n(12)}\}$
n-14													9258	13880	$\{a_{n(13)}\}$
n-15														17908	$\{a_{n(14)}\}$

- *Part 2 − 1*：二元 3 非平衡 n 字串個數之性質探討—$\{a_{n(u)}\}$

Property 1
$\{a_{n(3k+1)}\},\{a_{n(3k+2)}\},\{a_{n(3k+3)}\}$為一$k$ 階階差數列

Property 2~4

$$\Delta^k a_n \text{ 一般式 } \begin{cases} \Delta^k a_{n(3k+1)} = 2 \\ \Delta^k a_{n(3k+2)} = 2k+4 \\ \Delta^k a_{n(3k+3)} = k^2+5k+10 \end{cases}$$
其中$k \geq 0$

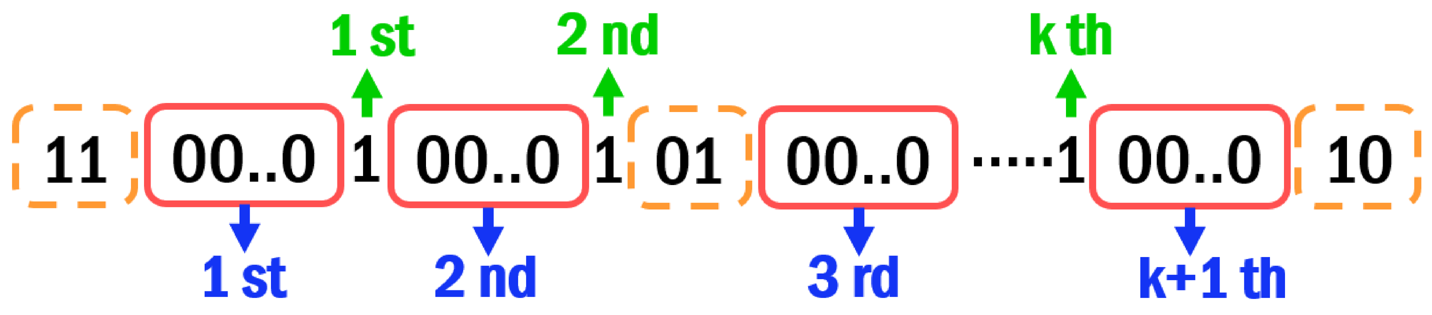
Property 5
$$\Delta^k a_{n(3k+j)} + \Delta^{k-1} a_{n(3(k-1)+j+1)} = \Delta^k a_{n(3k+j+1)}$$
$k \geq 1, j = 1,2$

［做法簡述］

＊$\max\alpha \geq 3$, $\alpha - 0 - block$個數決定階差數列之階差數

＊上述情況發生時，剩餘字元之排列方法數即$\Delta^k a_{n(3k+i)}(i=1,2,3)$之一般式

［示意圖］



▲上圖以$\Delta^k a_{n(3k+3)}$之做法為例，橘色虛線部份表示剩餘字元在不同間格內可填入之符合形式

- *Part 2 − 2*：二元 3 非平衡 n 字串個數之性質探討—$\{b_{(u,s)}\}$

定義：
令右表第u行、第$s+1$列之數字為$b_{(u,s)}$，其同列所形成之數列為$\{b_{(u,s)}\}$

Property 6
$\{b_{(u,s)}\}$為一s階階差數列
$s \geq 0$

［做法簡述］

＊考慮剩餘字元個數之排列方法，即可找出右表階差數列之階差數

		a_1	$\Delta^1 a_1$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^3 a_1$	$\Delta^4 a_1$	$\Delta^5 a_1$	$\Delta^6 a_1$	$\Delta^7 a_1$
0階	$b_{(u,0)}$ $\Delta^k a_1$	2	2	2	2	2	2	2	2
1階	$b_{(u,1)}$ $\Delta^k a_1$	4	6	8	10	12	14	16	18
2階	$b_{(u,2)}$ $\Delta^k a_1$	10	16	24	34	46	60	76	94
3階	$b_{(u,3)}$ $\Delta^{k-1} a_1$	20	42	72	112	164	230	312	412
4階	$b_{(u,4)}$ $\Delta^{k-1} a_1$	44	98	188	324	518	784	1138	1598
5階	$b_{(u,5)}$ $\Delta^{k-1} a_1$	84	222	468	874	1504	2436	3764	5600
6階	$b_{(u,6)}$ $\Delta^{k-2} a_1$	172	488	1126	2270	4174	7176	11714	18344

綜上性質，推導二元 3 平衡 n 字串之表達式：

$$a_n = a_1 + \Delta a_1 C_1^{n-1} + \Delta^2 a_1 C_2^{n-1} + \cdots + \Delta^p a_1 C_p^{n-1}$$
(公式來源：王佳怡、吳思穎—階差數列的解法初探)

$$a_{n(u)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i)} C_{k-i}^{n-1}, & u = 3k+1 \\ \sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i+1)} C_{k-i}^{n-1}, & u = 3k+2 \\ \sum_{i=0}^{k} b_{(k+1-i,3i+2)} C_{k-i}^{n-1}, & u = 3k+3 \end{cases}$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n-2} a_{n-1-i(i)}$$

【$S_{(n,3,m)}$值】
表格之直排總和

$$S_{(n,3,0)} = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 4, & n = 2 \\ 2^n - S'_n, & n \geq 3 \end{cases}$$

- *Part 3*：推廣—二元 r 非平衡 n 字串個數之性質探討—$\{c_{n(u)}\}$

Property 7
$\{c_{n(rk+1)}\},\{c_{n(rk+2)}\},\ldots,\{c_{n(rk+r)}\}$為一 k 階階差數列 ，$k \geq 0$

Property 8

$$\Delta^k c_{n(u)} = \begin{cases} 2, & u = rk+1 \\ 2k+4, & u = rk+2 \\ 2 \times \left(\sum_{\delta=0}^{a-1} C_{a-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{a-1} \times 2^{\delta} \right), & u = rk+i \ (i = 3,4\ldots r-1) \\ 2 \times \left[\left(\sum_{\delta=0}^{r-2} C_{r-1-\delta}^{k+2} \times C_{\delta}^{r-2} \times 2^{\delta} \right) - k \right], & u = rk+r \end{cases}$$
(其中$a = i-(r-1)$)

- *Part 4*：二元 3 平衡 n 字串之個數成長速度

Theorem 3
二元平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,2,0)}}{S_{(n-1,2,0)}} = 2$

Corollary
二元3平衡 n 字串之 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{(n,3,0)}}{S_{(n-1,3,0)}} = 2$

肆、討論

本研究以三個面向來探討二元 3 平衡 n 字串個數的問題，其成果分別為：**直接推導出算式**：可將算式輸入*python*，計算二元3平衡/非平衡n字串之符合個數，幫助我們發現非平衡時字串的諸多性質；**反面解法**：此為本研究重點，發現、證明了非平衡字串個數彼此間存在漂亮的階差性質，並嘗試利用這些性質推導二元3平衡n字串個數的一般式；**個數成長速度**：推論當 n 很大時，二元 3 平衡 n 字串個數會以趨近於2倍速成長。