中華民國第 59 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050406

莫利三角形的奇蹟

學校名稱：國立羅東高級中學

作者：	指導老師：
高二 康柏賢	鍾明宏

關鍵詞：莫利三角形、Morley Center、共線

摘要

給定任意一個三角形，三個內角的三等分線兩兩交於三點，此三點形成一個等邊三角形，稱為莫利三角形(*First Morley Triangle*)。本作品從莫利三角形所牽涉到的三個特殊點開始：

First Morley Center (*FMC*)：即莫利三角形的重心。

Second Morley Center：即原三角形與莫利三角形對應頂點間的連線的交點。

Third Morley Center：即原三角形與 *First Morley Adjunct Triangle* 對應頂點間的連線的交點。

我們巧妙證明了這三個特殊點共線，並進一步推廣到所有與原三角形的三等分線相關的 18 個正三角形$(\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq})$。我們發現這些正三角形都存在對原三角形的 *Morley Line*。除此之外，本作品最重要的成果是證明了：

當 $p+q+r\equiv 0\pmod 3$，$p-1\,q-1\,r-1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上；

當 $p+q+r\equiv 2\pmod 3$，$p+1\,q+1\,r+1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上；

並由此建構出在這 18 個正三角形中的三元組(*triad*)關係。

壹、 研究動機

某天翻閱《幾何明珠》時，對於莫利三角形(*Morley Triangle*)的奇特性與優美性起了極大的興趣，便想對其進行進一步的深入研究。某日在翻閱資料時，我們發現莫利三角形中存在許多奇特的點，希望能找出它們的性質與彼此之間的關聯。

貳、 研究目的

1. 尋找莫利三角形中的特殊點(*First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 等等)的性質並予以證明。
2. 將這些特殊點的性質推廣至所有與原三角形的三等分線相關的 18 個正三角形$(\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq})$。
3. 探討這 18 個正三角形所形成的 *Morley Line* 之間的關聯性。
4. 探討 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 在平面的分布問題。

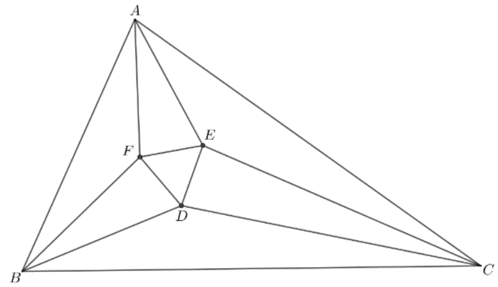
參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra

肆、 文獻探討

First Morley Triangle

任意三角形 ABC 中，角與角之間相鄰的兩條三等分線彼此相交，共交於三點（圖一），以此三點為頂點的三角形稱為莫利三角形（ ΔDEF ）。



（圖一）

等角共軛點

設點 P 為 ΔABC 所在平面上一點，I 為 ΔABC 的內心。作直線 $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ ，設直線 L_1 與 $\overleftrightarrow{PA}$ 對稱於 $\overleftrightarrow{AI}$ ，設直線 L_2 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 對稱於 $\overleftrightarrow{BI}$ ，設直線 L_3 與 $\overleftrightarrow{PC}$ 對稱於 $\overleftrightarrow{CI}$ ，則 L_1 , L_2 , L_3 三線交於一點 Q ，我們稱 Q 點為 P 點關於 ΔABC 的等角共軛點。

Trigonometric Ceva's Theorem

在 ΔABC 中， D 為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上一點， E 為 $\overleftrightarrow{CA}$ 上一點， F 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點 $(D, E, F \neq A, B, C)$ ，則

$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 三線共點的充要條件為 $\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}\cdot\dfrac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\dfrac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}=1$

Desargue's Theorem

兩個三角形 $(\Delta ABC,\ \Delta XYZ)$ 對應頂點的連線 $(\overleftrightarrow{AX},\ \overleftrightarrow{BY},\ \overleftrightarrow{CZ})$ 共點，若且唯若其對應邊的交點 $(\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{XY},\ \overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{YZ},\ \overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{ZX})$ 共線。滿足此條件的兩個三角形，我們稱他們為"透視的"(perspective)。

Brianchon's Theorem

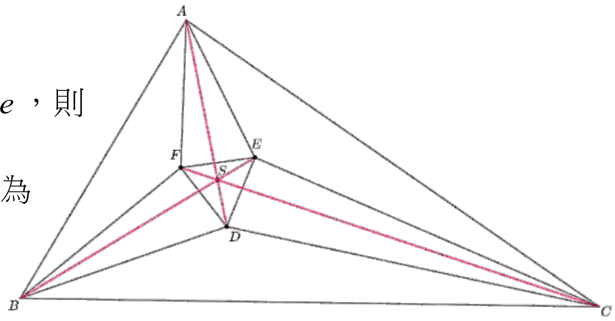
令 l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 , l_6 為任三線不共點的六線，則 l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 , l_6 共切一圓錐曲線若且唯若 $(l_1\cap l_2)(l_4\cap l_5)$, $(l_2\cap l_3)(l_5\cap l_6)$, $(l_3\cap l_4)(l_6\cap l_1)$ 共點。而滿足 *Brianchon's Theorem* 的六邊形我們稱其為 *Brianchon hexagon* 。

First Morley Center

莫利三角形的重心我們稱之為 *First Morley Center* 。

Second Morley Center

如（圖二），ΔDEF 為 ΔABC 的 *First Morley Triangle*，則 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 三線交於一點 S，我們稱此點 S 為 ΔABC 的 *Second Morley Center*。



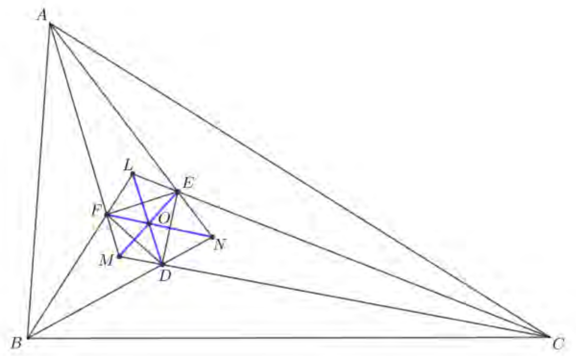
（圖二）

First Morley Adjunct Triangle

（圖三）中，我們稱 ΔLMN 為 ΔABC 的 ***First Morley Adjunct Triangle*** [2]。

伍、研究過程

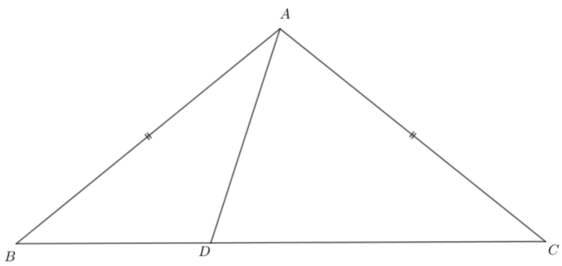
引理 1-1 如圖(三)，$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 三線交於一點，且此點為莫利三角形 DEF 的重心。



（圖三）

證明： 易知 D 即為 ΔLBC 的內心，所以 $\angle DLF = \angle DLB = \angle DLC = \angle DLE$

$\overline{LD} = \overline{LD}$, $\because \Delta DEF$ 為正三角形，$\therefore \overline{DF} = \overline{DE}$, 此時 ΔLDF 與 ΔLDE 便為"SSA"之關係。如圖(四)，ΔABD 與 ΔACD 便是"SSA"之關係。此時，$\angle ADB + \angle ADC = 180°$。



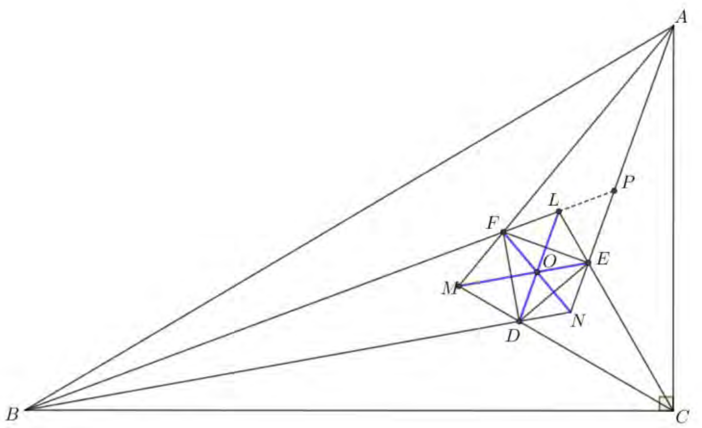
（圖四）

也就是說，在(圖三)中，若 $\angle LFD + \angle LED \neq 180°$, 則 $\Delta LDE \cong \Delta LDF \Leftrightarrow \overline{LD} \perp \overline{EF}$, $\overline{LD}$ 為 $\overline{EF}$ 之中垂線；若 $\angle LFD + \angle LED = 180° \Leftrightarrow \angle ELF + \angle EDF = 180°$

$\Leftrightarrow \angle BLC + 60° = 180° \Leftrightarrow 180° - (\frac{2}{3}\angle B + \frac{2}{3}\angle C) = 120° \Leftrightarrow \frac{2}{3}\angle B + \frac{2}{3}\angle C = 60°$

$\Leftrightarrow \angle B + \angle C = 90° \Leftrightarrow \angle A = 90°$。

在 ΔABC 中，不可能有兩個角同時為 $90°$，所以 $\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$ 三條線段中至少有兩條線段為 ΔDEF 之中垂線。不失一般性，設 $\overline{EM}$ 為 $\overline{FD}$ 之中垂線，$\overline{LD}$ 為 $\overline{EF}$ 之中垂線，此時，$\angle C = 90°$。如（圖五），設 $\overline{DL}$ 與 $\overline{EM}$ 交於 O 點，易知，O 點正是正三角形 DEF 的重心，延長 $\overline{BL}$ 交 $\overline{AN}$ 於 P。



（圖五）

在 ΔABN 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ANB} = \dfrac{\overline{BN}}{\sin\angle BAN} \Leftrightarrow \overline{BN} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAN}{\sin\angle ANB}$

在 ΔABP 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle APB} = \dfrac{\overline{BP}}{\sin\angle BAP} \Leftrightarrow \overline{BP} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAP}{\sin\angle APB}$

在 ΔBDC 中，$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BDC} = \dfrac{\overline{BD}}{\sin\angle BCD} \Leftrightarrow \overline{BD} = \dfrac{\overline{BC}\cdot\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}$

在 ΔBLC 中，$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BLC} = \dfrac{\overline{BL}}{\sin\angle BCL} \Leftrightarrow \overline{BL} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BCL}{\sin\angle BLC}$

$$\sin\angle BAN = \sin\frac{2}{3}\angle A,\ \sin\angle ANB = \sin(180° - \frac{2}{3}\angle B - \frac{2}{3}\angle A) = \sin 60°$$

$$\sin\angle BAP = \sin\frac{2}{3}\angle A,\ \sin\angle APB = \sin(180° - \frac{1}{3}\angle B - \frac{2}{3}\angle A) = \sin(30° + \frac{1}{3}\angle A)$$

$$\sin\angle BCD = \sin\frac{1}{3}\angle C = \sin 30°,\ \sin\angle BDC = \sin(180° - \frac{1}{3}\angle B - \frac{1}{3}\angle C) = \sin(30° + \frac{1}{3}\angle B)$$

$$\sin\angle BCL=\sin\frac{2}{3}\angle C=\sin 60^\circ,\ \sin\angle BLC=\sin(180^\circ-\frac{2}{3}\angle B-\frac{2}{3}\angle C)=\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)$$

$$\overline{LD}//\overline{AN}\quad\Leftrightarrow\frac{\overline{BN}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BL}}\Leftrightarrow\frac{\frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAN}{\sin\angle ANB}}{\frac{\overline{AB}\cdot\sin\angle BAP}{\sin\angle APB}}=\frac{\frac{\overline{BC}\cdot\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}}{\frac{\overline{BC}\cdot\sin\angle BCL}{\sin\angle BLC}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{\sin\frac{2}{3}\angle A}{\sin 60^\circ}}{\frac{\sin\frac{2}{3}\angle A}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)}}=\frac{\frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)}}{\frac{\sin\angle 60^\circ}{\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)}=\frac{1}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin(60^\circ+\frac{2}{3}\angle B)=\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)\cdot\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)$$

$$\Leftrightarrow\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)\cdot\cos(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)=\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)\cdot\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)\quad(*)$$

$(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)+(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)=90^\circ$, $\sin(30^\circ+\frac{1}{3}\angle A)=\cos(30^\circ+\frac{1}{3}\angle B)$, $\therefore (*)$成立，

即$\overline{LD}//\overline{AN}\Rightarrow\angle DEN=\angle LDE=30^\circ$ 。

同理，$\overline{ME}//\overline{BN}\ \Rightarrow\angle NDE=\angle MED=30^\circ\Rightarrow\Delta NDE$ 為等腰三角形，$\overline{ND}=\overline{NE}$ 。

又$\overline{EF}=\overline{DF}$, $\overline{NF}=\overline{NF}$, $\Delta NEF\cong\Delta NDF(SSS)$ ，故$\overline{FN}$為$\overline{ED}$之中垂線 $\Rightarrow$ $\overline{FN}$通過O點

$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$三線共點。

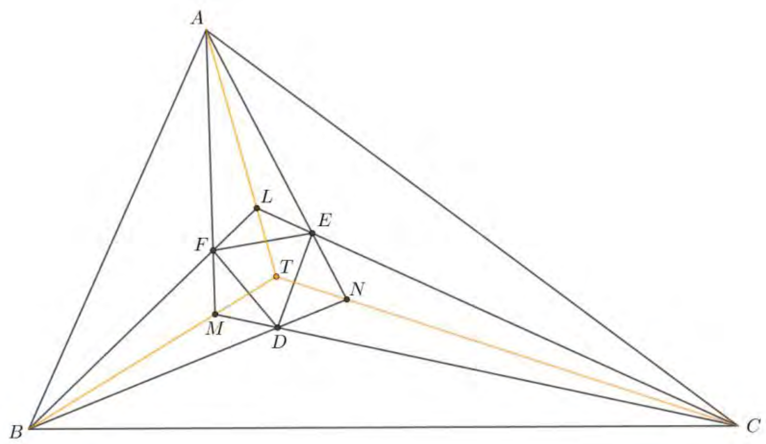
若$\angle A$, $\angle B$, $\angle C\neq 90^\circ$, 則$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$分別為$\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DE}$之中垂線，三線同樣交於ΔDEF之重心O 。

綜上所述，$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$三線交於一點，此點即為ΔABC的*First Morley Center* 。 ■

$\overline{DL}$, $\overline{EM}$, $\overline{FN}$共線這個性質將在後面的證明中起到至關重要的作用。

引理 1-2 *Third Morley Center*

如（圖六），除 D, E, F 外，ΔABC 的三等分線另外交於 L, M, N 三點，則 $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$ 三線交於一點 T，我們稱此點為 ΔABC 的 *Third Morley Center*。



（圖六）

證明： 在圖(六)中，$\angle ABL = \angle CBD = \frac{1}{3}\angle B$, $\angle ACL = \angle BCD = \frac{1}{3}\angle C \Rightarrow D, L$ 互為等角共軛點，$\angle BAL = \angle CAD$。

同理，E, M 、F, N 分別互為等角共軛點 $\Rightarrow \angle CBM = \angle ABE$, $\angle ACN = \angle BCF$。

我們知道 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 三線共點(*Second Morley Center*)，由 *Trigonometric Ceva's Theorem*，

$$\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle ACF}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

又 $\angle BAD = \angle A - \angle CAD = \angle A - \angle BAL = \angle CAL$,

$\angle CBE = \angle C - \angle ABE = \angle C - \angle CBM = \angle ABM$,

$\angle ACF = \angle B - \angle BCF = \angle B - \angle ACN = \angle BCN$,

$$\therefore \text{①} \Leftrightarrow \frac{\sin\angle CAL}{\sin\angle BAL}\cdot\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}\cdot\frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle ACN}=1$$

由 *Trigonometric Ceva's Theorem*，$\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$ 三線交於一點 T。

T 點即為 ΔABC 的 *Third Morley Center*。 ■

引理 1-3 若有三個三角形(ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$)兩兩互為"透視的"，則此三個三角形的三個透視軸共點若且唯若它們的三個透視中心共線。

證明：設ΔABC與$\Delta A'B'C'$的透視中心為U，透視軸為l_1。

設$\Delta A'B'C'$與$\Delta A''B''C''$的透視中心為V，透視軸為l_2。

設$\Delta A''B''C''$與ΔABC的透視中心為W，透視軸為l_3。

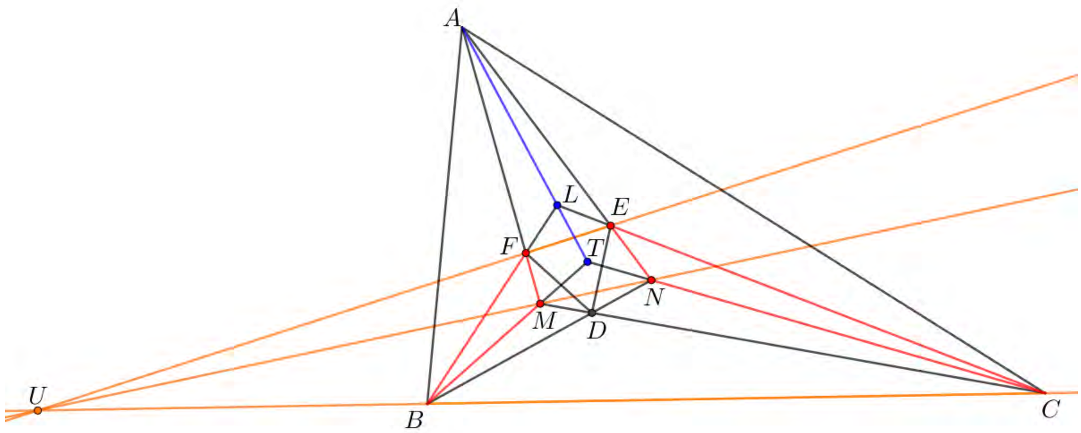
對$\Delta AA'A''$與$\Delta BB'B''$運用 *Desargue's Theorem*，則由$AA'\cap BB'=U$，$A'A''\cap B'B''=V$，$A''A\cap B''B=W$ $\Rightarrow U$，V，W共線$\Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$，$\overleftrightarrow{A''B''}$三線共點。

且若$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{A'B'}$，$\overleftrightarrow{A''B''}$交於一點，則此點在$l_1$，$l_2$，$l_3$上

($\because \overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{A'B'}$在$\Delta ABC$與$\Delta A'B'C'$的透視軸$l_1$上，$\overleftrightarrow{A'B'}\cap\overleftrightarrow{A''B''}$在$\Delta A'B'C'$與$\Delta A''B''C''$的透視軸$l_2$上，$\overleftrightarrow{A''B''}\cap\overleftrightarrow{AB}$在$\Delta A''B''C''$與$\Delta ABC$的透視軸$l_3$上，$\therefore \overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{A'B'}\cap\overleftrightarrow{A''B''}\in l_1\cap l_2\cap l_3$)，即為$l_1$，$l_2$，$l_3$的交點。

由於另一個三線共點的情況是對偶的，證明相似，在此便不贅述。 ■

定理 1-4 如圖(七)，ΔDEF為ΔABC的 *First Morley Triangle*，ΔLMN為ΔABC的 *First Morley Adjunct Triangle*，則$\overleftrightarrow{EF}$，$\overleftrightarrow{MN}$，$\overleftrightarrow{BC}$三線共點。



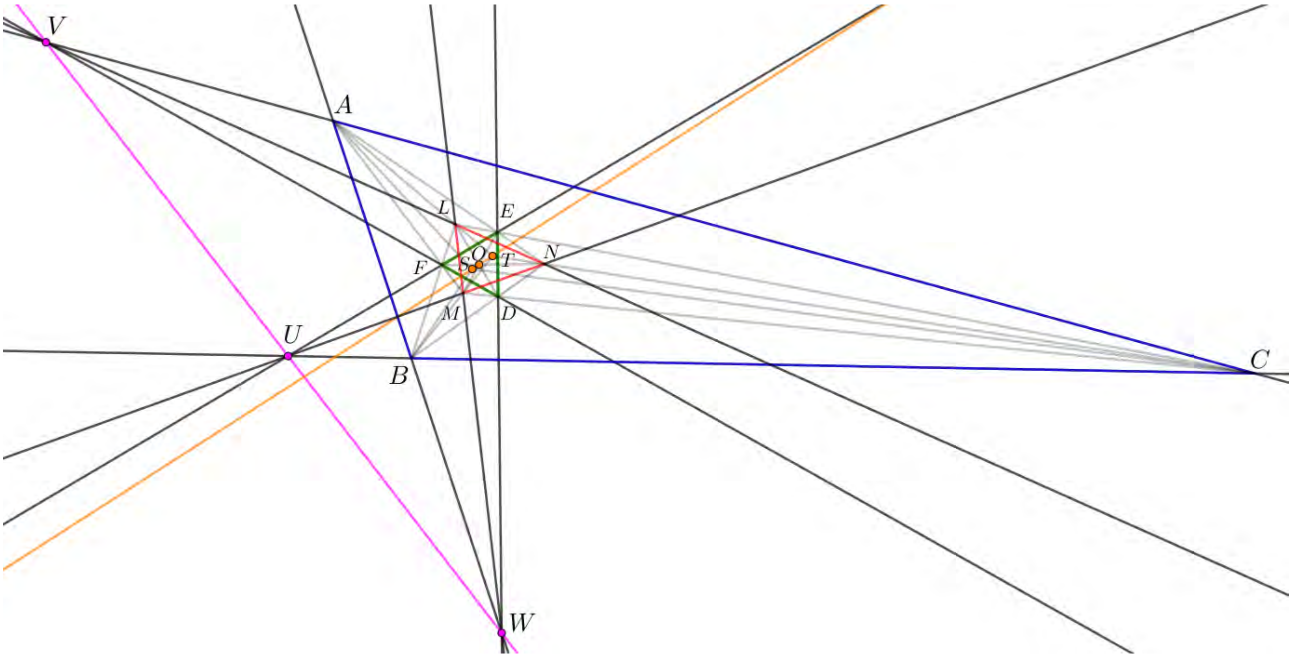
（圖七）

證明：我們觀察ΔBFM與ΔCEN，$\overleftrightarrow{FM}\cap\overleftrightarrow{EN}=A$，$\overleftrightarrow{BF}\cap\overleftrightarrow{CE}=L$，$\overleftrightarrow{BM}\cap\overleftrightarrow{CN}=T$，$T$為$\Delta ABC$的 *Third Morley Center*，故A，L，T三點共線，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{EF}$，$\overleftrightarrow{MN}$，$\overleftrightarrow{CB}$三線交於一點U。 ■

推論：$\overleftrightarrow{CA}$，$\overleftrightarrow{NL}$，$\overleftrightarrow{FD}$三線交於一點，設為V點，$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{LM}$，$\overleftrightarrow{ED}$三線交於一點，設為W點。

雖然在[5]中提出 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 三點共線，但我們並未查詢到關於此特性之非坐標的證明，故我們在這裡給出另一種證明，以觀察它們之間的關聯性。

定理 1-5 在任意三角形 ABC 中，它的 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 三點共線。



（圖八）

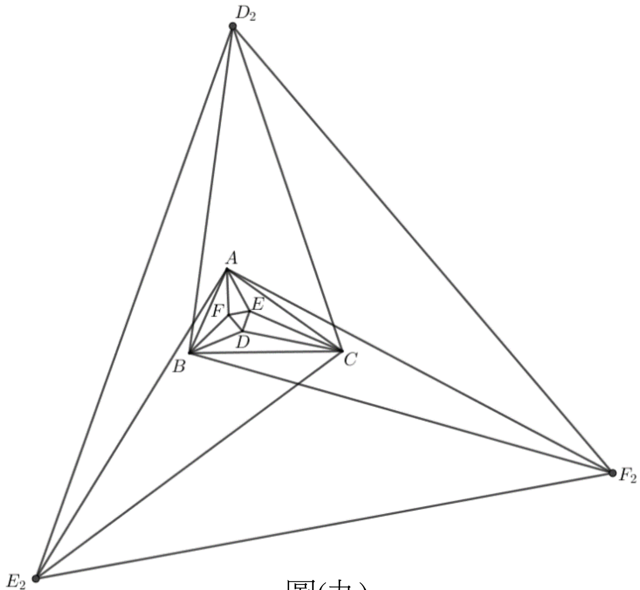
證明： 如（圖八），設 O 點為 ΔABC 的 *First Morley Center*，S 點為 ΔABC 的 *Second Morley Center*，T 點為 ΔABC 的 *Third Morley Center*。觀察 ΔLMN 與 ΔDEF，$\overleftrightarrow{DL}$, $\overleftrightarrow{EM}$, $\overleftrightarrow{FN}$ 交於 O 點，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{EF}\cap\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{FD}\cap\overleftrightarrow{NL}$, $\overleftrightarrow{DE}\cap\overleftrightarrow{LM}$ 三點共線，$\overleftrightarrow{UVW}$ 為 ΔLMN 與 ΔDEF 之透視軸；觀察 ΔABC 與 ΔDEF，$\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ 交於 S 點，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{FD}$, $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{DE}$ 三點共線，$\overleftrightarrow{UVW}$ 為 ΔABC 與 ΔDEF 之透視軸；觀察 ΔLMN 與 ΔABC，$\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$ 交於 T 點，由 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{BC}\cap\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{CA}\cap\overleftrightarrow{NL}$, $\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{LM}$ 三點共線，$\overleftrightarrow{UVW}$ 為 ΔLMN 與 ΔABC 之透視軸。故 ΔABC, ΔDEF, ΔLMN 互為"透視的"。因為 ΔABC, ΔDEF, ΔLMN 的透視軸三線共點(特別地，它們的透視軸皆為 $\overleftrightarrow{UVW}$)，由**引理 1-3**，O, S, T 三點共線。 ■

我們稱 $\overleftrightarrow{OST}$ 為 ΔABC 的 *Morley Line*。

在[6] [7]中我們可以發現，除了 *First Morley Triangle* 的另外兩個由角的三等分線所構成的另外兩個正三角形，*Second Morley Triangle* 和 *Third Morley Triangle* 及其相關的特殊點，那它們是否也存在類似的 *Morley Line* 呢？答案是肯定的，在這之前我們先介紹其定義：

定義 2-1 *Second Morley Triangle*

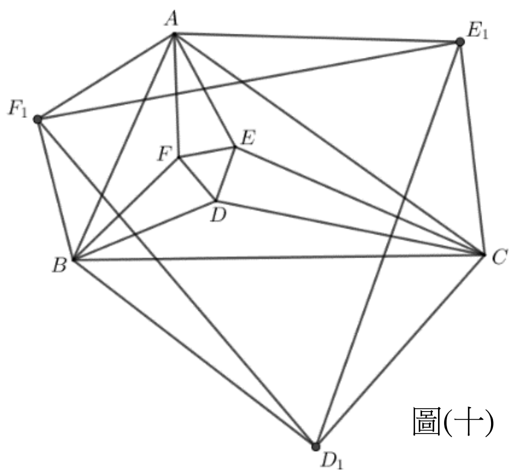
我們將圖(九)中的 $\overleftrightarrow{BD}$ 以 B 為中心逆時針旋轉 $60°$，$\overleftrightarrow{CD}$ 以 C 為中心順時針旋轉 $60°$，設兩者交於 D_2，同樣地，另外四條依此方法旋轉 $60°$ 後相交於 E_2 , F_2 兩點，則 $\Delta D_2E_2F_2$ 為正三角形，我們稱其為 *Second Morley Triangle*。



圖(九)

定義 2-2 *Third Morley Triangle*

我們將圖(十)中的 $\overleftrightarrow{BD}$ 以 B 為中心順時針旋轉 $60°$，$\overleftrightarrow{CD}$ 以 C 為中心逆時針旋轉 $60°$，設兩者交於 D_1，同樣地，另外四條依此方法旋轉 $60°$ 後相交於 E_1 , F_1 兩點，則 $\Delta D_1E_1F_1$ 為正三角形，我們稱其為 *Third Morley Triangle*。(事實上，這也是 ΔABC 外角三等分線的交點所構成的正三角形。)



圖(十)

定義 2-3 *Morley Line*

設 ΔPQR 是由 ΔABC 的角的三等分線所構成的正三角形，則其對 ΔABC 的三個特殊點定義如下：

$First\ Morley\ Center\left(PQR-FMC\right)$： ΔPQR 的重心。

$Second\ Morley\ Center\left(PQR-SMC\right)$： $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BQ}, \overleftrightarrow{CR}$ 的交點(只在此三線交於一點時有定義)。

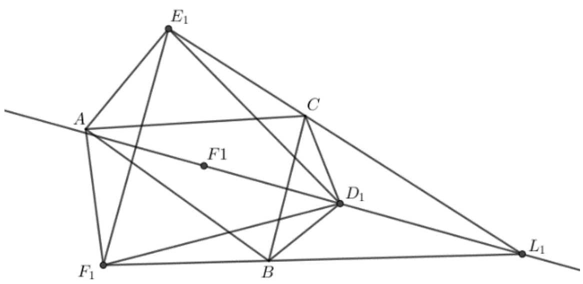
$Third\ Morley\ Center\left(PQR-TMC\right)$： $PQR-SMC$ (若有定義)對 ΔABC 的等角共軛點。

$Morley\ Line\ (PQR-Morley\ Line)$：若上述此三個特殊點共線，則這條線稱作 ΔPQR 對 ΔABC 的 $Morley\ Line$ 。

雖然以下提及 $Second\ Morley\ Triangle$, $Third\ Morley\ Triangle$ 中特殊點的相關性質及共線的特性在[5]同樣有提出，但我們也還是沒查詢到有關這些性質的非坐標的證明，所以我們一樣在這裡給出另解：

我們設 $\Delta D_1E_1F_1$ 為 ΔABC 的 $Third\ Morley\ Triangle$ 。並設 L_1 為 D_1 , M_1 為 E_1 , N_1 為 F_1 (依此類推)的等角共軛點。

引理 2-4 $D_1E_1F_1-FMC=\overleftrightarrow{D_1L_1}\cap\overleftrightarrow{E_1M_1}\cap\overleftrightarrow{F_1N_1}$



圖(十一)

證明：如圖(十一)，我們不難得知 $\overleftrightarrow{BF_1}\cap\overleftrightarrow{CE_1}=L_1$, $\overleftrightarrow{CD_1}\cap\overleftrightarrow{AF_1}=M_1$, $\overleftrightarrow{AE_1}\cap\overleftrightarrow{BD_1}=N_1$ (M_1 , N_1 因版面關係無法在上圖中呈現)，以及 D_1 為 ΔBCL_1 之內心，故 $\angle BL_1D_1=\angle CL_1D_1$ ，又 $\overline{D_1L_1}=\overline{D_1L_1}$, $\overline{D_1F_1}=\overline{D_1E_1}$ 所以 $\Delta F_1L_1D_1$ 與 $\Delta E_1L_1D_1$ 為"SSA"之關係。

而 $\angle D_1F_1L_1+\angle D_1E_1L_1=180^\circ \Leftrightarrow (\angle D_1F_1L_1+60^\circ)+(\angle D_1E_1L_1+60^\circ)=300^\circ$

$\Leftrightarrow \angle E_1F_1B+\angle F_1E_1C=300^\circ \Leftrightarrow \angle F_1BC+E_1CB=60^\circ$

$\Leftrightarrow \angle B+\angle C+\dfrac{\angle A+\angle B}{3}+\dfrac{\angle A+\angle C}{3}=60^\circ \Leftrightarrow \angle B+\angle C+\dfrac{\angle A}{3}=0^\circ\ (\rightarrow\leftarrow)$

故 $\Delta D_1F_1L_1 \cong \Delta D_1E_1L_1 \Rightarrow \overline{D_1L_1} \perp \overline{E_1F_1}$。同理，$\overline{E_1M_1} \perp \overline{F_1D_1}$，$\overline{F_1N_1} \perp \overline{D_1E_1}$。

$\therefore \overleftrightarrow{D_1L_1}$，$\overleftrightarrow{E_1M_1}$，$\overleftrightarrow{F_1N_1}$ 皆過 $\Delta D_1E_1F_1$ 之重心，即 $D_1E_1F_1-FMC=\overleftrightarrow{D_1L_1}\cap\overleftrightarrow{E_1M_1}\cap\overleftrightarrow{F_1N_1}$。 ■

引理 2-5 $D_1E_1F_1-SMC=\overleftrightarrow{AD_1}\cap\overleftrightarrow{BE_1}\cap\overleftrightarrow{CF_1}$

證明：由引理 2-4，$\overleftrightarrow{D_1L_1},\overleftrightarrow{E_1M_1},\overleftrightarrow{F_1N_1}$ 交於一點，故由 *Brianchon's Theorem* 知 $L_1F_1M_1D_1N_1E_1$ 是一個 *Brianchon hexagon*，故 $AF_1BD_1CE_1$ 也是一個 *Brianchon hexagon*，$\overleftrightarrow{AD_1}$，$\overleftrightarrow{BE_1}$，$\overleftrightarrow{CF_1}$ 交於一點，即 $D_1E_1F_1-SMC=\overleftrightarrow{AD_1}\cap\overleftrightarrow{BE_1}\cap\overleftrightarrow{CF_1}$。 ■

引理 2-6 $D_1E_1F_1-TMC=\overleftrightarrow{AL_1}\cap\overleftrightarrow{BM_1}\cap\overleftrightarrow{CN_1}$

證明：由 L_1 為 D_1,M_1 為 E_1,N_1 為 F_1 之等角共軛點以及 *Trigonometric Ceva's Theorem*，$\overleftrightarrow{AD_1}$，$\overleftrightarrow{BE_1}$，$\overleftrightarrow{CF_1}$ 三線共點 $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AL_1}$，$\overleftrightarrow{BM_1}$，$\overleftrightarrow{CN_1}$ 三線共點，且其交點為 $D_1E_1F_1-SMC$ 之等角共軛點。 ■

定理 2-7 $\overleftrightarrow{BC}$，$\overleftrightarrow{E_1F_1}$，$\overleftrightarrow{M_1N_1}$ 交於一點

證明：對 ΔBF_1M_1 和 ΔCE_1N_1 運用 *Desargue's Theorem*，$\overleftrightarrow{BF_1}\cap\overleftrightarrow{CE_1}=L_1$，$\overleftrightarrow{F_1M_1}\cap\overleftrightarrow{E_1N_1}=A$，$\overleftrightarrow{M_1B}\cap\overleftrightarrow{N_1C}=D_1E_1F_1-TMC$。由引理 2-6，$L_1$，$A$，$D_1E_1F_1-TMC$ 三點共線，故 $\overleftrightarrow{BC}$，$\overleftrightarrow{E_1F_1}$，$\overleftrightarrow{M_1N_1}$ 交於一點，並設此點 U_1。 ■

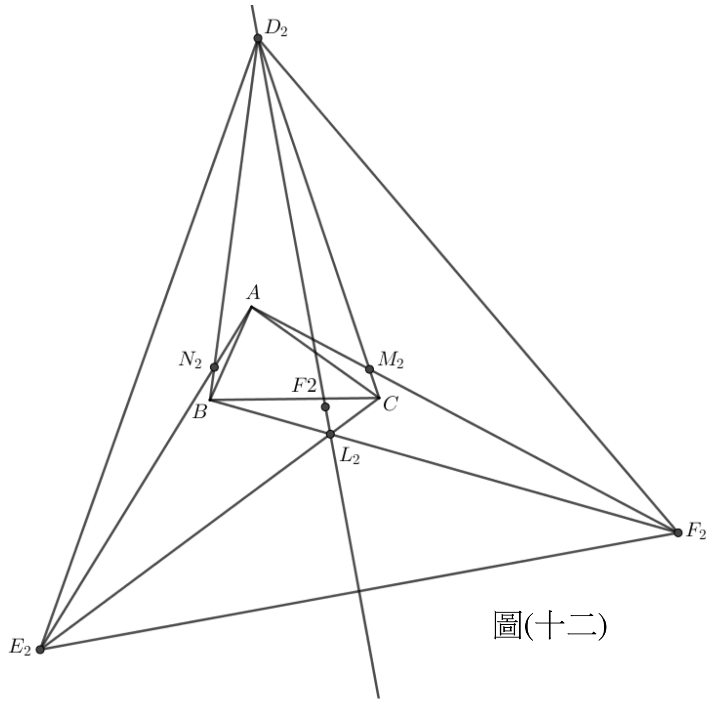
推論：$\overleftrightarrow{CA}$，$\overleftrightarrow{F_1D_1}$，$\overleftrightarrow{N_1L_1}$ 三線交於一點，設此點為 V_1；$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{D_1E_1}$，$\overleftrightarrow{L_1M_1}$ 三線交於一點，設此點為 W_1。

定理 2-8 $D_1E_1F_1-FMC$，$D_1E_1F_1-SMC$，$D_1E_1F_1-TMC$ 三點共線（$D_1E_1F_1-$ *Morley Line*）

證明：由引理 2-5，$\overleftrightarrow{AD_1}$，$\overleftrightarrow{BE_1}$，$\overleftrightarrow{CF_1}$ 三線交於一點，由 *Desargue's Theorem*，ΔABC 和 $\Delta D_1E_1F_1$ 透視，再由定理 2-7，U_1,V_1,W_1 三點共線，即 $\overleftrightarrow{U_1V_1W_1}$ 為 ΔABC，$\Delta D_1E_1F_1$ 的透視軸。同理，$\Delta D_1E_1F_1$，$\Delta L_1M_1N_1$ 和 $\Delta L_1M_1N_1$，ΔABC 也都以 $\overleftrightarrow{U_1V_1W_1}$ 為它們的透視軸。由引理 1-3，這三對三角形的三個透視中心 $D_1E_1F_1-FMC$，$D_1E_1F_1-SMC$，$D_1E_1F_1-TMC$ 共線，這條線即為 $D_1E_1F_1-$ *Morley Line*。 ■

我們接下來設 $\Delta D_2E_2F_2$ 為 ΔABC 的 *Second Morley Triangle*。

引理 2-9 $D_2E_2F_2-FMC=\overleftrightarrow{D_2L_2}\cap\overleftrightarrow{E_2M_2}\cap\overleftrightarrow{F_2N_2}$



圖(十二)

證明： 如圖(十二)，為證明 $\overleftrightarrow{D_2L_2}\perp\overleftrightarrow{E_2F_2}$ ，我們只需證明 $\angle BF_2D_2=\angle CE_2D_2$ 。

$$\frac{\sin\angle BF_2D_2}{\sin\angle CE_2D_2}=\frac{\overline{D_2B}\cdot\dfrac{\sin\angle D_2BF_2}{\overline{D_2F_2}}}{\overline{D_2C}\cdot\dfrac{\sin\angle D_2CE_2}{\overline{D_2E_2}}}=\frac{\overline{D_2B}}{\overline{D_2C}}\cdot\frac{\sin\angle D_2BF_2}{\sin\angle D_2CE_2}=\frac{\overline{D_2B}}{\overline{D_2C}}\cdot\frac{\sin(120^\circ-\dfrac{\angle B}{3})}{\sin(120^\circ-\dfrac{\angle C}{3})}$$

$$=\frac{\overline{D_2B}}{\overline{D_2C}}\cdot\frac{\sin(60^\circ+\dfrac{\angle B}{3})}{\sin(60^\circ+\dfrac{\angle C}{3})}=\frac{\overline{D_2B}}{\overline{D_2C}}\cdot\frac{\sin\angle D_2BC}{\sin\angle D_2CB}=1$$

$\therefore\overleftrightarrow{D_2L_2}\perp\overleftrightarrow{E_2F_2}$ 。同理，$\overleftrightarrow{E_2M_2}\perp\overleftrightarrow{F_2D_2}$，$\overleftrightarrow{F_2N_2}\perp\overleftrightarrow{D_2E_2}$ 。

故 $\overleftrightarrow{D_2L_2}$，$\overleftrightarrow{E_2M_2}$，$\overleftrightarrow{F_2N_2}$ 皆過 $\Delta D_2E_2F_2$ 之重心，即 $D_2E_2F_2-FMC=\overleftrightarrow{D_2L_2}\cap\overleftrightarrow{E_2M_2}\cap\overleftrightarrow{F_2N_2}$ 。■

引理 2-10 $D_2E_2F_2-SMC=\overleftrightarrow{AD_2}\cap\overleftrightarrow{BE_2}\cap\overleftrightarrow{CF_2}$

證明： 由引理 2-9，$\overleftrightarrow{D_2L_2}$，$\overleftrightarrow{E_2M_2}$，$\overleftrightarrow{F_2N_2}$ 交於一點，故由 *Brianchon's Theorem* 知 $L_2F_2M_2D_2N_2E_2$ 是一個 *Brianchon hexagon*，故 $AF_2BD_2CE_2$ 也是一個 *Brianchon hexagon*，$\overleftrightarrow{AD_2}$，$\overleftrightarrow{BE_2}$，$\overleftrightarrow{CF_2}$ 交於一點，即 $D_2E_2F_2-SMC=\overleftrightarrow{AD_2}\cap\overleftrightarrow{BE_2}\cap\overleftrightarrow{CF_2}$ 。■

引理 2-11 $D_2E_2F_2-TMC=\overleftrightarrow{AL_2}\cap\overleftrightarrow{BM_2}\cap\overleftrightarrow{CN_2}$

證明：由 L_2 為 D_2 , M_2 為 E_2 , N_2 為 F_2 之等角共軛點以及 *Trigonometric Ceva's Theorem* $\overleftrightarrow{AD_2}$, $\overleftrightarrow{BE_2}$, $\overleftrightarrow{CF_2}$ 三線共點 $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AL_2}$, $\overleftrightarrow{BM_2}$, $\overleftrightarrow{CN_2}$ 之線共點，且交點為 $D_2E_2F_2-SMC$ 之等角共軛點。 ■

定理 2-12 $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{E_2F_2}$, $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ 交於一點

證明：對 ΔBF_2M_2 和 ΔCE_2N_2 運用 *Desargue's Theorem* ，$\overleftrightarrow{BF_2}\cap\overleftrightarrow{CE_2}=L_2$, $\overleftrightarrow{F_2M_2}\cap\overleftrightarrow{E_2N_2}=A$, $\overleftrightarrow{M_2B}\cap\overleftrightarrow{N_2C}=D_2E_2F_2-TMC$ ，由引理 2-11， L_2 , A , $D_2E_2F_2-TMC$ 之三點共線，故 $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{E_2F_2}$, $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ 交於一點，並設此點為 U_2 。 ■

推論：$\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{F_2D_2}$, $\overleftrightarrow{N_2L_2}$ 三線交於一點，設此點為 V_2 ；$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{D_2E_2}$, $\overleftrightarrow{L_2M_2}$ 三線交於一點，設此點為 W_2 。

定理 2-13 $D_2E_2F_2-FMC$, $D_2E_2F_2-SMC$, $D_2E_2F_2-TMC$ 三點共線 ($D_2E_2F_2-$ *Morley Line*)

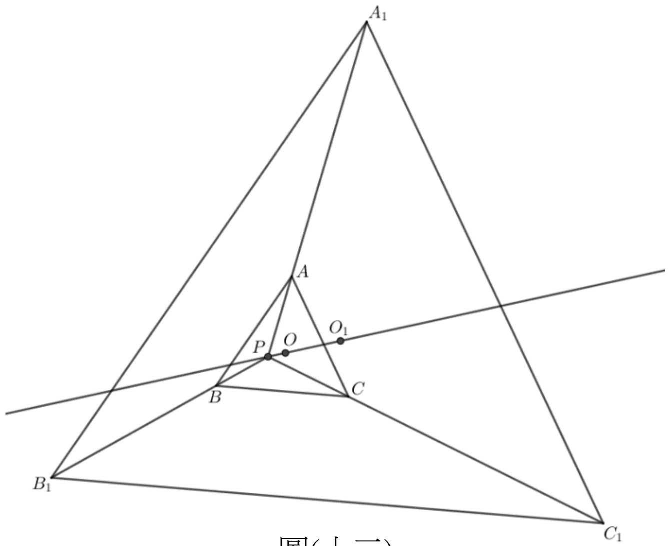
證明：由引理 2-10， $\overleftrightarrow{AD_2}$, $\overleftrightarrow{BE_2}$, $\overleftrightarrow{CF_2}$ 三線交於一點。由 *Desargues's Theorem* ， ΔABC 和 $\Delta D_2E_2F_2$ 透視，再由定理 2-12，U_2 , V_2 , W_2 三點共線，即 $\overleftrightarrow{U_2V_2W_2}$ 為 ΔABC , $\Delta D_2E_2F_2$ 的透視軸。同理，$\Delta D_2E_2F_2$, $\Delta L_2M_2N_2$ 和 $\Delta L_2M_2N_2$, ΔABC 也都以 $\overleftrightarrow{U_2V_2W_2}$ 為它們的透視軸。由引理 1-3，這三對三角形的三個透視中心 $D_2E_2F_2-FMC$, $D_2E_2F_2-SMC$, $D_2E_2F_2-TMC$ 共線，這條線即為 $D_2E_2F_2-$ *Morley Line* 。 ■

我們現在有了三條線， $DEF-$ *Morley Line* , $D_1E_1F_1-$ *Morley Line* , $D_2E_2F_2-$ *Morley Line* ，那它們是否還存在進一步的關係呢？事實上，我們可以從[5]中發現， $DEF-$ *Morley Line* 除了過三個 *Morley Center* 外，還有另外一個點 —— $D_2E_2F_2-FMC$ 。奇妙的是，不只有 $DEF-$ *Morley Line* ， $D_1E_1F_1-$ *Morley Line* 會經過 $DEF-FMC$ ， $D_2E_2F_2-$ *Morley Line* 會經過 $D_1E_1F_1-FMC$ ，也就是它們的 *Morley Line* 會經過彼此的重心！

那我們同樣在這裡對這個美妙的性質給出另解：

引理 2-14 若有兩個正三角形ΔABC，$\Delta A_1B_1C_1$，$\overline{AB}//\overline{A_1B_1}$，$\overline{BC}//\overline{B_1C_1}$，$\overline{CA}//\overline{C_1A_1}$，則

$\overleftrightarrow{AA_1}$，$\overleftrightarrow{BB_1}$，$\overleftrightarrow{CC_1}$三線共點(圖十三)



圖(十三)

證明：設$\overleftrightarrow{AA_1}\cap\overleftrightarrow{BB_1}=P$，延長$\overleftrightarrow{PC}$，則$\dfrac{\overline{PC}}{\overline{P(\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{A_1C_1})}}=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PB_1}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{P(\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{B_1C_1})}}$，故

$\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{B_1C_1}=\overleftrightarrow{PC}\cap\overleftrightarrow{A_1C_1}$，即$\overleftrightarrow{PC}$過$C_1$。 ■

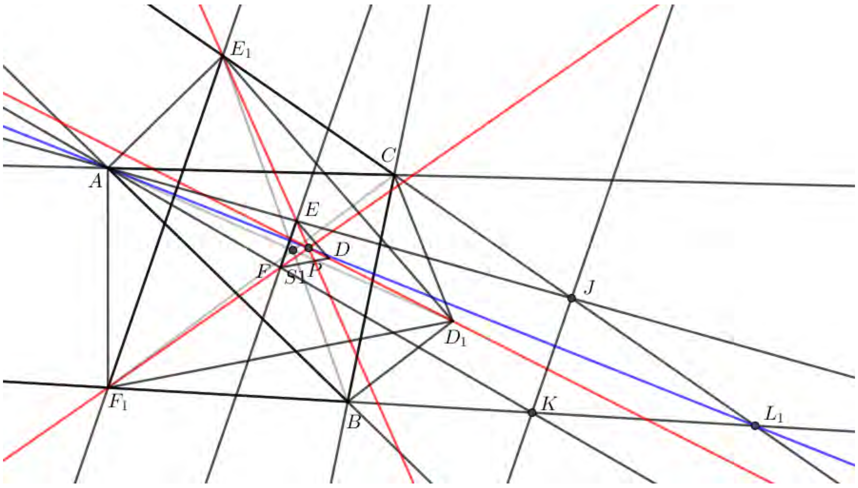
引理 2-15 設ΔABC和$\Delta A_1B_1C_1$的重心分別為O及O_1，則O，O_1，P三點共線(圖十三)

證明：由$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PB_1}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PC_1}}$，得到$P$是$\Delta ABC$和$\Delta A_1B_1C_1$的位似中心，故$P,O,O_1$共線。 ■

現在我們回到原題，既然知道了$\overleftrightarrow{DD_1}$，$\overleftrightarrow{EE_1}$，$\overleftrightarrow{FF_1}$三線共點，那這個點又是什麼呢？正是$D_1E_1F_1-TMC$！

定理 2-16 設$\overleftrightarrow{DD_1}\cap\overleftrightarrow{EE_1}\cap\overleftrightarrow{FF_1}=P_1$，則$P_1\equiv D_1E_1F_1-TMC$ (圖十四)

這個問題似乎不好直接下手，但注意到$D_1E_1F_1-TMC$是$D_1E_1F_1-SMC$的等角共軛點，故它會在$\overleftrightarrow{AD_1}$關於$\angle A$的等角線$\overleftrightarrow{AL_1}$上，所以我們只須證明 P 在$\overleftrightarrow{AL_1}$上就好了，也就是要證明$\overleftrightarrow{EE_1}$，$\overleftrightarrow{FF_1}$，$\overleftrightarrow{AL_1}$三線共點。



圖(十四)

證明： 觀察 ΔAEF 和 $\Delta L_1E_1F_1$，由於 $\overline{EF}//\overline{E_1F_1}$ (見引理 3-1)，故它們相交於 $\overleftrightarrow{EF}$ 方向的無窮遠點。設 $\overleftrightarrow{AE}\cap\overleftrightarrow{L_1E_1}=J$, $\overleftrightarrow{AF}\cap\overleftrightarrow{L_1F_1}=K$, 則由於 J, K 落在 *Second Morley Triangle* 邊上 (詳細見引理 3-1 , $J\equiv E_{10}, K\equiv F_{01}$)，所以 $\overline{JK}//\overline{EF}$, ΔAEF 和 $\Delta L_1E_1F_1$ 透視，$\overleftrightarrow{EE_1}\cap\overleftrightarrow{FF_1}=P_1$ 落在 $\overleftrightarrow{AL_1}$ 上。同理，P_1 落在 $\overleftrightarrow{BM_1}$, $\overleftrightarrow{CN_1}$ 上，即 $P_1\equiv D_1E_1F_1-TMC$ 。 ■

我們接著證明另外兩個情形：

定理 2-17 設 $\overleftrightarrow{D_1D_2}\cap\overleftrightarrow{E_1E_2}\cap\overleftrightarrow{F_1F_2}=P_2$, 則 $P_2\equiv D_2E_2F_2-TMC$

證明： 我們觀察 ΔAE_1F_1 和 $\Delta L_2E_2F_2$ ，由於 $\overline{E_1F_1}//\overline{E_2F_2}$ (見引理 3-1)，故它們相交於 $\overleftrightarrow{E_1F_1}$ 方向的無窮遠點。設 $\overleftrightarrow{AE_1}\cap\overleftrightarrow{L_2E_2}=J_1$, $\overleftrightarrow{AF_1}\cap\overleftrightarrow{L_2F_2}=K_1$, 則由於 J_1 , K_1 落在 *First Morley Triangle* 邊上 (詳細見引理 3-1 , $J_1\equiv E_{21}$, $K_1\equiv F_{12}$) ，所以 $\overline{J_1K_1}//\overline{E_1F_1}$, ΔAE_1F_1 和 $\Delta L_2E_2F_2$ 透視，$\overleftrightarrow{E_1E_2}\cap\overleftrightarrow{F_1F_2}=P_2$ 落在 $\overleftrightarrow{AL_2}$ 上。同理，P_2 落在 $\overleftrightarrow{BM_2}$, $\overleftrightarrow{CN_2}$ 上，即 $P_2\equiv D_2E_2F_2-TMC$ 。 ■

定理 2-18 設 $\overleftrightarrow{D_2D}\cap\overleftrightarrow{E_2E}\cap\overleftrightarrow{F_2F}=P$, 則 $P\equiv DEF-TMC$

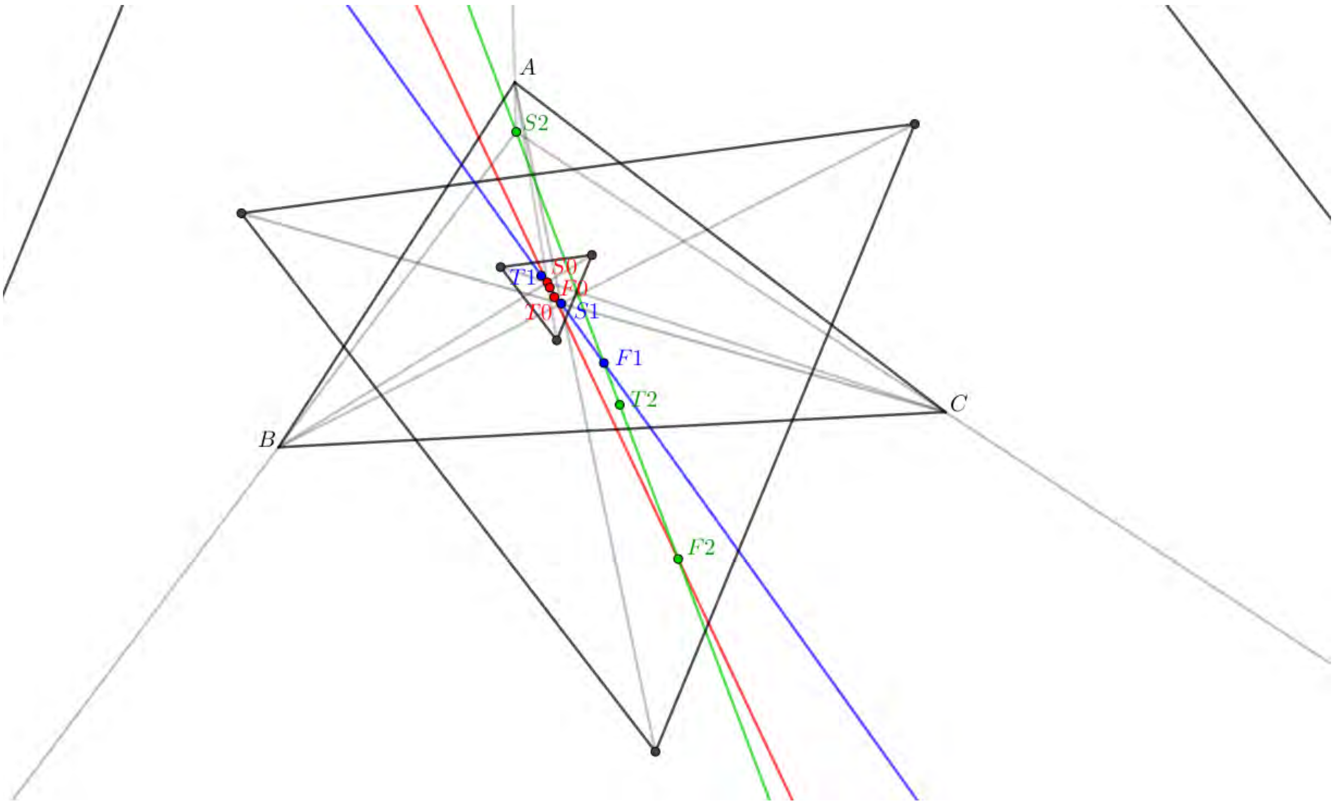
證明： 觀察 ΔAE_2F_2 和 ΔLEF ，由於 $\overline{E_2F_2}//\overline{EF}$ (見引理 3-1)，故它們相交於 $\overleftrightarrow{E_2F_2}$ 方向的無窮遠點。設 $\overleftrightarrow{AE_2}\cap\overleftrightarrow{LE}=J_2$, $\overleftrightarrow{AF_2}\cap\overleftrightarrow{LF}=K_2$, 則由於 J_2 , K_2 落在 *Third Morley Triangle* 邊上(詳細見引理 3-1 , $J_2\equiv E_{02}, K_2\equiv F_{20}$) ，所以 $\overline{J_2K_2}//\overline{E_2F_2}$, ΔAE_2F_2 和 ΔLEF 透視，$\overleftrightarrow{E_2E}\cap\overleftrightarrow{F_2F}=P$ 落在 $\overleftrightarrow{AL}$ 上。同理，P 落在 $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CN}$ 上，即 $P\equiv DEF-TMC$ 。 ■

至此，由於兩點決定一條直線，所以我們得到：

定理 2-19 $DEF-FMC$ 落在 $D_1E_1F_1-Moley\ Line$ 上

$D_1E_1F_1-FMC$ 落在 $D_2E_2F_2-Morley\ Line$ 上

$D_2E_2F_2-FMC$ 落在 $DEF-Morley\ Line$ 上

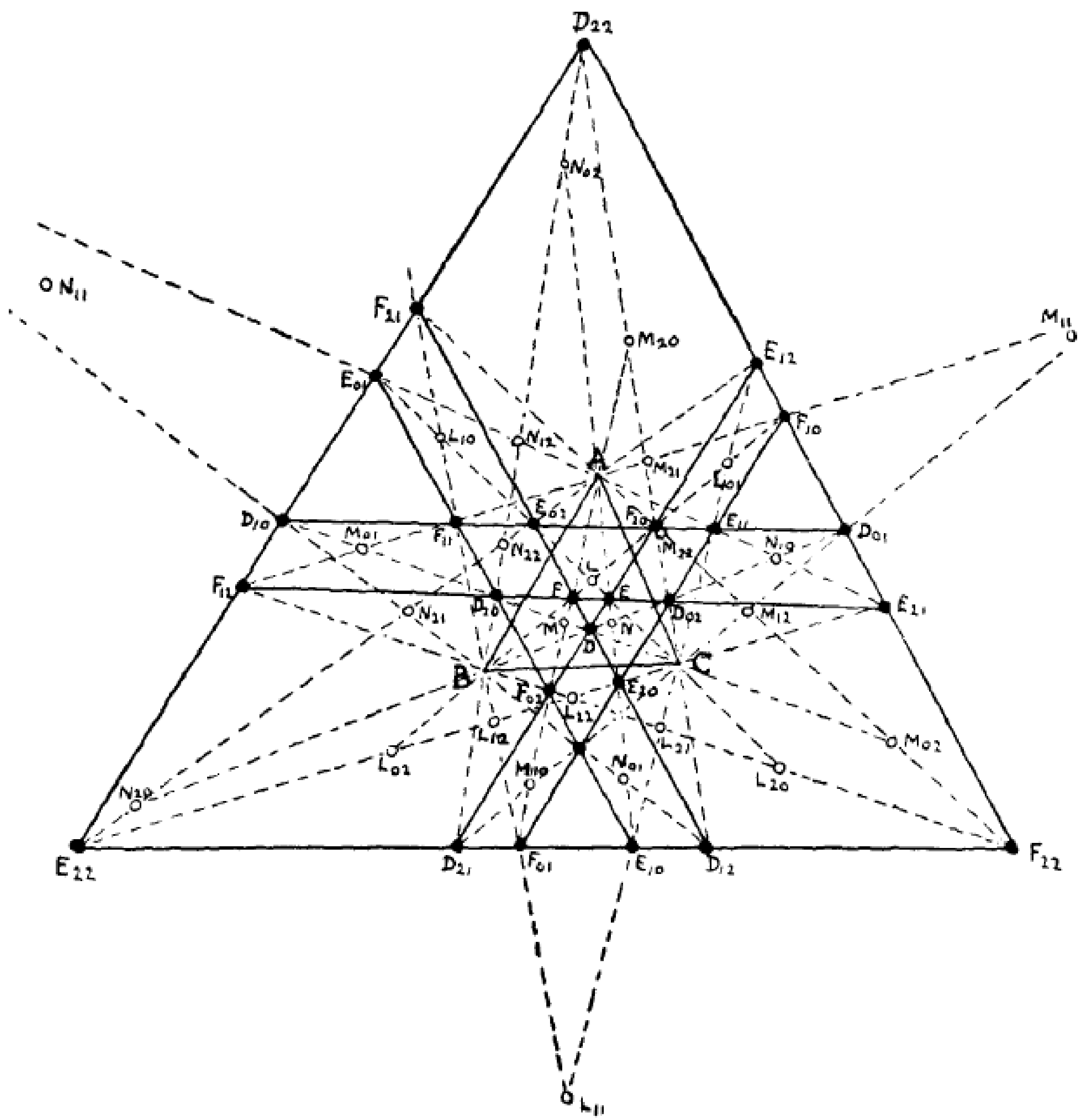


圖(十五)

在 F.Glanville Taylor and W.L.Marr [3], p123 中，證明了這樣一個有趣的結論：

引理 3-1 如圖(十六)，我們將 $\overleftrightarrow{AE}$，$\overleftrightarrow{AF}$，$\overleftrightarrow{BD}$，$\overleftrightarrow{BF}$，$\overleftrightarrow{CD}$，$\overleftrightarrow{CE}$ 六條角的三等分線旋轉$120°$(逆時針以及順時針)，在每一個頂點我們可以得到六條這樣的的三等分線。而這些三等分線一共交出 27 個頂點，分別有 9 個關於 D，E，F 的(D_{qr}, E_{rp}, F_{pq} p，q，$r \in \{0,1,2\}$)。而這些頂點落在九條直線上，並且是三對三(3 *by* 3)平行的。這 27 個頂點一共構成 27 個正三角形，18 個關於 D, E, F 的($\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$，且 $p+q+r \equiv 0$，$2 \pmod 3$)，另外 9 個只由 D，E，F 其中一種所構成(如 $\Delta D_{00}D_{12}D_{21}$)。而 L_{qr}，M_{rp}，N_{pq} 分別是 D_{qr}，E_{rp}，F_{pq} 的等角共軛點。那我們在這裡稱形如 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的正三角形為 $pqr-morley\ triangle$。

創結論**。



圖(十六)[3], p124

那有了前面的結論，我們自然會好奇，在這些關於 D，E，F 的 18 個正三角形中，有哪些會存在對 ΔABC 的 *Morley Line*？而它們彼此之間是否會產生如定理 **2-19** 般的關係呢？實際上，它們全都存在，且後一個問題的答案也是肯定的，同時這也是本作品中最為重要的**原創結論**。

在證明之前先引進 F.Glanville Taylor and W.L.Marr [3], p126 中的一個引理：

引理 3-2 $\overline{DL}//\overline{E_{01}M_{01}}//\overline{F_{10}N_{10}}$ (圖十六)

證明：我們將 AE , AF 依次旋轉 $120°$ 兩次，並固定 BL , CL , 我們會得到 $\Delta DE_{01}F_{10}$ 和 $\Delta DE_{02}F_{20}$, 那麼 DL , $E_{01}M_{01}$, $F_{10}N_{10}$ 和 DL , $E_{02}M_{02}$, $F_{20}N_{20}$ 與 DL , EM , FN 相對應。我們可以得到當 DL 固定時， EM , FN 各自不同方向旋轉 $60°$ ，又根據引理 1-1，故 $DL//E_{01}M_{01}//F_{10}N_{10}$ 。 ■

推論：在正三角形 $D_{qr}E_{rp}f_{pq}$ 中， $\overline{D_{qr}L_{qr}}\perp\overline{E_{rp}F_{pq}}$, $\overline{E_{rp}M_{rp}}\perp\overline{F_{pq}D_{qr}}$, $\overline{F_{pq}N_{pq}}\perp\overline{D_{qr}E_{rp}}$

因為我們可以將除了 D , E , F , D_{11} , E_{11} , F_{11} , D_{22} , E_{22} , F_{22} 其它所有點都照引理 3-2 的方式處理，例如 $\overline{E_{01}M_{01}}\perp\overline{D_{10}F_{11}}\Leftrightarrow\overline{DL}\perp\overline{EF}$

$$\overline{E_{12}M_{12}}\perp\overline{D_{01}F_{20}}\Leftrightarrow\overline{D_{11}L_{11}}\perp\overline{E_{11}F_{11}}$$

$$\overline{E_{20}M_{20}}\perp\overline{D_{12}F_{01}}\Leftrightarrow\overline{D_{22}L_{22}}\perp\overline{E_{22}F_{22}}$$

而接下來可由我們的引理 1-1 ，引理 2-4，引理 2-9 得證。

註： $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}\cap\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}\cap\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}=D_{qr}E_{rp}F_{pq}-FMC$ ，為方便起見，稱此點為 $pqr-FMC$ 。

定理 3-3 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Second Morley Center* 存在，即 $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線共點。

證明：由引理 3-2 的推論， $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}$, $\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}$, $\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}$ 三線共點，故由 *Brianchon's Theorem* 知 $L_{qr}F_{pq}M_{rp}D_{qr}N_{pq}E_{rp}$ 是一個 *Brianchon hexagon* ，故 $AF_{pq}BD_{qr}CE_{rp}$ 也是一個 *Brianchon hexagon* ， $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線交一點，此點即為 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}-SMC$, 為方便起見，我們稱其為 $pqr-SMC$ 。 ■

定理 3-4 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Third Morley Center* $=\overleftrightarrow{AL_{qr}}\cap\overleftrightarrow{BM_{rp}}\cap\overleftrightarrow{CN_{pq}}$

證明：由 L_{qr} 為 D_{qr} , M_{rp} 為 E_{rp} , N_{pq} 為 F_{pq} 的等角共軛點，以及 **Trigonometric Ceva's Theorem**， $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線共點 $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AL_{qr}}$, $\overleftrightarrow{BM_{rp}}$, $\overleftrightarrow{CN_{pq}}$ 三線共點，且其交點為 $pqr-SMC$ 之等角共軛點。為方便起見，我們稱此點為 $pqr-TMC$ 。 ■

定理 3-5 $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{E_{rp}F_{pq}}, \overleftrightarrow{M_{rp}N_{pq}}$ 交於一點

證明：對 $\Delta BF_{pq}M_{rp}$ 和 $\Delta CE_{rp}N_{pq}$ 運用 *Desargue's Theorem*，

$\overleftrightarrow{BF_{pq}} \cap \overleftrightarrow{CE_{rp}} = L_{qr}$，$\overleftrightarrow{F_{pq}M_{rp}} \cap \overleftrightarrow{E_{rp}N_{pq}} = A$，$\overleftrightarrow{M_{rp}B} \cap \overleftrightarrow{N_{pq}C} = pqr-TMC$，由定理 3-4，$L_{qr}$，$A$，$pqr-TMC$ 三點共線，故 $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{E_{rp}F_{pq}}, \overleftrightarrow{M_{rp}N_{pq}}$ 交於一點，並設此點為 U_{pqr}。 ■

推論：$\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{F_{pq}D_{qr}}, \overleftrightarrow{N_{pq}L_{qr}}$ 三線交於一點，設此點為 V_{pqr}；$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{D_{qr}E_{rp}}, \overleftrightarrow{L_{qr}M_{rp}}$ 三線交於一點，設此點為 W_{pqr}。

定理 3-6 $pqr-FMC$，$pqr-SMC$，$pqr-TMC$ 三點共線 ($pqr-Morley\ Line$)

證明：由定理 3-3，$\overleftrightarrow{AD_{qr}}$，$\overleftrightarrow{BE_{rp}}$，$\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 三線交於一點，由 *Desargue's Theroem*，ΔABC 和 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 透視，再由定理 3-5，$U_{pqr}, V_{pqr}, W_{pqr}$ 三點共線，即 $\overleftrightarrow{U_{pqr}V_{pqr}W_{pqr}}$ 為 ΔABC 和 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 之透視軸。同理，$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$，$\Delta L_{qr}M_{rp}N_{pq}$ 和 $\Delta L_{qr}M_{rp}N_{pq}$，$\Delta ABC$ 也都以 $\overleftrightarrow{U_{pqr}V_{pqr}W_{pqr}}$ 為它們的透視軸，由引理 1-3，這三對三角形的三個透視中心 $pqr-FMC$，$pqr-SMC$，$pqr-TMC$ 三點共線，這條線即為 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}-Morley\ Line$，為方便起見，我們稱此線為 $pqr-Morley\ Line$。 ■

定理 3-7 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q-1r-1}E_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$，當 $p+q+r \equiv 0 \pmod 3$

(註：當 $p, q, r \notin \{0,1,2\}$ 時，p, q, r 的值即代表它們所處的模 3 最小非負剩餘系。)

證明：我們的目標是證明 $\overleftrightarrow{D_{qr}D_{q-1r-1}} \cap \overleftrightarrow{E_{rp}E_{r-1p-1}} \cap \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p-1q-1}}$ 為 $pqr-SMC$ 的等角共軛點。觀察 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$。

(1) 當 $p=q=r$，在定理 2-16 已證明。

(2) 當 $(p, q, r) = (0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1)$，

由 $\overleftrightarrow{L_{qr}E_{rp}} \cap \overleftrightarrow{AE_{r-1p-1}} = E_{rr}$，$\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}} \cap \overleftrightarrow{AF_{p-1q-1}} = F_{rq}$，以及 $\overline{E_{rr}F_{rq}} // \overline{E_{rp}F_{pq}}$，得到 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 透視。

(3) 當 $(p, q, r)=(0, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 1, 0)$，

由 $\overleftrightarrow{L_{qr}E_{rp}} \cap \overleftrightarrow{AE_{r-1p-1}} = E_{rq}$， $\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}} \cap \overleftrightarrow{AF_{p-1q-1}} = F_{qq}$，以及 $\overline{E_{rq}F_{qq}} // \overline{E_{rp}F_{pq}}$，得到

$\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 透視。

最後我們再由 *Desargue's Theorem*， $\overleftrightarrow{E_{rp}E_{r-1p-1}}, \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p-1q-1}}, \overleftrightarrow{AL_{qr}}$ 三線共點。 ■

定理 3-8 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q+1r+1}E_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$，當 $p+q+r \equiv 2 \pmod 3$

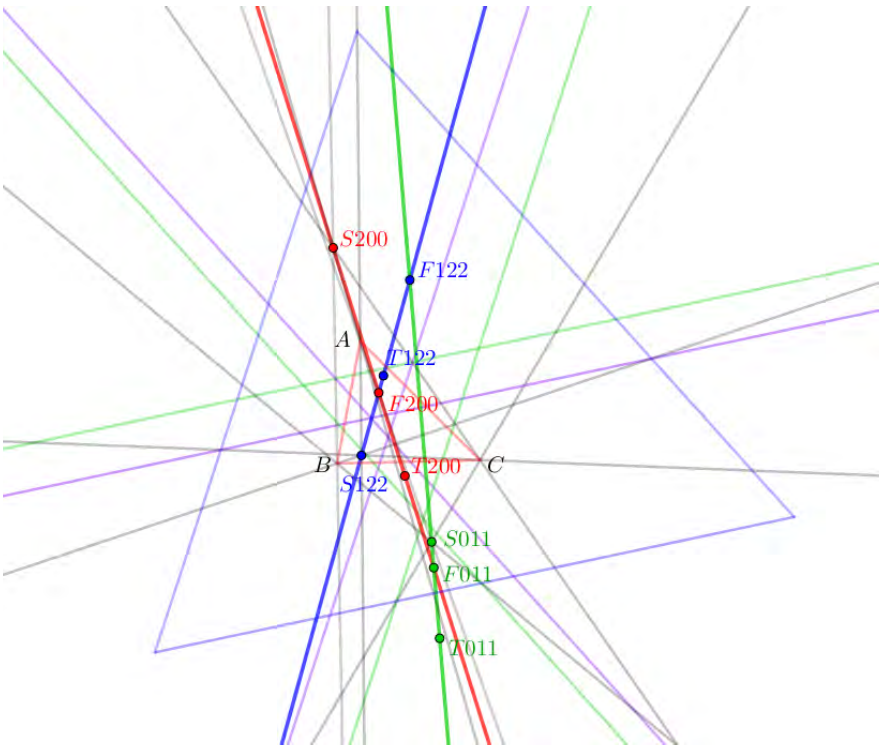
證明：同上，我們只需證明 $\overleftrightarrow{E_{rp}E_{r+1p+1}}, \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p+1q+1}}, \overleftrightarrow{AL_{qr}}$ 三線交於一點。觀察 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ ， 由 $\overleftrightarrow{L_{qr}E_{rp}} \cap \overleftrightarrow{AE_{r+1p+1}} = E_{r\,p+1}$, $\overleftrightarrow{L_{qr}F_{pq}} \cap \overleftrightarrow{AF_{p+1q+1}} = F_{p+1\,q}$ 以 及 $\overline{E_{r\,p+1}F_{p+1\,q}} // \overline{E_{rp}F_{pq}}$，得到 $\Delta L_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta AE_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 透視，再由 *Desargue's Theorem*， $\overleftrightarrow{E_{rp}E_{r+1p+1}}, \overleftrightarrow{F_{pq}F_{p+1q+1}}, \overleftrightarrow{AL_{qr}}$ 三線共點。 ■

至此，由於兩點決定一直線 $(pqr-FMC,\ pqr-TMC)$，我們得到所要的結論：

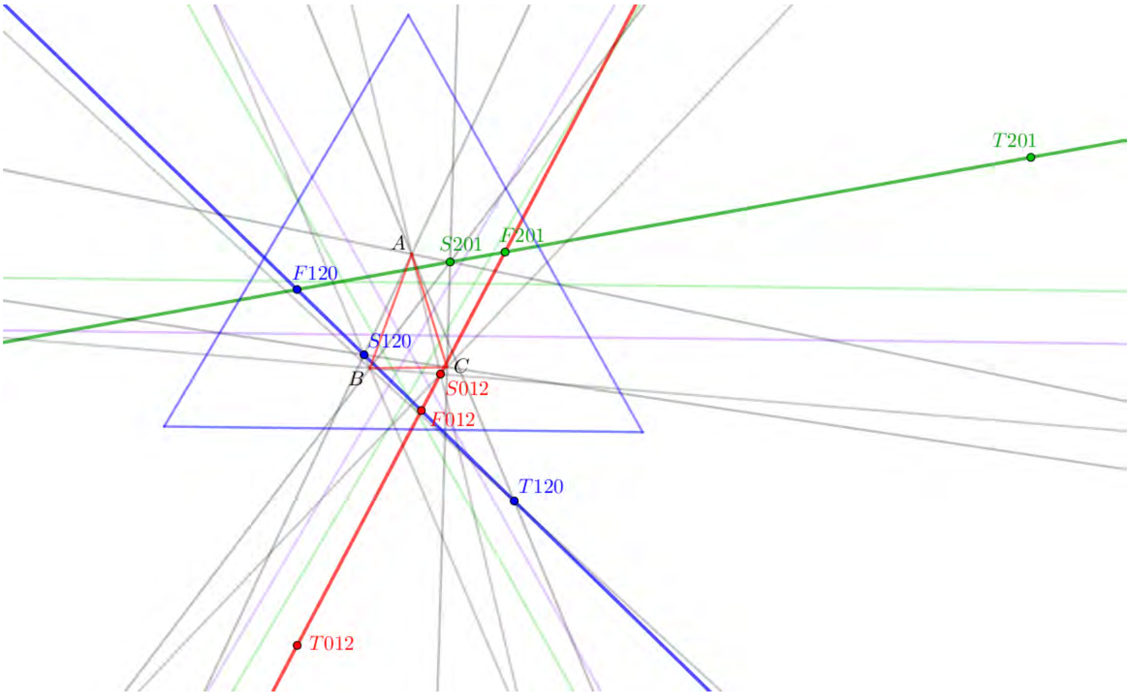
定理 3-9 當 $p+q+r \equiv 0 \pmod 3$　$p-1\,q-1\,r-1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上；

當 $p+q+r \equiv 2 \pmod 3$　$p+1\,q+1\,r+1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上

我們以下的圖舉(011,122,200)，(012,120,201)這兩組為例 (圖十七)(圖十八)：



圖(十七)



圖(十八)

這個定理告訴我們， *Morley Triangle* 可以透過它們的 *Morley Line* 來將這 18 個正三角形依此特性分類。

那由以上結論我們可以得出一個有趣的性質：

定理 3-10

設 $pqr-morley\ triangle$，$p+1\,q+1\,r+1-morley\ triangle$，$p+2\,q+2\,r+2-morley\ triangle$ 是滿足**定理 3-9** 的一個三元組，則 $pqr-TMC$，$p+1\,q+1\,r+1-TMC$，$p+2\,q+2\,r+2-TMC$ 三點共線。

證明：

易知， $pqr-morley\ triangle$，$p+1\,q+1\,r+1-morley\ triangle$，$p+2\,q+2\,r+2-morley\ triangle$ 滿足**引理 1-3**，故由**定理 3-7**、**定理 3-8** 即可得到我們所想要的結論。 ■

我們知道 *First Morley Triangle* 對 ΔABC 的 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 三點會落在同一條線上，自然會好奇它們的分布情形 (以下我們對這三個特殊點的討論皆是關於 *First Morley Triangle* 的)，於是我們有：

定理 4-1 *First Morley Center* 總是位於 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 之間。

以一般古典幾何的形式似乎較難處理這個問題，於是我們將利用三線坐標 (*Trilinear coordinates*)證明之。

不使用直角坐標系的原因是我們很難將莫利三角形以漂亮的形式呈現，三線坐標很大程度上協助我們解決了這個問題。

三線坐標 (*Trilinear coordinates*)

我們將 ΔABC 的 A 點坐標定為 $(1:0:0)$，B 點坐標定為 $(0:1:0)$，C 點坐標定為 $(0:0:1)$，

若平面上有一點 P，我們便將其坐標定為其至 ΔABC 三邊 $(\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB})$ 的距離比。

範例：內心 $=(1:1:1)$，重心 $=(\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c})=(bc:ca:ab)$，外心 $=(\cos A:\cos B:\cos C)$。

則 *First Morley Center* $=(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}:\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3}:\cos\frac{C}{3}+\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$

Second Morley Center $=(\sec\frac{A}{3}:\sec\frac{B}{3}:\sec\frac{C}{3})=(\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}:\cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3}:\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$

以上資料來自[5]，證明在此便不贅述。

而由引理 1-2 的證明，我們得到 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 互為等角共軛點。

而在三線坐標中，若有一點 $P=(d:e:f)$，則其等角共軛點 $P'=(\frac{1}{d}:\frac{1}{e}:\frac{1}{f})$。

故 *Third Morley Center* $=(\cos\frac{A}{3}:\cos\frac{B}{3}:\cos\frac{C}{3})$。

引理 4-2 若平面上有三點 $P_1=(a_1:a_2:a_3)$, $P_2=(a_1+b_1:a_2+b_2:a_3+b_3)$, $P_3=(b_1:b_2:b_3)$，則 P_2 位於 P_1, P_3 之間。

證明：我們先將 P_1, P_2, P_3 的坐標調成齊次：

$$P_1=(a_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}:a_2\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}:a_3\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}),\ P_2=(a_1+b_1:a_2+b_2:a_3+b_3)$$

$$P_3=\left(b_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}:b_2\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}:b_3\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}\right)$$ 。

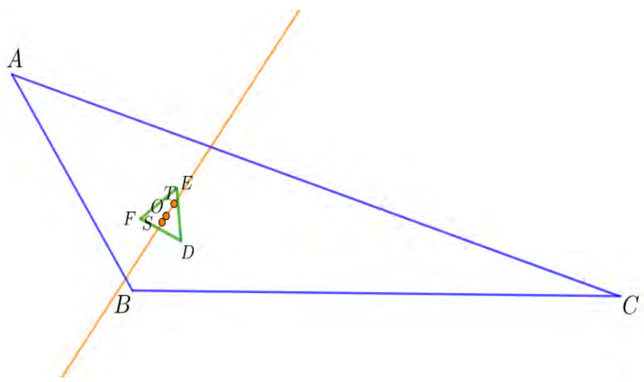
$$a_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le a_1+b_1 \Leftrightarrow a_1\cdot\frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le b_1 \Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le\frac{b_1}{a_1}$$

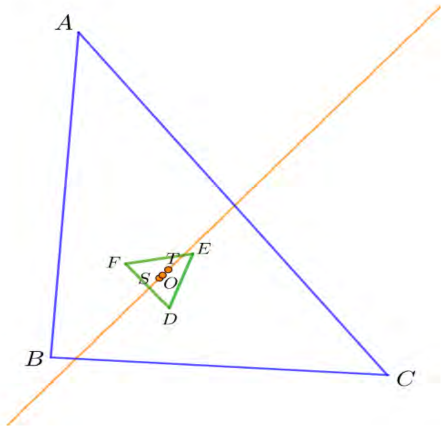
$$b_1\cdot\frac{\sum_{cyc}a_1+\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}b_1}\le a_1+b_1 \Leftrightarrow b_1\cdot\frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}\le a_1 \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}\le\frac{\sum_{cyc}b_1}{\sum_{cyc}a_1}$$

所以我們得到 P_2 位於 P_1，P_3 之間。特別地，當所有等式成立，我們有 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$，$P_1$，$P_2$，$P_3$ 三點重合。 ■

故由引理 **4-2**，我們取 $P_1\equiv$ *Second Morley Center*，$P_2\equiv$ *First Morley Center*，$P_3\equiv$ *Third Morley Center*（$a_1=\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}$，$b_1=\cos\frac{A}{3}\cdots\cdots$），即證明了**定理 4-1**。特別地，此三點重合若且唯若 ΔABC 為正三角形。

在繪製 *Morley Line* 的過程中，我們發現在拉動 ΔABC 的時候，*First Morley Center*，*Second Morley Center*，*Third Morley Center* 不曾離開 ΔABC 的 *First Morley Triangle*。





於是我們合理的猜測：

定理 4-3 *First Morley Center*，*Second Morley Center*，*Third Morley Center* 總是落在 ΔABC 的 *First Morley Triangle* 內。

證明：“某個點落在某個區域內”這件事似乎不好下手，若單單只是將問題轉換成求距離的形式，將會使計算變為極其複雜。我們不妨換個角度來作思考，假設在某個時候點跑出了我們所限制的區域外，因為在拉動 ΔABC 時點的軌跡是連續的，故必存在一個瞬間，點落在了區域的邊界上。換言之，我們只須證明“不存在某個瞬間使得 *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 落在 *First Morley Triangle* 的邊界上”即可。

注意到 *First Morley Center* 為 *First Morley Triangle* 的重心，所以我們只須證明 *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 的情況即可。

設 ΔDEF 為 ΔABC 的 *First Morley Triangle* ，則 $D=(1:2\cos\frac{C}{3}:2\cos\frac{B}{3})$, $E=(2\cos\frac{C}{3}:1:2\cos\frac{A}{3})$, $F=(2\cos\frac{B}{3}:2\cos\frac{A}{3}:1)$ ，我們先考慮 D , E , *Second Morley Center* 三點何時共線。而在三線坐標中，$P=(p:q:r)$, $U=(u:v:w)$, $X=(x,\ y,\ z)$ 三點共線若且唯若行列式 $D=\begin{vmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ 之值為 0。先證明 *Second Morley Center* 的情形，於是我們有：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ \cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} & \cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3} & \cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ 2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{C}{3}\cos\frac{A}{3} & 2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ 2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=8\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}\cos^2\frac{C}{3}-4\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}-4\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}+2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}$$

$$=2(2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{B}{3})(2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3})\geq 0$$

最後一式成立是因為

$2\cos\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}\geq 2\cos\frac{\pi}{3}\cos 0^{\circ}=1\geq\cos\frac{B}{3}$, $2\cos\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}\geq 1\geq\cos\frac{A}{3}$ ，等式成立當且僅當 $\angle A=0^{\circ}$, $\angle B=0^{\circ}$, $\angle C=180^{\circ}$，而此時 ABC 無法構成一個三角形。

由**定理 4-1** 我們得知當 ΔABC 為正三角形時，*Second Morley Center* 位於 *First Morley Triangle* 內部，從而 *Second Morley Center* 不曾離開 *First Morley Triangle* 內部。

接下來我們證明 *Third Morley Center* 的情形：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\frac{C}{3} & 2\cos\frac{B}{3} \\ 2\cos\frac{C}{3} & 1 & 2\cos\frac{A}{3} \\ \cos\frac{A}{3} & \cos\frac{B}{3} & \cos\frac{C}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\cos\frac{C}{3}+4\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+4\cos^2\frac{\mathrm{B}}{3}\cos\frac{C}{3}-4\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-4\cos^3\frac{C}{3}$$

$$=(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$$

然而，接下來的證明卻遭遇到了瓶頸，我們無法輕易將它順利化簡。如果代一下值就會發現，等式除了在會等於 0 之外，在 $\angle$A=90°, $\angle$B=90°, $\angle$C=0°亦為 0。注意到等式成立的時候有 $\angle$A=$\angle$B ，所以我們先證明在 $\angle$C 之值固定時，最小值發生在 $\angle$A=$\angle$B ，再證明原來的不等式。

$$(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})-[(\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})$$

$$+4(\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A+B}{6}\cos\frac{A+B}{6})]$$

$$=4[(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})-(\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{A+B}{6}\cos\frac{C}{3}$$

$$-\cos\frac{A+B}{6}\cos\frac{A+B}{6})]$$

$$=4[\cos\frac{C}{3}(\cos^2\frac{A}{3}+\cos^2\frac{B}{3}-2\cos^2\frac{A+B}{6})-(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-\cos^2\frac{A+B}{6})]$$

$$\geq 2(\cos^2\frac{A}{3}+\cos^2\frac{B}{3}-2\cos^2\frac{A+B}{6})-4(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-\cos^2\frac{A+B}{6})$$

$$\geq 2(\cos^2\frac{A}{3}+\cos^2\frac{B}{3}-2\cos^2\frac{A+B}{6})-4(\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3}-\cos^2\frac{A+B}{6})$$

$$=(\cos\frac{A}{3}-\cos\frac{B}{3})^2\geq 0$$

$$\therefore (\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{B}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B}{3})$$

$$\geq (\cos\frac{C}{3}-4\cos^3\frac{C}{3})+4(\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}+\cos^2\frac{A}{3}\cos\frac{C}{3}-\cos^2\frac{A}{3})\ (\because \angle A=\angle B)$$

$$=\cos\frac{C}{3}(1-4\cos^2\frac{C}{3})+4\cos^2\frac{A}{3}(2\cos\frac{C}{3}-1)$$

$$=[4\cos^2\frac{A}{3}-(2\cos\frac{C}{3}+1)](2\cos\frac{C}{3}-1)\geq 0\ \ (\because 4\cos^2\frac{A}{3}\geq 4\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=3\geq(2\cos\frac{C}{3}+1))$$

從而等號成立在 $\angle$A=0°, $\angle$B=0°, $\angle$C=180° 和 $\angle$A=90°, $\angle$B=90°, $\angle$C=0° 。而此時 ABC 無法構成一個三角形。

由定理 **4-1** 我們得知當 ΔABC 為正三角形時，*Third Morley Center* 位於 *First Morley Triangle* 內部，從而 *Third Morley Center* 不曾離開 *First Morley Triangle* 內部。 ■

陸、結論

設在 ΔABC 中，$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 為其所有角的三等分線所建構的 *Morley Triangle* $(p+q+r\equiv 0,\ 2\ (\mathrm{mod}\ 3))$，詳細見引理 **3-1**)，而三個特殊點定義如下：

First Morley Center $(pqr-FMC)$：$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的重心。

Second Morley Center $(pqr-SMC)$：$\overleftrightarrow{AD_{qr}}$，$\overleftrightarrow{BE_{rp}}$，$\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 的交點。

Third Morley Center $(PQR-TMC)$: $PQR-SMC$ 對 ΔABC 的等角共軛點。

L_{qr}, M_{rp}, N_{pq} 分別是 D_{qr}，E_{rp}，F_{pq} 的等角共軛點。

則我們有以下結論：

1. $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}}\cap\overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}}\cap\overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}}=pqr-FMC$ 。

2. 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Second Morley Center* 存在 $(pqr-SMC)$ 。

3. 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Third Morley Center* $= \overleftrightarrow{AL_{qr}} \cap \overleftrightarrow{BM_{rp}} \cap \overleftrightarrow{CN_{pq}}$ 。

4. $pqr-FMC$, $pqr-SMC$, $pqr-TMC$ 三點共線 ($pqr-Morley\ Line$)

5. $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q-1r-1}E_{r-1p-1}F_{P-1q-1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$ ，當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$

   $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q+1r+1}E_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$ ，當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$

6. 當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$ $p-1\,q-1\,r-1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上

   當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$ $p+1\,q+1\,r+1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上

$(pqr, p+1\,q+1\,r+1, p+2\,q+2\,r+2)$	$pqr-Morley\ Line$ 所經過的 *FMC*	$p+1\,q+1\,r+1-Morley\ Line$ 所經過的 *FMC*	$p+2\,q+2\,r+2-Morley\ Line$ 所經過的 *FMC*
(000,111,222)	222	000	111
(012,120,201)	201	120	102
(021,102,210)	210	102	021
(011,122,200)	122	200	011
(101,212,020)	212	020	101
(110,221,002)	221	002	110

7. $pqr-TMC$, $p+1\,q+1\,r+1-TMC$, $p+2\,q+2\,r+2-TMC$ 三點共線。

8. *First Morley Center* 總是位於 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 之間 (*First Morley Triangle*)。

9. *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 總是落在 ΔABC 的 *First Morley Triangle* 內。

柒、 未來展望

從**定理 4-1** 和 **定理 4-3** 我們探討了有關 *First Morley Triangle* 內三個特殊點的分布關係，而我們發現在其他衍生的 *Morley Triangle* 中的特殊點也會有類似的關聯性。因此，我們期望能建構一套簡潔的系統來解決這個問題。另外，我們還想知道 *Morley Line* 是否還與其他三角形中的特殊線(如歐拉線)有著更進一步的聯結，期待能在日後進行更進一步的探討。

捌、 參考文獻

1. 黃家禮(2014)。《幾何明珠》（第三版）。九章出版社。
2. http://mathworld.wolfram.com/FirstMorleyAdjunctTriangle.html
3. F.Glanville Taylor and W.L.Marr(1913). The six trisectors of each of the angles of a triangle. (https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/C4D463D0556830C0E4ED61D6D2FA5F5C/S0013091500035100a.pdf/six_trisectors_of_each_of_the_angles_of_a_triangle.pdf).
4. Chen-Jung Hsu(1967). A Problem on Three Desarguean Pairs of Triangles. (https://www.jstor.org/stable/2688280?seq=1#page_scan_tab_contents).
5. https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
6. http://mathworld.wolfram.com/SecondMorleyTriangle.html
7. http://mathworld.wolfram.com/ThirdMorleyTriangle.html

【評語】050406

本篇作品主要是關於莫利三角形一些衍生性質之研究。本篇作品的前半段(約前 17 頁)是已知結果文獻[3][5]的重新證明，作者主要得到新的性質是定理 2-19 的推廣，也就是關於 D、E、F 的 18 個正三角形，皆存在有某些特性的莫利線。這個性質的證明所需引進的重要符號，並未在作品內詳細定義並說明，而是必須去閱讀文獻[3]才會理解的。換句話說，證明的思路也是在[3]的框架上去進行。因此，整個作品的原創性未被詳細說明。其次在作品的寫作上，建議不要再列出已知結果並再重新證明，應該聚焦在新結果的說明。

作品海報

摘要

給定任意一個三角形，三個內角的三等分線兩兩交於三點，此三點形成一個等邊三角形，稱為莫利三角形(*First Morley Triangle*)。本作品從莫利三角形所牽涉到的三個特殊點開始：

First Morley Center (*FMC*)：即莫利三角形的重心。

Second Morley Center：即原三角形與莫利三角形對應頂點間的連線的交點。

Third Morley Center：即原三角形與 *First Morley Adjunct Triangle* 對應頂點間的連線的交點。

我們巧妙證明了這三個特殊點共線，並進一步推廣到所有與原三角形的三等分線相關的 18 個正三角形 $(\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq})$。我們發現這些正三角形都存在對原三角形的 *Morley Line*。除此之外，本作品最重要的成果是證明了：

當 $p+q+r\equiv 0\,(\bmod 3)$， $p-1\,q-1\,r-1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上；

當 $p+q+r\equiv 2\,(\bmod 3)$， $p+1\,q+1\,r+1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上；

並由此建構出在這 18 個正三角形中的三元組(*triad*)關係。

研究動機

某天翻閱《*幾何明珠*》時，對於莫利三角形(*Morley Triangle*)的奇特性與優美性起了極大的興趣，便想對其進行進一步的深入研究。某日在翻閱資料時，我們發現莫利三角形中存在許多奇特的點，希望能找出它們的性質與彼此之間的關聯。

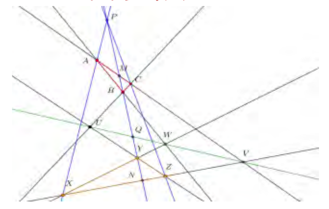
研究目的

1. 尋找莫利三角形中的特殊點(*First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 等等)的性質並予以證明。
2. 將這些特殊點的性質推廣至所有與原三角形的三等分線相關的 18 個正三角形$(\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq})$。
3. 探討這 18 個正三角形所形成的 *Morley Line* 之間的關聯性。
4. 探討 *First Morley Center*, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 在平面的分布問題。

研究設備及器材

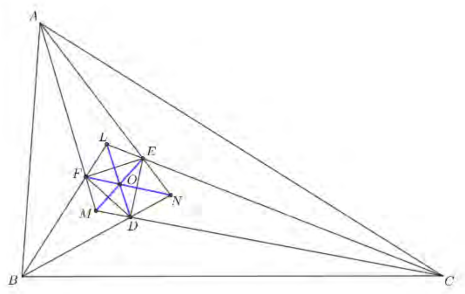
紙、筆、電腦、Geogebra

笛沙格定理

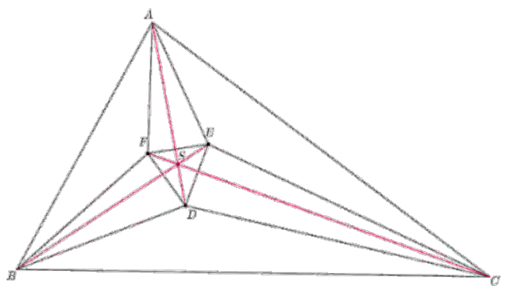


研究過程

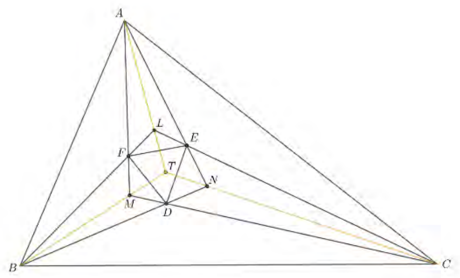
Morley Centers 與 *Morley Line*



First Morley Center

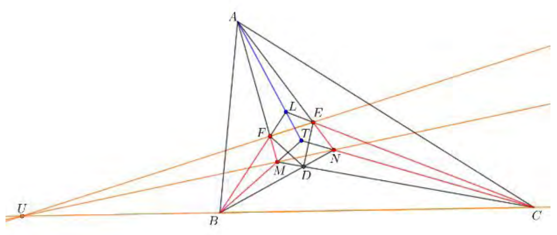


Second Morley Center



Third Morley Center

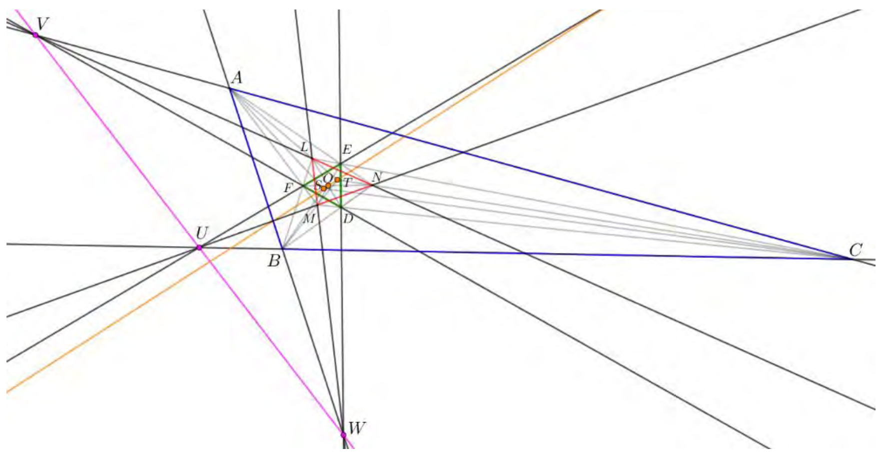
若有三個三角形兩兩互為“透視的”，則此三個三角形的三個透視軸共點若且唯若它們的三個透視中心共線。



$\overleftrightarrow{EF}$，$\overleftrightarrow{MN}$，$\overleftrightarrow{BC}$ 三線交於一點 U

$\overleftrightarrow{CA}$，$\overleftrightarrow{NL}$，$\overleftrightarrow{FD}$ 三線交於一點 V

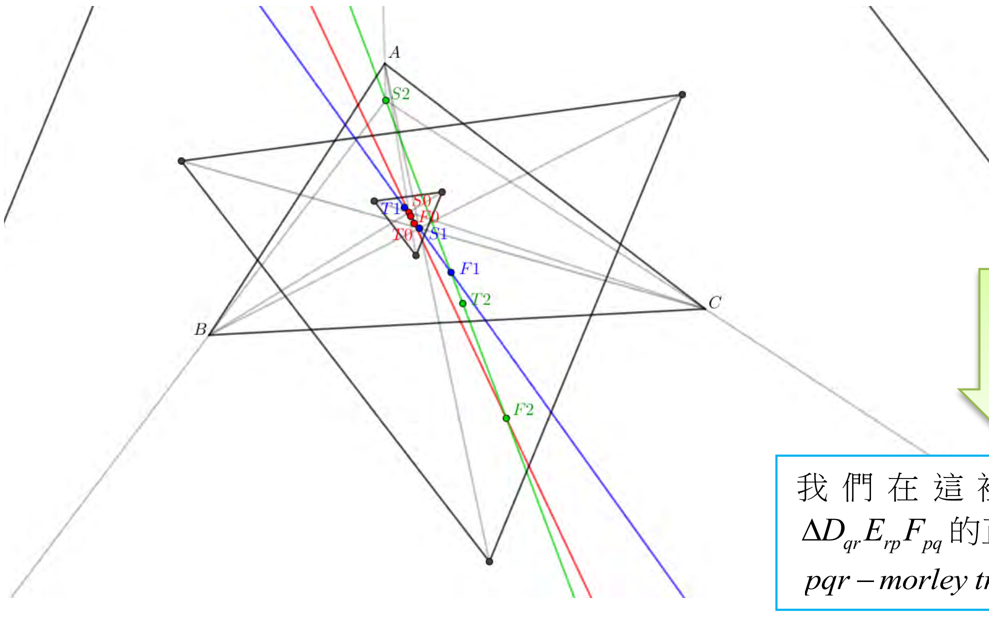
$\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{LM}$，$\overleftrightarrow{ED}$ 三線交於一點 W

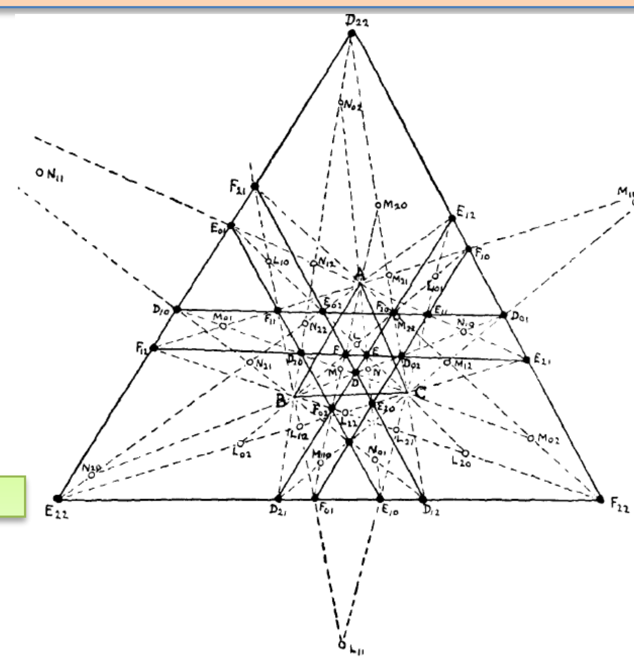


First Morley Center, *Second Morley Center*, *Third Morley Center* 三點共線

Morley Line 的推廣與莫利三角形的三元組關係

我們的主要研究從發現以下有趣的性質開始：
我們可以類似的方法定義 *Second Morley Triangle*，*Third Morley Triangle* 的 *Morley Line*，而這三條 *Morley Line* 會經過 *Morley Triangle* 們彼此的重心！





我們在這裡稱形如 $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的正三角形為 $pqr-morley\ triangle$

我們將這個概念延伸至了[3]所提出的 18 個廣義的莫利三角形中。其中，$\Delta D_{22}E_{22}F_{22}$ 稱作 *Second Morley Triangle*，$\Delta D_{11}E_{11}F_{11}$ 稱作 *Third Morley Triangle*

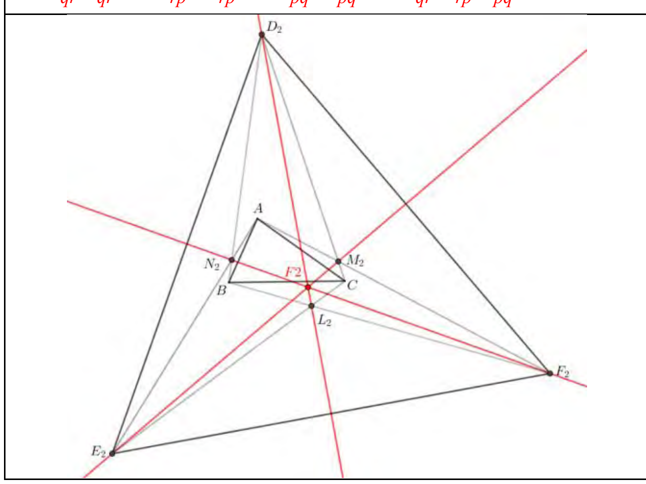
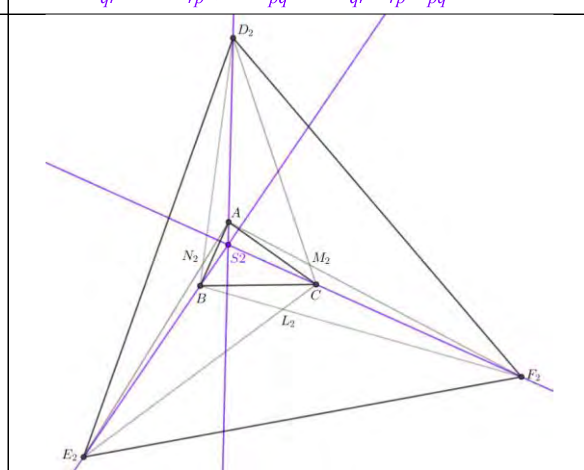
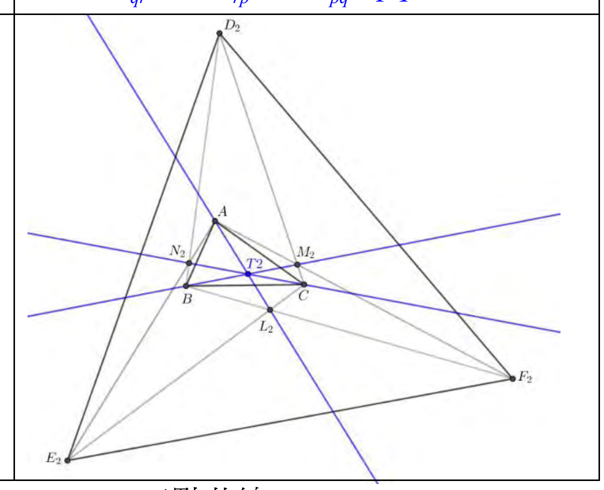
以下圖例我們皆以 *Second Morley Triangle* 或 *Third Morley Triangle* 的情況為例。

First Morley Center $(PQR-FMC)$：ΔPQR 的重心

Second Morley Center $(PQR-SMC)$：$\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BQ}, \overleftrightarrow{CR}$ 的交點(只在交於一點時有定義)

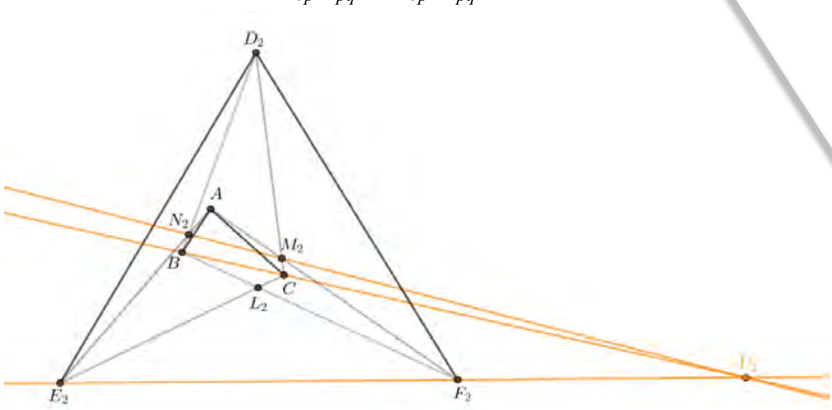
Third Morley Center $(PQR-TMC)$：$PQR-SMC$ (若有定義)對 ΔABC 的等角共軛點

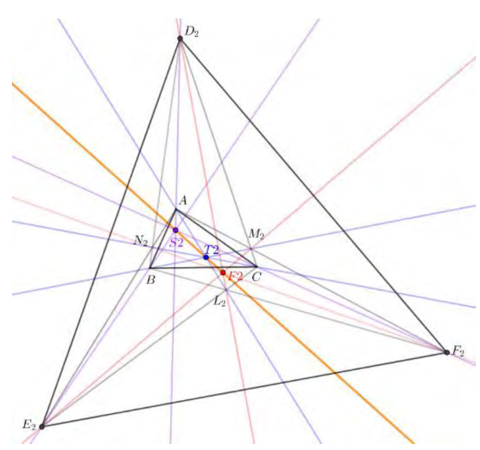
Morley Line $(PQR-Morley\ Line)$：若上述此三個特殊點共線，則這條線稱作 ΔPQR 對 ΔABC 的 *Morley Line*

$\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}} \cap \overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}} \cap \overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}} = D_{qr}E_{rp}F_{pq}-FMC$	$\overleftrightarrow{AD_{qr}}, \overleftrightarrow{BE_{rp}}, \overleftrightarrow{CF_{pq}} = D_{qr}E_{rp}F_{pq}-SMC$	$\overleftrightarrow{AL_{qr}} \cap \overleftrightarrow{BM_{rp}} \cap \overleftrightarrow{CN_{pq}} = pqr-TMC$
		

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{E_{rp}F_{pq}}, \overleftrightarrow{M_{rp}N_{pq}}$ 交於一點

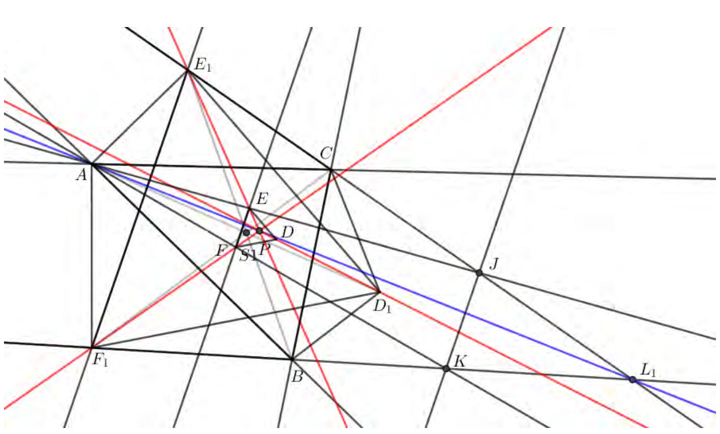
$pqr-FMC$, $pqr-SMC$, $pqr-TMC$ 三點共線 $(pqr-Morley\ Line)$





$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q-1r-1}E_{r-1p-1}F_{p-1q-1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$，當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$

$\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q+1r+1}E_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$，當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$

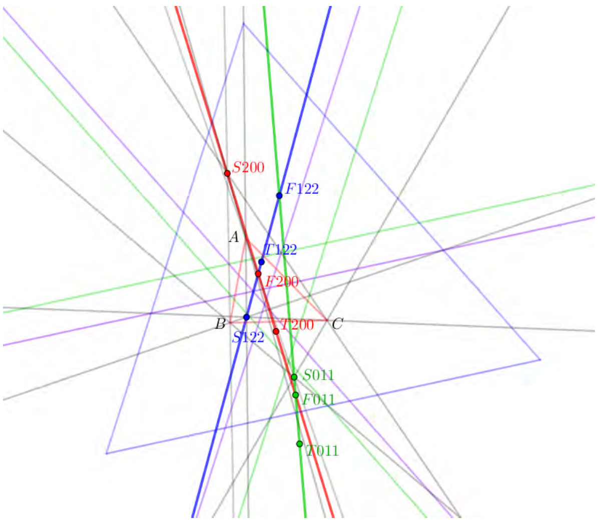


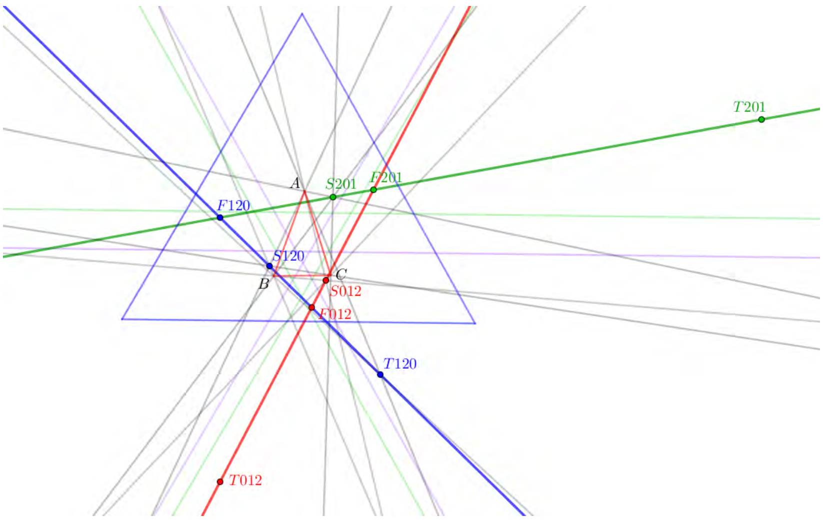
當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$　$p-1\,q-1\,r-1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上

當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$　$p+1\,q+1\,r+1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上

設 $pqr-morley\ triangle$，$p+1\,q+1\,r+1-morley\ triangle$，$p+2\,q+2\,r+2-morley\ triangle$ 是滿足上述定理的一個三元組，則 $pqr-TMC$，$p+1\,q+1\,r+1-TMC$，$p+2\,q+2\,r+2-TMC$ 三點共線。

我們由此在這 18 個廣義的莫利三角形中建構出了以 *Morley Line* 為連繫的三元組關係。



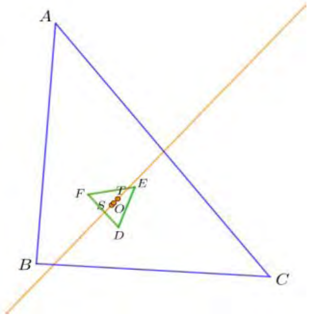


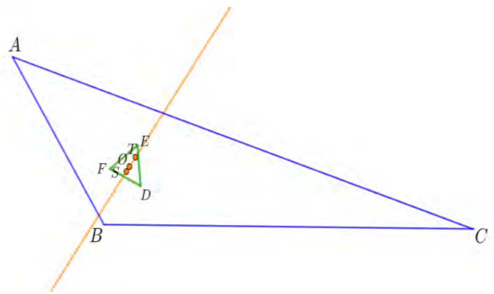
$122-FMC$ 落在 $011-Morley\ Line$ 上
$200-FMC$ 落在 $122-Morley\ Line$ 上
$011-FMC$ 落在 $200-Morley\ Line$ 上

$120-FMC$ 落在 $201-Morley\ Line$ 上
$201-FMC$ 落在 $012-Morley\ Line$ 上
$012-FMC$ 落在 $120-Morley\ Line$ 上

First Morley Center, Second Morley Center 和 *Third Morley Center* 在 *First Morley Triangle* 內的分布問題

定理 *First Morley Center* 總是位於 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 之間。





從左圖中我們能夠觀察到三個 *Morley Center* 的分布關係，由於此特性較難利用古典幾何證明，故我們利用三線座標 (*Trilinear coordinates*) 證明之。

定理 *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 總是落在 ΔABC 的 *First Morley Triangle* 內。

假設在某個時候，點跑出了我們所限制的區域外，因為在拉動 ΔABC 時點的軌跡是連續的，故必存在一個瞬間，點落在了區域的邊界上。換言之，我們只須證明 “不存在某個瞬間使得 *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 落在 *First Morley Triangle* 的邊界上” 即可。

結論

設在 ΔABC 中， $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 為其所有角的三等分線所建構的 *Morley Triangle* ($p+q+r\equiv 0$， $2 \pmod 3$)，而三個特殊點定義如下：

First Morley Center ($pqr-FMC$) ： $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 的重心。

Second Morley Center ($pqr-SMC$) ： $\overleftrightarrow{AD_{qr}}$ ， $\overleftrightarrow{BE_{rp}}$ ， $\overleftrightarrow{CF_{pq}}$ 的交點。

Third Morley Center ($PQR-TMC$): $PQR-SMC$ 對 ΔABC 的等角共軛點。

L_{qr} , M_{rp} , N_{pq} 分別是 D_{qr}， E_{rp}， F_{pq} 的等角共軛點。則我們有以下結論：

1. $\overleftrightarrow{D_{qr}L_{qr}} \cap \overleftrightarrow{E_{rp}M_{rp}} \cap \overleftrightarrow{F_{pq}N_{pq}} = pqr-FMC$ 。
2. 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Second Morley Center* 存在 ($pqr-SMC$) 。
3. 正三角形 $D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 對 ΔABC 的 *Third Morley Center* $= \overleftrightarrow{AL_{qr}} \cap \overleftrightarrow{BM_{rp}} \cap \overleftrightarrow{CN_{pq}}$ 。
4. $pqr-FMC$, $pqr-SMC$, $pqr-TMC$ 三點共線 ($pqr-Morley\ Line$)
5. $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q-1r-1}E_{r-1p-1}F_{P-1q-1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$ ，當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$
   $\Delta D_{qr}E_{rp}F_{pq}$ 和 $\Delta D_{q+1r+1}E_{r+1p+1}F_{p+1q+1}$ 的透視中心為 $pqr-TMC$ ，當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$
6. 當 $p+q+r\equiv 0 \pmod 3$ $p-1\,q-1\,r-1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上
   當 $p+q+r\equiv 2 \pmod 3$ $p+1\,q+1\,r+1-FMC$ 在 $pqr-Morley\ Line$ 上
7. $pqr-TMC$， $p+1\,q+1\,r+1-TMC$， $p+2\,q+2\,r+2-TMC$ 三點共線。
8. *First Morley Center* 總是位於 *Second Morley Center* 和 *Third Morley Center* 之間 (*First Morley Triangle*)。
9. *First Morley Center* , *Second Morley Center* , *Third Morley Center* 總是落在 ΔABC 的 *First Morley Triangle* 內。

未來展望

從**定理 4-1** 和 **定理 4-3** 我們探討了有關 *First Morley Triangle* 內三個特殊點的分布關係，而我們發現在其他衍生的 *Morley Triangle* 中的特殊點也會有類似的關聯性。因此，我們期望能建構一套簡潔的系統來解決這個問題。另外，我們還想知道 *Morley Line* 是否還與其他三角形中的特殊線(如歐拉線)有著更進一步的聯結，期待能在日後進行更進一步的探討。