中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050405

巴斯卡正方形

學校名稱：國立中央大學附屬中壢高級中學

作者：	指導老師：
高二 林芯羽 高二 陳之昀	曹文峰

關鍵詞：二項式係數(Binomial Coefficients)、
同餘(Modulo)、圖形(Graph)

摘要

本文將一道組合問題可能的方法數製成正方形表格，以「巴斯卡正方形」命名。將此正方形內的組合數同餘若干自然數後，觀察及歸納其結果。

同餘後不同的餘數配予不同顏色，產生一些特別的圖形，例如：「教大中庭系列」及「棋盤格系列」。我們研究了這些圖形的規律性以及對各個餘數的個數進行計數。

我們利用 Lucas's Theorem 及 $(1+x)^n$ 展開的係數搭配乘法原理來做計數的工具，並且研發了一個算式用於計算任意組合數被質數的次方同餘後的結果。

Abstract

This paper discusses the number of solutions to a combinatorial problem and makes a square, which we term "Pascal square." After the number of combinations within the square undergoes the congruence by natural numbers, we observe and deduce the consequence.

Different colors are assigned to different remainders after congruence, and they form some special graphs, such as "Courtyard of Education Building series" and "chessboard series." We investigate the regularity of these graphs and count the quantity of each remainder.

We use Lucas's Theorem and the coefficient derived from the expansion of $(1+x)^n$ along with multiplication rule as the tool to count numbers, and we devise a formula for counting the consequence of any number of combinations undergoing congruence by the power of a prime number.

壹、研究動機

106年學測數學填充第F題[1]，原命題為：「一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為？」因每步皆有上、下、左、右4種跳法，所以有 4^4 種可能的情形，跳回原點的情形有：

左左右右：排列情形有 $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ 種

上上下下：排列情形有 $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ 種

上下左右：排列情形有 $4!=24$ 種

故跳了四步後恰回到原點的機率為 $\dfrac{6+6+24}{4^4}=\dfrac{9}{64}$ 。

這個問題是我們奇幻旅程的開始！我們初遇此問題，思考若是跳動到坐標平面上其他的格子點該如何處理？若是跳動次數增加會有何不同？經初步的計算後，我們發現跳動到坐標平面上格子點的方法數恰巧與巴斯卡三角形有所關連，例如「圖 1」為跳動 6 次後的情形。

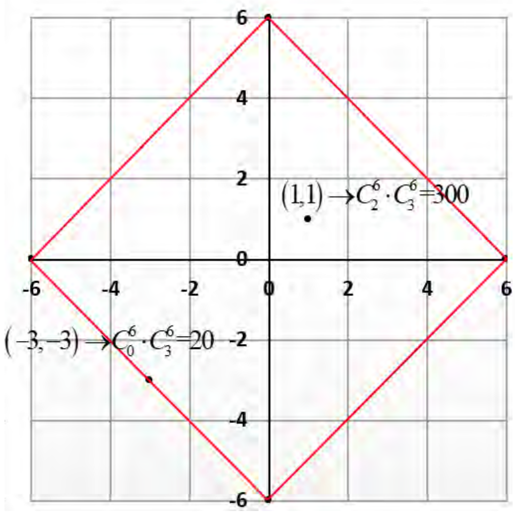


圖 1：跳動 6 次後的情形

1	6	15	20	15	6	1
6	36	90	120	90	36	6
15	90	225	300	225	90	15
20	120	300	400	300	120	20
15	90	225	300	225	90	15
6	36	90	120	90	36	6
1	6	15	20	15	6	1

表1：6階巴斯卡正方形(6th Pascal square)

我們再進一步探討，得到跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點 (x,y) 的機率為：

$$\frac{1}{4^n}\times C_a^n\times C_b^n \text{，其中 } a=\frac{n-|x+y|}{2} \text{ 、 } b=\frac{n-|x-y|}{2}$$

將跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點 (x,y) 的方法數製作成一個表格，並將此表格旋轉 45° 後以「巴斯卡正方形」來命名；跳動 n 次所製成的「巴斯卡正方形」稱為「n 階巴斯卡正方形」。我們以此「巴斯卡正方形」展開一系列的研究。過程中有趣的現象讓我們推論出一些意想不到的結果，這是一趟我們與巴斯卡的夢幻之旅！

貳、研究目的

我們期盼研究的成果是有發展性與應用性的！至少在某些文創商品、磁磚、衣服與公共藝術上能呈現出這些蘊含數學之美的特殊圖形。在「巴斯卡正方形」中，因不同的組合數被相異的自然數所除會得到若干不同的餘數，由於餘數的個數、位置存在某些特殊的結構，經過著色處理後，就能呈現一些美麗的幾何圖形。基於配色上的需求，計算餘數的個數、位置與對稱性就有其必要，於是我們進一步研究出一些計算餘數的方式，用於尋找這些幾何圖形與配色。

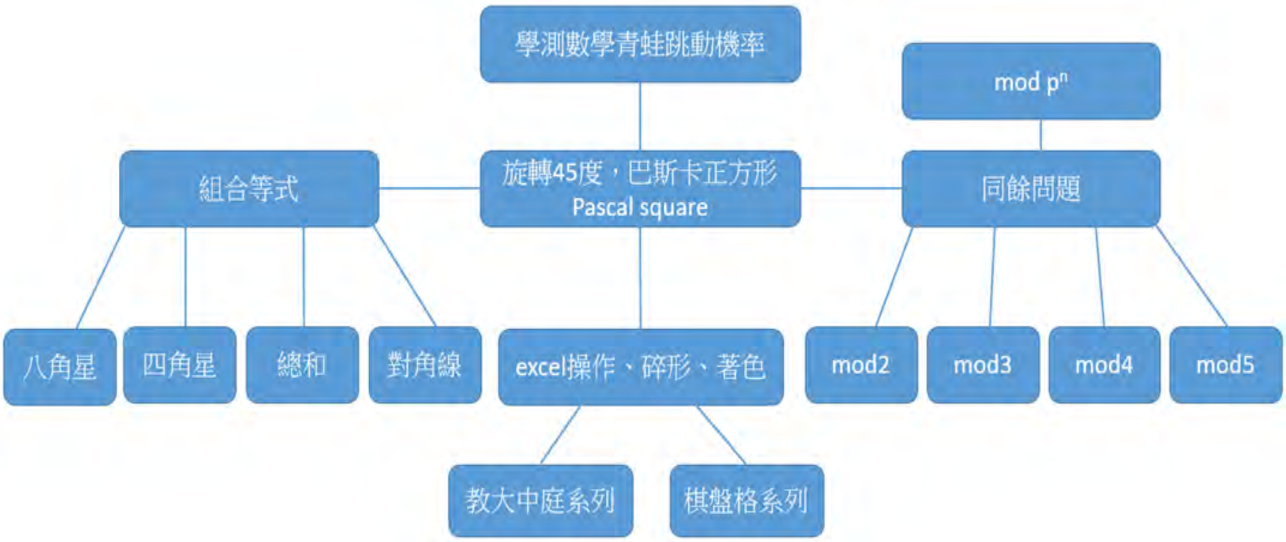


圖 2：研究方向

参、研究設備及器材

紙、筆、電腦軟體 EXCEL 試算表、電腦軟體 WOLFRAM[2]。

肆、研究過程或方法

研究過程大致分為五個方向進行：

一、討論跳動 n 步後停留在格子點的機率通式，依此通式製成「巴斯卡正方形」。

二、尋找在「巴斯卡正方形」上的組合等式。

三、利用 EXCEL 試算表計算「巴斯卡正方形」的每個組合數被 2~13 的自然數所除的餘數。再利用試算表「設定格式化條件」的功能來著色，並發掘特殊圖形的型式與規律。

四、引進定理計算組合數同餘的結果與數量，研究可著色的種類與面積。

五、研究其他方法用於計算任意組合數被質數的次方同餘後的結果。

伍、研究結果

一、學測試題的通解：

(一)學測試題通解的型式：

[命題 1]考慮從坐標平面上的原點出發，每次隨機朝上、下、左、右跳一單位長，跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點 (x,y) 的機率為：

$$\frac{1}{4^n}\times C_a^n\times C_b^n \text{，其中 } a=\frac{n-|x+y|}{2} \text{ 、 } b=\frac{n-|x-y|}{2}$$

證明：因為跳動結果有對稱性，即跳動到 (x,y) 與 $(-x,y)$ 、 $(x,-y)$ 、 $(-x,-y)$ 情形是一樣多的，故先考慮跳動到包含兩座標軸與第一象限的部分，不妨假設 x,y 皆為非負整數，假設跳動 n 次的過程中，上、下、左、右各跳動了 α 、 β 、 γ 、 δ 次，

則 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=n$ 、 $\alpha-\beta=y$ 、 $\delta-\gamma=x$ ，其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y$ 皆為非負整數。

故 $\beta+y+\beta+\gamma+x+\gamma=n \Rightarrow \beta+\gamma=\dfrac{n-x-y}{2}$ ；令 $t=\dfrac{n-x-y}{2}$ ，

以下依 $\beta=0,1,2,\cdots,t$ 分別計算方法數

$(\beta,\gamma,\alpha,\delta)=(0,t,y,x+t)$ ，方法數為 $\dfrac{n!}{0!t!y!(x+t)!}$ ；

$(\beta,\gamma,\alpha,\delta)=(1,t-1,y+1,x+t-1)$ ，方法數為 $\dfrac{n!}{1!(t-1)!(y+1)!(x+t-1)!}$ ；$\cdots$

$(\beta,\gamma,\alpha,\delta)=(t,0,y+t,x)$ ，方法數為 $\dfrac{n!}{t!0!(y+t)!x!}$ ；

故總方法數為 $\dfrac{n!}{0!t!y!(x+t)!}+\dfrac{n!}{1!(t-1)!(y+1)!(x+t-1)!}+\cdots+\dfrac{n!}{t!0!(y+t)!x!}$

$$=\frac{n!}{t!(x+y+t)!}\times\left(\frac{t!(x+y+t)!}{t!y!(x+t)!}+\frac{t!(x+y+t)!}{(t-1)!(y+1)!(x+t-1)!}+\cdots+\frac{t!(x+y+t)!}{t!(y+t)!x!}\right)$$

$$=C_t^n\times\left(C_0^t\cdot C_{x+t}^{x+y+t}+C_1^t\cdot C_{x+t-1}^{x+y+t}+\cdots+C_t^t\cdot C_x^{x+y+t}\right)=C_t^n\times C_{t+x}^n=C_t^n\times C_s^n \text{ ，}$$

其中 $t=\dfrac{n-x-y}{2}$ 、 $s=\dfrac{n+x-y}{2}$ ；因跳動到 (x,y) 與 $(-x,y)$ 、 $(x,-y)$ 、 $(-x,-y)$ 情形是一樣多的，故跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點 (x,y) 的機率為

$$\frac{1}{4^n}\times C_a^n\times C_b^n \text{，其中 } a=\frac{n-|x+y|}{2} \text{ 、 } b=\frac{n-|x-y|}{2} \text{ 。}$$

(二)巴斯卡正方形：

[命題 1]解的形式排除分母的 4^n 外，每個數字皆型如 $C_i^n\times C_j^n$ ，其中 $i,j=0,1,\cdots,n$ 。將此

解的形式旋轉 45° 並製作成表格，則「n 階巴斯卡正方形」(nth Pascal square)形如：

$C_0^n \cdot C_0^n$	$\cdots$	$C_0^n \cdot C_j^n$	$\cdots$	$C_0^n \cdot C_n^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_i^n \cdot C_0^n$	$\cdots$	$C_i^n \cdot C_j^n$	$\cdots$	$C_i^n \cdot C_n^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_n^n \cdot C_0^n$	$\cdots$	$C_n^n \cdot C_j^n$	$\cdots$	$C_n^n \cdot C_n^n$

表 2：「n 階巴斯卡正方形」(nth Pascal square)

二、巴斯卡正方形中的組合等式：

在 n 階巴斯卡正方形中，我們觀察到某些組合等式，例如所有數字的總和、對角線的總和、四角星、八角星等，並給予一些適切的證明。

(一)n 階巴斯卡正方形共有 $(n+1)^2$ 個數字，總和為 $\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} C_j^n \cdot C_i^n\right) = C_0^n \cdot (C_0^n + \cdots + C_n^n)$

$+C_1^n \cdot (C_0^n + \cdots + C_n^n) + \cdots + C_n^n \cdot (C_0^n + \cdots + C_n^n) = (C_0^n + \cdots + C_n^n) \cdot (C_0^n + \cdots + C_n^n) = 2^n \cdot 2^n = 4^n$ 。

(二)如「圖 3」所示，在 n 階巴斯卡正方形中，任取一個較小的正方形，此正方形的對角線落在 n 階巴斯卡正方形的主對角線上，這樣的正方形內數字的總和皆為完全平方數。設 a、b 為非負整數且 $0 \le a \le b \le n$，則：$\sum_{j=a}^{b}\left(\sum_{i=a}^{b} C_j^n \cdot C_i^n\right)$

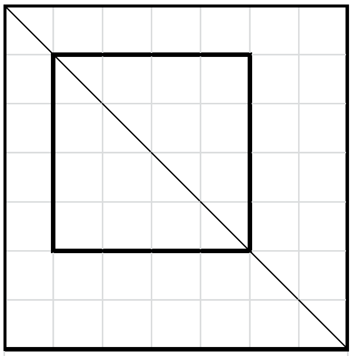


圖3：任一正方形數字總和皆為完全平方數

$= C_a^n (C_a^n + \cdots + C_b^n) + C_{a+1}^n (C_a^n + \cdots + C_b^n) + \cdots + C_b^n (C_a^n + \cdots + C_b^n)$

$= (C_a^n + C_{a+1}^n + \cdots + C_b^n) \cdot (C_a^n + C_{a+1}^n + \cdots + C_b^n) = (C_a^n + \cdots + C_b^n)^2$ 。

(三)在 n 階巴斯卡正方形中，任一斜對角線的總和為

$C_0^n \cdot C_a^n + C_1^n \cdot C_{a+1}^n + \cdots + C_{n-a}^n \cdot C_n^n = C_{n-a}^{2n}$，其中 a 為非負整數且 $0 \le a \le n$

考慮 $(1+x)^{2n}$ 的展開式中 x^{n-a} 的係數

$$\because (1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n = (C_0^n + C_1^n x + \cdots + C_n^n x^n) \cdot (C_0^n + C_1^n x + \cdots + C_n^n x^n)$$

比較等式兩邊 x^{n-a} 的係數，可得

$$C_{n-a}^{2n}=C_0^n\cdot C_{n-a}^n+C_1^n\cdot C_{n-a-1}^n+\cdots+C_{n-a}^n\cdot C_0^n=C_0^n\cdot C_a^n+C_1^n\cdot C_{a+1}^n+\cdots+C_{n-a}^n\cdot C_n^n$$

由此結果可推得，n 階巴斯卡正方形主對角線的總和為

$$C_0^n\cdot C_0^n+C_1^n\cdot C_1^n+\cdots+C_n^n\cdot C_n^n=C_n^{2n}$$

(四)如「圖 4：四角星」所示，在 n 階巴斯卡正方形中，任取一個正方形，此正方形的四個角落的數字為 a、b、c、d，則 $a\cdot d=b\cdot c$。

設 $a=C_i^n\cdot C_j^n$ 、 $b=C_i^n\cdot C_{j+k}^n$ 、 $c=C_{i+k}^n\cdot C_j^n$ 、 $d=C_{i+k}^n\cdot C_{j+k}^n$ ，

顯然 $a\cdot d=b\cdot c$。

a	.	b
.	.	.
c	.	d

圖 4：四角星 $a\cdot d=b\cdot c$

(五)如「圖 5：八角星」所示，在 n 階巴斯卡正方形中，任取一個八角形，此八角形的八個頂點的數字恆有 $a\cdot e\cdot h\cdot d=b\cdot c\cdot g\cdot f$ 。如「表 3」所示，設 $a=C_0^8\cdot C_3^8=56$ 、 $b=C_0^8\cdot C_4^8=70$ 、 $c=C_1^8\cdot C_2^8=224$ 、 $d=C_1^8\cdot C_5^8=448$ 、 $e=C_2^8\cdot C_2^8=784$ 、 $f=C_2^8\cdot C_5^8=1568$ 、 $g=C_3^8\cdot C_3^8=3136$ 、 $h=C_3^8\cdot C_4^8=3920$ ，則 $a\cdot e\cdot h\cdot d=b\cdot c\cdot g\cdot f=77102448640$ 。

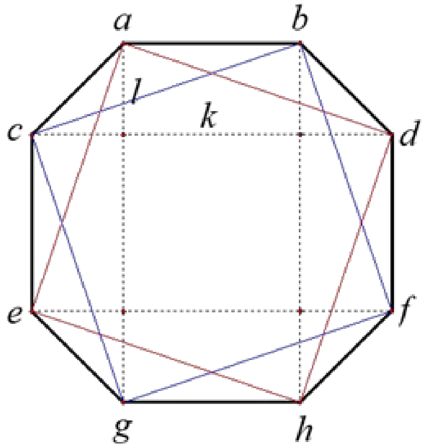


圖 5：八角星 $a\cdot e\cdot h\cdot d=b\cdot c\cdot g\cdot f$

1	8	28	56	70	56	28	8	1
8	64	224	448	560	448	224	64	8
28	224	784	1568	1960	1568	784	224	28
56	448	1568	3136	3920	3136	1568	448	56
70	560	1960	3920	4900	3920	1960	560	70
56	448	1568	3136	3920	3136	1568	448	56
28	224	784	1568	1960	1568	784	224	28
8	64	224	448	560	448	224	64	8
1	8	28	56	70	56	28	8	1

表 3：8 階巴斯卡正方形(8th Pascal square)

[定理 1] 在 n 階巴斯卡正方形中，設 $a=C_i^n\cdot C_j^n$ 、 $b=C_i^n\cdot C_{j+k}^n$ 、 $c=C_{i+l}^n\cdot C_{j-l}^n$ 、 $d=C_{i+l}^n\cdot C_{j+l+k}^n$ 、 $e=C_{i+l+k}^n\cdot C_{j-l}^n$ 、 $f=C_{i+l+k}^n\cdot C_{j+l+k}^n$ 、 $g=C_{i+2l+k}^n\cdot C_j^n$ 、 $h=C_{i+2l+k}^n\cdot C_{j+k}^n$ ，其中 l、k 為非負整數，則 $a\cdot e\cdot h\cdot d=b\cdot c\cdot g\cdot f$ 。

證明：$a\cdot e\cdot h\cdot d=C_i^n\cdot C_j^n\cdot C_{i+l+k}^n\cdot C_{j-l}^n\cdot C_{i+2l+k}^n\cdot C_{j+k}^n\cdot C_{i+l}^n\cdot C_{j+l+k}^n$

$$=C_i^n\cdot C_j^n\cdot C_{i+l}^n\cdot C_{j-l}^n\cdot C_{j+k}^n\cdot C_{i+l+k}^n\cdot C_{j+l+k}^n\cdot C_{i+2l+k}^n$$

$$=C_i^n\cdot C_{j+k}^n\cdot C_{i+l}^n\cdot C_{j-l}^n\cdot C_{i+2l+k}^n\cdot C_j^n\cdot C_{i+l+k}^n\cdot C_{j+l+k}^n=b\cdot c\cdot g\cdot f$$ 。

三、巴斯卡正方形與幾何圖形：

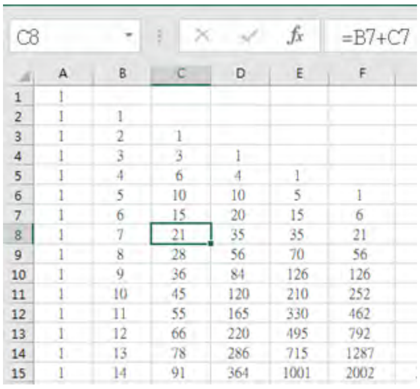
從網路搜尋的文獻資料中，有相關文章介紹關於巴斯卡三角形被質數同餘的結果[3][4][5]，並以此描繪出「Sierpinski triangle」的碎形圖案。我們也試著研究巴斯卡正方形是否也有同樣的結果。在以電腦軟體 EXCEL 試算表搭配網路上的計算器軟體 WOLFRAM 來計算同餘的結果後，得到若干優美的幾何圖形。

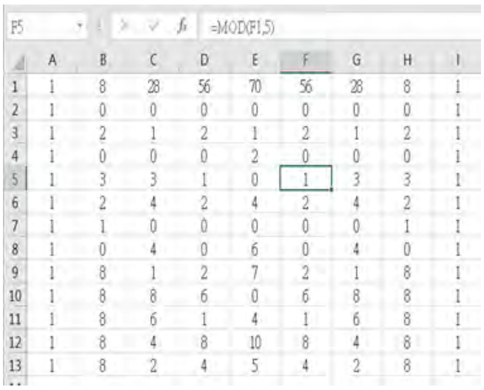
(一)操作過程說明與大數據的技術克服：

1.EXCEL 試算表列出前 43 列的巴斯卡三角形(43 列是試算表能計算同餘的上限)

2.計算各列被 2~13 的自然數所除的餘數

3.轉成巴斯卡正方形(”$”的作用在控制方陣的相乘)





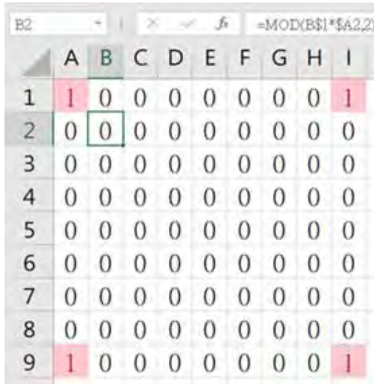


圖 6：列出巴斯卡三角形　　圖 7：計算被自然數所除的餘數　圖 8：8 階巴斯卡正方形 Mod2

4.計算巴斯卡正方形被 2~13 的自然數所除的餘數

圖 9：8 階巴斯卡正方形被 2~13 的自然數所除的餘數

5.利用試算表中「設定格式化條件」來著色，「圖 10~12」為幾個特殊圖形。為方便討論，我們定名 43M9 指的是 43 階巴斯卡正方形 Mod9，以此類推。在製作的過程中，曾遇到數字過大而無法計算的困難，於是我們在網路上找到一個網站 WOLFRAM 來計算，但一次只能處理一組數字，所以速度很慢，在堅持與熱忱中，我們逐步完成，並獲得一些初步成果。

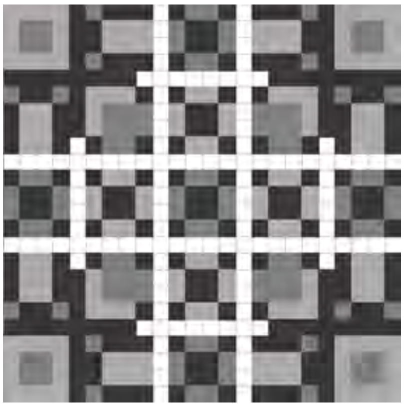


圖 10：23M10

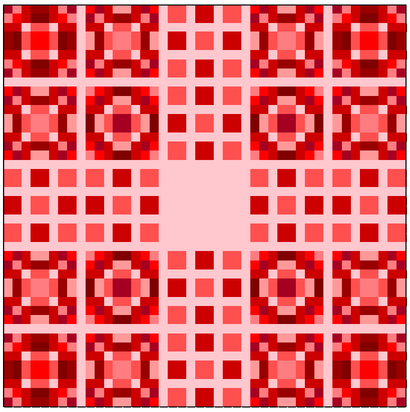


圖 11：43M9

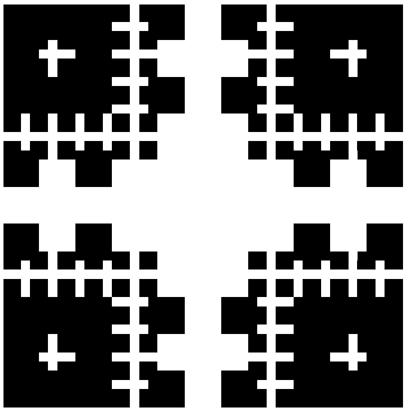


圖 12：43M12

(二)幾何圖形的相似性：

某些圖形有相似性，以 Mod2 為例，7、15、31、...、2^n-1，它們的二進位表示法相似，這些列的巴斯卡三角形被 2 除的餘數排列也相似，因此這些巴斯卡正方形 Mod2 的圖形也是相似的。同理在 n 為 6、14、30、...的巴斯卡正方形也有類似的結果。

n	二進位表示法
6	110
14	1110
30	11110
2^n-2	1...10

表 4：二進位表示法

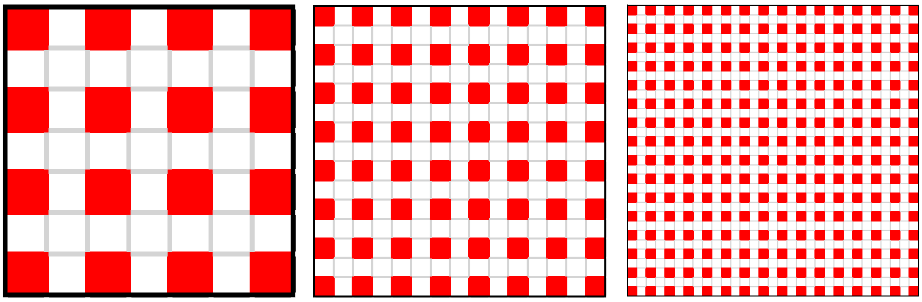


圖 13：6M2、14M2、30M2

這些圖形中以「教大中庭系列」的結構最吸引我們注意，因圖形恰巧與本校教學大樓的地板磁磚排列類似。若不同的餘數給予不同的顏色，此系列還可以變化出不同的幾何圖形。「教大中庭系列」的尺寸是多少？可以著幾色？可著色的面積是多少？這些是我們關心的問題，這與巴斯卡三角形的任一列被自然數除所得的餘數、個數、排列的情況有很大的關係。「棋盤格系列」也是很有特色的對稱圖形，這些圖形的可著色面積將由下一小節來討論。

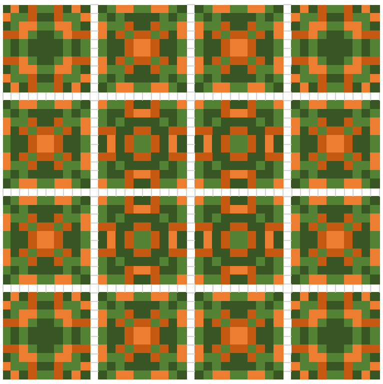


圖 14：教大中庭系列 42M11

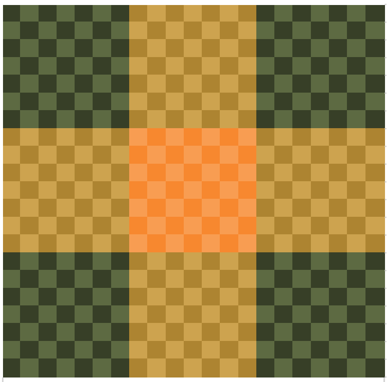


圖 15：棋盤格系列 20M7


圖 16：學校的瓷磚地圖

四、巴斯卡正方形除以 2~6 的自然數所得的餘數及其個數：

(一)文獻探討與預備知識：

1.Lucas's Theorem[6] 在求二項係數被質數所除的餘數問題上，提供一個快速的方法。在除數是質數的前提下，除了求一個組合數被任一質數所除的餘數外，巴斯卡三角形的第 n 列，也可以用這個定理求得被質數所除的餘數出現的次數、位置。

[Lucas's Theorem] 給定非負整數 r、m，其中 $r \le m$ ，若 p 為質數使得

$$\begin{cases} m = m_k p^k + \cdots + m_1 p + m_0 \\ r = r_k p^k + \cdots + r_1 p + r_0 \end{cases} \text{，則 } C_r^m \equiv C_{r_k}^{m_k} \cdots C_{r_1}^{m_1} C_{r_0}^{m_0} \bmod p \text{ 。}$$

在利用這個定理上，我們慣例令 $C_t^s = 0$ ，若 $s < t$ 。

2.為討論巴斯卡三角形每一列被一正整數所除的餘數個數，我們給定如下的定義。

[定義 1] 令 n 為非負整數，第 n 列的巴斯卡三角形有 $n+1$ 個二項係數 C_k^n ， $k = 0,1,\cdots,n$ 。給定二個非負整數 t、m，使得 $0 \le t < m$ ，定義 $N_n(t,m)$ 為第 n 列的巴斯卡三角形被 m 除餘 t 的個數，定義 $S_n(t,m)$ 為 n 階巴斯卡正方形被 m 除餘 t 的個數。

例如： $N_5(1,2) = 4$ 指的是第 5 列的巴斯卡三角形被 2 除餘 1 會有 4 個； $N_6(1,3) = 2$ 指的是第 6 列的巴斯卡三角形被 3 除餘 1 會有 2 個。 $S_5(1,2) = 16$ 指的是 5 階巴斯卡正方形被 2 除餘 1 有 16 個； $S_6(1,3) = 5$ 指的是 6 階巴斯卡正方形被 3 除餘 1 有 5 個。

3.巴斯卡三角形的第 n 列被 4 除的餘數個數，可由 n 的二進位表示法來求得[7]。

[定義 2] 令 n 為非負整數，設 n 的二進位表示法為 $n = (m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$ ，其中 $m_i \in \{0,1\}$ ， $i = 0,1,\cdots,k$ 。令 $B(n) = m_k + \cdots + m_1 + m_0$ 、 $C(n)$ 為 m_i 的排列出現 10 的次數、 $D(n)$ 為 m_i 的排列出現 11 的次數。

[Pascal's Triangle Modulo 4 Theorem][7]

$$\begin{cases} N_n(1,4) = 2^{B(n)} \\ N_n(2,4) = C(n) \times 2^{B(n)-1} \quad \text{若} D(n) = 0 \\ N_n(3,4) = 0 \end{cases} \text{；} \begin{cases} N_n(1,4) = 2^{B(n)-1} \\ N_n(2,4) = C(n) \times 2^{B(n)-1} \quad \text{若} D(n) > 0 \\ N_n(3,4) = 2^{B(n)-1} \end{cases} \text{。}$$

例如： $23 = (10111)_2$ ，則 $B(23) = 4$ 、 $C(23) = 1$ 、 $D(23) = 2$ 。

(二)「教大中庭系列」的相關問題：

觀察幾個「教大中庭系列」發生的位置，我們定名 37M13 指的是第 37 個巴斯卡正方形被 13 除的餘數所繪製的圖形。在 37M13、31M11、19M7、33M7、40M7、26M7、…，都有類似「教大中庭系列」的圖形。令在巴斯卡正方形中，餘數不為 0 的稱為可著色區域、餘數為 0 的稱為不可著色區域。以「圖 17」中的 31M11 來說，可著色區域又被劃分為 3×3 個小

方塊，每個小方塊含有10×10個不為 0 的數字，這些數字是有些相關性的。

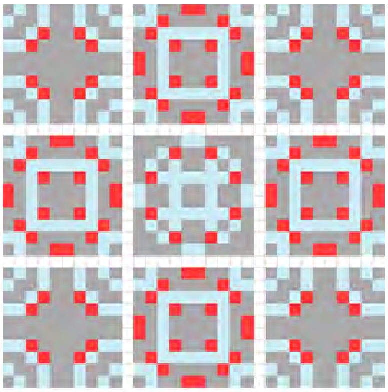


圖17：「教大中庭系列31M11」

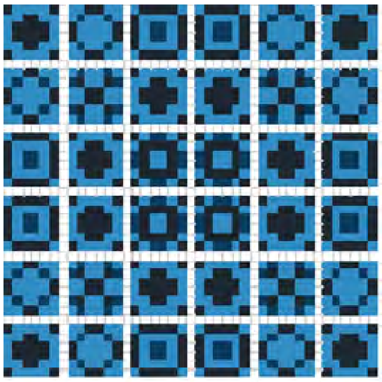


圖18：「教大中庭系列40M7」

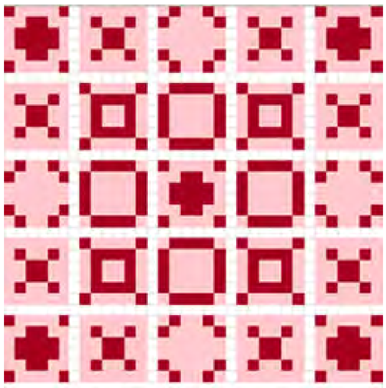


圖19：「教大中庭系列33M7」

設第 n 個巴斯卡正方形有$(n+1)^2$個數字，每個小方塊有$(p-1)^2$個數字；p 為質數，共有l^2個小方塊，則巴斯卡正方形的第一列滿足：

$$n+1=(p-1)\times l+l-1 \Rightarrow p\times l=n+2$$

依此條件不難發現符合要求的巴斯卡正方形有 37M13(3×3)、31M11(3×3)、33M7(5×5)、23M5(5×5)、42M11(4×4)、40M7(6×6)、26M7(4×4)、…；尺寸再大一些的有 47M7(7×7)、53M11(5×5)、50M13(4×4)…，由於已超過 EXCEL 的計算上限，我們利用網路上的軟體 WOLFRAM 逐項計算餘數再鍵入 EXCEL 內，另行製作圖形如下：

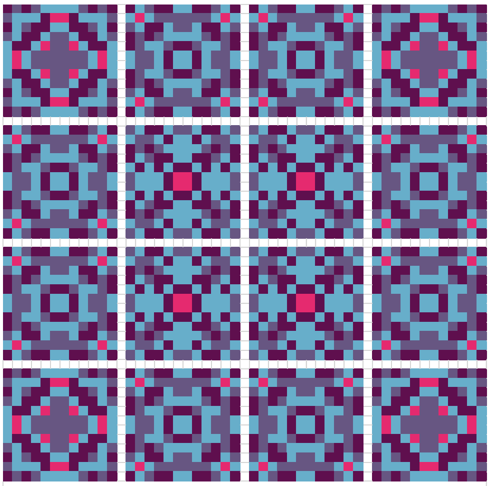


圖10:「教大中庭系列50M13」
圖 20：教大中庭系 50M13」

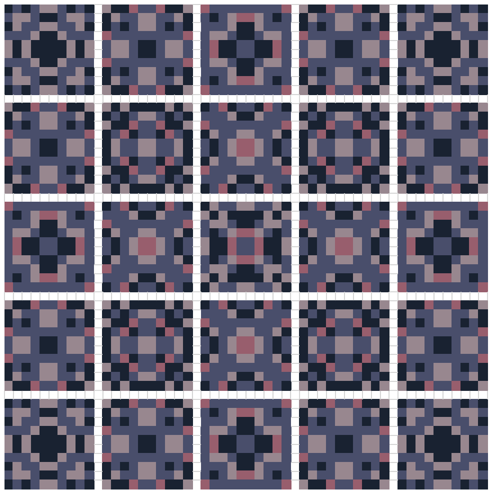


圖11:「教大中庭系列53M11」
圖 21：「教大中庭系列 53M11」

我們觀察到這些圖形必須符合$l\le p$，且計算可著色面積有以下的結論。[引理 1] 是用來說明這l^2個小方塊內的數字皆不為 0，與何處會是 0。

[引理 1] 設 p 為質數，n、l 為自然數，若 $p\times l=n+2$、$l\le p$，則$C_{kp-1}^{n}\equiv 0 \bmod p$ 且 $C_t^n \ne 0 \bmod p$，其中$t\ne kp-1$，對於所有正整數 k 皆成立。

證明：$\because n=p\times l-2=(l-1)p+p-2 \Rightarrow p\times l-2=(l-1,p-2)_p$，

且$k\times p-1=(k-1)p+p-1 \Rightarrow k\times p-1=(k-1,p-1)_p$，

$\because k\times p-1\le p\times l-2 \Rightarrow p\times(l-k)\ge 1 \Rightarrow l-k\ge 1 \Rightarrow p\ge l\ge k+1$，

由 Lucas's Theorem 知，$C_{kp-1}^{n}=C_{kp-1}^{pl-2}\equiv C_{k-1}^{l-1}\times C_{p-1}^{p-2}=0 \bmod p$。

令 $t=kp+i$，$i=0,1,2,\cdots,p-2$，k 為正整數，則 $t=(k,i)_p$

由 Lucas's Theorem 知，$C_{t}^{n}=C_{kp+i}^{pl-2}\equiv C_{k}^{l-1}\times C_{i}^{p-2}\ne 0 \bmod p$。

由於 $C_i^n\ne 0 \bmod p$ 且 $C_j^n\ne 0 \bmod p$，則 $C_i^n\times C_j^n\ne 0 \bmod p$，其中 $i,j=0,1,2,\cdots,n$。故「教大中庭系列」可著色面積為 $(p-1)^2\times l^2$、不可著色面積為 $(n+1)^2-(p-1)^2\times l^2$。在每個可著色的小方塊內也隱含對稱性，例如以「31M11」來說，他的第一列為：

1	9	3	7	5	5	7	3	9	1	0	2	7	6	3	10	10	3	6	7	2	0	1	9	3	7	5	5	7	3	9	1

表 5：31M11 的第一列

[引理 2]、[引理 3]是用來說明每一個小方塊內的對稱性，以及第一列被任一質數所除的餘數為何。其中[引理 3]中的 a 是用來計算 i 為第 k 個小方塊中的第 $a+1$ 個數。

[引理 2] 設 p 為質數，則 $C_k^{p-2}\equiv(-1)^k\cdot(k+1) \bmod p$，$k=0,1,2,\cdots,p-2$。

證明：$\because C_k^{p-2}=\dfrac{(p-2)\cdot(p-3)\cdots(p-k-1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1}\equiv\dfrac{(-2)\cdot(-3)\cdots(-k-1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1}\equiv(-1)^k\cdot(k+1) \bmod p$。

[引理 3] 設 p 為質數，n、l 為自然數，若 $p\times l=n+2$、$l\le p$，則

$C_i^n\equiv(-1)^a\cdot(a+1)\cdot C_{k-1}^{l-1} \bmod p$，其中 $(k-1)p\le i\le kp-2$，$k=1,2,\cdots,l$，$a=i-(k-1)p$。

證明：$\because n=p\times l-2=(l-1)p+p-2 \Rightarrow p\times l-2=(l-1,p-2)_p$，

且 $(k-1)p\le i\le kp-2 \Rightarrow (k-1)p\le i\le (k-1)p+(p-2)$，由 Lucas's Theorem 知

$C_i^n=C_i^{pl-2}\equiv C_{k-1}^{l-1}\cdot C_a^{p-2}$，其中 $1\le k\le l$、$0\le a\le p-2$，

由[引理 2]知 $C_a^{p-2}\equiv(-1)^a\cdot(a+1) \bmod p$，故 $C_i^n\equiv(-1)^a\cdot(a+1)\cdot C_{k-1}^{l-1} \bmod p$。

舉例來說如何計算得 $C_{12}^{31}\equiv 7 \bmod 11$？因 $31=2\cdot 11+9$、$(2-1)\cdot 11\le 12\le 2\cdot 11-2$，故 $12-(2-1)\cdot 11=1$，所以 C_{12}^{31} 落在第 2 個小方塊的第二個數，即 $C_{12}^{31}\equiv(-1)^1\cdot(1+1)\cdot C_{2-1}^{3-1}=-4$ $\equiv 7 \bmod 11$。由於 $C_0^{p-2}=C_{p-2}^{p-2}$、$C_1^{p-2}=C_{p-3}^{p-2}$、$\cdots$，此即為每個小方塊內的數字是對稱的原因；第一、三區塊餘數為 $1,-2,3,-4,5,-6,7,-8,9,-10$，第二區塊餘數為第一、三區塊餘數的兩倍，而且每個區塊內的數字皆出現兩次，因此這一列餘數個數的計數如[引理 4]。

[引理 4] 設 p 為質數，n、l 為自然數，若 $p\times l=n+2$、$l\le p$，則 $N_n(0,p)=l-1$，$N_n(t,p)=2$，其中 $t=a\cdot C_j^{l-1}$、$a=1,3,\cdots,p-2$、$j=0,1,\cdots,l-1$。

證明：由[引理 1]知 $C_{kp-1}^n\equiv 0 \bmod p \Rightarrow kp-1\le n=pl-2 \Rightarrow (k-l)p\le -1$，$k=1,2,\cdots,l-1$，

故 $N_n(0,p)=l-1$。由[引理 2]知 $C_k^{p-2}\equiv(-1)^k\cdot(k+1)\bmod p$，且

$C_{p-2}^{p-2}\equiv(-1)^{p-2}\cdot(p-2+1)\equiv 1=C_0^{p-2}\bmod p$，同理 $C_{p-3}^{p-2}\equiv C_1^{p-2}$、$C_{p-4}^{p-2}\equiv C_2^{p-2}$、⋯，

故在[引理 3]中 $C_i^n\equiv(-1)^a\cdot(a+1)\cdot C_{k-1}^{l-1}\equiv C_{p-2-i}^n\bmod p$，其中 $(k-1)p\le i\le kp-2$，

$k=1,2,\cdots,l$，$a=i-(k-1)p$。故 $N_n(t,p)=2$，其中 $t=a\cdot C_j^{l-1}$、$a=1,3,\cdots,p-2$、

$j=0,1,\cdots,l-1$。

關於「教大中庭系列」可著幾色？各色的面積是多少？我們將此正方形內的餘數透過適當的調整便於計數，如「表 6」、如「表 7」所示。以 13M5 而言，$N_{13}(1,5)=6$、$N_{13}(2,5)=2$、$N_{13}(3,5)=4$，故 $S_{13}(1,5)=N_{13}(1,5)\cdot N_{13}(1,5)+2\cdot N_{13}(2,5)\cdot N_{13}(3,5)=52$、$S_{13}(2,5)=2\cdot N_{13}(1,5)\cdot N_{13}(2,5)=24$、$S_{13}(3,5)=2N_{13}(1,5)\cdot N_{13}(3,5)=48$、$S_{13}(4,5)=20$。[定理 2]為用於計算「教大中庭系列」各餘數的個數。

1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	2	0	4	2	2	4	0	2	1	1	2
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
2	1	1	2	0	4	2	2	4	0	2	1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1

表6：「教大中庭系列13M5」調整前

1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
2	2	2	2	2	2	4	4	1	1	1	1	0	0
2	2	2	2	2	2	4	4	1	1	1	1	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	1(6)	2(2)	3(4)
1(6)	1(36)	2(12)	3(24)
2(2)	2(12)	4(4)	1(8)
3(4)	3(24)	1(8)	4(16)

表7：「教大中庭系列13M5」調整後

[定理 2] 設 p 為質數，n、l 為自然數，若 $p\times l=n+2$、$l\le p$，$S_n(t\times s,p)=4$，其中 t、$s=a\cdot C_j^{l-1}$、$a=1,3,5,\cdots,p-2$、$j=0,1,\cdots,l-1$。

證明：由[引理 4]知 $N_n(t,p)=2$，其中 $t=a\cdot C_j^{l-1}$、$a=1,3,\cdots,p-2$、$j=0,1,\cdots,l-1$，

故 $S_n(t\times s,p)=N_n(t,p)\times N_n(s,p)=4$，其中 $t,s=a\cdot C_j^{l-1}$、$a=1,3,\cdots,p-2$、

$j=0,1,\cdots,l-1$。

以「教大中庭系列 31M11」而言，$p=11$、$l=3$、$n=31$。第一列各區塊的餘數分別為 1,3,5,7,9、2,3,6,7,10、1,3,5,7,9 各出現 2 次，而 1×1、10×10、2×6、5×9 被 11 除皆餘 1，且各有 4、1、2、8 組，故 $S_{31}(1,11)=4\times(4+1+2+8)=60$；同理 1×2、3×8、4×6、5×7、9×10 被 11 除皆餘 2，且各有 4、0、0、12、4 組，故 $S_{31}(2,11)=4\times(4+12+4)=80$。以此方法不僅可用來計算其他餘數的個數，亦可依此設計更大尺寸的圖形及配色時的參考。

(三)「棋盤格系列」的相關問題：

「棋盤格系列」的圖形也很有特色，除了對稱與交錯外，我們注意到整個方塊皆可著色，即沒有一個數字同餘後為 0。如「圖 22：34M7」、「圖 23：54M11」、「圖 24：76M11」、…，都為類似「棋盤格系列」的圖形。

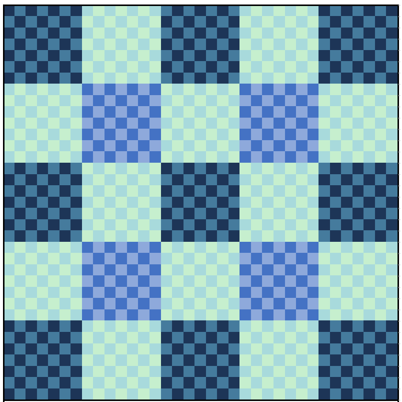


圖22：「棋盤格系列34M7」

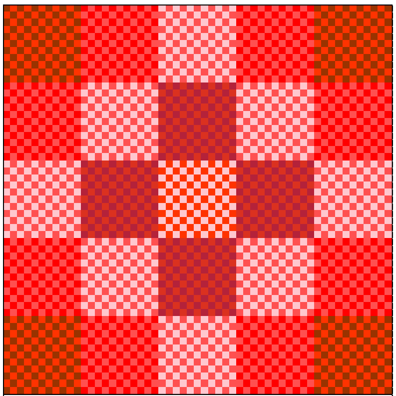


圖23：「棋盤格系列54M11」

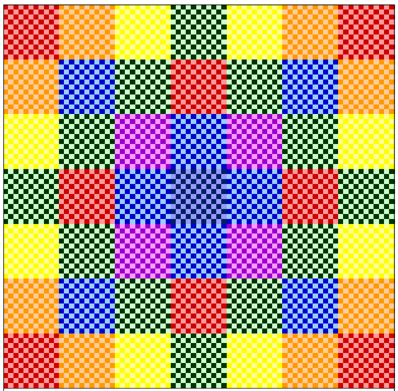


圖24：「棋盤格系列76M11」

以「圖 22：34M7」來說，他的第一列為：

1	6	1	6	1	6	1	4	3	4	3	4	3	4	6	1	6	1	6	1	6	4	3	4	3	4	3	4	1	6	1	6	1	6	1

表 8：34M7

我們觀察到若 $n=34$ 、 $p=7$ ，因 $34+1=7\times5$ ，也就是可將這一列拆成 7 個數一組，共拆成 5 組來觀察，其中第一組 $C_0^{34}\equiv C_2^{34}\equiv C_4^{34}\equiv C_6^{34}\equiv 1\bmod 7$ 、 $C_1^{34}\equiv C_3^{34}\equiv C_5^{34}\equiv 6\bmod 7$ ，這是造成圖形有交錯的原因。由於拆成偶數組時交錯情形不完全，故我們設定拆成的組數皆為奇數。在計算「棋盤格系列」可著色總類與各色的面積時，有如下的結論。由於

$C_2^{34}=\dfrac{34\times33}{2\times1}\equiv\dfrac{(-1)\times(-2)}{2\times1}=1 \bmod 7$ 、 $C_3^{34}=\dfrac{34\times33\times32}{3\times2\times1}\equiv\dfrac{(-1)\times(-2)\times(-3)}{3\times2\times1}=-1\equiv 6 \bmod 7$ ，且圖形第一列滿足 $n+1=p\times l$ ，且 $p\ge l$ ，以下[引理 5]~[引理 7]用來說明這系列的幾個性質。

[引理 5] 設 p 為質數，則 $C_k^{p-1}\equiv(-1)^k \bmod p$ ， $k=0,1,2,\cdots,p-1$ 。

證明：$\because C_k^{p-1}=\dfrac{(p-1)\cdot(p-2)\cdots(p-k)}{k\cdot(k-1)\cdots1}\equiv\dfrac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-k)}{k\cdot(k-1)\cdots1}\equiv(-1)^k \bmod p$ 。

[引理 6] 設 p 為質數，n、l 為自然數，且 $n+1=p\times l$ 、 $p\ge l$ ，則 $C_k^n\not\equiv 0\bmod p$ ，$k=0,1,2,\cdots,n$ 。

證明：$\because n=p\times l-1=(l-1)p+p-1\Rightarrow p\times l-1=(l-1,p-1)_p$ ，設 $k=(a,b)_p$

且 $k\le n\Rightarrow 0\le a\le l-1$ 、 $0\le b\le p-1$ ，由 Lucas's Theorem 知，

$C_k^n=C_k^{pl-1}\equiv C_a^{l-1}\times C_b^{p-1}\not\equiv 0\bmod p$ 。

[引理 7] 設 p 為質數，n、l 為自然數，且 $n+1=p\times l$ 、 $p\ge l$ ，則 $C_i^n\equiv(-1)^a\cdot C_{k-1}^{l-1}\bmod p$ ，其中 $(k-1)p\le i\le kp-1$ ， $k=0,1,2,\cdots,l$ ， $a=i-(k-1)p$ 。

證明：$\because n = p\times l - 1 = (l-1)p + p - 1 \Rightarrow p\times l - 1 = (l-1, p-1)_p$，

且 $(k-1)p \le i \le kp-1 \Rightarrow (k-1)p \le i \le (k-1)p + (p-1)$，由 Lucas’s Theorem 知

$C_i^n = C_i^{pl-1} \equiv C_{k-1}^{l-1}\cdot C_a^{p-1} \bmod p$，其中 $1 \le k \le l$、$0 \le a \le p-1$、$a = i-(k-1)p$

由[引理 5]知 $C_a^{p-1} \equiv (-1)^a \bmod p$，故 $C_i^n \equiv (-1)^a \cdot C_{k-1}^{l-1} \bmod p$。

在[引理 7]中，a 的作用在確認 i 是在第幾個區塊的第幾個，以便於計算。例如：$34+1 = 7\times 5$、$8-(2-1)\cdot 7 = 1$，C_8^{34} 為第二個區塊的第 2 個，$C_8^{34} \equiv (-1)^1 \cdot C_{2-1}^{5-1} = -4 \equiv 3 \bmod 7$。關於「棋盤格系列」各區塊內餘數的總數問題，以「圖 25：14M5」為例：$14+1 = 5\times 3$，$p=5$、$l=3$，即第 1 列可分 3 個區塊，每塊 5 個數字，第 1、3 區塊的數字分別是 $C_0^{14} \equiv 1$、$C_1^{14} \equiv 4 \bmod 5$，第 2 區塊的數字分別是 $C_5^{14} \equiv (-1)^0 \cdot C_{2-1}^{3-1} = 2$、$C_6^{14} \equiv (-1)^1 \cdot C_{2-1}^{3-1} \equiv 3 \bmod 5$，由「表 9」知 14 階巴斯卡正方形 mod5 餘數為 $S_{14}(1,5) = 64$、$S_{14}(2,5) = 52$、$S_{14}(3,5) = 48$、$S_{14}(4,5) = 61$。以下就 l 為奇數，$p = l$、$p > l$ 兩種情況來說明。

1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1
4	1	4	1	4	3	2	3	2	3	4	1	4	1	4
1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1
4	1	4	1	4	3	2	3	2	3	4	1	4	1	4
1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1
2	3	2	3	2	4	1	4	1	4	2	3	2	3	2
3	2	3	2	3	1	4	1	4	1	3	2	3	2	3
2	3	2	3	2	4	1	4	1	4	2	3	2	3	2
3	2	3	2	3	1	4	1	4	1	3	2	3	2	3
2	3	2	3	2	4	1	4	1	4	2	3	2	3	2
1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1
4	1	4	1	4	3	2	3	2	3	4	1	4	1	4
1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1
4	1	4	1	4	3	2	3	2	3	4	1	4	1	4
1	4	1	4	1	2	3	2	3	2	1	4	1	4	1

圖25：「棋盤格系列14M5」

	1(6)	2(3)	3(2)	4(4)
1(6)	1(36)	2(18)	3(12)	4(24)
2(3)	2(18)	4(9)	1(6)	3(12)
3(2)	3(12)	1(6)	4(4)	2(8)
4(4)	4(24)	3(12)	2(8)	1(16)

表9：「棋盤格系列14M5」調整後

[定理 3] 設 p 為大於 2 的質數，n、l 為自然數，滿足 $n+1 = p\times l$，若 $p = l$，則

$S_n(1,p) = \dfrac{n^2+2n+2}{2}$、$S_n(-1,p) = \dfrac{n^2+2n}{2}$。

證明：$\because n+1 = p\times l \Rightarrow n = p\times l - 1 = p^2 - 1 = p(p-1) + p - 1 \Rightarrow n = (p-1, p-1)_p$，

由 Lucas’s Theorem 知，$C_i^n \equiv C_a^{p-1} \times C_b^{p-1} \bmod p$，其中 $i = (a,b)_p$、

$a, b = 0, 1, \cdots, p-1$，由[引理 5]知 $C_i^n \equiv (-1)^a \times (-1)^b = (-1)^{a+b} \bmod p$，故

$C_i^n \equiv 1 \bmod p$，當為 i 偶數；$C_i^n \equiv -1 \bmod p$，當為 i 奇數，故

$N_n(1,p) = \dfrac{n+1+1}{2} = \dfrac{n+2}{2}$、$N_n(-1,p) = \dfrac{n+1-1}{2} = \dfrac{n}{2}$，

$S_n(1,p) = \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2+2n+2}{2}$、$S_n(-1,p) = 2\times\dfrac{n+2}{2}\times\dfrac{n}{2} = \dfrac{n^2+2n}{2}$。

[定理 4] 設 p 為質數，n 為自然數，滿足 $n+1 = p\times l$、$p > l$、l 為奇數，令 $a = p^2+1$、$b = p^2-1$，則 $S_n\left((C_i^{l-1})^2, p\right) = 2a$、$S_n\left(-(C_i^{l-1})^2, p\right) = 2b$，其中 $i = 0, 1, \cdots, \dfrac{l-3}{2}$；

$S_n\left((C_i^{l-1})^2, p\right)=\frac{a}{2}$ 、 $S_n\left(-(C_i^{l-1})^2, p\right)=\frac{b}{2}$ ，其中 $i=\frac{l-1}{2}$ ；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1}, p\right)=4a$ 、 $S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1}, p\right)=4b$ ，其中 $i>j$ 、 $i,j=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1}, p\right)=2a$ 、 $S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1}, p\right)=2b$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ 、 $j=\frac{l-1}{2}$ 。

證明：$\because n+1=p\times l\Rightarrow n=p\times l-1=(l-1)p+p-1\Rightarrow n=(l-1,p-1)_p$ ，

由 Lucas's Theorem 知， $C_i^n\equiv C_a^{l-1}\times C_b^{p-1}\bmod p$ ，其中 $i=(a,b)_p$ 、 $a=0,1,\cdots,l-1$ 、 $b=0,1,\cdots,p-1$ ，由[引理 5]知 $C_i^n\equiv(-1)^b\times C_a^{l-1}\bmod p$ ，故 $C_i^n\equiv C_a^{l-1}\bmod p$ ，當 b 為偶數； $C_i^n\equiv -C_a^{l-1}\bmod p$ ，當 b 為奇數，且因 $C_0^{l-1}=C_{l-1}^{l-1}$ 、 $C_1^{l-1}=C_{l-2}^{l-1}$ 、 $\cdots$ ，

故 $N_n(C_i^{l-1},p)=\frac{p+1}{2}\times 2=p+1$ 、 $N_n(-C_i^{l-1},p)=\frac{p-1}{2}\times 2=p-1$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$N_n(C_i^{l-1},p)=\frac{p+1}{2}$ 、 $N_n(-C_i^{l-1},p)=\frac{p-1}{2}$ ，其中 $i=\frac{l-1}{2}$ ；

$S_n\left((C_i^{l-1})^2,p\right)=(p+1)^2+(p-1)^2=2p^2+2=2a$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left(-(C_i^{l-1})^2,p\right)=2\times(p+1)\times(p-1)=2p^2-2=2b$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left((C_i^{l-1})^2,p\right)=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=\frac{p^2+1}{2}=\frac{a}{2}$ 、

$S_n\left(-(C_i^{l-1})^2,p\right)=2\times\left(\frac{p+1}{2}\right)\times\left(\frac{p-1}{2}\right)=\frac{p^2-1}{2}=\frac{b}{2}$ ，其中 $i=\frac{l-1}{2}$ ；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=2(p+1)^2+2(p-1)^2=4p^2+4=4a$ ，其中 $i>j$ 、 $i,j=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=4\times(p+1)\times(p-1)=4p^2-4=4b$ ，其中 $i>j$ 、 $i,j=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=(p+1)^2+(p-1)^2=2p^2+2=2a$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ 、 $j=\frac{l-1}{2}$ ；

$S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=2\times(p+1)\times(p-1)=2p^2-2=2b$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ 、 $j=\frac{l-1}{2}$ 。

(四)計算餘數的個數：

由於 Lucas's Theorem 在除數是質數的前提下才成立，故以下對 n 階巴斯卡正方形 mod 2、3、5 分別討論其結果。而除數是 4、6 時我們也研究一些計算方法，由於除數超過 6 時，餘數的情形較多，考量著色上的需求，暫不討論。

1.Mod 2：

由 Lucas's Theorem 知，以 C_5^{23} 而言，$23=1\cdot 2^4+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$ 、$5=1\cdot 2^2+1\cdot 2^0$ ，即 $23=(10111)_2$ 、$5=(00101)_2$ ，故 $C_5^{23}\equiv C_0^1\cdot C_0^0\cdot C_1^1\cdot C_0^1\cdot C_1^1=1 \mod 2$ 。在第 23 列的巴斯卡三角形有 $23+1=24$ 個數，即 C_k^{23} ，$k=0,1,\cdots,23$ ，對於任意的 C_k^{23} ，可得 $C_k^{23}\equiv C_a^1\cdot C_b^0\cdot C_c^1\cdot C_d^1\cdot C_e^1 \mod 2$ ，其中 $0\le a,b,c,d,e\le 1$ 。因 $C_0^1=C_1^1=C_0^0=1$ 、$C_1^0=0$ ，即當 $a,c,d,e\in\{0,1\}$ 、$b=1$ ，這列會有 $2\times 1\times 2\times 2\times 2=16$ 個數被 2 除餘 1。也就是說 23 的二進位表示法中 $23=(10111)_2$ ，1 的總和為 4，則這列將會有 $2^4=16$ 個數被 2 除餘 1，而且它們位置有對稱性。而這列被 2 除餘 0 的個數就會是 $24-2^4=8$ 個。被 2 除餘 0 必須在 $b=1$ 時，即 k 的二進位表示法 $k=(\times 1\times\times\times)_2$ ，分別為 $(01000)_2=8$ 、$(01001)_2=9$ 、$(01010)_2=10$ 、$(01011)_2=11$ 、$(01100)_2=12$ 、$(01101)_2=13$ 、$(01110)_2=14$ 、$(01111)_2=15$ ，因為任一列的第一個數皆為 C_0^n ，而 $(01000)_2=8$ 將會是這列的第 $8+1=9$ 個數，因此第 23 列被 2 除餘 0 發生在由左至右第 $9\sim 16$ 的數。

因巴斯卡正方形的每個數是型如 $C_k^n\times C_l^n$ ，設 $C_k^n\equiv a \mod p$ 、$C_l^n\equiv b \mod p$ ，且 $C_k^n\times C_l^n \equiv a\times b \mod p$ 。因此，若 $C_k^n\equiv C_l^n\equiv 1 \mod 2$ ，則 $C_k^n\times C_l^n\equiv 1 \mod 2$ ；其餘情形 $C_k^n\times C_l^n\equiv 0 \mod 2$ 。利用這個性質，可求得 23 階巴斯卡正方形共 576 個數被 2 除餘 0 或 1 的總數。如「表 10」所示，23 階巴斯卡正方形 mod 2 餘 1 有 256 個數、餘 0 有 312 個數。即 $N_{23}(1,2)=16$ 、$N_{23}(0,2)=8$ ；$S_{23}(1,2)=256$ 、$S_{23}(0,2)=312$ 。

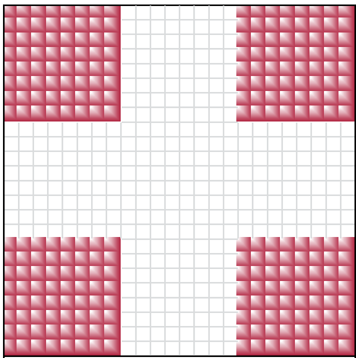


圖26：「23階巴斯卡正方形mod 2」

	1(16)	0(8)
1(16)	1(256)	0(144)
0(8)	0(144)	0(64)

表10：「23階巴斯卡正方形mod 2 餘數的個數」

[定理 5] 設 n 的二進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$ ，其中 $m_i\in\{0,1\}$ ，$i=0,1,\cdots,k$ 。令 $a=m_k+\cdots+m_1+m_0$ ，則 $S_n(1,2)=4^a$ 、$S_n(0,2)=(n+1)^2-4^a$ 。

證明：由 Lucas's Theorem 知，第 n 列巴斯卡三角形有 2^a 個數被 2 除餘 1，

即 $N_n(1,2)=2^a$ ，故 n 階巴斯卡正方形有 $2^a\times 2^a=4^a$ 個數被 2 除餘 1，

即 $S_n(1,2)=4^a$ ，且被 2 除餘 0 有 $(n+1)^2-4^a$ ，即 $S_n(0,2)=(n+1)^2-4^a$ 。

2.Mod 3：

仍以第 23 列的巴斯卡三角形為例，$23=2\cdot 3^2+1\cdot 3^1+2\cdot 3^0$ ，即 $23=(212)_3$ 。此列的每一項 C_k^{23} ，$k=0,1,\cdots,23$ ，可得 $C_k^{23}\equiv C_a^2\cdot C_b^1\cdot C_c^2 \mod 3$ ，其中非負整數 a 、b 、c 滿足

$0 \le a,b,c \le 2$。因為 $C_0^2 = C_2^2 = C_1^1 = C_0^1 = 1$、$C_2^1 = 0$、$C_1^2 = 2$，且

$$\begin{cases} C_k^{23} \equiv 1 \mod 3 & \text{當} a,c \in \{0,2\}, b \in \{0,1\} \text{或} a=c=1, b \in \{0,1\} \\ C_k^{23} \equiv 2 \mod 3 & \text{當} a=1, b \in \{0,1\}, c \in \{0,2\} \text{或} c=1, a \in \{0,2\}, b \in \{0,1\} \\ C_k^{23} = 0 \mod 3 & \text{其他} \end{cases}$$

所以第 23 列的的巴斯卡三角形有 $2\times2\times2+1\times2\times1=10$ 個數被 3 除餘 1、有 $1\times2\times2+2\times2\times1=8$ 個數被 3 除餘 2、有 $24-10-8=6$ 個數被 3 除餘 0，它們位置亦有對稱性。被 3 除餘 1 時，發生在正數或倒數的 $1,3,4,6,11$ 的位置。被 3 除餘 2 時，發生在第 23 列正數或倒數的第 $2,5,10,12$ 位置。其餘為位置為被 3 除餘 0。

1	2	1	1	2	1	0	0	0	2	1	2	2	1	2	0	0	0	1	2	1	1	2	1

表 11：「第 23 列巴斯卡三角形 mod 3」

因為 $\begin{cases} C_k^n \times C_l^n \equiv 1 \mod 3 & \text{若} C_k^n \equiv C_l^n \equiv 1 \mod 3 \text{或} C_k^n \equiv C_l^n \equiv 2 \mod 3 \\ C_k^n \times C_l^n \equiv 2 \mod 3 & \text{若} C_k^n \equiv 2, C_l^n \equiv 1 \mod 3 \text{或} C_k^n \equiv 1, C_l^n \equiv 2 \mod 3 \\ C_k^n \times C_l^n \equiv 0 \mod 3 & \text{其他} \end{cases}$，利用這個性質，可求得 23 階巴斯卡正方形共 576 個數被 3 除餘 0、1 或 2 的總數。如表 12 所示，23 階巴斯卡正方形 mod 3 的餘 2 有 160 個數、餘 1 有 164 個數、餘 0 有 252 個數，即 $N_{23}(2,3)=8$、$N_{23}(1,3)=10$；$S_{23}(2,3)=160$、$S_{23}(1,3)=164$、$S_{23}(0,3)=252$。

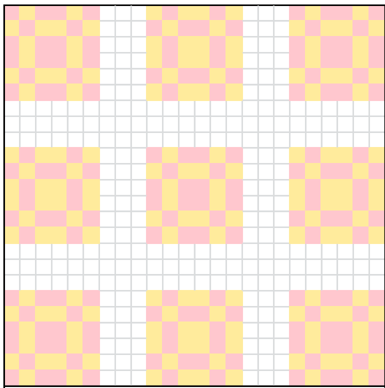


圖27：「23階巴斯卡正方形mod 3」

	1(10)	2(8)	0(6)
1(10)	1(100)	2(80)	0(60)
2(8)	2(80)	0(64)	0(48)
0(6)	0(60)	0(48)	0(36)

表12：「23階巴斯卡正方形 mod 3餘數的個數」

[定理 6] 設 n 的三進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_3$，其中 $m_i \in \{0,1,2\}$，$i=0,1,\cdots,k$。令 a 為 $m_i=2$ 的次數、b 為 $m_i=1$ 的次數，則 $N_n(2,3)=2^{b-1}\times(3^a-1)$、$N_n(1,3)=2^{b-1}\times(3^a+1)$、$N_n(0,3)=(n+1)-3^a\times2^b$。

證明：由 Lucas's Theorem 知，對於任意的 C_k^n，設 $\begin{cases} n=m_r3^r+\cdots+m_13+m_0 \\ k=k_r3^r+\cdots+k_13+k_0 \end{cases}$，可得

$C_k^n \equiv C_{k_r}^{m_r}\cdots C_{k_1}^{m_1}\cdot C_{k_0}^{m_0} \mod 3$，其中 m_i、k_i 為非負整數且 $0 \le m_i,k_i \le 2$。

觀察 $C_k^n \equiv 1 \mod 3$ 必須是所有的 $m_i=2$ 中取全部或取偶數個 $k_i \in \{0,2\}$，未取中的部份是 $k_i=1$，且搭配 $m_i=1$ 中 $k_i \in \{0,1\}$、$m_i=0$ 中 $k_i=0$。因此

$$N_n(1,3)=2^b\times\left(2^a+C_2^a2^{a-2}+C_4^a2^{a-4}+C_6^a2^{a-6}+\cdots\right)$$

$$=2^b\times2^a\left(1+\frac{1}{2^2}C_2^a+\frac{1}{2^4}C_4^a+\cdots\right)=2^b\times2^a\times\frac{1}{2}\left((\frac{3}{2})^a+(\frac{1}{2})^a\right)=2^{b-1}\times(3^a+1)$$

觀察 $C_k^n\equiv2 \bmod 3$ 必須是所有的 $m_i=2$ 中取奇數個 $k_i\in\{0,2\}$，未取中的部份是 $k_i=1$，且搭配 $m_i=1$ 中 $k_i\in\{0,1\}$、$m_i=0$ 中 $k_i=0$。因此

$$N_n(2,3)=2^b\times\left(C_1^a2^{a-1}+C_3^a2^{a-3}+C_5^a2^{a-5}+C_7^a2^{a-7}+\cdots\right)$$

$$=2^b\times2^a\left(\frac{1}{2}C_1^a+\frac{1}{2^3}C_3^a+\frac{1}{2^5}C_5^a+\cdots\right)=2^b\times2^a\times\frac{1}{2}\left((\frac{3}{2})^a-(\frac{1}{2})^a\right)=2^{b-1}\times(3^a-1)$$

$$N_n(0,3)=(n+1)-2^{b-1}\times(3^a+1)-2^{b-1}\times(3^a-1)=(n+1)-3^a\times2^b\text{ 。}$$

[定理 7] 設 n 的三進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_3$，其中 $m_i\in\{0,1,2\}$，$i=0,1,\cdots,k$。令 a 為 $m_i=2$ 的次數、b 為 $m_i=1$ 的次數，則 $S_n(2,3)=2\times4^{b-1}\times(9^a-1)$、$S_n(1,3)=2\times4^{b-1}\times(9^a+1)$、$S_n(0,3)=(n+1)^2-9^a\times4^b$。

證明：由[定理 6]知，$S_n(2,3)=2\times2^{b-1}\times(3^a-1)\times2^{b-1}\times(3^a+1)=2\times4^{b-1}\times(9^a-1)$

$$S_n(1,3)=\left(2^{b-1}\times(3^a+1)\right)^2+\left(2^{b-1}\times(3^a-1)\right)^2=2\times4^{b-1}\times(9^a+1)$$

$$S_n(0,3)=(n+1)^2-2\times4^{b-1}\times(9^a-1)-2\times4^{b-1}\times(9^a+1)=(n+1)^2-9^a\times4^b\text{ 。}$$

3.Mod 5：

被 5 除的餘數可能為 4、3、2、1、0，因此計算 C_k^n 被 5 除的餘數之個數將繁複許多。設 $n=(m_k,m_{k-1},...,m_0)_5$，其中 $m_i\in\{0,1,2,3,4\},i=0,1,...,k$。令 a、b、c、d 分別為 $m_i=4$、3、2、1 的次數，由 Lucas's Theorem 知：

$$C_k^n\equiv(C_x^4)^a\times(C_y^3)^b\times(C_z^2)^c\times(C_w^1)^d \bmod 5$$

其中 C_x^4 中的 x 可能為 0~4，皆以 C_x^4 來表示，餘者類推。

因 $C_0^4\equiv C_2^4\equiv C_4^4\equiv C_0^3\equiv C_3^3\equiv C_0^2\equiv C_2^2\equiv C_0^1\equiv C_1^1\equiv1$、$C_1^2\equiv2$、$C_1^3\equiv C_2^3\equiv3$、$C_1^4\equiv C_3^4\equiv4 \bmod 5$，故 $C_k^n\equiv4^\alpha\times3^\beta\times2^\gamma\times1^\delta \bmod 5$，可依 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 之值分別計算被 5 除的餘數再相乘，且考慮 $4^\alpha\equiv4$ 或 1、$3^\beta\equiv3$ 或 4 或 2 或 1、$2^\gamma\equiv2$ 或 4 或 3 或 $1 \bmod 5$，分別說明如下：

1. $4^\alpha\equiv4$：在 C_x^4 共 a 次中，C_1^4、C_3^4 有奇數次，共 $C_1^a2^1\cdot3^{a-1}+C_3^a2^3\cdot3^{a-3}+\cdots=\frac{5^a-1}{2}$ 種

$4^\alpha\equiv1$：在 C_x^4 共 a 次中，C_1^4、C_3^4 有偶數次，共 $C_0^a3^a+C_2^a2^2\cdot3^{a-2}+\cdots=\frac{5^a+1}{2}$ 種

2. $3^\beta \equiv 3$ ：在C_y^3共b次中，C_1^3 、C_2^3有$4k+1$次，共

$$C_1^b 2^1\cdot 2^{b-1}+C_5^b 2^5\cdot 2^{b-5}+\cdots=2^b(C_1^b+C_5^b+C_9^b+\cdots)=2^{b-2}\left(2^b-(A-B)i\right)\text{種}$$

$3^\beta \equiv 4$ ：在C_y^3共b次中，C_1^3 、C_2^3有$4k+2$次，共

$$C_2^b 2^2\cdot 2^{b-2}+C_6^b 2^6\cdot 2^{b-6}+\cdots=2^b(C_2^b+C_6^b+C_{10}^b+\cdots)=2^{b-2}\left(2^b-(A+B)\right)\text{種}$$

$3^\beta \equiv 2$ ：在C_y^3共b次中，C_1^3 、C_2^3有$4k+3$次，共

$$C_3^b 2^3\cdot 2^{b-3}+C_7^b 2^7\cdot 2^{b-7}+\cdots=2^b(C_3^b+C_7^b+C_{11}^b+\cdots)=2^{b-2}\left(2^b+(A-B)i\right)\text{種}$$

$3^\beta \equiv 1$：在C_y^3共b次中，C_1^3 、C_2^3有$4k$次，共

$C_0^b 2^b+C_4^b 2^4\cdot 2^{b-4}+\cdots=2^b(C_0^b+C_4^b+C_8^b+\cdots)=2^{b-2}\left(2^b+(A+B)\right)$種，**此處必須$b\geq 1$才成立**，

其中$A=(1+i)^b$ 、 $B=(1-i)^b$ 。

3. $2^\gamma \equiv 2$ ：在C_z^2共c次中，C_1^2有$4k+1$次，共

$$C_1^c 2^{c-1}+C_5^c 2^{c-5}+\cdots=2^c\left(C_1^c(\frac{1}{2})+C_5^c(\frac{1}{2})^5+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(C-D-(E-F)i\right)\text{種}$$

$2^\gamma \equiv 4$ ：在C_z^2共c次中，C_1^2有$4k+2$次，共

$$C_2^c 2^{c-2}+C_6^c 2^{c-6}+\cdots=2^c\left(C_2^c(\frac{1}{2})^2+C_6^c(\frac{1}{2})^6+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(C+D-E-F\right)\text{種}$$

$2^\gamma \equiv 3$ ：在C_z^2共c次中，C_1^2有$4k+3$次，共

$$C_3^c 2^{c-3}+C_7^c 2^{c-7}+\cdots=2^c\left(C_3^c(\frac{1}{2})^3+C_7^c(\frac{1}{2})^7+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(C-D+(E-F)i\right)\text{種}$$

$2^\gamma \equiv 1$ ：在C_z^2共c次中，C_1^2有$4k$次，共

$$C_0^c 2^c+C_4^c 2^{c-4}+\cdots=2^c\left(C_0^c+C_4^c(\frac{1}{2})^4+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(C+D+E+F\right)\text{種}$$

，其中$C=3^c$ 、 $D=1$ 、 $E=(2+i)^c$ 、 $F=(2-i)^c$ 。

$$C_3^c 2^{c-3}+C_7^c 2^{c-7}+\cdots=2^c\left(C_3^c(\frac{1}{2})^3+C_7^c(\frac{1}{2})^7+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(C-D+(E-F)i\right)\text{種}$$

$2^\gamma \equiv 1$ ：在C_z^2共c次中，C_1^2有$4k$次，共

$$C_0^c 2^c+C_4^c 2^{c-4}+\cdots=2^c\left(C_0^c+C_4^c(\frac{1}{2})^4+\cdots\right)=\frac{1}{4}\left(C+D+E+F\right)\text{種}$$

，其中$C=3^c$ 、 $D=1$ 、 $E=(2+i)^c$ 、 $F=(2-i)^c$ 。

[定理 8] 設n的五進位表示法為$n=(m_k,m_{k-1},...,m_0)_5$ ，其中$m_i\in\{0,1,2,3,4\}, i=0,1,...,k$ 。

令 a、b、c、d 分別為 $m_i=4$、3、2、1 的次數，

若 $b=0$，則 $\begin{cases} N_n(1,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c+1)+(2+i)^c+(2-i)^c\right) \\ N_n(2,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c-1)-i(2+i)^c+i(2-i)^c\right) \\ N_n(3,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c-1)+i(2+i)^c-i(2-i)^c\right) \\ N_n(4,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c+1)-(2+i)^c-(2-i)^c\right) \end{cases}$；

若 $b\geq1$，則 $\begin{cases} N_n(1,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a+2^{d+b-2}\cdot\left((1+i)^b(2-i)^c+(1-i)^b(2+i)^c\right) \\ N_n(2,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a+2^{d+b-2}\cdot\left((1+i)^b(2-i)^c-(1-i)^b(2+i)^c\right)i \\ N_n(3,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a+2^{d+b-2}\cdot\left(-(1+i)^b(2-i)^c+(1-i)^b(2+i)^c\right)i \\ N_n(4,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a-2^{d+b-2}\cdot\left((1+i)^b(2-i)^c+(1-i)^b(2+i)^c\right) \end{cases}$。

證明：分別考慮 4^α 、 3^β 、 2^γ 被 5 除的餘數，三數相乘後再被 5 除餘 1 的情形有 $1\times1\times1$、$1\times2\times3$、$1\times3\times2$、$1\times4\times4$、$4\times1\times4$、$4\times2\times2$、$4\times3\times3$、$4\times4\times1$ 八種情況。若 $b\geq1$，

$$\begin{aligned} N_n(1,5)=&2^{d+b-5}\cdot\left(5^a+1\right)\cdot\left\{\left(2^b+(A+B)\right)\cdot\left(C+D+E+F\right)\right.\\ &+\left(2^b+(A-B)i\right)\cdot\left(C-D+(E-F)i\right)+\left(2^b-(A-B)i\right)\cdot\left(C-D-(E-F)i\right)\\ &\left.+\left(2^b-(A+B)\right)\cdot\left(C+D-E-F\right)\right\}\\ &+2^{d+b-5}\left(5^a-1\right)\cdot\left\{\left(2^b+(A+B)\right)\cdot\left(C+D-E-F\right)\right.\\ &+\left(2^b+(A-B)i\right)\cdot\left(C-D-(E-F)i\right)+\left(2^b-(A-B)i\right)\cdot\left(C-D+(E-F)i\right)\\ &\left.+\left(2^b-(A+B)\right)\cdot\left(C+D+E+F\right)\right\}\\ =&2^{d+b-3}\cdot\left(5^a+1\right)\cdot\left(2^b\cdot C+AF+BE\right)+2^{d+b-3}\cdot\left(5^a-1\right)\cdot\left(2^b\cdot C-AF-BE\right)\\ =&2^{d+b-2}\cdot5^a\cdot2^b\cdot C+2^{d+b-2}\cdot\left(AF+BE\right)\\ =&2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a+2^{d+b-2}\cdot\left((1+i)^b(2-i)^c+(1-i)^b(2+i)^c\right) \end{aligned}$$

，同理可得

$$N_n(2,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a+2^{d+b-2}\cdot\left((1+i)^b(2-i)^c-(1-i)^b(2+i)^c\right)i$$

$$N_n(3,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a+2^{d+b-2}\cdot\left(-(1+i)^b(2-i)^c+(1-i)^b(2+i)^c\right)i$$

$$N_n(4,5)=2^{d+2b-2}\cdot3^c\cdot5^a-2^{d+b-2}\cdot\left((1+i)^b(2-i)^c+(1-i)^b(2+i)^c\right)$$

若 $b=0$，$N_n(1,5)=2^{d-3}\cdot\left(5^a-1\right)\cdot\left(C+D-E-F\right)+2^{d-3}\left(5^a+1\right)\cdot\left(C+D+E+F\right)$

$$=2^{d-2}\cdot\left(5^a(C+D)+E+F\right)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c+1)+(2+i)^c+(2-i)^c\right)$$

同理可得

$N_n(2,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c-1)-i(2+i)^c+i(2-i)^c\right)$

$N_n(3,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c-1)+i(2+i)^c-i(2-i)^c\right)$

$N_n(4,5)=2^{d-2}\cdot\left(5^a\cdot(3^c+1)-(2+i)^c-(2-i)^c\right)$。

[定理 9] 設 n 的五進位表示法為 $n=(m_k,m_{k-1},...,m_0)_5$ ，其中 $m_i\in\{0,1,2,3,4\}, i=0,1,...,k$ 。令 a、b、c、d 分別為 $m_i=4$、3、2、1 的次數，

若 $b=0$，則 $\begin{cases} S_n(1,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)+(2+i)^{2c}+(2-i)^{2c}\right) \\ S_n(2,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)-i(2+i)^{2c}+i(2-i)^{2c}\right) \\ S_n(3,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)+i(2+i)^{2c}-i(2-i)^{2c}\right) \\ S_n(4,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)-(2+i)^{2c}-(2-i)^{2c}\right) \end{cases}$；

若 $b\geq1$，則 $\begin{cases} S_n(1,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right) \\ S_n(2,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}-(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i \\ S_n(3,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left(-(1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i \\ S_n(4,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}-2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right) \end{cases}$。

證明：若 $b=0$ ， $S_n(1,5)=\left(N_n(1,5)\right)^2+\left(N_n(4,5)\right)^2+2N_n(2,5)\cdot N_n(3,5)$

$$=2^{2d-3}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^c+1)^2+(2+i)^{2c}+(2-i)^{2c}+2\cdot5^c\right)$$

$$+2^{2d-3}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^c-1)^2+(2+i)^{2c}+(2-i)^{2c}-2\cdot5^c\right)$$

$$=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)+(2+i)^{2c}+(2-i)^{2c}\right)$$

同理可得

$S_n(2,5)=2N_n(1,5)\cdot N_n(2,5)+2N_n(3,5)\cdot N_n(4,5)$

$$=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)-i(2+i)^{2c}+i(2-i)^{2c}\right)$$

$S_n(3,5)=2N_n(1,5)\cdot N_n(3,5)+2N_n(2,5)\cdot N_n(4,5)$

$$=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)+i(2+i)^{2c}-i(2-i)^{2c}\right)$$

$S_n(4,5)=\left(N_n(2,5)\right)^2+\left(N_n(3,5)\right)^2+2N_n(1,5)\cdot N_n(4,5)$

$$=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)-(2+i)^{2c}-(2-i)^{2c}\right)$$

若 $b\geq1$ ， $S_n(1,5)=\left(N_n(1,5)\right)^2+\left(N_n(4,5)\right)^2+2N_n(2,5)\cdot N_n(3,5)$

$=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)$，

同理可得

$$S_n(2,5)=2N_n(1,5)\cdot N_n(2,5)+2N_n(3,5)\cdot N_n(4,5)$$
$$=2^{2d+4b-2}\cdot 3^{2c}\cdot 5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}-(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i$$

$$S_n(3,5)=2N_n(1,5)\cdot N_n(3,5)+2N_n(2,5)\cdot N_n(4,5)$$
$$=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)+i(2+i)^{2c}-i(2-i)^{2c}\right)$$
$$=2^{2d+4b-2}\cdot 3^{2c}\cdot 5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left(-(1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i$$

$$S_n(4,5)=\left(N_n(2,5)\right)^2+\left(N_n(3,5)\right)^2+2N_n(1,5)\cdot N_n(4,5)$$
$$=2^{2d+4b-2}\cdot 3^{2c}\cdot 5^{2a}-2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)$$ 。

如表「13：23M5」所示，因 $23=(4,3)_5\Rightarrow a=1,b=1,c=d=0$ ，故

$S_{23}(1,5)=2^2 5^2+\left((1+i)^2+(1-i)^2\right)=100$ 、

$S_n(2,5)=2^2 5^2+\left((1+i)^2-(1-i)^2\right)i=96$ 、

$S_{23}(3,5)=2^2 5^2+\left((1-i)^2-(1+i)^2\right)i=104$ 、

$S_{23}(4,5)=2^2 5^2-\left((1+i)^2+(1-i)^2\right)=100$ 。

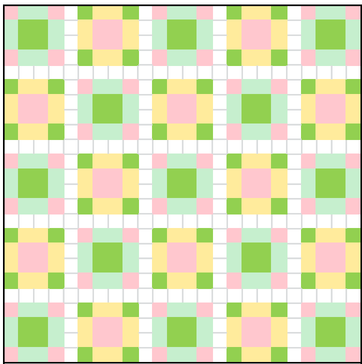


圖28：「23階巴斯卡正方形mod 5」

	1(6)	2(4)	3(6)	4(4)	0(4)
1(6)	1(36)	2(24)	3(36)	4(24)	0(24)
2(4)	2(24)	4(16)	1(24)	3(16)	0(16)
3(6)	3(36)	1(24)	4(36)	2(24)	0(24)
4(4)	4(24)	3(16)	2(24)	1(16)	0(16)
0(4)	0(24)	0(16)	0(24)	0(16)	0(16)

表13：「23階巴斯卡正方形 mod 5餘數的個數」

4.Mod 4：

仍以巴斯卡三角形的第 23 列為例，$23=(10111)_2$ ，則 $B(n)=4$ 、 $C(n)=1$ 、 $D(n)=2$ 。

由[Pascal’s Triangle Modulo 4]知 $N_{23}(1,4)=N_{23}(3,4)=2^{4-1}=8$ 、 $N_{23}(2,4)=1\times 2^{4-1}=8$ 。

1	3	1	3	3	1	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	3	1	3	3	1	3	1

表 14：「巴斯卡三角形第 23 列 mod 4」

因為 $\begin{cases} C_k^n\times C_l^n\equiv 1 \mod 4 & 若 C_k^n\equiv C_l^n\equiv 1 \mod 4 或 C_k^n\equiv C_l^n\equiv 3 \mod 4 \\ C_k^n\times C_l^n\equiv 2 \mod 4 & 若 C_k^n\equiv 2, C_l^n\equiv 1 \mod 4 或 C_k^n\equiv 3, C_l^n\equiv 2 \mod 4 \\ C_k^n\times C_l^n\equiv 0 \mod 4 & C_k^n\equiv C_l^n\equiv 2 \mod 4 \end{cases}$ ，利用這方式可得 23 階巴斯卡正方形被 4 除餘 0、1、2 或 3 的個數。如「表 15」所示，mod 4 餘 3 有 128 個數、餘 2 有 256 個數、餘 1 有 128 個數、餘 0 有 64 個數，即

$S_{23}(3,4)=128$ 、 $S_{23}(2,4)=256$ 、

$S_{23}(1,4)=128$ 、 $S_{23}(0,4)=64$ 。

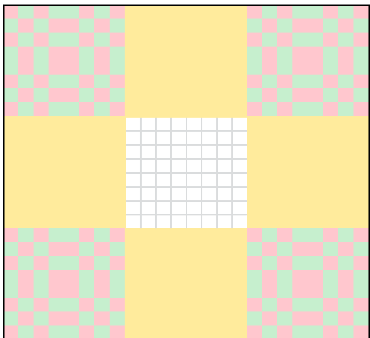


圖29：「23階巴斯卡正方形mod 4」

	1(8)	2(8)	3(8)
1(8)	1(64)	2(64)	3(64)
2(8)	2(64)	0(64)	2(64)
3(8)	3(64)	2(64)	1(64)

表15：「23階巴斯卡正方形 mod 4餘數的個數」

[定理 10] 設 n 的二進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$ ，其中 $m_i\in\{0,1\}$ ，$i=0,1,\cdots,k$ 。令 $B(n)=m_k+\cdots+m_1+m_0$ 、 $C(n)$ 為 m_i 的排列出現 10 的次數、 $D(n)$ 為 m_i 的排列出現 11 的次數。若 $D(n)=0$ ，則 $S_n(1,4)=4^{B(n)}$ 、 $S_n(2,4)=2C(n)\times 4^{B(n)}$ 、 $S_n(3,4)=0$ ；

若 $D(n)>0$ ， $S_n(1,4)=4^{B(n)-\frac{1}{2}}$ 、 $S_n(2,4)=C(n)\times 4^{B(n)}$ 、 $S_n(3,4)=4^{B(n)-\frac{1}{2}}$ 。

證明：由[Pascal's Triangle Modulo 4]知

(I) 若 $D(n)=0$ ， $S_n(1,4)=2^{B(n)}\times 2^{B(n)}=4^{B(n)}$ 、

$S_n(2,4)=4\times 2^{B(n)}\times C(n)\times 2^{B(n)-1}=2C(n)\times 4^{B(n)}$ 、 $S_n(3,4)=0$ 。

(II) 若 $D(n)>0$ ， $S_n(1,4)=S_n(3,4)=2\times 2^{B(n)-1}\times 2^{B(n)-1}=4^{B(n)-\frac{1}{2}}$ 、

$S_n(2,4)=4\times 2^{B(n)-1}\times C(n)\times 2^{B(n)-1}=C(n)\times 4^{B(n)}$ 。

五、任意組合數被質數的次方所除之餘數[8]

[定理 10]的結果是利用 Mod4 餘數的規律性獲得，但無法求的任意 $C_t^n \bmod 4$ 的餘數。另一方面，我們從二項式的展開著手，對於計算 $C_t^n \bmod 4$ 的結果亦有一些收穫。

(一)Mod 4：

考慮 $(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4\equiv 1+2x^2+x^4=(1+x^2)^2 \bmod 4$ ，同理可得 $(1+x)^{16}\equiv 1+2x^8+x^{16}=(1+x^8)^2 \bmod 4$ 、 $(1+x)^{64}\equiv 1+2x^{32}+x^{64}=(1+x^{32})^2 \bmod 4$ ，

由數學歸納法不難得知 $(1+x)^{4^k}\equiv\left(1+x^{\frac{4^k}{2}}\right)^2 \bmod 4$ 。令 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_4$ ，其中

$m_i\in\{0,1,2,3\}$ ， $i=0,1,\cdots,k$ ，考慮 $(1+x)^n$ 的展開式 $\sum_{i=0}^{n}C_i^n x^i=(1+x)^n=(1+x)^{m_0 4^0+m_1 4^1+m_2 4^2+\cdots+m_k 4^k}$

$$=(1+x)^{m_0 4^0}\cdot(1+x)^{m_1 4^1}\cdots(1+x)^{m_k 4^k}\equiv(1+x)^{m_0}\cdot(1+x^2)^{2m_1}\cdot(1+x^8)^{2m_2}\cdots\left(1+x^{\frac{4^k}{2}}\right)^{2m_k}$$

$$=\left(C_0^{m_0}+C_1^{m_0}x+C_2^{m_0}x^2+C_3^{m_0}x^3\right)\cdot\left(C_0^{2m_1}+C_1^{2m_1}x^2+C_2^{2m_1}x^4+C_3^{2m_1}x^6+\cdots+C_6^{2m_1}x^{12}\right)$$

$$\cdot\left(C_0^{2m_2}+C_1^{2m_2}x^8+C_2^{2m_2}x^{16}+\cdots+C_6^{2m_2}x^{48}\right)\cdots\left(C_0^{2m_k}+C_1^{2m_k}x^{\frac{4^k}{2}}+C_2^{2m_k}\left(x^{\frac{4^k}{2}}\right)^2+\cdots+C_6^{2m_k}\left(x^{\frac{4^k}{2}}\right)^6\right)$$

$$=\left(C_0^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}\right)+\left(C_1^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}\right)x+\left(C_2^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}+C_0^{m_0}C_1^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^2$$

$$+\left(C_1^{m_0}C_1^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}+C_3^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^3+\left(C_0^{m_0}C_2^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}+C_2^{m_0}C_1^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^4$$

$$+\left(C_1^{m_0}C_2^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}+C_3^{m_0}C_1^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^5$$

$$+\left(C_0^{m_0}C_3^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}+C_2^{m_0}C_2^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^6+\cdots$$

比較等式兩邊的係數可得

$$C_t^n \equiv \sum C_{n_k}^{2m_k}\times C_{n_{k-1}}^{2m_{k-1}}\times\cdots\times C_{n_1}^{2m_1}\times C_{n_0}^{m_0} \bmod 4$$

其中 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_4$ 、 $n_0\in\{0,1,2,3\}$ 、 $n_i\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 、 $i=1,2,3,\cdots,k$ 。觀察 t 的表示法，例如： $6=(0,3,0)_\Delta=(0,2,2)_\Delta$ 、 $10=(0,5,0)_\Delta=(1,1,0)_\Delta=(0,4,2)_\Delta=(1,0,2)_\Delta$ ，即滿足 $t=n_0\cdot 2^0+n_1\cdot 2^1+n_2\cdot 2^3+n_3\cdot 2^5+n_4\cdot 2^7+\cdots+n_k\cdot 2^{2k-1}$ ，以 $t=(n_k,\cdots,n_1,n_0)_\Delta$ 表示。如此可便於計算 $C_t^n \bmod 4$ 之值，例如：如何計算 C_{20}^{43} 被 4 除的餘數？因 $43=(2,2,3)_4$ 、 $20=(2,2,0)_\Delta$ $=(2,1,2)_\Delta=(1,6,0)_\Delta=(1,5,2)_\Delta$ ，故 $C_{20}^{43}\equiv C_2^4C_2^4C_0^3+C_2^4C_1^4C_2^3+C_1^4C_6^4C_0^3+C_1^4C_5^4C_2^3=36+72\equiv 0$ $\bmod 4$ 。更大的數如 C_{37}^{59} ， $59=(3,2,3)_4$ 、 $37=(4,2,1)_\Delta=(4,1,3)_\Delta=(3,6,1)_\Delta=(3,5,3)_\Delta$ ，故 $C_{37}^{59}\equiv C_4^6C_2^4C_1^3+C_4^6C_1^4C_3^3+C_3^6C_6^4C_1^3+C_3^6C_5^4C_3^3=270+60\equiv 2 \bmod 4$ 。接下來我們將 Mod 4 推廣至 Mod p^2 。

(二)Mod p^2 ：

[引理 8] 設 p 為質數，則 $C_i^{p^2}\equiv 0 \bmod p^2$ ，其中 $i\neq 0,p,2p,3p,\cdots,p\times p$ 。

證明：考慮 $C_i^{p^2}=\dfrac{(p^2)!}{(i)!\cdot(p^2-i)!}=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdots p^\gamma$ ，

$$\Rightarrow \gamma=\left[\frac{p^2}{p}\right]+\left[\frac{p^2}{p^2}\right]-\left[\frac{i}{p}\right]-\left[\frac{i}{p^2}\right]-\left[\frac{p^2-i}{p}\right]-\left[\frac{p^2-i}{p^2}\right]=p+1-\left[\frac{i}{p}\right]-\left[\frac{p^2-i}{p}\right]$$

若 $1\le i\le p-1\Rightarrow\left[\dfrac{i}{p}\right]+\left[\dfrac{p^2-i}{p}\right]=0+p-1=p-1\Rightarrow\gamma=2$

若 $p+1\le i\le p^2-1\Rightarrow\left[\dfrac{i}{p}\right]+\left[\dfrac{p^2-i}{p}\right]=1+p-2=p-1\Rightarrow\gamma=2$

故 $C_i^{p^2}\equiv 0 \bmod p^2$ ，其中 $i\neq 0,p,2p,3p,\cdots,p\times p$ 。

[引理 9] 設 p 為大於 2 的質數，則 $C_{ip}^{p^2}\equiv C_i^p \bmod p^2$ ，其中 $i=0,p,2p,3p,\cdots,p\times p$ 。

證明： $C_{ip}^{p^2}=\dfrac{(p^2)(p^2-1)\cdots(p^2-p)\cdots(p^2-2p)\cdots(p^2-(i-1)p)\cdots(p^2-(ip-1))}{(ip)(ip-1)\cdots(ip-p)\cdots(ip-(i-1)p)\cdots 2\cdot 1}$

$$=\frac{(p^2)(p^2-p)(p^2-2p)\cdots(p^2-(i-1)p)}{(ip)(ip-p)(ip-2p)\cdots(ip-(i-1)p)}\times\frac{(p^2-1)(p^2-2)\cdots(p^2-(ip-1))}{(ip-1)(ip-2)\cdots 1}$$

$$\equiv\frac{p\cdot(p-1)(p-2)\cdots(p-(i-1))}{i\cdot(i-1)(i-2)\cdots 1}\times\frac{(-1)(-2)\cdots(-(ip-1))}{(ip-1)(ip-2)\cdots 1}=C_i^p \bmod p^2$$

，其中$i=0,p,2p,3p,\cdots,p\times p$。

[引理 10] 設p為質數，則$\left(1+x\right)^{p^{2k}}\equiv\left(1+x^{p^{2k-1}}\right)^{p}\bmod p^{2}$，其中$k\in N$。

證明：利用由數學歸納法，當$k=1$時，由引理知

$$\left(1+x\right)^{p^2}=1+C_1^{p^2}x+C_2^{p^2}x^2+\cdots+C_{p^2}^{p^2}x^{p^2}$$

$$\equiv 1+C_1^{p}x^{p}+C_2^{p}x^{2p}+\cdots+C_{p}^{p}x^{p^2}\equiv\left(1+x^{p}\right)^{p}\bmod p^2\text{成立}$$

假設$k=n$時，則$\left(1+x\right)^{p^{2n}}\equiv\left(1+x^{p^{2n-1}}\right)^{p}\bmod p^{2}$成立，則當$k=n+1$時，

$$\left(1+x\right)^{p^{2(n+1)}}=\left(1+x\right)^{p^{2n+2}}=\left(1+x\right)^{p^{2n}\cdot p^{2}}=\left(\left(1+x\right)^{p^{2n}}\right)^{p^2}\equiv\left(\left(1+x^{p^{2n-1}}\right)^{p}\right)^{p^2}$$

$$=\left(\left(1+x^{p^{2n-1}}\right)^{p^2}\right)^{p}\equiv\left(\left(1+\left(x^{p^{2n-1}}\right)^{p}\right)^{p}\right)^{p}=\left(1+x^{p^{2n}}\right)^{p^2}\equiv\left(1+x^{p^{2n+1}}\right)^{p}$$

故由數學歸納法知$\left(1+x\right)^{p^{2k}}\equiv\left(1+x^{p^{2k-1}}\right)^{p}\bmod p^{2}$成立。

考慮$\left(1+x\right)^{n}$的展開式，令$n=m_0p^0+m_1p^2+m_2p^4+\cdots+m_kp^{2k}$，即$n=(m_k,m_{k-1},\cdots,m_1,m_0)_{p^2}$

$$\left(1+x\right)^{n}=\left(1+x\right)^{m_0p^0+m_1p^2+m_2p^4+\cdots+m_kp^{2k}}=\left(1+x\right)^{m_0p^0}\cdot\left(1+x\right)^{m_1p^2}\cdots\left(1+x\right)^{m_kp^{2k}}$$

$$=\left(1+x\right)^{m_0}\cdot\left[\left(1+x\right)^{p^2}\right]^{m_1}\cdot\left[\left(1+x\right)^{p^4}\right]^{m_2}\cdots\left[\left(1+x\right)^{p^{2k}}\right]^{m_k}$$

$$\equiv\left(1+x\right)^{m_0}\cdot\left(1+x^{p}\right)^{pm_1}\cdot\left(1+x^{p^3}\right)^{pm_2}\cdots\left(1+x^{p^{2k-1}}\right)^{pm_k}$$

$$=\left(C_0^{m_0}+C_1^{m_0}x+C_2^{m_0}x^2+\cdots+C_{m_0}^{m_0}x^{m_0}\right)\cdot\left(C_0^{pm_1}+C_1^{pm_1}x^{p}+C_2^{pm_1}x^{2p}+\cdots+C_{pm_1}^{pm_1}x^{p^2m_1}\right)$$

$$\cdot\left(C_0^{pm_2}+C_1^{pm_2}x^{p^3}+C_2^{pm_2}x^{2p^3}+\cdots+C_{pm_2}^{pm_2}x^{p^4m_2}\right)\cdots\left(C_0^{pm_k}+C_1^{pm_k}x^{p^{2k-1}}+C_2^{pm_k}x^{2p^{2k-1}}+\cdots+C_{pm_k}^{pm_k}x^{p^{2k}m_k}\right)$$

$$=\left(C_0^{m_0}C_0^{pm_1}\cdots C_0^{pm_k}\right)+\left(C_1^{m_0}C_0^{pm_1}\cdots C_0^{pm_k}\right)x+\left(C_2^{m_0}C_0^{pm_1}\cdots C_0^{pm_k}\right)x^2+\cdots\bmod p^2$$

比較等式兩邊的係數可得

$$C_t^n\equiv\sum C_{n_k}^{pm_k}\times C_{n_{k-1}}^{pm_{k-1}}\times\cdots\times C_{n_1}^{pm_1}\times C_{n_0}^{m_0}\bmod p^2$$

其中$n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_{p^2}$、$n_0\in\{0,1,\cdots,p-1\}$、$n_i\in\{0,1,\cdots,p(p-1)\}$、$i=1,2,3,\cdots,k$。

觀察t的表示法滿足$t=n_0\cdot p^0+n_1\cdot p^1+n_2\cdot p^3+n_3\cdot p^5+n_4\cdot p^7+\cdots+n_k\cdot p^{2k-1}$，以$t=(n_k,\cdots,n_1,n_0)_{\Delta}$表示。如此可便於計算$C_t^n\bmod p^2$之值，例如：如何計算$C_{19}^{43}$被 9 除的餘數？因$43=(4,7)_9$、$19=(6,1)_{\Delta}=(5,4)_{\Delta}=(4,7)_{\Delta}=(1,5,2)_{\Delta}$，故$C_{19}^{43}\equiv C_6^{12}C_1^{7}+C_5^{12}C_4^{7}+C_4^{12}C_7^{7}$$=34683\equiv 6\bmod 9$。更大的數如$C_{28}^{64}$，$64=(7,1)_9$、$28=(1,0,1)_{\Delta}=(9,1)_{\Delta}=(8,4)_{\Delta}=(7,7)_{\Delta}$，

故$C_{28}^{64} \equiv C_9^{21} C_1^1 \equiv 8 \bmod 9$。接下來我們將 Mod p^2 推廣至 Mod p^n 。

(三)Mod p^n ：

[引理 11] 設 p 為質數，則$C_i^{p^n} \equiv 0 \bmod p^n$ ，其中$i \neq 0, p, 2p, 3p, \cdots, p^n$ 。

證明：考慮$C_i^{p^n} = \dfrac{(p^n)!}{(i)! \cdot (p^n - i)!} = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdots p^\gamma$ ，

$$\Rightarrow \gamma = \left(\left[\frac{p^n}{p} \right] + \left[\frac{p^n}{p^2} \right] + \cdots + \left[\frac{p^n}{p^n} \right] \right) - \left(\left[\frac{i}{p} \right] + \left[\frac{i}{p^2} \right] + \cdots + \left[\frac{i}{p^n} \right] \right)$$

$$- \left(\left[\frac{p^n - i}{p} \right] + \left[\frac{p^n - i}{p^2} \right] + \cdots + \left[\frac{p^n - i}{p^n} \right] \right) ,$$

若$1 \leq i \leq p-1$ ，

$$\gamma = \left(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + 1 \right) - (0) - \left(\left(p^{n-1} - 1 \right) + \left(p^{n-2} - 1 \right) + \cdots + (p-1) \right) = n$$

同理 $p+1 \leq i \leq 2p-1, 2p+1 \leq i \leq 3p-1, \cdots$ ，皆可得$\gamma = n$ ，

故$C_i^{p^n} \equiv 0 \bmod p^n$ ，其中$i \neq 0, p, 2p, 3p, \cdots, p^n$ 。

[引理 12] 設 p 為大於 2 的質數，則$C_{ip}^{p^n} \equiv C_i^{p^{n-1}} \bmod p^n$ ，其中$i = 0, p, 2p, 3p, \cdots, p \times p$ 。

證明：$$C_{ip}^{p^n} = \frac{(p^n)(p^n-1)\cdots(p^n-p)\cdots(p^n-2p)\cdots(p^n-(i-1)p)\cdots(p^n-(ip-1))}{(ip)(ip-1)\cdots(ip-p)\cdots(ip-(i-1)p)\cdots 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{(p^n)(p^n-p)(p^n-2p)\cdots(p^n-(i-1)p)}{(ip)(ip-p)(ip-2p)\cdots(ip-(i-1)p)} \times \frac{(p^n-1)(p^n-2)\cdots(p^n-(ip-1))}{(ip-1)(ip-2)\cdots 1}$$

$$\equiv \frac{p^{n-1} \cdot (p^{n-1}-1)(p^{n-1}-2)\cdots(p^{n-1}-(i-1))}{i \cdot (i-1)(i-2)\cdots 1} \times \frac{(-1)(-2)\cdots(-(ip-1))}{(ip-1)(ip-2)\cdots 1} = C_i^{p^{n-1}} \bmod p^n$$

，其中$i = 0, p, 2p, 3p, \cdots, p \times p$ 。

[引理 13] 設 p 為質數，則$\left(1+x\right)^{p^{nk}} \equiv \left(1 + x^{p^{nk-(n-1)}}\right)^{p^{n-1}} \bmod p^n$ ，其中$k \in N$ 。

證明：利用由數學歸納法，當$k=1$時，由引理知

$$\left(1+x\right)^{p^n} = 1 + C_1^{p^n} x + C_2^{p^n} x^2 + \cdots + C_{p^n}^{p^n} x^{p^n}$$

$$\equiv 1 + C_1^{p^{n-1}} x^p + C_2^{p^{n-1}} x^{2p} + \cdots + C_{p^{n-1}}^{p^{n-1}} x^{p^n} \equiv \left(1 + x^p\right)^{p^{n-1}} \bmod p^n \text{ 成立}$$

假設$k=t$時，則$\left(1+x\right)^{p^{tn}} \equiv \left(1 + x^{p^{tn-(n-1)}}\right)^{p^{n-1}} \bmod p^n$ 成立，則當$k = t+1$時，

$$\left(1+x\right)^{p^{n(t+1)}} = \left(1+x\right)^{p^{nt+n}} = \left(1+x\right)^{p^{tn} \cdot p^n} = \left(\left(1+x\right)^{p^{tn}}\right)^{p^n} \equiv \left(\left(1 + x^{p^{tn-(n-1)}}\right)^{p^{n-1}}\right)^{p^n}$$

$$=\left(\left(1+x^{p^{tn-(n-1)}}\right)^{p^n}\right)^{p^{n-1}}\equiv\left(\left(1+\left(x^{p^{tn-(n-1)}}\right)^{p}\right)^{p^{n-1}}\right)^{p^{n-1}}=\left(\left(1+\left(x^{p^{tn-(n-2)}}\right)\right)^{p^{n-1}}\right)^{p^{n-1}}$$

$$=\left(\left(1+\left(x^{p^{tn-(n-2)}}\right)\right)^{p^n}\right)^{p^{n-2}}\equiv\left(\left(1+\left(x^{p^{tn-(n-3)}}\right)\right)^{p^{n-1}}\right)^{p^{n-2}}\equiv\cdots\equiv\left(\left(1+\left(x^{p^{tn-(n-n)}}\right)\right)^{p^n}\right)^{p^{n-n}}$$

$$=\left(1+x^{p^{tn}}\right)^{p^n}\equiv\left(1+\left(x^{p^{tn}}\right)^{p}\right)^{p^{n-1}}=\left(1+x^{p^{tn+1}}\right)^{p^{n-1}}=\left(1+x^{p^{n(t+1)-(n-1)}}\right)^{p^{n-1}}$$

故由數學歸納法知 $(1+x)^{p^{nk}}\equiv\left(1+x^{p^{nk-(n-1)}}\right)^{p^{n-1}} \bmod p^n$，其中 $k\in N$。

考慮 $(1+x)^s$ 的展開式，令 $s=m_0p^0+m_1p^n+m_2p^{2n}+\cdots+m_kp^{kn}$，即 $s=(m_k,m_{k-1},\cdots,m_1,m_0)_{p^n}$

$$(1+x)^s=(1+x)^{m_0p^0+m_1p^n+m_2p^{2n}+\cdots+m_kp^{kn}}=(1+x)^{m_0p^0}\cdot(1+x)^{m_1p^n}\cdots(1+x)^{m_kp^{kn}}$$

$$=(1+x)^{m_0}\cdot\left[(1+x)^{p^n}\right]^{m_1}\cdot\left[(1+x)^{p^{2n}}\right]^{m_2}\cdots\left[(1+x)^{p^{kn}}\right]^{m_k}$$

$$\equiv(1+x)^{m_0}\cdot\left(1+x^{p}\right)^{p^{n-1}m_1}\cdot\left(1+x^{p^{n+1}}\right)^{p^{n-1}m_2}\cdots\left(1+x^{p^{kn-(n-1)}}\right)^{p^{n-1}m_k}$$

$$=\left(C_0^{m_0}+C_1^{m_0}x+C_2^{m_0}x^2+\cdots+C_{m_0}^{m_0}x^{m_0}\right)\cdot\left(C_0^{p^{n-1}m_1}+C_1^{p^{n-1}m_1}x^{p}+C_2^{p^{n-1}m_1}x^{2p}+\cdots+C_{p^{n-1}m_1}^{p^{n-1}m_1}x^{p^nm_1}\right)$$

$$\cdot\left(C_0^{p^{n-1}m_2}+C_1^{p^{n-1}m_2}x^{p^{n+1}}+C_2^{p^{n-1}m_2}x^{2p^{n+1}}+\cdots+C_{p^{n-1}m_2}^{p^{n-1}m_2}x^{p^{2n}m_2}\right)\cdots$$

$$\left(C_0^{p^{n-1}m_k}+C_1^{p^{n-1}m_k}x^{p^{kn-(n-1)}}+C_2^{p^{n-1}m_k}x^{2p^{kn-(n-1)}}+\cdots+C_{p^{n-1}m_k}^{p^{n-1}m_k}x^{p^{kn}m_k}\right)$$

$$=\left(C_0^{m_0}C_0^{p^{n-1}m_1}\cdots C_0^{p^{n-1}m_k}\right)+\left(C_1^{m_0}C_0^{p^{n-1}m_1}\cdots C_0^{p^{n-1}m_k}\right)x+\left(C_2^{m_0}C_0^{p^{n-1}m_1}\cdots C_0^{p^{n-1}m_k}\right)x^2+\cdots \bmod p^n$$

比較等式兩邊的係數可得

$$C_t^s\equiv\sum C_{n_k}^{p^{n-1}m_k}\times C_{n_{k-1}}^{p^{n-1}m_{k-1}}\times\cdots\times C_{n_1}^{p^{n-1}m_1}\times C_{n_0}^{m_0} \bmod p^n$$

其中 $s=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_{p^n}$ 、 $n_0\in\{0,1,\cdots,p^n-1\}$ 、 $n_i\in\{0,1,\cdots,p^{n-1}(p^n-1)\}$ 、 $i=1,2,3,\cdots,k$ 。

觀察 t 的表示法滿足 $t=n_0\cdot p^0+n_1\cdot p^1+n_2\cdot p^{n+1}+n_3\cdot p^{2n+1}+n_4\cdot p^{3n+1}+\cdots+n_k\cdot p^{(k-1)n+1}$，以 $t=(n_k,\cdots,n_1,n_0)_\Delta$ 表示。如此可便於計算 $C_t^s \bmod p^n$ 之值，例如：如何計算 C_{20}^{43} 被 16 除的餘數？因 $43=(2,11)_{16}$ 、 $20=(10,0)_\Delta=(9,2)_\Delta=(8,4)_\Delta=(7,6)_\Delta=(6,8)_\Delta=(5,10)_\Delta=(4,12)_\Delta$ $=(3,14)_\Delta$，故 $C_{20}^{43}\equiv C_{10}^{16}C_0^{11}+C_9^{16}C_2^{11}+C_8^{16}C_4^{11}+C_7^{16}C_6^{11}+C_6^{16}C_8^{11}+C_5^{16}C_{10}^{11}=11538956\equiv12 \bmod 16$。

又例如求 C_{20}^{43} 被 27 除的餘數，因 $43=(1,16)_{27}$ 、 $20=(6,2)_\Delta=(5,5)_\Delta=(4,8)_\Delta=(3,11)_\Delta=(2,14)_\Delta$ $=(1,17)_\Delta=(0,20)_\Delta$，故 $C_{20}^{43}\equiv C_6^9C_2^{16}+C_5^9C_5^{16}+C_4^9C_8^{16}+C_3^9C_{11}^{16}+C_2^9C_{14}^{16}=2553300\equiv18 \bmod 27$。

再例如：求 C_{5000}^{10000} 被 343 除的餘數。因 $10000=(29,53)_{343}$ 、 $5000=(2,\times,\times)_{\Delta}=(1,\times,\times)_{\Delta}$

$=(714,2)_{\Delta}=(713,7)_{\Delta}=\cdots=(707,51)_{\Delta}=\cdots=(666,338)_{\Delta}$ ，故 $C_{5000}^{10000}\equiv C_{714}^{49\times29}C_{2}^{53}+C_{713}^{49\times29}C_{9}^{53}$

$+C_{712}^{49\times29}C_{16}^{53}+C_{711}^{49\times29}C_{23}^{53}+C_{710}^{49\times29}C_{30}^{53}+C_{709}^{49\times29}C_{37}^{53}+C_{708}^{49\times29}C_{44}^{53}+C_{707}^{49\times29}C_{51}^{53}\equiv259\times6+49\times42+147\times126$

$+245\times210+245\times210+147\times126+49\times42+259\times6=147168\equiv21 \bmod 343$ 。

(四)Mod 6：

因 6 不是質數，故 Lucas's Theorem 無法使用，我們可利用 mod2、mod3 的結果與剩餘定理(即韓信點兵)的方法來計算 mod6 的餘數。例如： $C_{5}^{23}\equiv1 \bmod 2$ 、 $C_{5}^{23}\equiv1 \bmod 3$ ，則 $C_{5}^{23}\equiv1 \bmod 6$ ；同理 $C_{6}^{26}\equiv0 \bmod 2$ 、 $C_{6}^{26}\equiv1 \bmod 3$ ，則 $C_{6}^{26}\equiv4 \bmod 6$ 。mod2、mod3 與 mod6 的對照表如「表 16」；而巴斯卡正方形 mod6 的對照表如「表 17」。

mod2	0	0	0	1	1	1
mod3	0	1	2	0	1	2
mod6	0	4	2	3	1	5

表16：mod6的餘數由mod2與mod3複合而得

mod6	0	4	2	3	1	5
0	0	0	0	0	0	0
4	0	4	2	0	4	2
2	0	2	4	0	2	4
3	0	0	0	3	3	3
1	0	4	2	3	1	5
5	0	2	4	3	5	1

表17：巴斯卡正方形mod6的結果

對於任意組合數被合數所除，皆可使用此方法來求其餘數。

陸、討論

一、大於 7 的質數，計數問題將會非常繁複，因此沒有討論。

二、「巴斯卡正方形」中的相關組合等式可能還有一些明珠尚未發現。

三、有幾個特別的圖形例如「圖 12」，尚未找到相似的圖形，難以尋找其規律性。

四、任意組合數除以質數的次方可計算餘數，但整個巴斯卡正方形的餘數計數仍有困難。

五、利用[定理 2]、[定理 4]的結果，我們可以規避 EXCEL 計算上限的問題，設計了更大尺寸的「教大中庭系列」與「棋盤格系列」，將相關圖形應用於文創商品。

柒、結論

一、巴斯卡正方形同餘的計數：

[定理 2：教大中庭系列] 設 p 為質數，n、l 為自然數，若 $p\times l=n+2$ 、 $l\le p$ ，

$S_n(t\times s,p)=4$ ，其中 t 、 $s=a\cdot C_j^{l-1}$ 、 $a=1,3,5,\cdots,p-2$ 、 $j=0,1,\cdots,l-1$ 。

[定理 4：棋盤格系列] 設 p 為質數，n 為自然數，滿足 $n+1=p\times l$ 、 $p>l$ 、 l 為奇數，

令 $a=p^2+1$ 、 $b=p^2-1$ ，則 $S_n\left((C_i^{l-1})^2,p\right)=2a$ 、 $S_n\left(-(C_i^{l-1})^2,p\right)=2b$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left((C_i^{l-1})^2,p\right)=\frac{a}{2}$ 、 $S_n\left(-(C_i^{l-1})^2,p\right)=\frac{b}{2}$ ，其中 $i=\frac{l-1}{2}$ ；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=4a$ 、 $S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=4b$ ，其中 $i>j$ 、 $i,j=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ ；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=2a$ 、 $S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=2b$ ，其中 $i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$ 、 $j=\frac{l-1}{2}$ 。

[定理 5：mod2] 設 n 的二進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$ ，其中 $m_i\in\{0,1\}$ ， $i=0,1,\cdots,k$ 。

令 $a=m_k+\cdots+m_1+m_0$ ，則 $S_n(1,2)=4^a$ 、 $S_n(0,2)=(n+1)^2-4^a$ 。

[定理 7：mod3] 設 n 的三進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_3$ ，其中 $m_i\in\{0,1,2\}$ ， $i=0,1,\cdots,k$ 。

令 a 為 $m_i=2$ 的次數、b 為 $m_i=1$ 的次數，則 $S_n(2,3)=2\times4^{b-1}\times(9^a-1)$ 、

$S_n(1,3)=2\times4^{b-1}\times(9^a+1)$ 、 $S_n(0,3)=(n+1)^2-9^a\times4^b$ 。

[定理 9：mod5] 設 n 的五進位表示法為 $n=(m_k,m_{k-1},...,m_0)_5$ ，其中

$m_i\in\{0,1,2,3,4\},i=0,1,...,k$ 。令 a、b、c、d 分別為 $m_i=4$、3、2、1 的次數，

若 $b=0$ ，則
$$\begin{cases}S_n(1,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)+(2+i)^{2c}+(2-i)^{2c}\right)\\S_n(2,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)-i(2+i)^{2c}+i(2-i)^{2c}\right)\\S_n(3,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)+i(2+i)^{2c}-i(2-i)^{2c}\right)\\S_n(4,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)-(2+i)^{2c}-(2-i)^{2c}\right)\end{cases}；$$

若 $b\geq1$ ，則
$$\begin{cases}S_n(1,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)\\S_n(2,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}-(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i\\S_n(3,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left(-(1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i\\S_n(4,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}-2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)\end{cases}。$$

[定理 10：mod4] 設 n 的二進位表示法為 $n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$ ，其中 $m_i\in\{0,1\}$ ， $i=0,1,\cdots,k$ 。

令 $B(n)=m_k+\cdots+m_1+m_0$ 、 $C(n)$ 為 m_i 的排列出現 10 的次數、 $D(n)$ 為 m_i 的排列出現 11 的次數。若 $D(n)=0$ ，則 $S_n(1,4)=4^{B(n)}$ 、 $S_n(2,4)=2C(n)\times4^{B(n)}$ 、 $S_n(3,4)=0$ ；

若 $D(n)>0$ ， $S_n(1,4)=4^{B(n)-\frac{1}{2}}$ 、 $S_n(2,4)=C(n)\times4^{B(n)}$ 、 $S_n(3,4)=4^{B(n)-\frac{1}{2}}$ 。

二、計算任意組合數被質數的次方所除的餘數之方法：

$$C_t^s \equiv \sum C_{n_k}^{p^{n-1}m_k} \times C_{n_{k-1}}^{p^{n-1}m_{k-1}} \times \cdots \times C_{n_1}^{p^{n-1}m_1} \times C_{n_0}^{m_0} \bmod p^n$$

其中 $s=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_{p^n}$ 、 $n_0 \in \{0,1,\cdots,p^n-1\}$ 、 $n_i \in \{0,1,\cdots,p^{n-1}(p^n-1)\}$ 、 $i=1,2,3,\cdots,k$ 。且滿足 $t=n_0\cdot p^0+n_1\cdot p^1+n_2\cdot p^{n+1}+n_3\cdot p^{2n+1}+n_4\cdot p^{3n+1}+\cdots+n_k\cdot p^{(k-1)n+1}$ ，以 $t=(n_k,\cdots,n_1,n_0)_\Delta$ 表示。

捌、參考資料及其他

[1]大學入學考試中心 106 學年度學科能力測驗試題數學考科。

http://www.ceec.edu.tw/AbilityExam/AbilityExamPaper/106SAT_Paper/106SAT_PaperIndex.htm

[2]WOLFRAM 計算大數據網站。https://www.wolframalpha.com/

[3]許介彥(1994)，巴斯卡三角形的幾個性質，**科學教育月刊第 275 期**。

[4]陳敏晧，巴斯卡三角形的應用Ⅱ(The Application of Pascal Triangle Ⅱ)。

http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=39091

[5]Geometry of Binomial Coefficients。https://www.stephenwolfram.com/.../geometry-binomial-coefficients.pdf

[6]Lucas's theorem。https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas%27s_theorem

[7]K. S. Davis and W. A. Webb, ***Pascal's triangle modulo 4***, *Fibonacci Quart.*, 29(1991),79－83.

[8]A. Granville, Arithmetic properties of binomial coefficients. I. ***Binomial coefficients modulo prime powers***, in Organic mathematics (Burnaby, BC, 1995), 253－276, CMS Conf. Proc., 20, Amer. Math.

【評語】050405

本作品的研究內容是屬於隨機漫步(Random Walk)的領域，經過幾步回到原出發點的機率已經有通式解；作者們所做的努力值得佳許。另外，就應用於圖案表達方面的呈現也很不錯。整體而言，在數學的貢獻度較少；後續的部分，建議能多了解圖的結構及隨機漫步的概念。

作品海報

摘要

本文將一道組合問題可能的方法數製成正方形表格，以「巴斯卡正方形」命名。將此正方形內的組合數同餘若干自然數後，觀察及歸納其結果。同餘後不同的餘數配予不同顏色，產生一些特別的圖形，例如：「教大中庭系列」及「棋盤格系列」。我們利用 Lucas's Theorem 及$(1+x)^n$展開的係數搭配乘法原理來做計數的工具，研究了這些圖形的規律性以及對各個餘數的個數進行計數，並且研發了一個算式用於計算任意組合數被質數的次方同餘後的結果。

壹、研究動機

「一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為？」因每步皆有上、下、左、右4種跳法，所以有4^4種可能的情形，跳回原點的情形有：

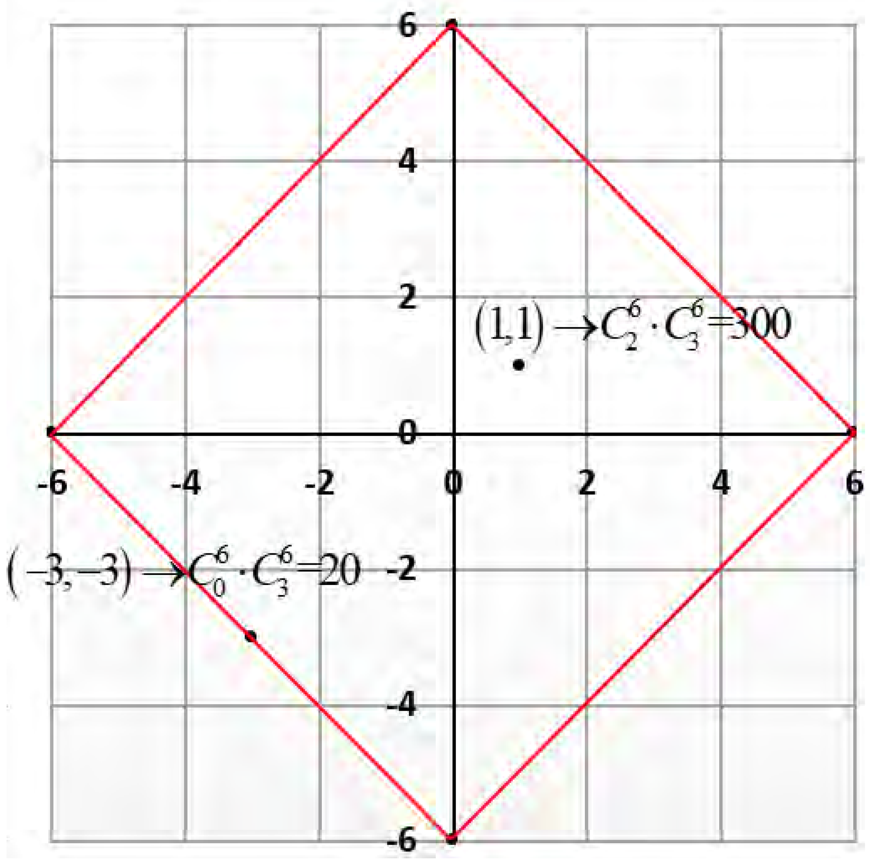
$$\text{左左右右：有}\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6\text{種；上上下下：有}\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6\text{種；上下左右：有}4!=24\text{種，}$$

$$\text{故跳了四步後恰回到原點的機率為}\frac{6+6+24}{4^4}=\frac{9}{64}\text{。}$$

這是我們旅程的開始！我們進一步探討，得到跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點的機率為：

$$\frac{1}{4^n}\times C_a^n\times C_b^n\text{，其中}a=\frac{n-|x+y|}{2}\text{、}b=\frac{n-|x-y|}{2}$$

將跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點的方法數製作成一個表格，並將此表格旋轉45°後以「n 階巴斯卡正方形」來命名。我們以此「巴斯卡正方形」展開一系列的研究。過程中有趣的現象讓我們推論出一些意想不到的結果，這是一趟我們與巴斯卡的奇幻之旅！

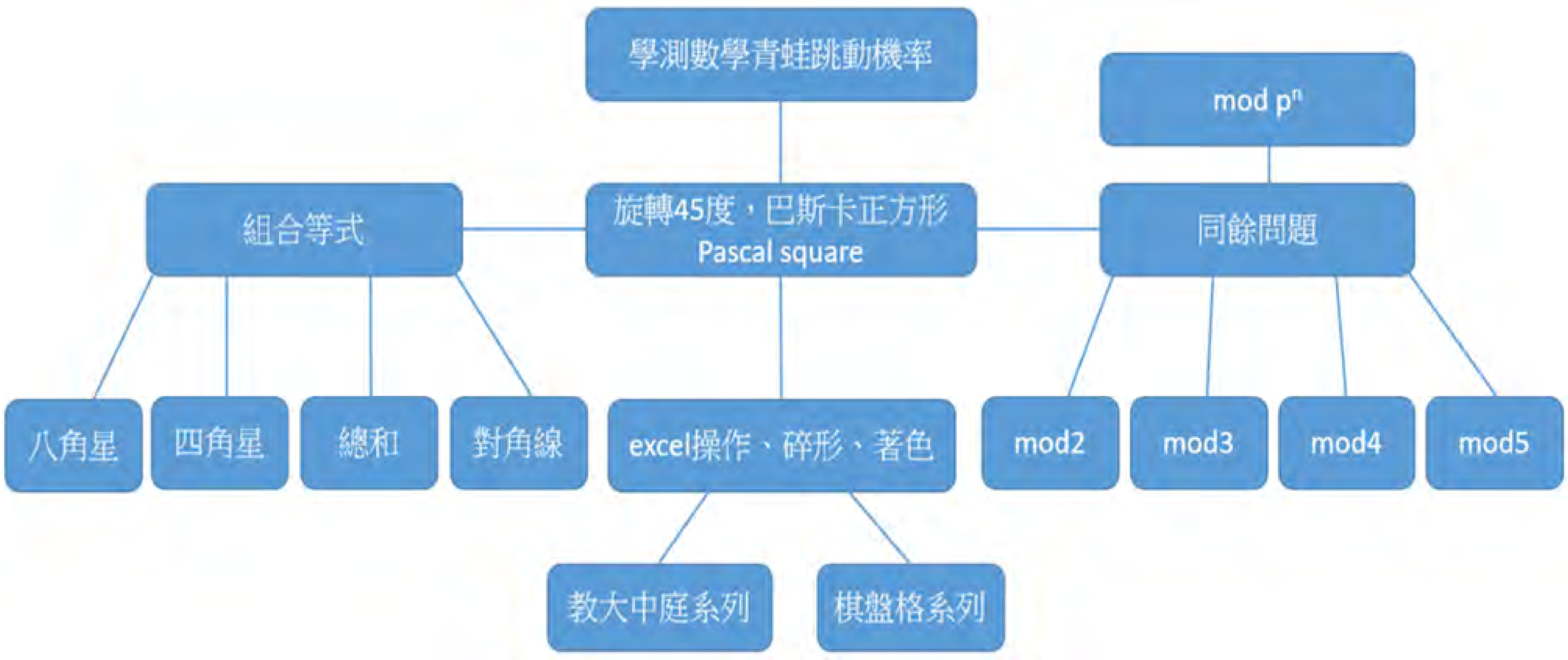


圖：跳動 6 次後的情形

$C_0^n\cdot C_0^n$	$\cdots$	$C_0^n\cdot C_j^n$	$\cdots$	$C_0^n\cdot C_n^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_i^n\cdot C_0^n$	$\cdots$	$C_i^n\cdot C_j^n$	$\cdots$	$C_i^n\cdot C_n^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$C_n^n\cdot C_0^n$	$\cdots$	$C_n^n\cdot C_j^n$	$\cdots$	$C_n^n\cdot C_n^n$

表：「n 階巴斯卡正方形」(nth Pascal square)

貳、研究目的



圖：研究方向

伍、研究結果

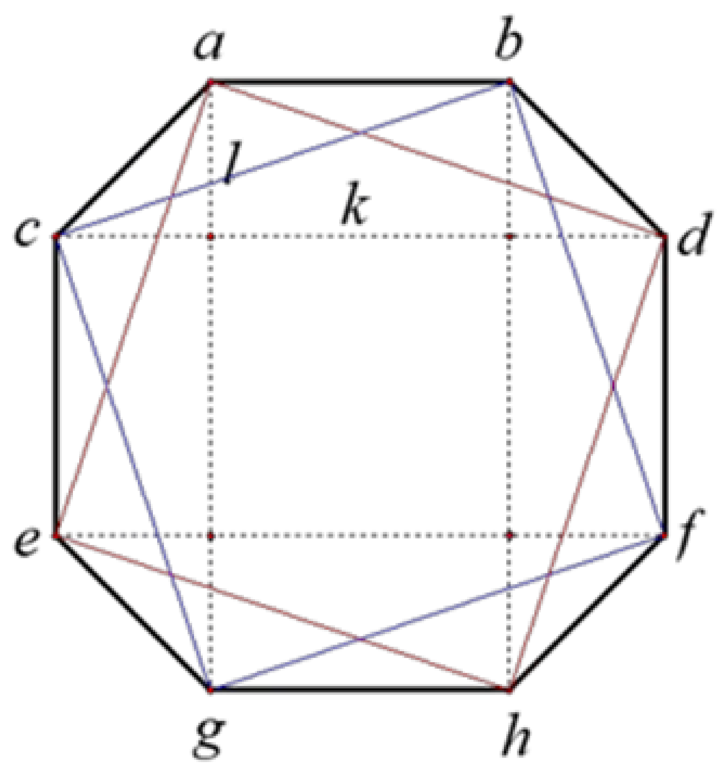
一、巴斯卡正方形中的組合等式：

1.n 階巴斯卡正方形共有$(n+1)^2$個數字，總和為

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}C_j^n\cdot C_i^n\right)=C_0^n\cdot(C_0^n+\cdots+C_n^n)+C_1^n\cdot(C_0^n+\cdots+C_n^n)+\cdots+C_n^n\cdot(C_0^n+\cdots+C_n^n)$$

$$=(C_0^n+\cdots+C_n^n)\cdot(C_0^n+\cdots+C_n^n)=2^n\cdot 2^n=4^n$$

2.「八角星」：如圖所示，在 n 階巴斯卡正方形中，任取一個八角形，此八角形的八個角落的數字恆有$a\cdot e\cdot h\cdot d=b\cdot c\cdot g\cdot f$ 。



二、巴斯卡正方形與幾何圖案：

1.「教大中庭系列」的相關問題：

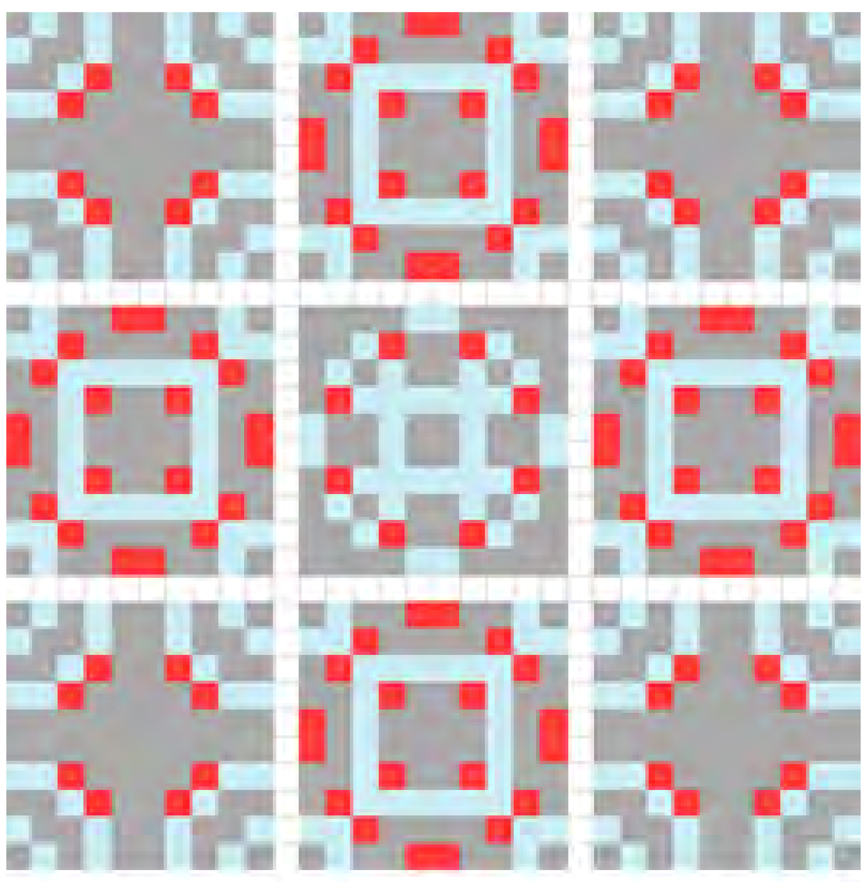


圖17：「教大中庭系列31M11」

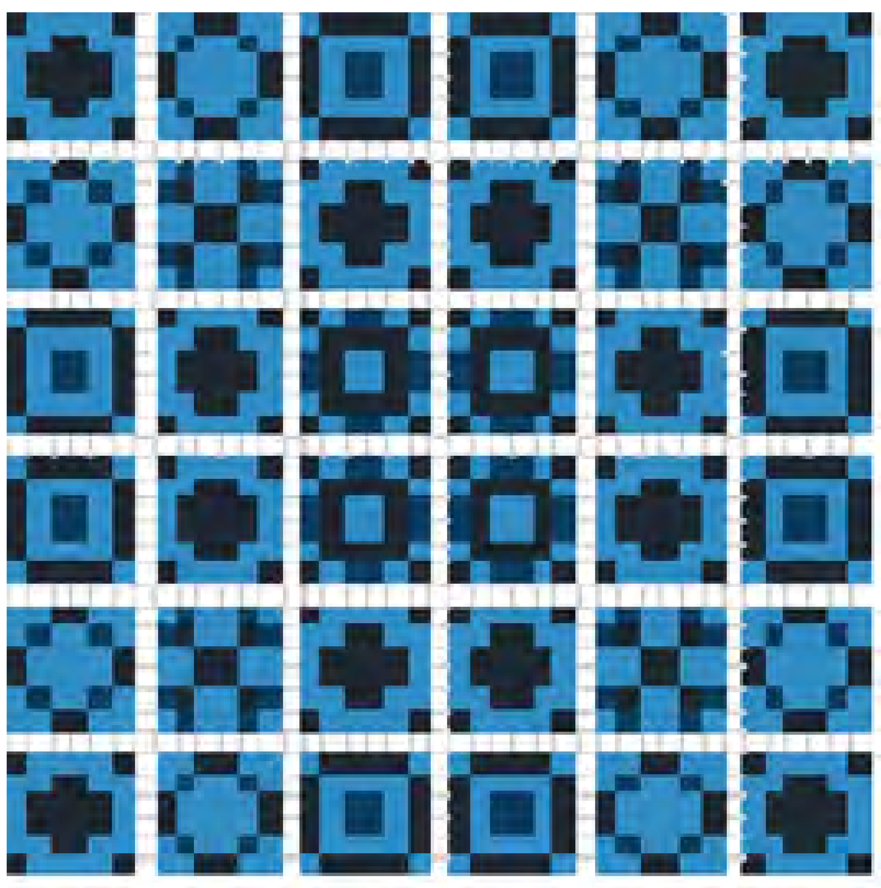


圖18：「教大中庭系列40M7」

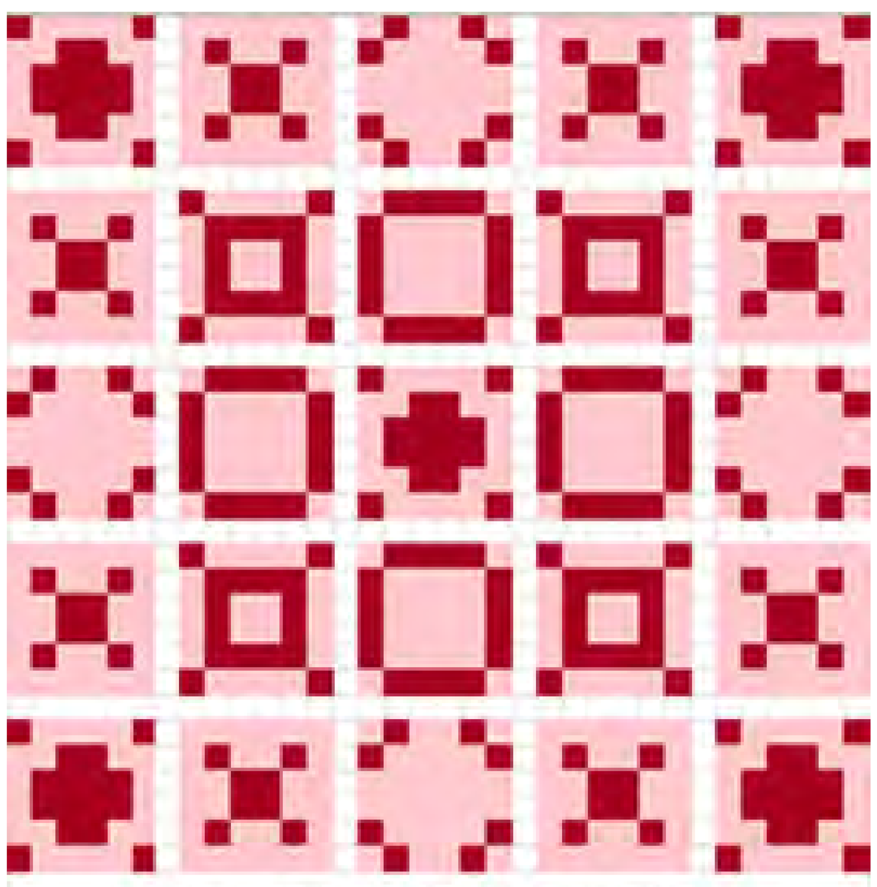


圖19：「教大中庭系列33M7」

我們定名 37M13 指的是第 37 個巴斯卡正方形被 13 除的餘數所繪製的圖形，觀察幾個「教大中庭系列」發生的位置，它們的第一列滿足：$n+1=(p-1)\times l+l-1 \Rightarrow p\times l=n+2$，且其中第一個區塊的數值為$1,-2,3,-4,\cdots,-(p-1)$。將此正方形內的餘數透過適當的調整便於計數，如「表 6」、如「表 7」所示。

1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	2	0	4	2	2	4	0	2	1	1	2
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
2	1	1	2	0	4	2	2	4	0	2	1	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
3	4	4	3	0	1	3	3	1	0	3	4	4	3
1	3	3	1	0	2	1	1	2	0	1	3	3	1

表6：「教大中庭系列13M5」調整前

1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	0	0
2	2	2	2	2	2	4	4	1	1	1	1	0	0
2	2	2	2	2	2	4	4	1	1	1	1	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
3	3	3	3	3	3	1	1	4	4	4	4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	1(6)	2(2)	3(4)
1(6)	1(36)	2(12)	3(24)
2(2)	2(12)	4(4)	1(8)
3(4)	3(24)	1(8)	4(16)

表7：「教大中庭系列13M5」調整後

關於「教大中庭系列」餘數的個數，我們有如下的結論。

[定理] 設 p 為質數，n、l 為自然數，若 $p\times l=n+2$、$l\le p$，$S_n(t\times s,p)=4$，其中t、$s=a\cdot C_j^{l-1}$、$a=1,3,5,\cdots,p-2$、$j=0,1,\cdots,l-1$。

2.「棋盤格系列」的相關問題：

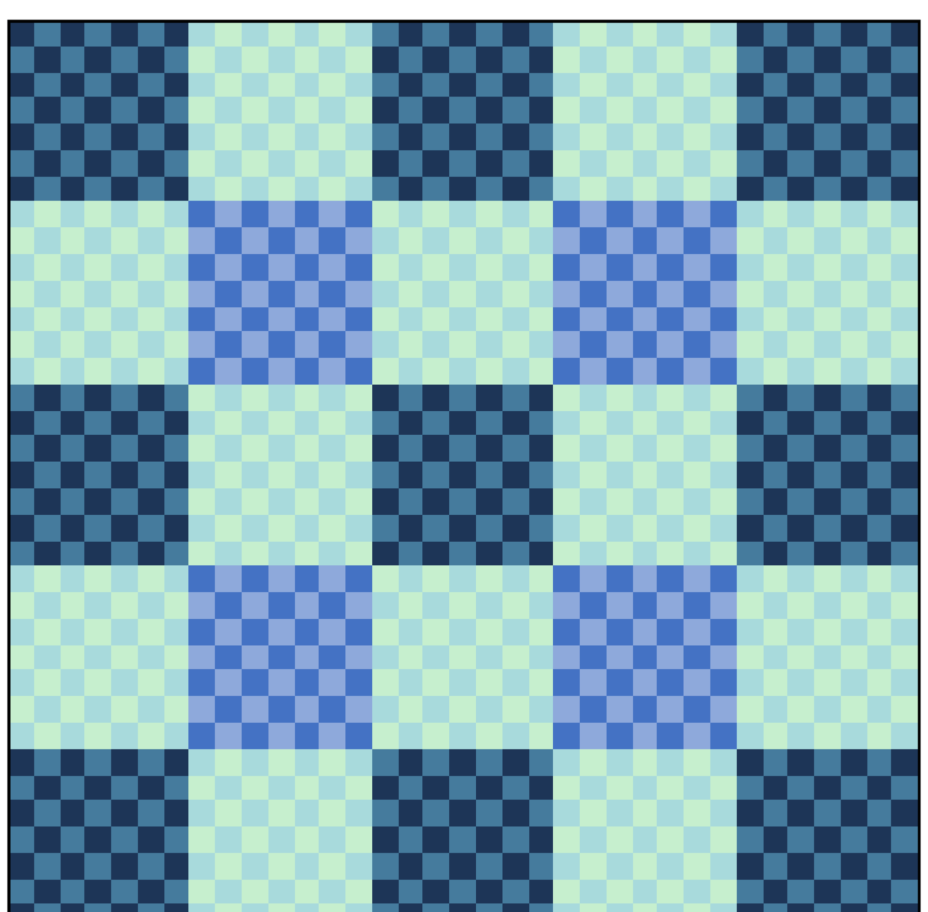


圖22：「棋盤格系列34M7」

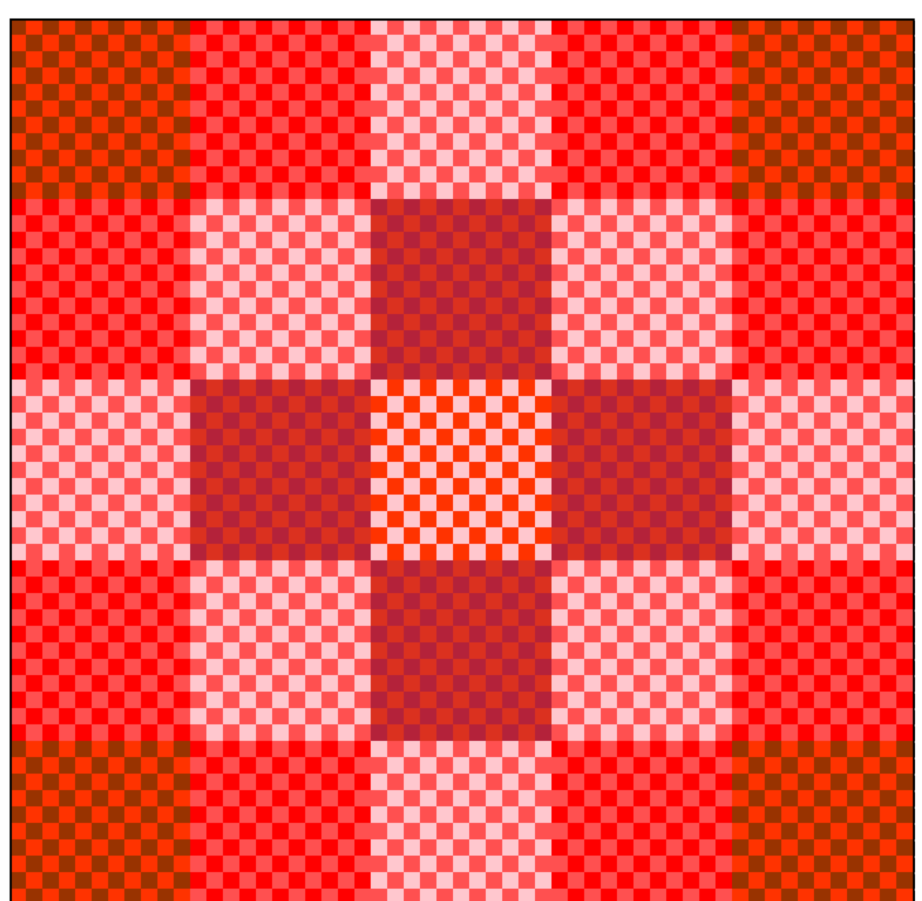


圖23：「棋盤格系列54M11」

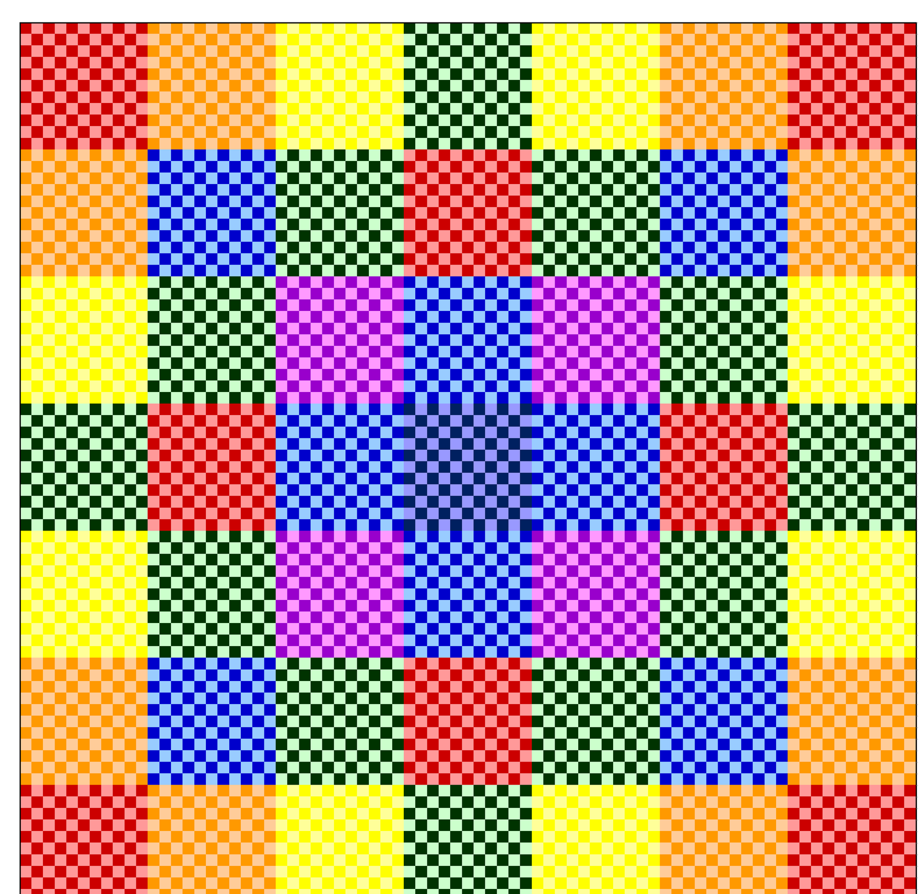


圖24：「棋盤格系列76M11」

「棋盤格系列」的圖案為對稱與交錯，整個方塊皆可著色，即沒有一個數字同餘後為 0。它們的第一列滿足：$p\times l=n+1$，且其中第一個區塊的數值為$1,-1,1,-1,\cdots$。關於「棋盤格系列」餘數的個數，我們有如下的結論。

[定理] 設 p 為質數，n 為自然數，滿足$n+1=p\times l$、$p>l$、l為奇數，令$a=p^2+1$、$b=p^2-1$，則

$S_n\left((C_i^{l-1})^2,p\right)=2a$、$S_n\left(-(C_i^{l-1})^2,p\right)=2b$，其中$i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$；$S_n\left((C_i^{l-1})^2,p\right)=\frac{a}{2}$、$S_n\left(-(C_i^{l-1})^2,p\right)=\frac{b}{2}$，其中$i=\frac{l-1}{2}$；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=4a$、$S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=4b$，其中$i>j$、$i,j=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$；

$S_n\left(C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=2a$、$S_n\left(-C_i^{l-1}\times C_j^{l-1},p\right)=2b$，其中$i=0,1,\cdots,\frac{l-3}{2}$、$j=\frac{l-1}{2}$。

三、巴斯卡正方形除以 2~5 的自然數所得的餘數及其個數：

1. Mod 2：

巴斯卡正方形的每個數型如$C_k^n\times C_l^n$，設$C_k^n\equiv a$、$C_l^n\equiv b \bmod p$，且$C_k^n\times C_l^n\equiv a\times b \bmod p$，可得

$\begin{cases} C_k^n\times C_l^n\equiv 1 \mod 2 & 若C_k^n\equiv C_l^n\equiv 1 \mod 2 \\ C_k^n\times C_l^n\equiv 0 \mod 2 & 其他 \end{cases}$，以此可求得「巴斯卡正方形」被 2 除餘 0 或 1 的總數。如表 10 所示，23 階巴斯卡正方形 mod 2 餘 1 有 256 個數、餘 0 有 312 個數。即$N_{23}(1,2)=16$、$N_{23}(0,2)=8$；$S_{23}(1,2)=256$、$S_{23}(0,2)=312$。

[定理] 設 n 的二進位表示法為$n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$，其中$m_i\in\{0,1\}$，$i=0,1,\cdots,k$。令$a=m_k+\cdots+m_1+m_0$，則$S_n(1,2)=4^a$、$S_n(0,2)=(n+1)^2-4^a$。

2. Mod 3：

因$\begin{cases} C_k^n\times C_l^n\equiv 1 \mod 3 & 若C_k^n\equiv C_l^n\equiv 1 \mod 3或C_k^n\equiv C_l^n\equiv 2 \mod 3 \\ C_k^n\times C_l^n\equiv 2 \mod 3 & 若C_k^n\equiv 2,C_l^n\equiv 1 \mod 3或C_k^n\equiv 1,C_l^n\equiv 2 \mod 3 \\ C_k^n\times C_l^n\equiv 0 \mod 3 & 其他 \end{cases}$，利用這個性質，可求得「巴斯卡正方形」被 3 除餘 0、1 或 2 的總數。如表 12 所示，23 階巴斯卡正方形 mod 3 的餘 2 有 160 個數、餘 1 有 164 個數、餘 0 有252個數，即$N_{23}(2,3)=8$、$N_{23}(1,3)=10$；$S_{23}(2,3)=160$、$S_{23}(1,3)=164$、$S_{23}(0,3)=252$。

[定理] 設 n 的三進位表示法為$n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_3$，其中$m_i\in\{0,1,2\}$，$i=0,1,\cdots,k$。令 a 為$m_i=2$的次數、b 為$m_i=1$的次數，則$S_n(2,3)=2\times 4^{b-1}\times(9^a-1)$、$S_n(1,3)=2\times 4^{b-1}\times(9^a+1)$、$S_n(0,3)=(n+1)^2-9^a\times 4^b$。

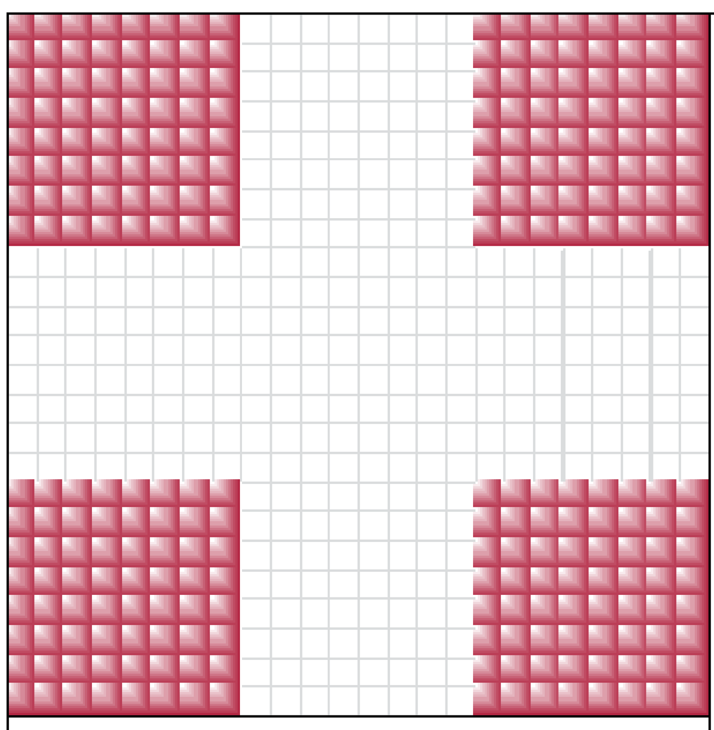


圖26：「23階巴斯卡正方形mod 2」

	1(16)	0(8)
1(16)	1(256)	0(144)
0(8)	0(144)	0(64)

表10：「23階巴斯卡正方形mod 2餘數的個數」

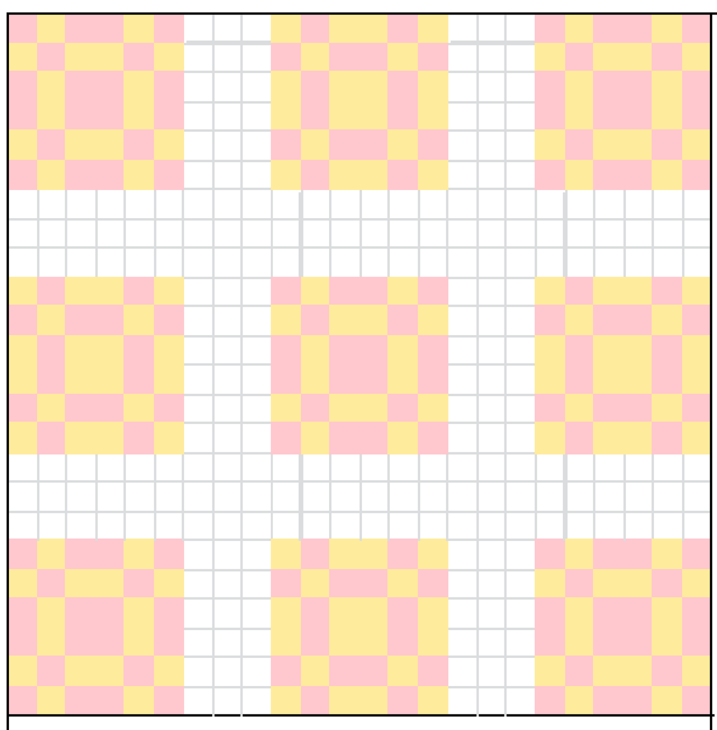


圖27：「23階巴斯卡正方形mod 3」

	1(10)	2(8)	0(6)
1(10)	1(100)	2(80)	0(60)
2(8)	2(80)	0(64)	0(48)
0(6)	0(60)	0(48)	0(36)

表12：「23階巴斯卡正方形mod 3餘數的個數」

3. Mod 5：

計算C_k^n被 5 除的餘數之個數較為繁複，設$n=(m_k,m_{k-1},...,m_0)_5$，其中$m_i\in\{0,1,2,3,4\},i=0,1,...,k$。令 a、b、c、d 分別為$m_i=4$、3、2、1 的次數，由 Lucas's Theorem 知：

$$C_k^n\equiv(C_x^4)^a\times(C_y^3)^b\times(C_z^2)^c\times(C_w^1)^d \mod 5$$

其中C_x^4中的 x 可能為 0~4，皆以C_x^4來表示，餘者類推。因$C_0^4\equiv C_2^4\equiv C_4^4\equiv C_0^3\equiv C_3^3\equiv C_0^2\equiv C_2^2\equiv C_0^1\equiv C_1^1\equiv1$、$C_1^2\equiv2$、$C_1^3\equiv C_2^3\equiv3$、$C_1^4\equiv C_3^4\equiv4 \mod 5$，故$C_k^n\equiv4^\alpha\times3^\beta\times2^\gamma\times1^\delta \mod 5$，可依$\alpha,\beta,\gamma,\delta$之值分別計算被 5 除的餘數再相乘。

[定理] 設 n 的五進位表示法為$n=(m_k,m_{k-1},...,m_0)_5$，其中$m_i\in\{0,1,2,3,4\},i=0,1,...,k$。令 a、b、c、d 分別為$m_i=4$、3、2、1 的次數，若$b=0$，則$\begin{cases}S_n(1,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)+(2+i)^{2c}+(2-i)^{2c}\right)\\S_n(2,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)-i(2+i)^{2c}+i(2-i)^{2c}\right)\\S_n(3,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}-1)+i(2+i)^{2c}-i(2-i)^{2c}\right)\\S_n(4,5)=2^{2d-2}\cdot\left(5^{2a}\cdot(3^{2c}+1)-(2+i)^{2c}-(2-i)^{2c}\right)\end{cases}$；

若$b\geq1$，則$\begin{cases}S_n(1,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)\\S_n(2,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}-(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i\\S_n(3,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}+2^{2d+2b-2}\cdot\left(-(1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)i\\S_n(4,5)=2^{2d+4b-2}\cdot3^{2c}\cdot5^{2a}-2^{2d+2b-2}\cdot\left((1+i)^{2b}(2-i)^{2c}+(1-i)^{2b}(2+i)^{2c}\right)\end{cases}$。

如表「13：23M5」所示，因$23=(4,3)_5\Rightarrow a=1,b=1,c=d=0$，故$S_{23}(1,5)=2^2\cdot5^2+\left((1+i)^2+(1-i)^2\right)=100$、$S_n(2,5)=2^2\cdot5^2+\left((1+i)^2-(1-i)^2\right)i=96$、$S_{23}(3,5)=2^2\cdot5^2+\left(-(1+i)^2+(1-i)^2\right)i=104$、$S_{23}(4,5)=2^2\cdot5^2-\left((1+i)^2+(1-i)^2\right)=100$。

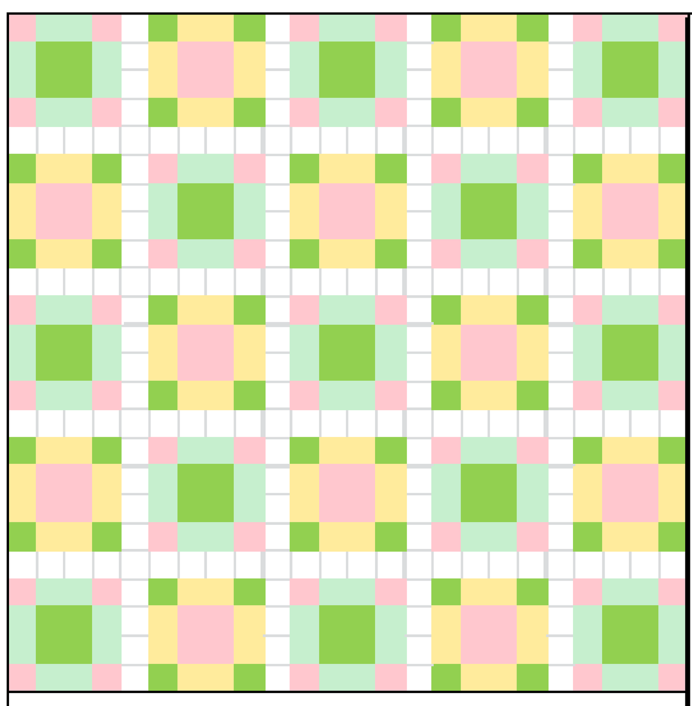


圖28：「23階巴斯卡正方形mod 5」

	1(6)	2(4)	3(6)	4(4)	0(4)
1(6)	1(36)	2(24)	3(36)	4(24)	0(24)
2(4)	2(24)	4(16)	1(24)	3(16)	0(16)
3(6)	3(36)	1(24)	4(36)	2(24)	0(24)
4(4)	4(24)	3(16)	2(24)	1(16)	0(16)
0(4)	0(24)	0(16)	0(24)	0(16)	0(16)

表13：「23階巴斯卡正方形mod 5餘數的個數」

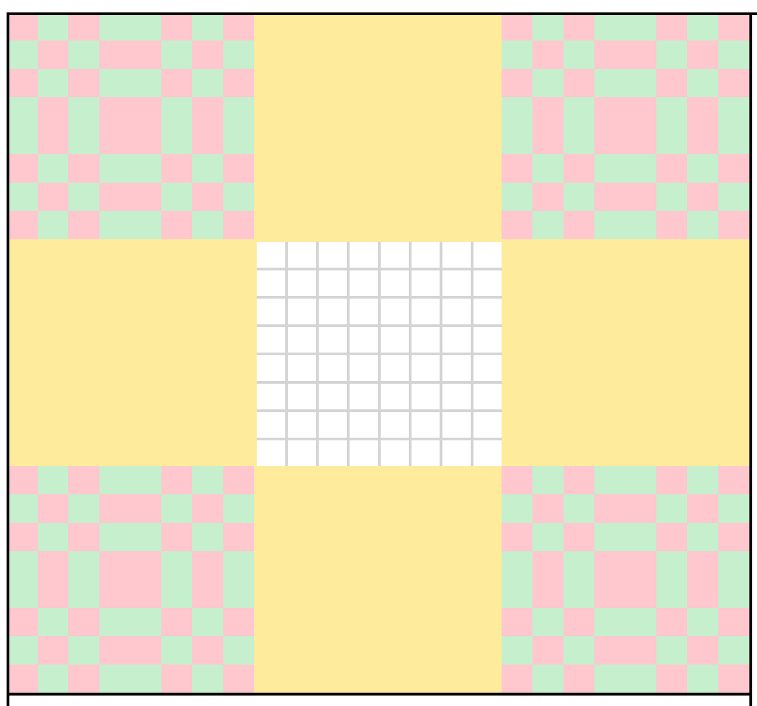


圖29：「23階巴斯卡正方形mod 4」

	1(8)	2(8)	3(8)
1(8)	1(64)	2(64)	3(64)
2(8)	2(64)	0(64)	2(64)
3(8)	3(64)	2(64)	1(64)

表15：「23階巴斯卡正方形mod 4餘數的個數」

4. Mod 4：

因為$\begin{cases}C_k^n\times C_l^n\equiv1 \mod 4 & \text{若}C_k^n\equiv C_l^n\equiv1 \mod 4\text{或}C_k^n\equiv C_l^n\equiv3 \mod 4\\C_k^n\times C_l^n\equiv2 \mod 4 & \text{若}C_k^n\equiv2,C_l^n\equiv1 \mod 4\text{或}C_k^n\equiv3,C_l^n\equiv2 \mod 4\\C_k^n\times C_l^n\equiv0 \mod 4 & C_k^n\equiv C_l^n\equiv2 \mod 4\end{cases}$，利用這個性質可求得「巴斯卡正方形」被 4 除餘 0、1、2 或 3 的個數。例如表 15 所示，23 階巴斯卡正方形 mod 4 的情形為$S_{23}(3,4)=128$、$S_{23}(2,4)=256$、$S_{23}(1,4)=128$、$S_{23}(0,4)=64$。

[定理] 設 n 的二進位表示法為$n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_2$，其中$m_i\in\{0,1\}$，$i=0,1,\cdots,k$。令$B(n)=m_k+\cdots+m_1+m_0$、$C(n)$為m_i的排列出現 10 的次數、$D(n)$為m_i的排列出現 11 的次數。若$D(n)=0$，則$\begin{cases}S_n(1,4)=4^{B(n)}\\S_n(2,4)=2C(n)\times4^{B(n)}\\S_n(3,4)=0\end{cases}$；若$D(n)>0$，$\begin{cases}S_n(1,4)=4^{B(n)-\frac{1}{2}}\\S_n(2,4)=C(n)\times4^{B(n)}\\S_n(3,4)=4^{B(n)-\frac{1}{2}}\end{cases}$。

四、任意組合數被質數的次方所除之餘數

1.另一方面，我們從二項式的展開著手，對$C_t^n \mod 4$的結果亦有一些收穫。由歸納法知$(1+x)^{4^k}\equiv\left(1+x^{\frac{4^k}{2}}\right)^2 \mod 4$。

考慮$(1+x)^n$的展開式$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}C_i^nx^i=(1+x)^{m_0 4^0+m_1 4^1+m_2 4^2+\cdots+m_k 4^k}=(1+x)^{m_0 4^0}\cdot(1+x)^{m_1 4^1}\cdots(1+x)^{m_k 4^k}=\left(C_0^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}\right)+\left(C_1^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}\right)x$ $+\left(C_2^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}+C_0^{m_0}C_1^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^2+\left(C_1^{m_0}C_1^{2m_1}C_0^{2m_2}\cdots C_0^{2m_k}+C_3^{m_0}C_0^{2m_1}\cdots C_0^{2m_k}\right)x^3+\cdots$，比較等式兩邊的係數可得

$C_t^n\equiv\sum C_{n_k}^{2m_k}\times C_{n_{k-1}}^{2m_{k-1}}\times\cdots\times C_{n_1}^{2m_1}\times C_{n_0}^{m_0} \mod 4$，其中$n=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_4$、$n_0\in\{0,1,2,3\}$、$n_i\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$、$i=1,2,3,\cdots,k$。

其中 t 滿足$t=n_0\cdot2^0+n_1\cdot2^1+n_2\cdot2^3+n_3\cdot2^5+n_4\cdot2^7+\cdots+n_k\cdot2^{2k-1}$，以$t=(n_k,\cdots,n_1,n_0)_\Delta$表示。此式可便於計算$C_t^n \mod 4$之值，例如：求$C_{37}^{59}\mod 4$ 之值，因$59=(3,2,3)_4$、$37=(4,2,1)_\Delta=(4,1,3)_\Delta=(3,6,1)_\Delta=(3,5,3)_\Delta$，

故$C_{37}^{59}\equiv C_4^6C_2^4C_1^3+C_4^6C_1^4C_3^3+C_3^6C_6^4C_1^3+C_3^6C_5^4C_3^3=270+60\equiv2 \mod 4$。

2.計算任意組合數被質數的次方所除的餘數之方法：

$C_t^s\equiv\sum C_{n_k}^{p^{n-1}m_k}\times C_{n_{k-1}}^{p^{n-1}m_{k-1}}\times\cdots\times C_{n_1}^{p^{n-1}m_1}\times C_{n_0}^{m_0} \mod p^n$，其中$s=(m_k,\cdots,m_1,m_0)_{p^n}$、$n_0\in\{0,1,\cdots,p^n-1\}$、$n_i\in\{0,1,\cdots,p^n(p^n-1)\}$、$i=1,2,3,\cdots,k$。

其中 t 滿足$t=n_0\cdot p^0+n_1\cdot p^1+n_2\cdot p^{n+1}+n_3\cdot p^{2n+1}+n_4\cdot p^{3n+1}+\cdots+n_k\cdot p^{(k-1)n+1}$，以$t=(n_k,\cdots,n_1,n_0)_\Delta$表示。例如：求$C_{5000}^{10000}\mod 343$ 之值，因$10000=(29,53)_{343}$、$5000=(2,\times,\times)_\Delta=(1,\times,\times)_\Delta=(714,2)_\Delta=(713,7)_\Delta=\cdots=(707,51)_\Delta=\cdots=(666,338)_\Delta$，故

$C_{5000}^{10000}\equiv C_{714}^{49\times29}C_2^{53}+C_{713}^{49\times29}C_9^{53}+C_{712}^{49\times29}C_{16}^{53}+C_{711}^{49\times29}C_{23}^{53}+C_{710}^{49\times29}C_{30}^{53}+C_{709}^{49\times29}C_{37}^{53}+C_{708}^{49\times29}C_{44}^{53}+C_{707}^{49\times29}C_{51}^{53}$

$\equiv259\times6+49\times42+147\times126+245\times210+245\times210+147\times126+49\times42+259\times6=147168\equiv21 \mod 343$。