中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050404

正 n 邊行內接正四邊形之探討

學校名稱：臺中市立文華高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 傅予潔	陳惠香

關鍵詞：正 n 邊形、內接正四邊形、尺規作圖

摘要

本篇將探討在正 n 邊形中的內接正四邊形，即此正四邊形的四個頂點分別位於正 n 邊形的四個不同邊上。我們將正 n 邊形依邊長數分為 n=4k、4k+1、4k+2、4k+3，透過電腦繪圖、尺規作圖法及公式驗證，得到以下結論:正 n(n=4k)邊形有無限多個共中心內接正四邊形，而其餘正 n 邊形中，皆只有一個(本篇中圖形經過旋轉對稱後，大小、位置相同者為全等，則視為 "同一個")內接正四邊形，且在 n=4k+2 時，內接正四邊形必和正 n 邊形共中心；n=4k+1 或 4k+3 時，內接正四邊形必不和正 n 邊形共中心，但內接正四邊形之中心必在正 n 邊形的一對稱軸上。最後我們提供一個能在所有的正 n 邊形畫出內接正四邊形的尺規作圖法。

壹、 研究動機

在閱讀第 54 屆全國中小學科學展覽歷屆作品時，看到在一個正 n 邊形的三個不同邊上可以內接無限多個正三角形，因此好奇：是否在正 n 邊形內也都能接出正四邊形？是否也有無限多個內接正四邊形？因此開始進行研究和探討。

貳、 研究目的

一、 首先利用電腦繪圖觀察是否所有的正 n 邊形都存在內接正四邊形，再嘗試以數學式證明之。

二、 內接正四邊形有無限多個嗎？

三、 內接正四邊形是否和正 n 邊形有關聯性。

四、 找一個尺規作圖法畫出所有正 n 邊形的內接正四邊形。

參、 研究設備器材

紙、筆、量角器、電腦、Geogebra。

肆、 研究方法步驟 (一)觀察假設與尺規作圖

一、 定義

(一)以下所有探討之正 n 邊形之 n 個頂點命名為 A_1、A_2、A_3、...、A_n，其內接正四邊形之 4 個頂點命名為 B_1、B_2、B_3、B_4。(皆以逆時針編號)

(二)在同一個正 n 邊形中所作之兩內接正四邊形經旋轉或對稱後能完全重疊者，我們稱為「全等」，視為"同一個")。

(三)將正 n 邊形依邊長數分為 n= 4k、4k+1、4k+2、4k+3，k 是正整數。

二、 以電腦繪圖觀察正 n 邊形是否存在內接正四邊形

(一)為了想確定是否真的能在任意正 n 邊形中內接正四邊形，我們利用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製正五、六、七、八、九、十邊形圖形來觀察。步驟為:

1.在正 n 邊形的任意邊上找一動點 B_1 作為正四邊形的第一個頂點

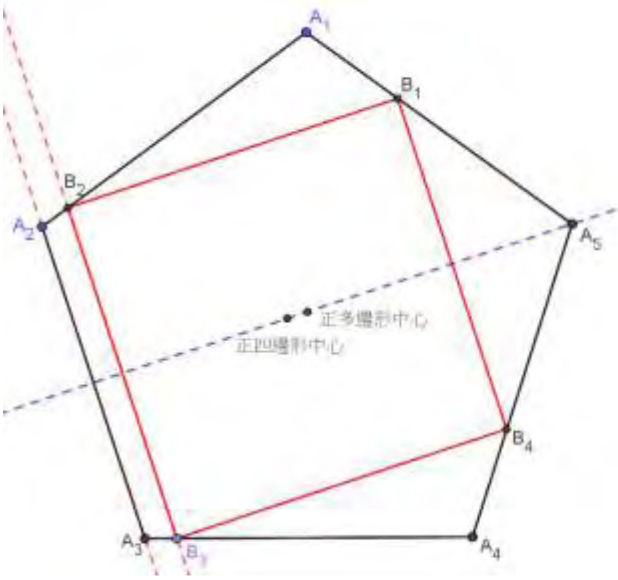
2.猜測內接正四邊形另一頂點 B_2 的位置

3.以$\overline{B_1B_2}$為邊長畫出正四邊形

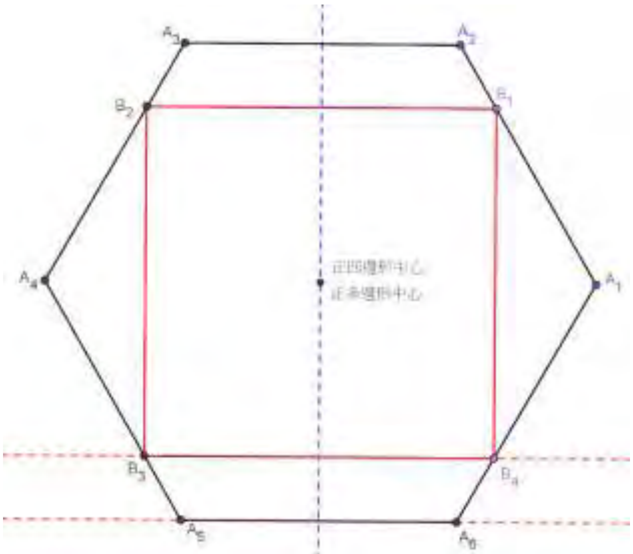
4.藉由移動B_1、B_2的位置來改變正四邊形的位置與大小

5.直到另外兩頂點也落在正 n 邊形的邊長上

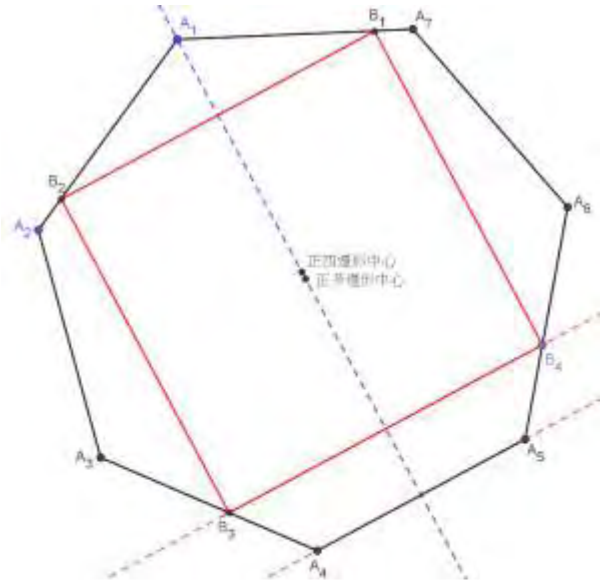
最後繪製圖形如下圖(一)~圖(六)，並觀察正 n 邊形與其內接正四邊形之關聯性。其中圖(一)~圖(六)中，藍色虛線為正 n 邊形與內接正四邊形之對稱軸(過兩圖形中心)，紅色虛線為內接正四邊形與正 n 邊形之平行邊。



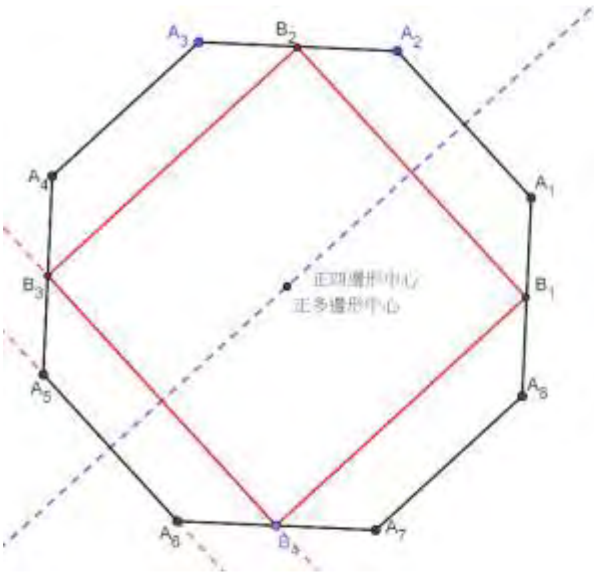
圖(一)正五邊形的一個內接正四邊形



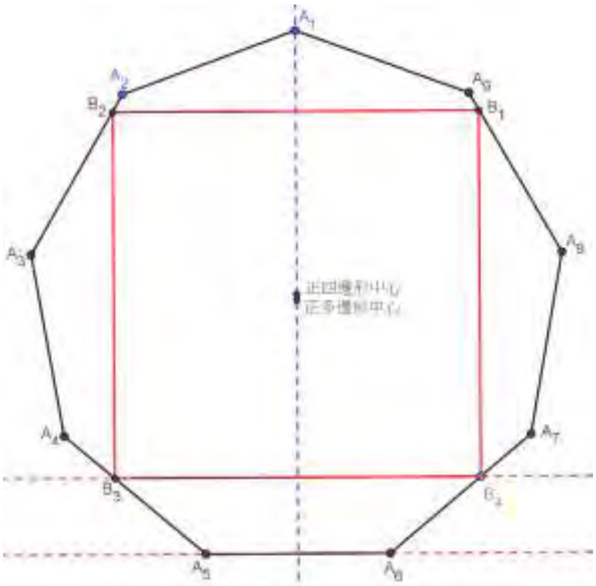
圖(二)正六邊形的一個內接正四邊形



圖(三)正七邊形的一個內接正四邊形



圖(四)正八邊形的一個內接正四邊形



圖(五)正九邊形的一個內接正四邊形

圖(六)正十邊形的一個內接正四邊形

(二) 觀察圖(一)~圖(六)，我們發現以下幾個性質：

1.正五、六、七、八、九、十邊形皆有內接正四邊形，因此猜測所有正 n 邊形皆有內接正四邊形。

2.正六、八、十邊形的其中一個內接正四邊形與其共中心，故推測正 n(n=4k、4k+2)邊形可用中心及對稱的方式作圖。

3.正 n 邊形與內接正四邊形有一共同之對稱軸且內接正四邊形有一與正 n 邊形平行的邊。

（註：起初僅是為了看看能否先找到內接正四邊形，而上述性質 3 是後來使用平行邊的尺規作圖法後，回過頭整理這些圖形時，才發現的特性。又第 3 點中的對稱軸會垂直內接正四邊形與正 n 邊形之平行邊，故在正六、八、十邊形中，我們只呈現垂直平行邊的對稱軸。）

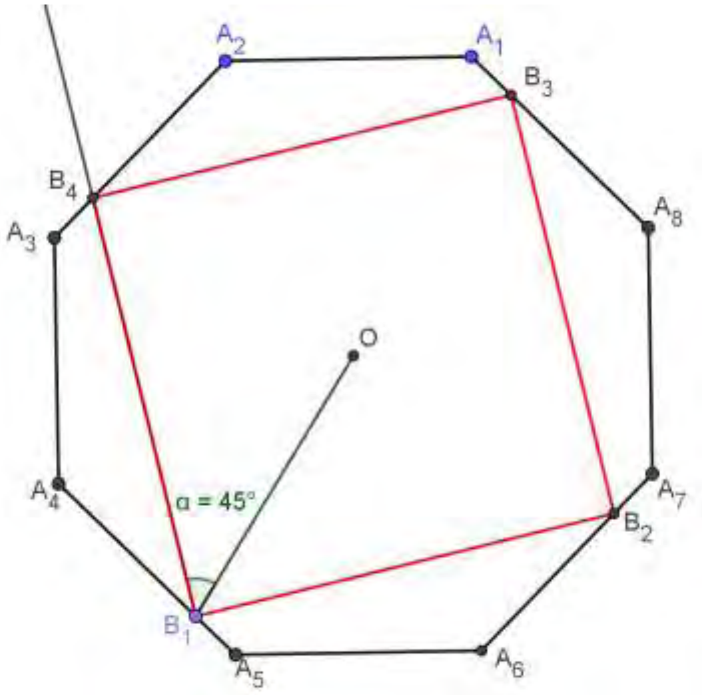
以上僅是利用電腦繪圖軟體初步觀察，以下我們給更精確的尺規作圖。

三、 與正 n(n=4k、4k+2)邊形共中心的內接正四邊形之作圖方法

(一)正 n(n=4k)邊形：

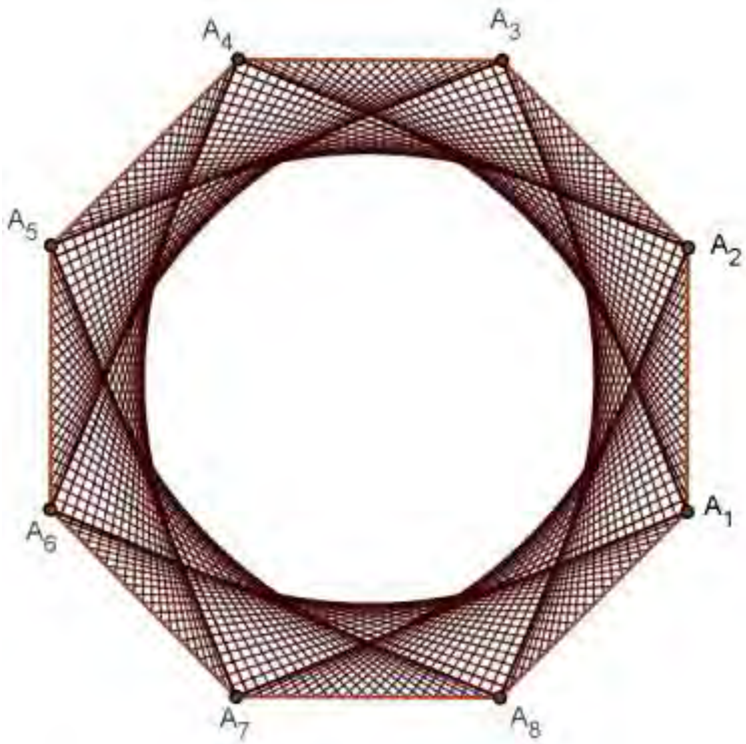
由上述電腦繪圖的觀察中得知，正 n(n=4k)邊形和內接正四邊形有對稱和共中心的特性。因此可以利用正 n 邊形的中心來作圖，下面我們以正八邊形為例(如圖(七))：

1. 取正 n 邊形的中心 O
2. 在正 n 邊形的邊長上取任意一點 B_1 作為正四邊形之一頂點
3. 以B_1為頂點，$\overleftrightarrow{OB_1}$旋轉 45°，和正多邊形交於 B_4
4. 以$\overline{B_1B_4}$為邊長作正四邊形
5. 正四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求



圖(七)正八邊形共中心的內接正四邊形作圖法

圖(七)中，當我們移動 B_1 時，其餘四個頂點依舊在正 n 邊形上，故我們發現，只要$\overline{A_5B_1}$、$\overline{A_3B_4}$、$\overline{A_1B_3}$ 、$\overline{A_7B_2}$等長，就能形成一內接正四邊形，因此正八邊形有無限個內接正四邊形(如圖(八))，我們稱其有「連續性」，且其有頂點上的內接正四邊形，如圖(八)中的正四邊形$A_1A_3A_5A_7$即為一內接正四邊形。

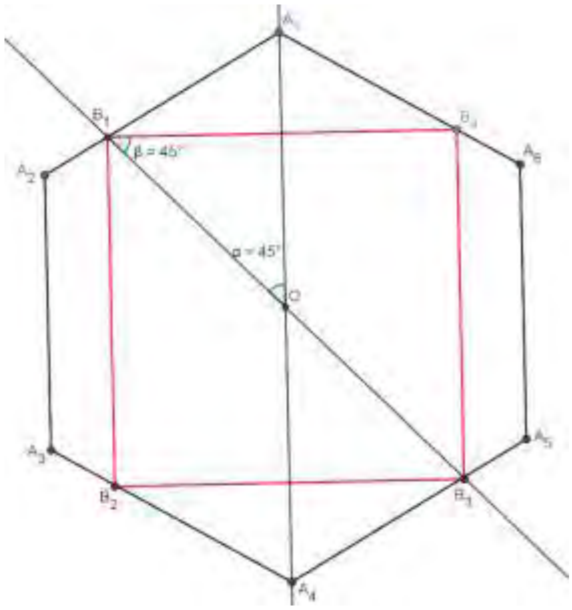


圖(八)正八邊形內接正四邊形的狀況(可找到無限個)

(二) 正 n(n=4k+2)邊形：

從前面的繪圖觀察中，我們發現正 n(n=4k+2)邊形有一個和其共中心的內接正四邊形，也一樣擁有對稱的性質，因此我們利用正 n 邊形的中心來作圖，下面我們以正六邊形為例(如圖(九))：

1. 取正 n 邊形的中心 O
2. 以一頂點A_1和 O 連線
3. 以O為頂點，將$\overleftrightarrow{OA_1}$旋轉45°，並和正 n 邊形交於點$B_1$
4. 以B_1為頂點，將$\overleftrightarrow{B_1O}$旋轉 45°，並和正 n 邊形交於點$B_4$
5. 以$\overline{B_1B_4}$為邊長做正四邊形
6. 正四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求



圖(九)正六邊形的內接正四邊形作圖法

四、 與正 n 邊形共對稱軸之內接正四邊形之作圖方法，且此時正 n 邊形和其內接正四邊形有一組平行邊

此方法可用於所有的正 n 邊形，由上述觀察我們發現正 n 邊形和其內接正四邊形有一組平行邊，我們利用此性質作圖如下:

（註:上述我們已用共中心作出正六、八邊形之內接正四邊形，而正五、七、九邊形的內接正四邊形並無共中心的特性，故下方僅呈現正五、七、九邊形，即 n=4k+1、4k+3 的作圖。）

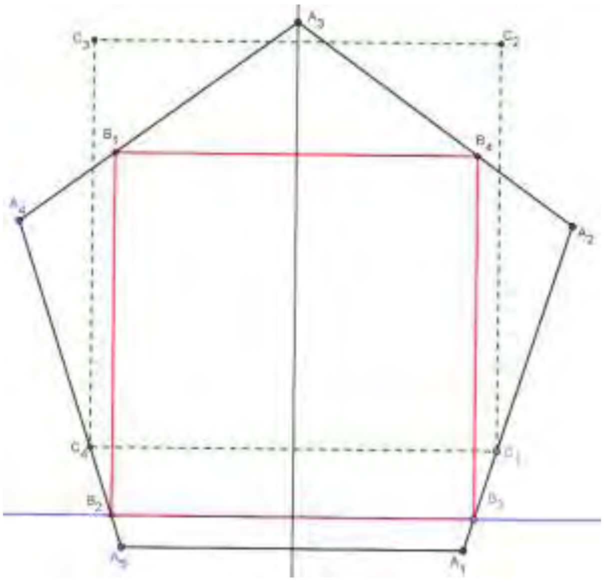
(一) 以平行底邊方式作圖，我們稱之為「平行法」:

1. 利用內接正四邊形底邊平行正 n 邊形底邊之特性，作圖觀察如下:
   (1) 在正 n 邊形上選一邊作為底邊(這裡我們選定$\overline{A_1A_n}$，此選擇乃與後方找尋內接正四邊形頂點位置而定。)
   (2) 在 $\overline{A_1A_2}$上取一點B_1作為正四邊形之一頂點
   (3) 作一平行線過B_1且交正 n 邊形於B_4
   (4) 以$\overline{B_1B_4}$為邊長作一正四邊形
   (5) 移動B_1使正四邊形四個頂點皆位於正 n 邊形邊上(如圖(十)、圖(十一)、圖

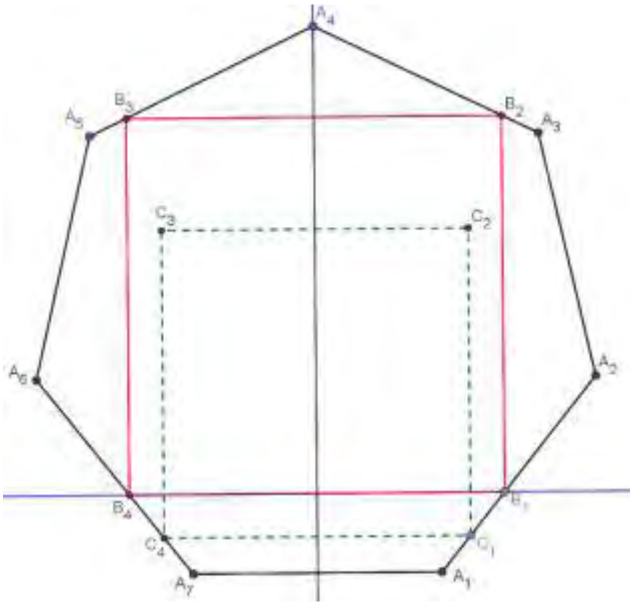
(十二))

（註 1：因為B_1 、B_4已在正四邊形邊上，當移動B_1點時，正四邊形放大縮小時，必能找到B_2 、B_3在正 n 邊形上，圖中正四邊形$C_1C_2C_3C_4$為移動過程中出現的正四邊形。

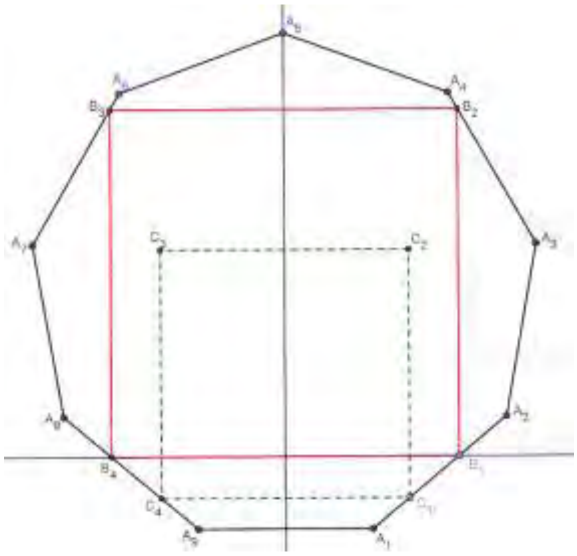
註 2：圖中垂直平行邊且過兩圖形中心之直線為正 n 邊行與內接正四邊形的共用對稱軸。）



圖(十)正五邊形平行法作圖

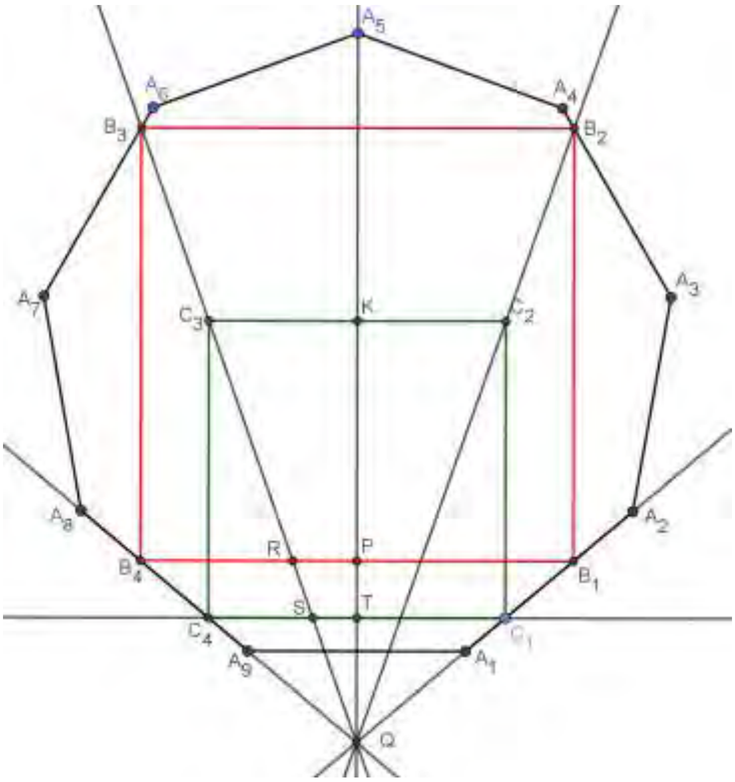


圖(十一)正七邊形平行法作圖



圖(十二)正九邊形平行法作圖

2. 平行法的尺規作圖步驟：上面我們利用移動 B_1 的方式找出內接正四邊形，下面我們給一個平行法的尺規作圖法，以下我們以正九邊形為例(如圖(十三))：
   (1) 作一正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$(輔助正四邊形)，使 C_1、C_4 分別位在正 n 邊行的兩邊上，且$\overline{C_1C_4}$平行正 n 邊形的底邊$\overline{A_1A_9}$
   (2) 延長$\overline{A_1A_2}$及$\overline{A_8A_9}$交於點 Q
   (3) 連接$\overleftrightarrow{QC_2}$及$\overleftrightarrow{QC_3}$和正九邊形分別交於點$B_2$、$B_3$
   (4) 以$\overline{B_2B_3}$為邊作一正四邊形
   (5) 正四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求



圖(十三)正九邊形以尺規作圖呈現平行法之作圖情形

上述的尺規作圖中，如何確認 B_1、B_4 必在正 n 邊形上呢？

假設以$\overline{B_2B_3}$為邊所作之正四邊形頂點 B_4 不在 $\overline{A_8A_9}$ 上，則表 B_4 、C_4 、Q 不共線，則 ΔB_4RQ 與 $\Delta\angle C_4SQ$ 不相似，得 $\overline{RQ}:\overline{SQ} \neq \overline{SC_4}:\overline{RB_4}$

又 $\Delta RPQ \sim \Delta STQ \sim \Delta SC_4C_3 \sim \Delta RB_4B_3$ (如圖(十三))， 故

$\overline{RQ}:\overline{SQ} = \overline{SC_3}:\overline{RB_3} = \overline{SC_4}:\overline{RB_4}$ (矛盾)

故 B_4 、C_4 、Q 共線，B_4 在 $\overline{A_8A_9}$ 上，B_1 同理 $\overline{A_1A_2}$ 上，故四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為內接正四邊形。

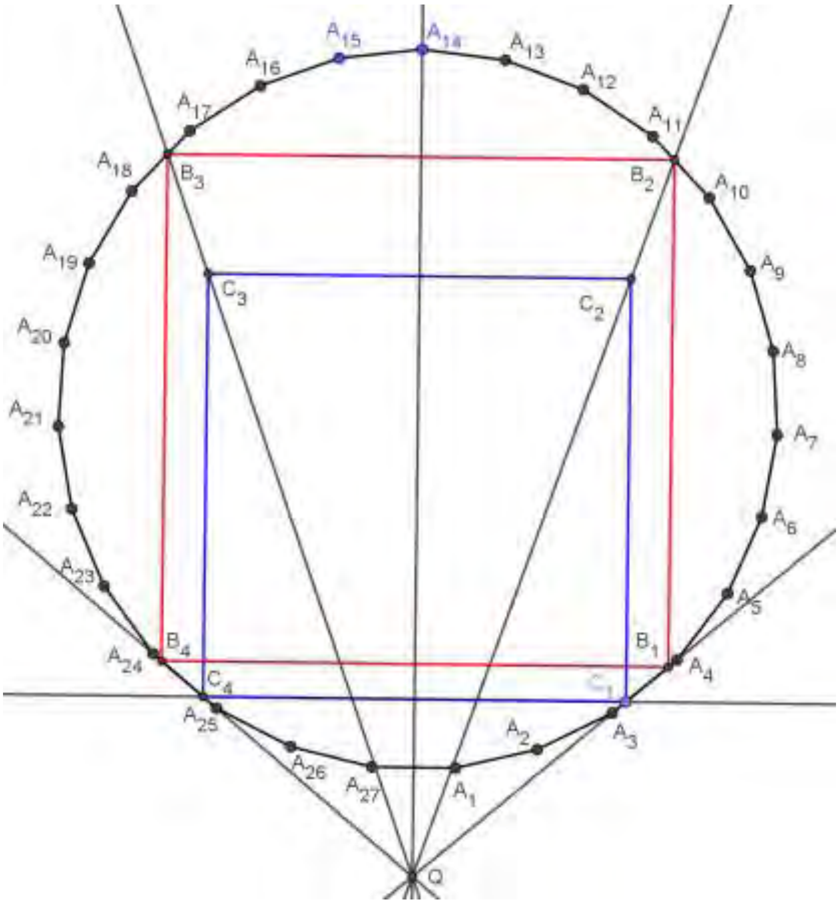
3. 確認內接正四邊形頂點位置

在此作圖法中，隨著 n 變大，B_1不會永遠都在$\overline{A_1A_2}$上，故為找到B_1的位置，

我們定義 $d=\left[\dfrac{\frac{n}{4}-1}{2}\right]$，其中[ ]為高斯記號，則$B_1$在$\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$。又因為我們是利用相似形作圖，故輔助正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 之頂點 C_1 必在$\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$上。

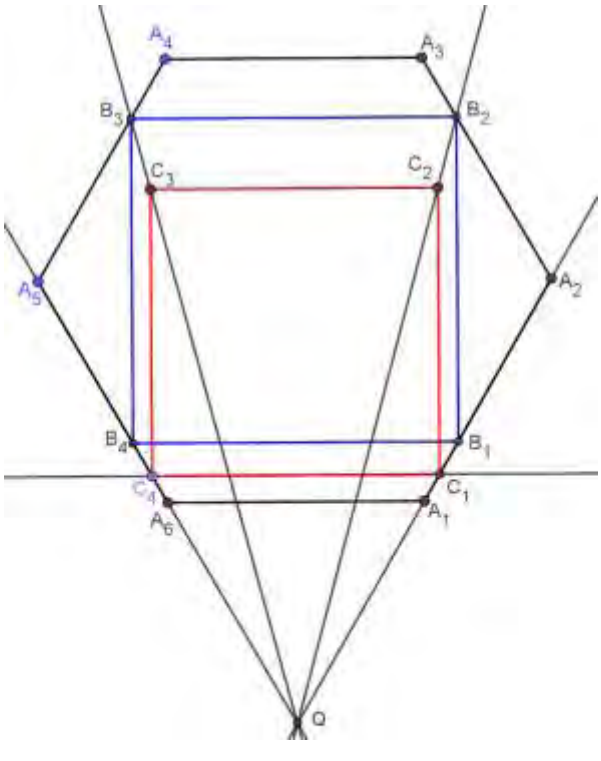
其中我們所定義的 $d=\left[\dfrac{\frac{n}{4}-1}{2}\right]$，$\dfrac{n}{4}$是在計算兩頂點間的邊長數，又因為平行底邊，所以減 1，又因左右對稱，所以除以 2，得到的數值為從 A_1 逆時針計算的邊長數，取高斯後可知頂點位置。)

下面我們以正二十七邊形為例 $d=\left[\dfrac{\frac{27}{4}-1}{2}\right]=2$ ，則B_1 、C_1在$\overline{A_3A_4}$，如圖(十四)

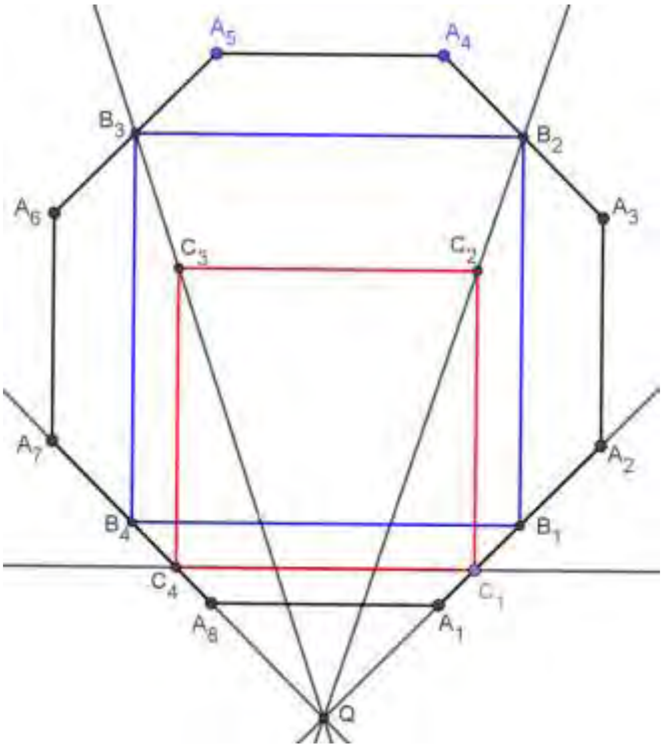


圖(十四)正二十七邊形內接正四邊形

而此方法能適用在所有正 n 邊形上，當然在正 n(n=4k、4k+2)邊形中，也能適用，圖(十五)、圖(十六)為正六、八邊形使用平行法作圖的圖形。



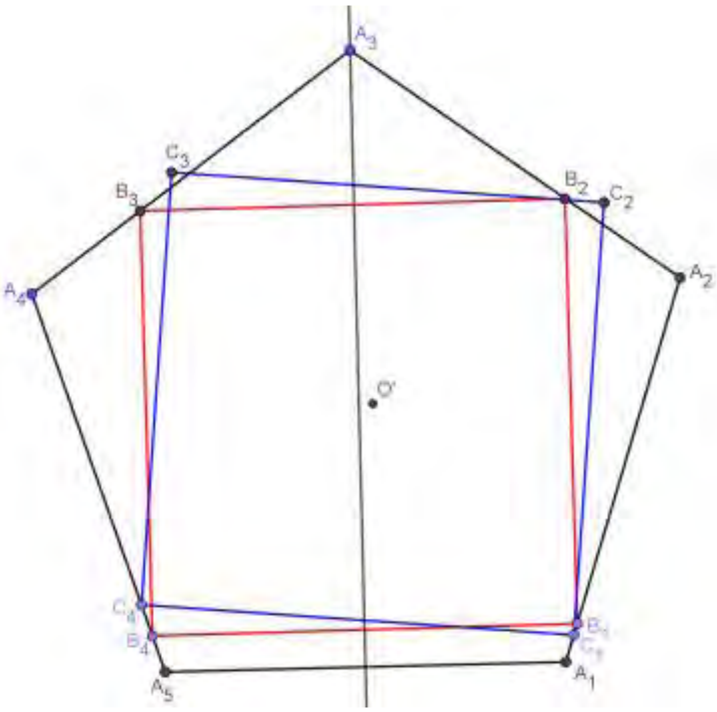
圖(十五)正六邊形以尺規作圖法作圖情形



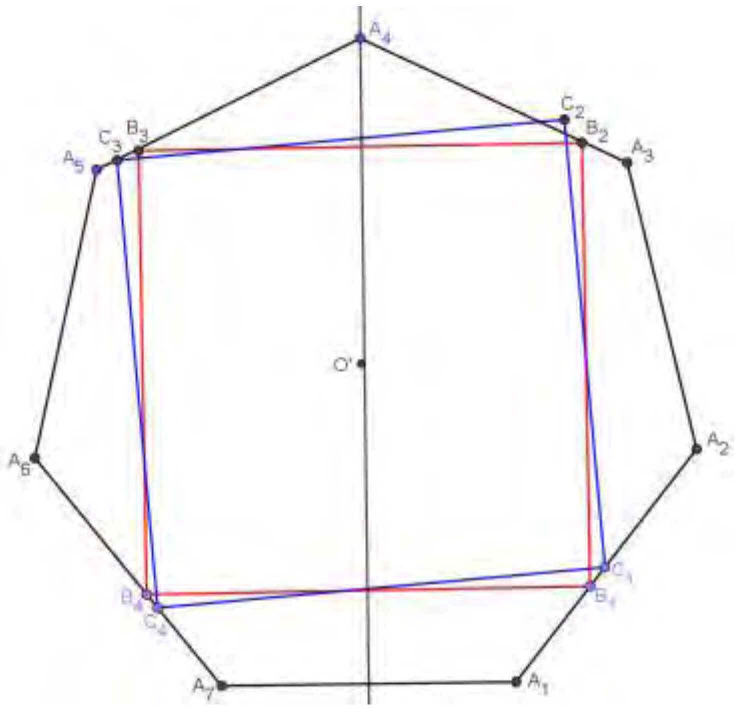
圖(十六)正八邊形以尺規作圖法作圖情形

(二) 正 n(n=4k+1、4k+3)邊形的內接正四邊形個數

一開始在我們使用繪圖觀察時(P.1~2 所呈現的方法)，並無法確定在正 n(n=4k+1 或 4k+3)邊形中可以找到幾個內接正四邊形。而現在我們將上面用平行法在正五邊形及正七邊形內所找到的內接正四邊形之其中兩個頂點固定在正多邊形的邊上，並移動這兩個頂點，在移動的過程中，正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 無法都在邊上(如圖(十七) 、圖(十八))，且正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 的中心 O' 也不在正 n 邊形的對稱軸上。

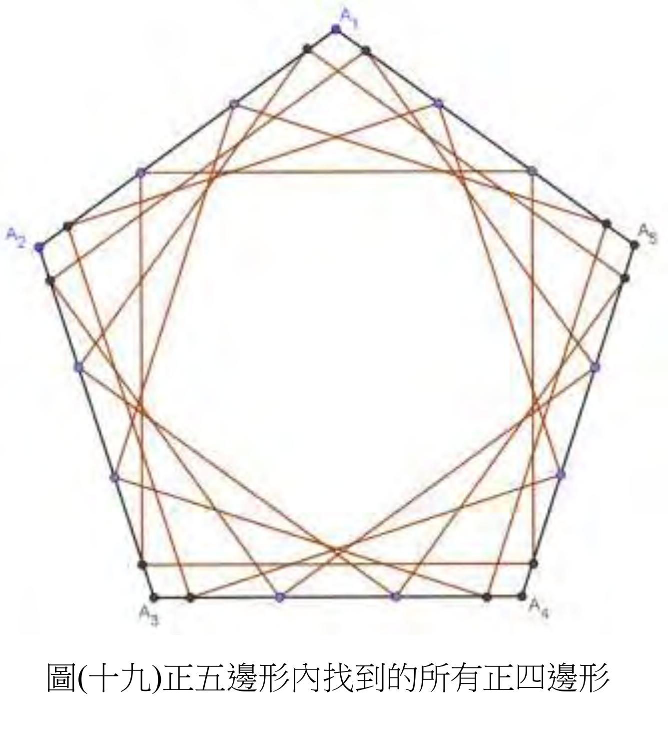


圖(十七)正五邊形內接正四邊形移動後情形

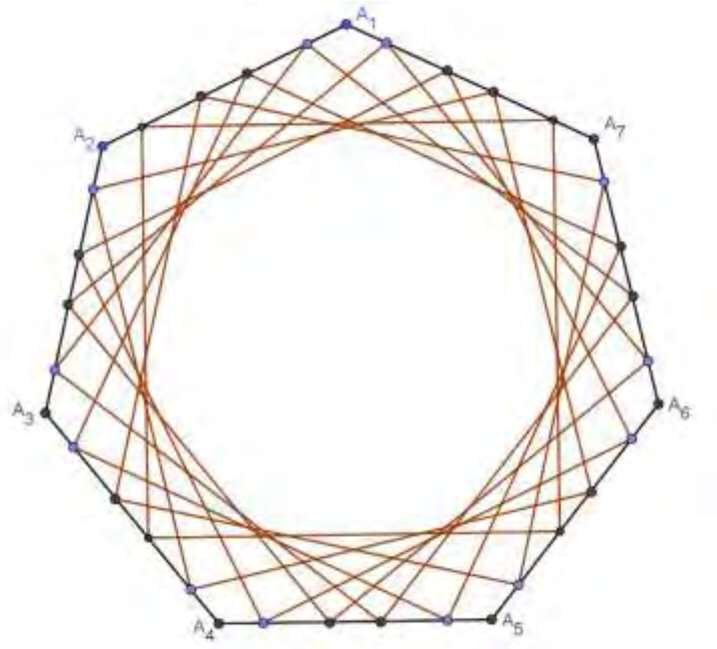


圖(十八)正七邊形內接正四邊形移動後情形

再將以上能作為內接正四邊形的留下，我們發現，這些正四邊形分別是平行於正多邊形的不同邊，皆為全等，因此我們猜測只存在一個內接正四邊形。如圖(十九)、圖(二十)：

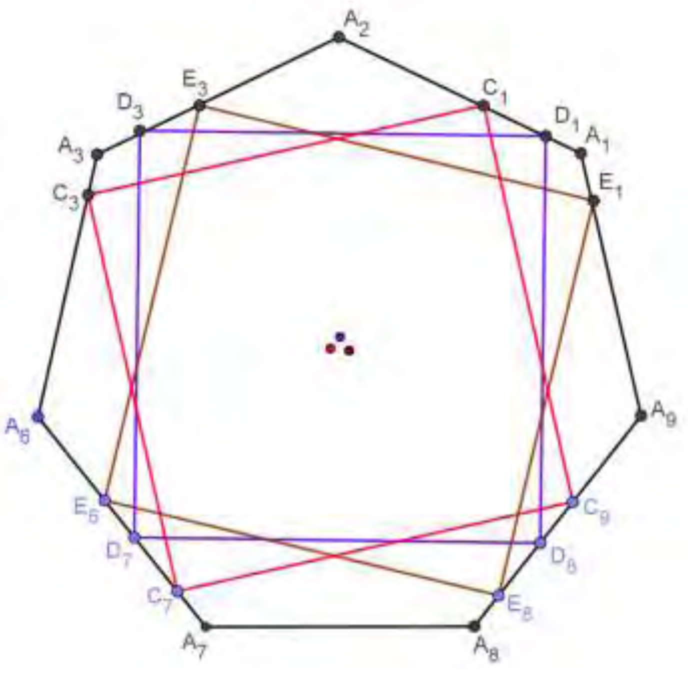


圖(十九)正五邊形內找到的所有正四邊形



圖(二十)正七邊形內找到的所有正四邊形

上圖中，看似有七個內接正四邊形，下圖(二十一)中，我們僅呈現其中三個，可觀察出正四邊形$C_1C_3C_7C_9$：可由$\overline{C_1C_9}$平行$\overline{A_1A_9}$所作；正四邊形$D_1D_3D_7D_8$:可由$\overline{D_7D_8}$平行$\overline{A_7A_8}$所作；正四邊形$E_1E_3E_6E_8$：可由$\overline{E_3E_6}$平行$\overline{A_3A_6}$所作。



圖(二十一)正七邊形的其中三內接正四邊形(全等)

(三)觀察結果整理

經由電腦繪圖及尺規作圖的觀察，我們得到以下猜測，整理如表一：

	4k	4k+1	4k+2	4k+3
有無內接正四邊形	有	有	有	有
有無與正 n 邊形共中心	有	無	有	無
有無與正 n 邊形共對稱軸	有	有	有	有
非全等內接正四邊形的個數	無限多個	1 個	1 個	1 個

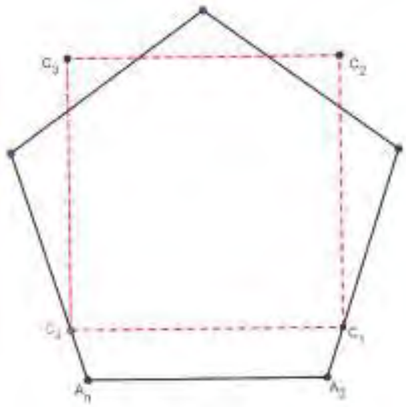
表(一)正 n 邊形內接正四邊形之結論

以下我們將以數學式驗證之。

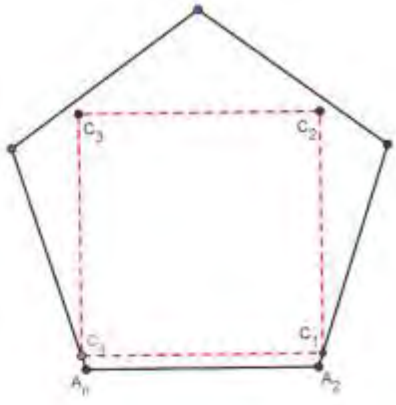
伍、研究方法與步驟(二)驗證

一、所有的正 n 邊形皆有內接正四邊形(存在性)

由上述平行法(P.6)，我們確定了內接正四邊形的兩頂點位置，即 B_1 在 $\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$ 上且 $\overline{B_1B_4} // \overline{A_1A_n}$，當我們取輔助正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 並沿 $\overline{A_{1+d}A_{2+d}}$ 移動 C_1 時(如圖(二十二)、圖(二十三))，此為一連續過程，故根據勘根定理，必可找到一個正四邊形 $C_1C_2C_3C_4$(如圖(二十四))，使其另外兩頂點 C_2 、C_3 亦落在正 n 邊形上，此正四邊形即為所求。



圖(二十二) C_1 移動過程



圖(二十三) C_1 移動過程

圖(二十四) 所求之內接正四邊形

二、正 n(n=4k)邊形有無限多個內接正四邊形

證：

在正 n 邊形(n=4k)中，

令$A_1(1,0)$

，$A_2(cos(\frac{360^o}{n}),sin(\frac{360^o}{n}))=(cos(\frac{90^o}{k}),sin(\frac{90^o}{k}))\ldots..$

，$A_i(cos(\frac{360^o(i-1)}{n}),sin(\frac{360^o(i-1)}{n}))\ldots\ldots$，$A_n(cos(\frac{360^o(n-1)}{n}),sin(\frac{360^o(n-1)}{n})$

取正四邊形頂點

$B_1(a\ \ cos(\theta),a\ \ sin(\theta))=(\alpha,\beta)$，則

$B_2(a\,cos(90^o+\theta),a\,sin(90^o+\theta))=\ (-a\,sin(\theta),a\,cos(\theta))=(-\beta,\alpha)$

因為$\frac{n}{4}=\frac{4k}{4}=k$，故若取$B_1\in\overline{A_1A_2}$，則$B_2\in\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$。其中

又$A_{k+1}(cos(\frac{360^o(k)}{n}),sin(\frac{360^o(k)}{n})=(cos\,90°,sin\,90°)=(0,1)$，

$A_{k+2}(\cos(\frac{360^o(\mathrm{k}+1)}{\mathrm{n}}),sin(\frac{360^o(\mathrm{k}+1)}{\mathrm{n}})=(-sin(\frac{90°}{\mathrm{k}}),cos(\frac{90°}{\mathrm{k}}))$，

$$\overleftrightarrow{A_1A_2}:y=\frac{sin(\frac{90°}{\mathrm{k}})}{cos(\frac{90°}{\mathrm{k}})-1}x-\frac{sin(\frac{90°}{\mathrm{k}})}{cos(\frac{90°}{\mathrm{k}})-1}$$

$$\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}:\mathrm{y}=-\frac{cos(\frac{90°}{\mathrm{k}})-1}{sin(\frac{90°}{\mathrm{k}})}x+1$$

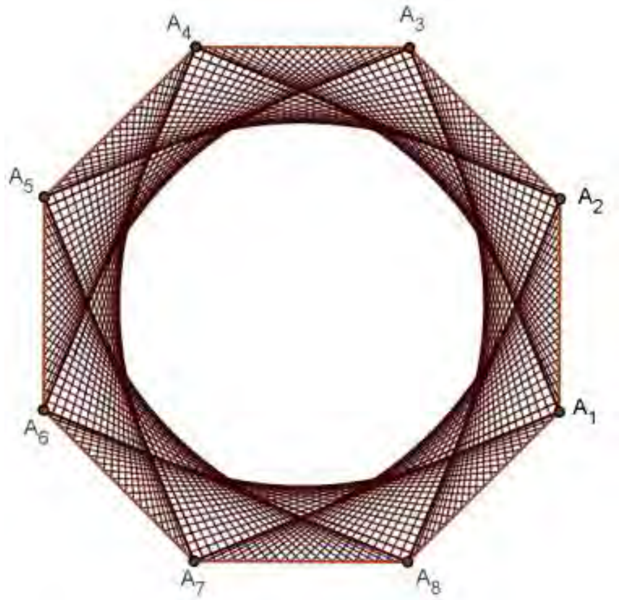
$$\text{則}\begin{cases}\beta=\dfrac{sin(\frac{90^o}{k})}{cos(\frac{90^o}{k})-1}\alpha-\dfrac{sin(\frac{90^o}{k})}{cos(\frac{90^o}{k})-1}\ldots\ldots.(1)\\ \alpha=\dfrac{cos(\frac{90^o}{k})-1}{-sin(\frac{90^o}{k})}(-\beta)+1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)\end{cases}\qquad(*)$$

(1) 經整理後得 $\dfrac{\cos(\frac{90^o}{k})-1}{\sin(\frac{90^o}{k})}\beta=\alpha-1$............(3)

其中(3)式經移項後與(2)式相同,故可知聯立方程式(*) 有無限多解,故正 n 邊形(n=4k)可作無限多個內接正四邊形。

又$\overline{A_1B_1}=\sqrt{(1-a\ \ \cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}$；$\overline{A_{k+1}B_2}=\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(1-a\ \ \cos\theta)^2}$，故只要取

$\overline{A_1B_1}=\overline{A_{k+1}B_2}$，並以$B_1$、$B_2$ 為兩頂點即可做出正 n 邊形(n=4k)的內接正四邊形。



圖(二十五)正八邊形內接正四邊形連續性(可作無限多個內接正四邊形)

三、正 n(n=4k+2)邊形只有一個與其共中心的內接正四邊形

(一) 確認與正 n(n=4k+2)邊形共中心的正四邊形的頂點位置

在正 n(n=4k+2)邊形中，

$A_1(1,0)$，　$A_2(\cos\frac{360°}{n}, sin\frac{360°}{n})\ldots\ldots A_i(\cos\frac{360°(i-1)}{n}, sin\frac{360°(i-1)}{n})$

取正四邊形頂點$B_1(a\cos\theta, a\ sin\theta) \in \overline{A_kA_{k+1}}$，$\frac{360°(k-1)}{n} < \theta < \frac{360°k}{n}$

則$B_2(a\cos(\theta+90^o), a\sin(\theta+90^o)) \in \overline{A_xA_{x+1}}$，且

$$\frac{360°(k-1)}{n} + 90° < \theta + 90° < \frac{360°k}{n} + 90°$$

因 n=4k+2，則$\dfrac{360^o(k-1)}{n}+90^o = \dfrac{360^o(k-1)+90^o(4k+2)}{n} = \dfrac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n}$

故$\dfrac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n} < \theta + 90^o < \dfrac{360^o(2k+\frac{1}{2})}{n}$，又$B_2 \in \overline{A_xA_{x+1}}$，

所以$\dfrac{360^o(x-1)}{n} < \dfrac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n} < \theta+90^o < \dfrac{360^o(2k+\frac{1}{2})}{n} < \dfrac{360^o(x-1)}{n}$且 x 為正整數

得 x=2k 或 2k+1，故$B_2 \in \overline{A_{2k}A_{2k+1}}$或$\in \overline{A_{2k+1}A_{2k+2}}$

(二) 與正六邊形共中心的內接正四邊形只有一個

證：在正六邊形中，令$A_1(1,0)$，

$$A_2\ (\cos60°, \sin60°) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$A_3(\cos 120°, \sin 120°) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$A_4(\cos 180°, \sin 180°) = (-1,0)$$

$$A_5(\cos 240°, \sin 240°) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$A_6(\cos 300°, \sin 300°) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

正四邊形中，設$\overline{OB_1} = a$，$\angle B_1OA_1 = \theta$，

則$B_1(a\,cos\theta, a\,sin\theta) = (\alpha,\beta)\,\epsilon\overline{A_1A_2}$

$B_2(a\cos(\theta+90°), a\sin(\theta+90°)) = (-a\,sin\theta, a\,cos\theta)$

$= (-\beta,\alpha)\,\epsilon\overline{A_2A_3}$或 $\overline{A_3A_4}$

Case1. 若$B_2 \in \overline{A_2A_3}$，因為 $\overleftrightarrow{A_1A_2}: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$\overline{A_2A_3}: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

則$\begin{cases}\beta = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3}\\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，得 $\beta = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

故可以找到一個正四邊形，其 $a = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{6-\sqrt{3}}$

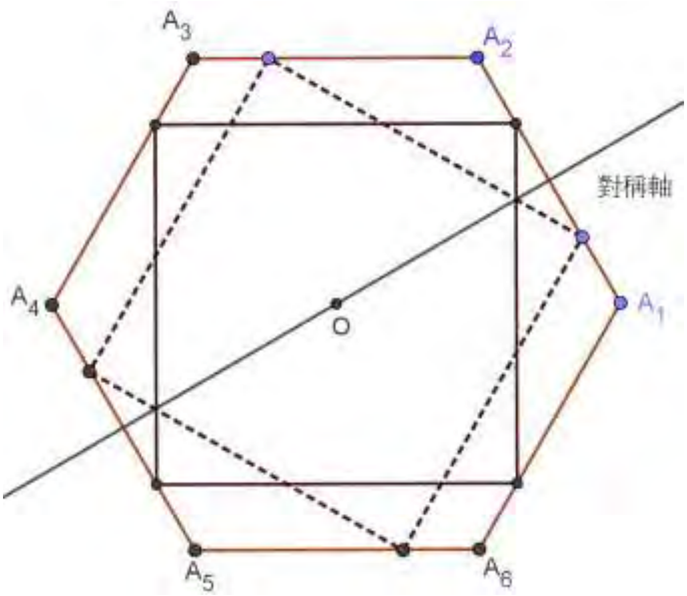
Case2. 若$B_2 \in \overline{A_3A_4}$，因為$\overleftrightarrow{A_1A_2}: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$

$$\overline{A_2A_3}: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

則$\begin{cases}\beta = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3}\\ \alpha = \sqrt{3}(-\beta) + \sqrt{3}\end{cases}$，得 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

故可以找到一個正四邊形，其 $a = \sqrt{(\frac{3-\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{3-\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{6-\sqrt{3}}$

因 case1 和 case2 的半對角線一樣，故 case1 和 case2 的正四邊形為全等，故與正六邊形共中心的內接正四邊形只有一個。



圖(二十六)case1 和 case2 正四邊形內接情形(兩正四邊形為全等)

(三) 正六邊形無不共中心內接正四邊形

證：在正六邊形中， 令 $A_1(2,0)$ ，

$A_2(2\cos60°, 2\sin60°) = (1, \sqrt{3})$

$A_3(2\cos120°, 2\sin120°) = (-1, \sqrt{3})$

$A_4(2\cos180°, 2\sin180°) = (-2,0)$

$A_5(2\cos240°, 2\sin240°) = (-1, -\sqrt{3})$

$A_6(2\cos300°, 2\sin300°) = (1, -\sqrt{3})$

中心$(0,0)$

若內接正四邊形四頂點分別為B_1、B_2、B_3、B_4，其中心$O'(a, b) \neq (0,0)$

設 $y = mx + n$為過O'之直線，分別交$\overleftrightarrow{A_1A_2}$： $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 和 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$： $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ 於B_1、B_3(如圖(二十七))

$$\begin{cases} y = mx + n \\ \overleftrightarrow{A_3A_4} : y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \end{cases}$$ ，得$B_1\left(\frac{2\sqrt{3}-n}{m+\sqrt{3}} , \frac{\sqrt{3}n-6}{m+\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}\right)$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ \overleftrightarrow{A_1A_6} : y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \end{cases}$$ ，得$B_3\left(\frac{-2\sqrt{3}-n}{m+\sqrt{3}} , \frac{\sqrt{3}n+6}{m+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\right)$

B_1和B_3 中點(即正四邊形中心O')= $\left(\frac{-n}{m+\sqrt{3}} , \frac{\sqrt{3}n}{m+\sqrt{3}}\right)$

又過O'且和 $\overleftrightarrow{B_1B_3}$ 垂直的直線為 $y = -\frac{1}{m}x + \frac{(\sqrt{3}m-1)n}{m(m+\sqrt{3})}$，

交正六邊形於B_2、B_4

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}x + \frac{(\sqrt{3}m-1)n}{m(m+\sqrt{3})} \\ y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \end{cases}$$ ，得

$$B_2\left(\frac{2\sqrt{3}m^2+6m+(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}, \frac{6m^2+6\sqrt{3}m+(3\mathrm{m}-\sqrt{3})\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}-2\sqrt{3}\right)$$

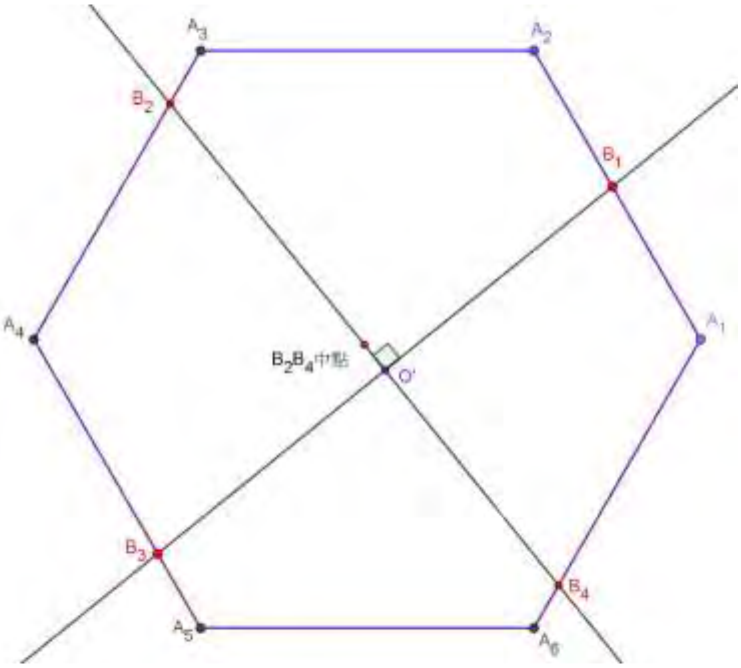
$$\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x+\frac{(\sqrt{3}m-1)n}{m(m+\sqrt{3})} \\ y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3} \end{cases}$$ ，得

$$B_4\left(\frac{-2\sqrt{3}m^2-6m+(\sqrt{3}m-1)n}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}m+1)}, \frac{-6m^2-6\sqrt{3}m+(3m-\sqrt{3})n}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}m+1)}+2\sqrt{3}\right)$$

B_2和B_4 中點 $\left(\frac{(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}, \frac{(3\mathrm{m}-\sqrt{3})\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)}\right)$即$O'$

則$\begin{cases} \frac{-n}{m+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}\mathrm{m}-1)\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)} \\ \frac{\sqrt{3}\mathrm{n}}{m+\sqrt{3}}=\frac{(3\mathrm{m}-\sqrt{3})\mathrm{n}}{(m+\sqrt{3})(\sqrt{3}\mathrm{m}+1)} \end{cases}$ ，得 n=0

因 n=0，故正四邊形中心為(0 ,0)，必和正六邊形共中心。



圖(二十七)正六邊形的內接正四邊形是否與其共中心之示意圖

(四)正 n(n=4k+2)邊形無不共中心之內接正四邊形

證:

令$A_1(1,0)$，

$$A_2\left(cos\left(\frac{360^o}{n}\right), sin\left(\frac{360^o}{n}\right)\right)=\left(cos\left(\frac{90^o}{k}\right), sin\left(\frac{90^o}{k}\right)\right) \ldots\ldots$$

$$A_i\left(cos\left(\frac{360^o(i-1)}{n}\right), sin\left(\frac{360^o(i-1)}{n}\right)\right) \ldots\ldots A_n\left(cos\left(\frac{360^o(n-1)}{n}\right), sin\left(\frac{360^o(n-1)}{n}\right)\right)$$

設$y=mx+n$分別交$\overline{A_1A_2}$($y=\frac{-\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}x+\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}$) 於$B_1$ 及

$\overline{A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}}$($y=\frac{-\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}x-\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}$)於$B_3$

令$\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}=a$ ，

$\begin{cases} y=mx+n \\ y=-ax+a \end{cases}$ ，得$B_1(\frac{n-a}{-a-m},\frac{-a(n+m)}{a-m})$

$\begin{cases} y=mx+n \\ y=-ax-a \end{cases}$ ，得$B_3(\frac{a+n}{-a-m},\frac{-a(n-m)}{-a-m})$

B_1和B_3 中點(即正四邊形中心O')= ($\frac{n}{-a-m},\frac{-an}{-a-m}$)

又過O'且和 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ 垂直的直線為 $y=-\frac{1}{m}x+\frac{(am+n)n}{m(a-m)}$，

交正 n 邊形於B_2、B_4

設B_2位於 $y=bx+c$ ，B_4位於 $y=bx-c$

$\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x+\frac{(am-1)n}{m(a+m)} \\ y=bx+c \end{cases}$ ， 得$B_2(\frac{-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}+c}{-\frac{1}{m}-b},\frac{-\frac{c}{m}-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}b}{-\frac{1}{m}-b})$ ，

$\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x+\frac{(am-1)n}{m(a+m)} \\ y=bx-c \end{cases}$ ，得$B_4(\frac{-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}-c}{-\frac{1}{m}-b},\frac{\frac{c}{m}-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}b}{-\frac{1}{m}-b})$

B_2和B_4 中點 $\left(\frac{(am+1)n}{(a+m)(1+mb)},\frac{(am+1)nb}{(a+m)(1+mb)}\right)$即$O'$

則$\begin{cases} \frac{n}{-a-m}=\frac{(am+1)n}{(a+m)(1+mb)} \\ \frac{-an}{-a-m}=\frac{(am+1)nb}{(a+m)(1+mb)} \end{cases}$

則 *n=0*，故正四邊形中心為(0 ,0)，必和正 n(n=4k+2)邊形共中心。

四、正 n(n=4k+1、4k+3)邊形只有一個與其不共中心的內接正四邊形

(一)沒有共中心之內接正四邊形

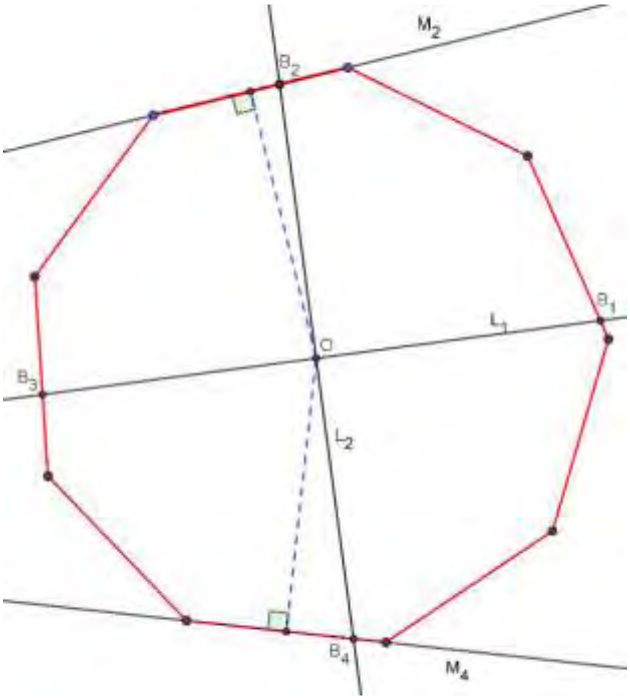
證: 設兩圖形共中心(0,0)，

則存在一直線過(0,0)且交正 n 邊形於B_1、B_3使$\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$(半對角線)

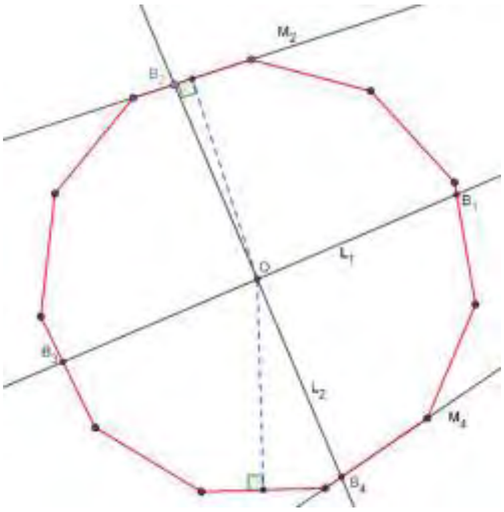
做一直線$L_2\perp L_1$且過(0,0)，交正 n 邊形於B_2、B_4，使$\overline{B_2O}=\overline{B_4O}=\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$

則正四邊形$B_1B_2B_3B_4$為內接正四邊形。

正 n 邊形中，B_2所在的邊定為M_2且B_4所在的邊定為M_4，如圖(二十八)、圖(二十九)：



圖(二十八)正 n(n=4k+1)邊形示意圖，以正九邊形為例



圖(二十九) 正 n(n=4k+3)邊形示意圖，以正十一邊形為例

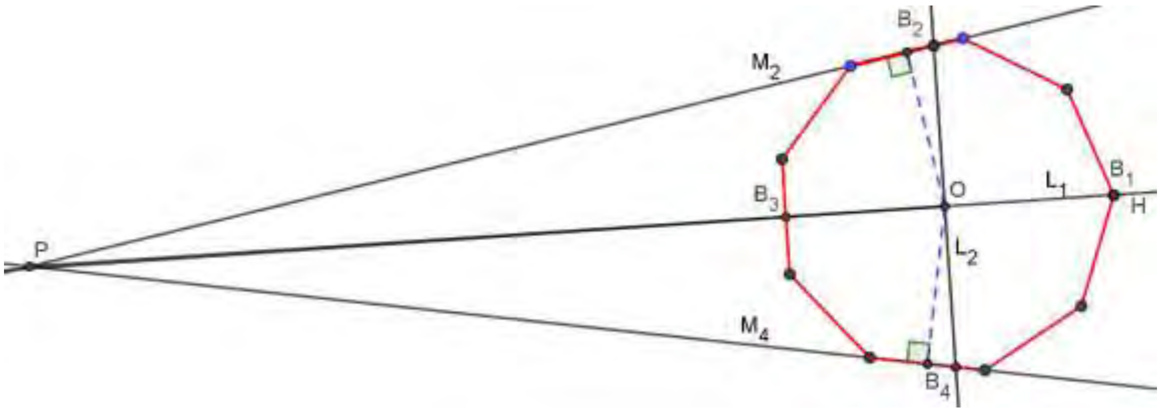
$\because\ \overline{B_2O} = \overline{B_4O} \therefore d(O\ ;M_2) = d(O\ ;M_4)$ (即為圖中虛線段)

延伸M_2、M_4交於 P 點，連接$\overline{OP}$，

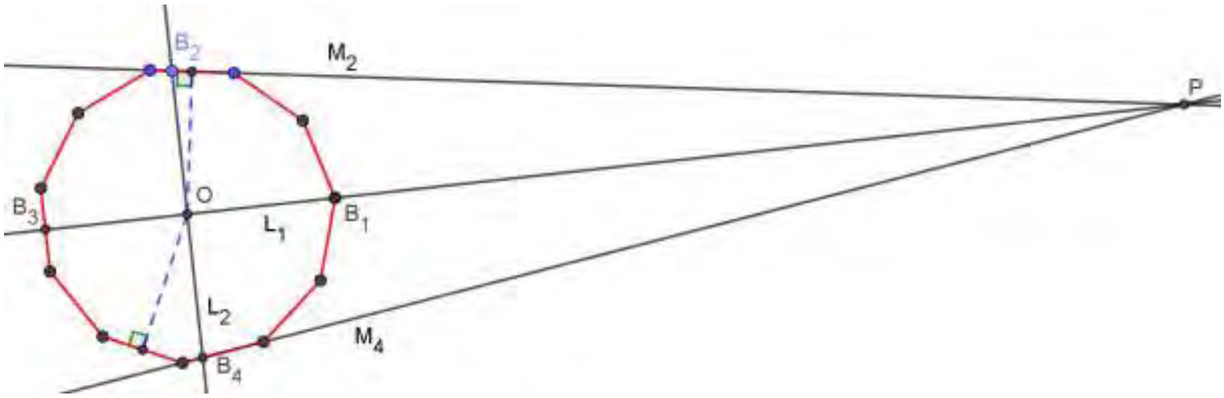
因為$d(O\ ;M_2) = d(O\ ;M_4)$，因此$\overline{OP}$必為正 n 邊形之角平分線(如圖(三十)、圖(三十一))，又正 n 邊形任取兩邊所作之角平分線必為其對稱軸(會過一頂點)，

故$\overline{B_1O} \neq \overline{B_3O}$(矛盾)

則正 n(n=4k+1、4k+3)邊形必無共中心之內接正四邊形。



圖(三十)正九邊形兩邊所作之角平分線必為其對稱軸



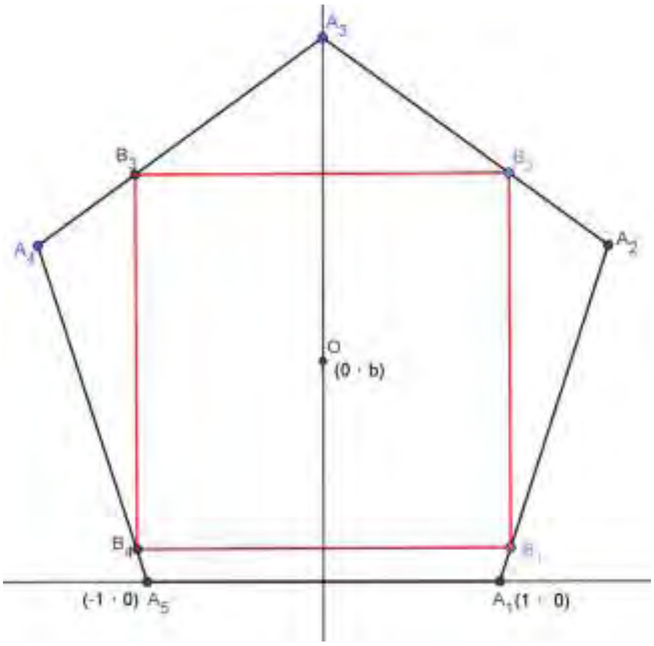
圖(三十一)正十一邊形兩邊所作之角平分線必為其對稱軸

(二) 內接正四邊形的中心在正 n 邊形的對稱軸上

由上述 四之(一) 的結論可知，當$\overline{B_2O}=\overline{B_4O}=\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$，正四邊形的中心必在正 n 邊形的對稱軸上。

(三) 正五邊形只有一個內接正四邊形

證: 由(二)可知內接正四邊形的中心在正五邊形的對稱軸上



圖(三十二) 證明正五邊形只有一個內接正四邊形示意圖

如圖(三十二)，假設對稱軸為 y=0， $A_1(1,0)$、$A_5(-1,0)$在 x 軸上、正四邊形中心為O_2(0,b)，則正五邊形中心為$O_1(0, tan54°)$、$A_3(0, tan54°+sec54°)$

$B_1(x_1,y_1)\in \overleftrightarrow{A_1A_2}$: $y=\tan72^\circ x-\tan72^\circ$

$B_2(x_2,y_2)\in \overleftrightarrow{A_2A_3}$: $y=-\tan36^\circ x+tan54°+sec54°$

$B_3(x_3,y_3)\in \overleftrightarrow{A_3A_4}$: $y=\tan36^\circ x+tan54°+sec54°$

$B_4(x_4,y_4)\in \overleftrightarrow{A_4A_5}$: $y=-\tan72^\circ x-\tan72^\circ$

又$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}=0$，$\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}$=b

則$x_1=-x_3$，$x_2=-x_4$ ，$y_1+y_3=y_2+y_4$

$y_1=\tan72^\circ x_1-\tan72^\circ$

$y_2=-\tan36^\circ x_2+tan54°+sec54°$

$y_3=-\tan36^\circ x_1+tan54°+sec54°$

$y_4=\tan72^\circ x_2-\tan72^\circ$

則 $\tan72^\circ x_1-\tan72^\circ+-\tan36^\circ x_1+tan54°+sec54°=$

$-\tan36^\circ x_2+tan54°+sec54°+\tan72^\circ x_2-\tan72^\circ$

得$x_1=x_2$，故 $x_1=x_2=-x_3=-x_4$，且 $y_1=y_4$ (表$\overline{B_1B_4}//\overline{A_1A_5}//x$軸)

又$\overline{B_1B_4}=x_1-x_4=\overline{B_1B_2}=y_2-y_1$

$2x_1=-\tan36^o\cdot x_2+\tan54^o+\sec54^o-\tan72^o\cdot x_1-\tan72^o$

得 $x_1=\dfrac{\tan54^o+\sec54^o-\tan72^o}{2+\tan36^o+\tan72^o}$ 為唯一解，故中心在對稱軸上的內接正四邊形只有一個。

(四) 正 n(n=4k+1,4k+3)邊形只有一個內接正四邊形

證：由(二)可知內接正四邊形的中心在正 n 邊形的對稱軸上，假設正 n 邊形的對稱軸為 y=0， $A_1(1,0)$、$A_n(-1,0)$在 x 軸上、正四邊形中心為O_2(0,b)。

設內接正四邊形四個頂點分別為$B_1(x_1,y_1)$ 、 $B_2(x_2,y_2)$ 、 $B_3(x_3,y_3)$ 、 $B_4(x_4,y_4)$ ，

且 $\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}=0$ 、 $\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}=b$ ，得 $x_1=x_2=-x_3=-x_4$，又正 n 邊形以 y=0 為對稱軸(故左右對稱)，則 B_1 和 B_4 對稱於 y 軸，故 $y_1=y_4$，同理 $y_2=y_3$；

若B_1交正 n 邊形於直線M_1 ：$y=m_1x+b_1$上、

B_2交正 n 邊形於直線M_2 ：$y=m_2x+b_2$上、

B_3交正 n 邊形於直線M_3 ：$y=-m_2x+b_2$上、

B_4 交正 n 邊形於直線 M_4 ：$y=-m_1x+b_1$ 上

（註：根據對稱性，不難假設 M_1、M_2、M_3、M_4）

又 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_1B_4}$ ，故 $y_2-y_1=x_1-x_4=2x_1$ ，推得 $m_2x_2+b_2-m_1x_1-b_1=2x_1$ ，故

$x_1=\dfrac{b_2-b_1}{2+m_1-m_2}$ 為唯一解，故正 n(n=4k+1,4k+3)邊形只有一個內接正四邊形。

陸、研究結果

一、所有正 n 邊形皆有內接正四邊形。

二、正 n 邊形與內接正四邊形共對稱軸。

三、正 n 邊形的內接正四邊形之相異處：

	4k	4k+1	4k+2	4k+3
有無與正 n 邊形共中心	有	無	有	無
非全等內接正四邊形的個數	無限多個	1 個	1 個	1 個

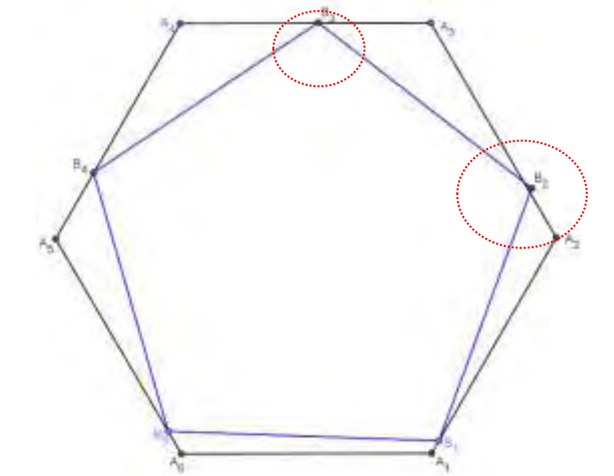
表(二)正 n 邊形內接正四邊形之結論

四、可利用同一尺規作圖「平行法」在所有正 n 邊形內找到一內接正四邊形。

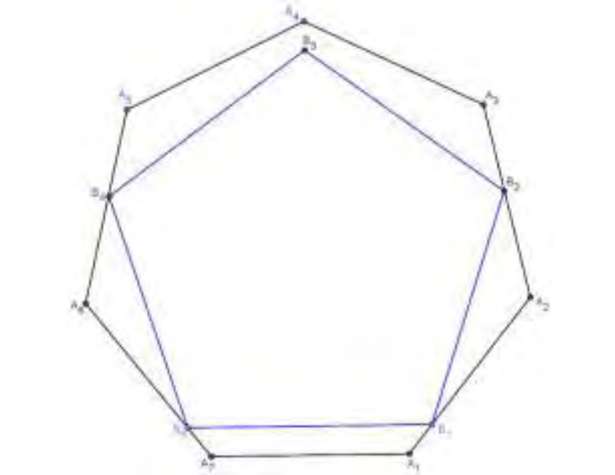
柒、討論與未來展望

在中華民國第 54 屆中小學科展 <探討正 n 邊形內接正三角形>中提到，正 n 邊形的內接正三角形有無限多個，而我們的研究發現，除了在 n=4k 時有無限多個內接正四邊形外，其餘皆只有一個(即有「唯一性」)，實際上，我們本來的想像是可能可以作出很多個，只是大小不同，這裡的唯一性，讓我們覺得驚奇，於是我們嘗試先用電腦軟體繪圖觀察正 n 邊形內接正 m(m>4)邊形的情況，起初我們想像只要位置喬的夠好，應該可以將正 m 邊形塞入正 n 邊形中，但經過我們移動圖形後發現：

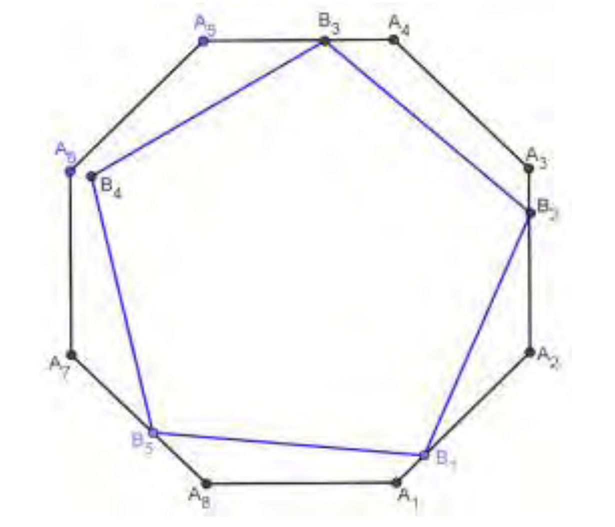
一、內接正五邊形：除了 n 為五的倍數外，並無法作出圖形，如下表(三)



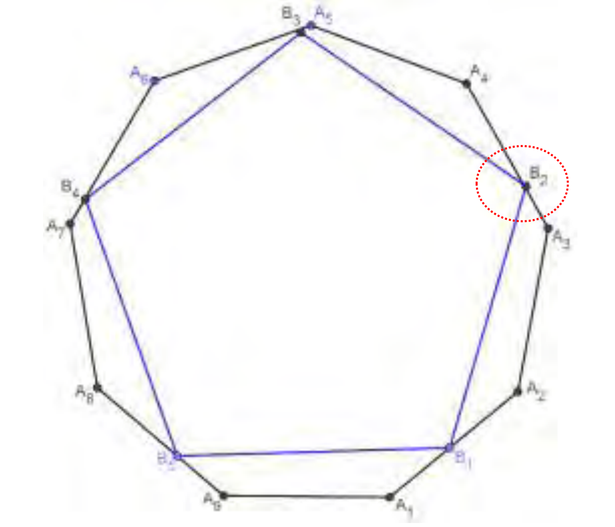
圖(三十三)正六邊形內接正五邊形(無內接)



圖(三十四)正七邊形內接正五邊形(無內接)



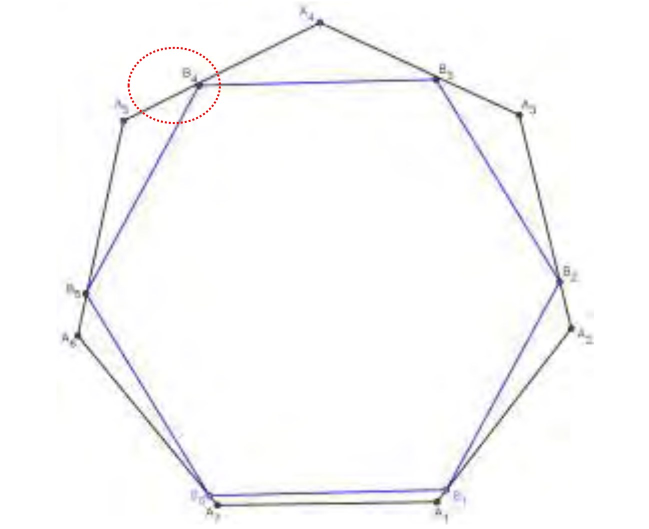
圖(三十五)正八邊形內接正五邊形(無內接)



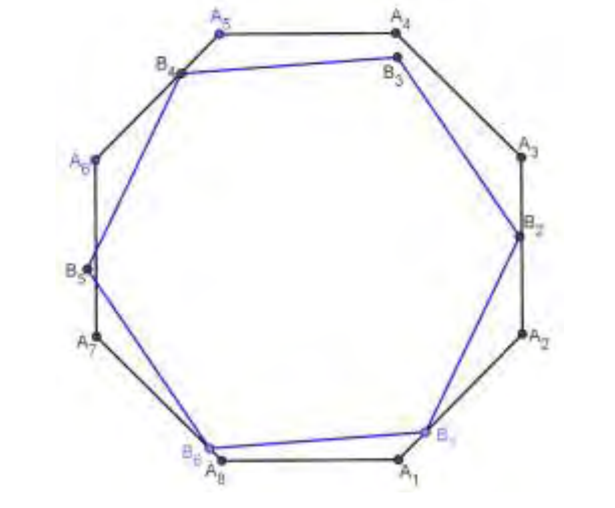
圖(三十六)正九邊形內接正五邊形(無內接)

表(三) 嘗試在正六、七、八、九邊形內接正五邊形

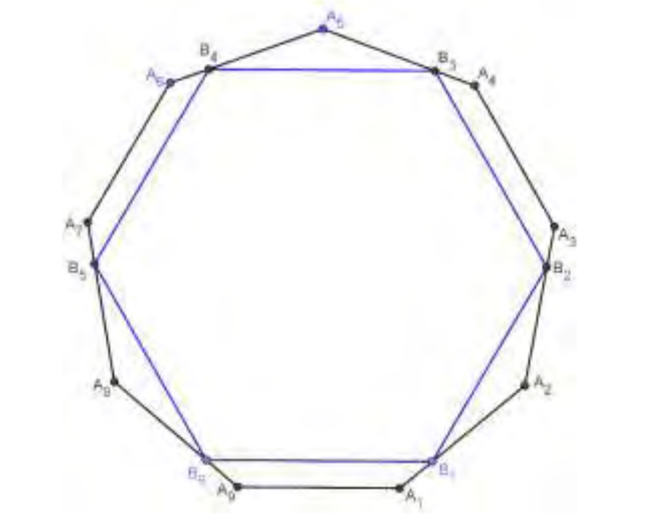
二、內接正六邊形：除了 n 為六的倍數以及 n=9 外，n=7,8,10,11 皆無法成功畫出其他內接正多邊形，如下表(四)：



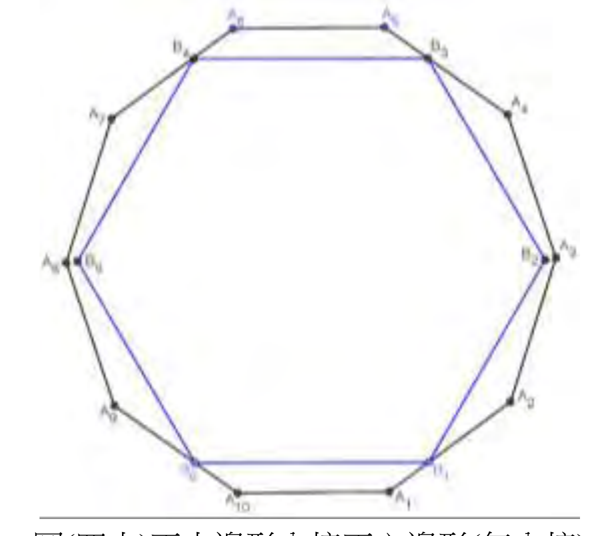
圖(三十七)正七邊形內接正六邊形(無內接)



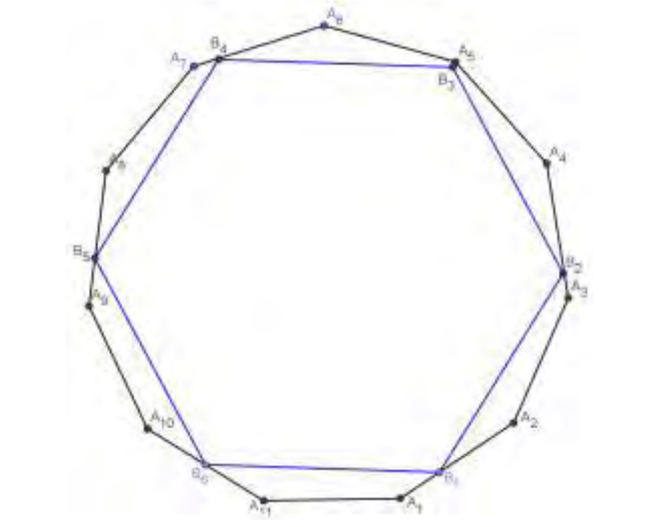
圖(三十八)正八邊形內接正六邊形(無內接)



圖(三十九)正九邊形內接正六邊形(有內接)

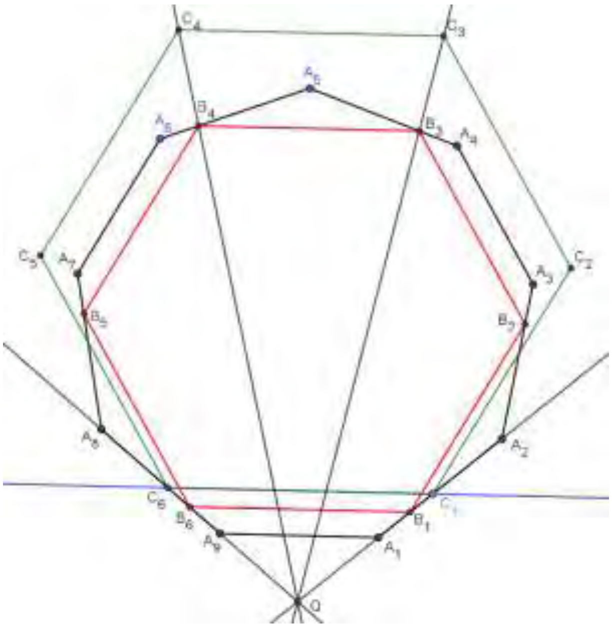


圖(四十)正十邊形內接正六邊形(無內接)

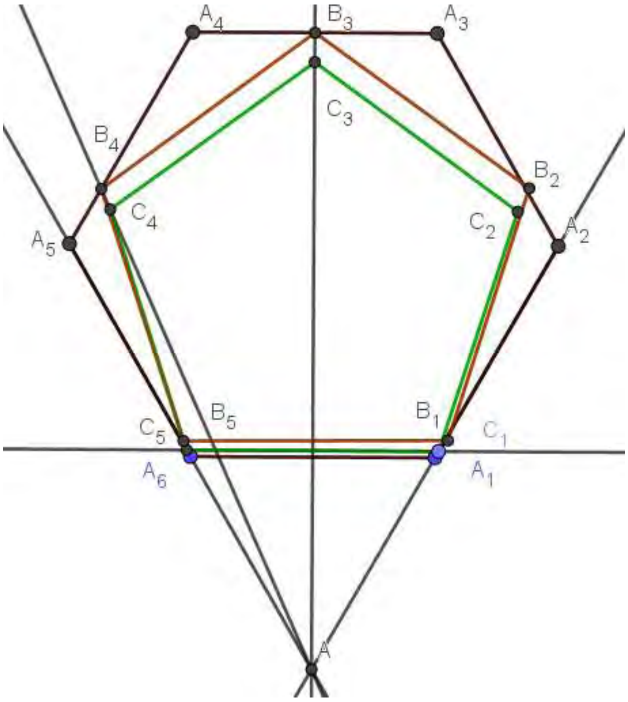

圖(四十一)正十一邊形內接正六邊形(無內接)

表(四) 嘗試在正七、八、九、十、十一邊形內接正六邊形

三、平行法的推廣：由本篇討論的作圖中，我們知道若正 n 邊形與其內接正 m 邊形有一組平行邊，則可以使用平行法作法，而在上述我們僅發現在正九邊形中可以內接正六邊形，且有一組平行邊，於是嘗試使用平行法作圖，找尋內接正六邊形的頂點時，我們修正 $d=\left[\frac{\frac{n}{m}-1}{2}\right]$，其中[ ]為高斯記號，作圖如下(圖(四十二))：


圖(四十二)以平行法在正九邊形內接正六邊形(可內接)

（註：一開始我們是想把平行法推廣到 m>4 的情況，所以嘗試以平行法繪製 n=6、m=5 的圖，如圖(四十三)，發現失敗了，所以回過頭用繪圖觀察，發現了上述表(三)、表(四)的狀況）



圖(四十三)以平行法嘗試在正六邊形內接正五邊形(無法內接，B_2不在正六邊形上)

四、未來展望：而除了在 n 和 m 具有倍數關係的情形時，正 n 邊形可以作出無限多個內接正 m 邊形外，其他還有哪些可以作出內接圖形呢？而這些圖形的 m,n 有何關聯？其內接的正 m 邊形又有幾個呢？是無限多個？(若有無限多個，其共同性質為何？)亦或是只有一個呢？(若只有一個，其共同性質為何？)，另外有內接正 m 邊形的情況中，有哪些是可以使用平行法作圖的呢？這些都是值得我們繼續探討的問題。

捌、參考資料

一、中華民國第 54 屆中小學科展 **<探討正 n 邊形內接正三角形>**

二、羅驥韡。**GeoGebra 幾何與代數的美麗邂逅(第二版)**。臺北市:五南。2017

三、盧建民、蔡盛鴻、盧家潔、李姿樺。**難題剋星（13）幾何圖形與尺規作圖**。高雄市:前程出版社。(2008)

【評語】050404

1. 建議作品於內接長方形可以考慮以邊長的連續性來探討較簡潔，唯一性的討論挺好，內接正 n 邊形式值得繼續延伸的題材。另外，作品於證明[正七邊形 4K+3(只有)內接正四邊形]敘述不清楚，內文呈現「非全等內接四邊形數一個」，但在繪圖中，卻有多個全等的四邊形出現。敘述並不明確。

2. 本作品研究正 n 邊形內接正四邊形之可行性與作圖。作者經由觀察，先確定任意正 n 邊形內接四邊形可行，再經由詳細列出作圖方法來確定這樣的觀察是正確的。接著再討論這些內接四邊形是否會與原正 n 邊形共重心，或共對稱軸。其實這問題真正有趣在於未來與展望的部分，內接正五邊形、正六邊形都不見得存在。探討其原因應該是一個有趣且值的研究的方向。

作品海報

壹、研究動機：

在閱讀第54屆全國中小學科學展覽歷屆作品時，看到在一個正n邊形的三個不同邊上可以內接無限多個正三角形，因此好奇：是否在正n邊形內也都能接出正四邊形？是否也有無限多個內接正四邊形？因此開始進行研究和探討。

貳、研究設備器材：

紙、筆、量角器、電腦、Geogebra。

參、研究方法步驟(一)觀察與假設：

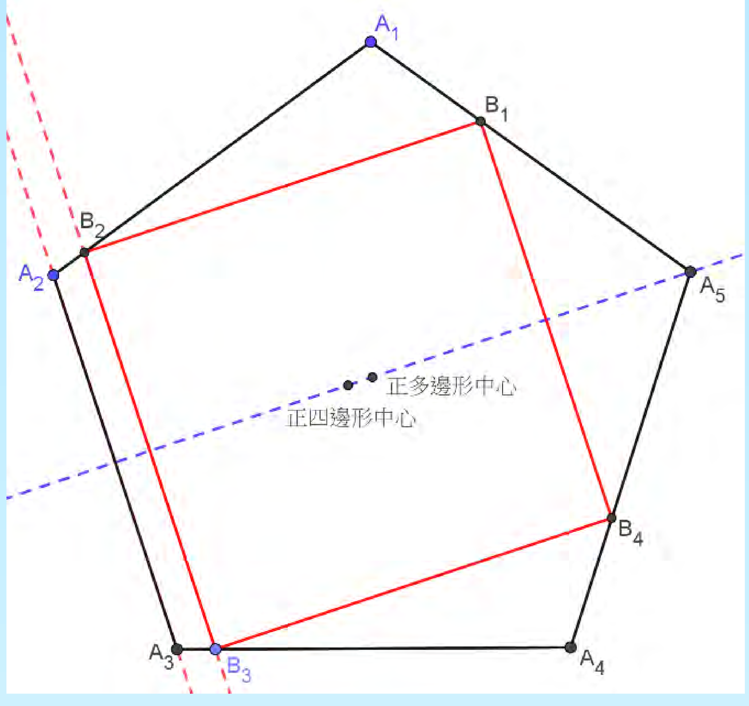
一、定義

(一)以下所有探討之正n邊形之n個頂點命名為A_1、A_2、A_3、...、A_n，其內接四邊形之4個頂點命名為B_1、B_2、B_3、B_4。

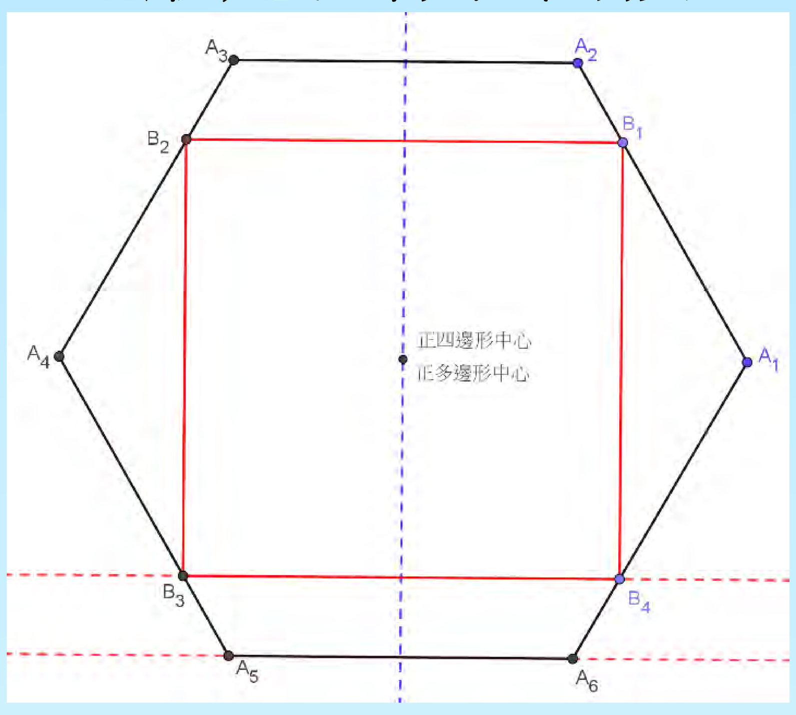
(二)在同一個正n邊形中所作之兩內接正四邊形經旋轉或對稱後能完全重疊者，我們稱為「全等」，視為"同一個")。

(三)將各個正多邊形依邊長數分為n= 4k、4k+1、4k+2、4k+3，k是正整數。

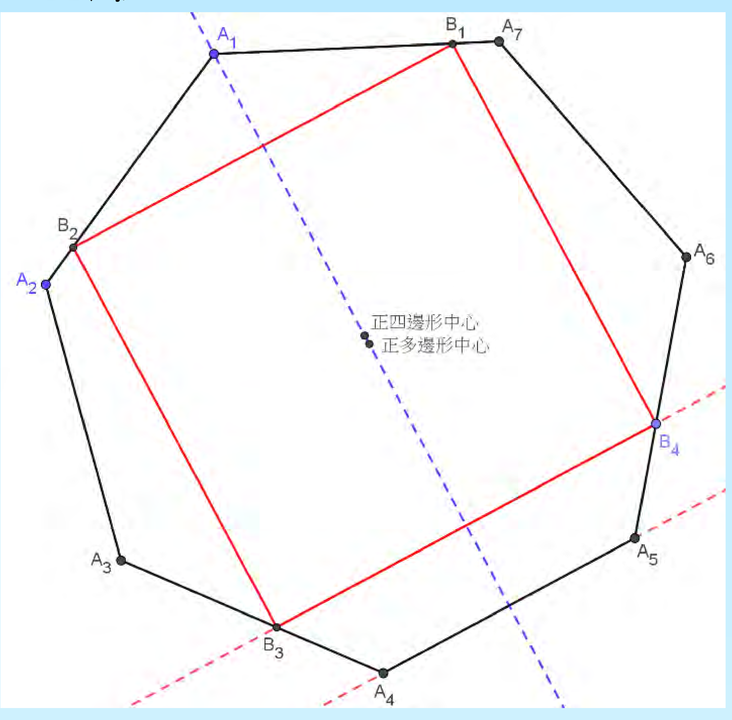
二、以電腦繪圖觀察正n邊形是否存在內接正四邊形



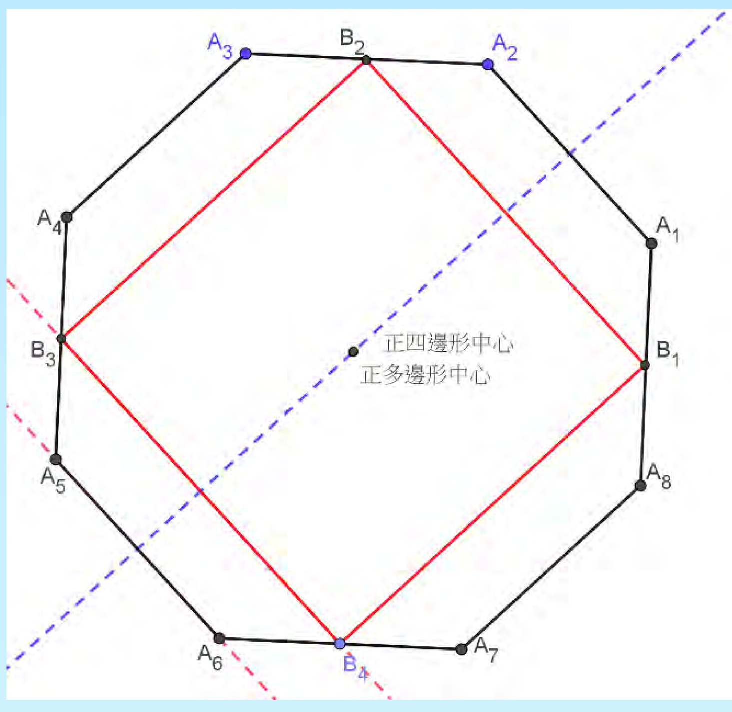
圖(一)正五邊形



圖(二)正六邊形



圖(三)正七邊形



圖(四)正八邊形

推測：我們發現正五、六、七、八邊形皆有內接正四邊形，因此猜測所有正n邊形皆有內接正四邊形，且當n=4k,4k+2的內接正四邊形與正n邊形共中心。

三、內接正四邊形與正n邊形共中心

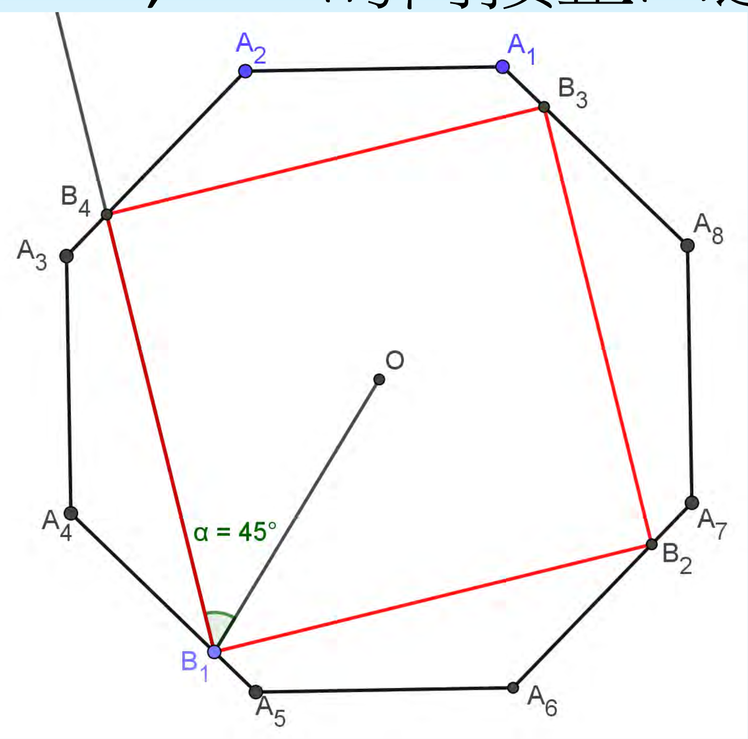
(一)正n(n=4k)邊形作圖：

1.取正n邊形的中心O

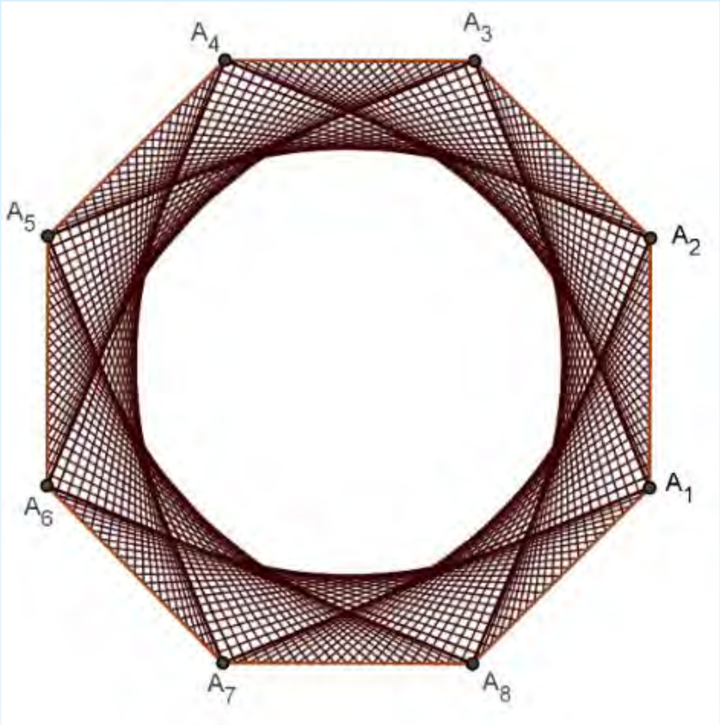
2.在正n邊形的邊長上取任意一點B_1作為正四邊形之一頂點

3.以B_1為頂點，$\overleftrightarrow{OB_1}$旋轉45°，和正多邊形交於$B_2$

4.以$\overline{B_1B_2}$為邊長作正四邊形



圖(五)正八邊形作圖



圖(六)正八邊形內接正四邊形連續性

(二)正n(n=4k)邊形有無限多個內接正四邊形證明

證:在正n邊形(n=4k)中，令$A_1(1,0)$，$A_2(cos(\frac{360^o}{n}),sin(\frac{360^o}{n}))=(cos(\frac{90^o}{k}),sin(\frac{90^o}{k}))$ ...

$A_i(cos(\frac{360^o(i-1)}{n}),sin(\frac{360^o(i-1)}{n}))$......$A_n(cos(\frac{360^o(n-1)}{n}),sin(\frac{360^o(n-1)}{n}))$

取正四邊形頂點$B_1(a\ cos(\theta),a\ sin(\theta))=(\alpha,\beta)$，則

$B_2(a\cos(90^o+\theta),a\sin(90^o+\theta))=\ (-a\sin(\theta),a\cos(\theta))=(-\beta,\alpha)$，

因為$\frac{n}{4}=\frac{4k}{4}=k$，故若取$B_1\ \epsilon\overline{A_1A_2}$，則 $B_2\ \epsilon\overline{A_{k+1}A_{k+2}}$。

$\overleftrightarrow{A_1A_2}:y=\frac{sin(\frac{90^\circ}{k})}{cos(\frac{90^\circ}{k})-1}x-\frac{sin(\frac{90^\circ}{k})}{cos(\frac{90^\circ}{k})-1}$ ， $\overleftrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}:y=-\frac{cos(\frac{90^\circ}{k})-1}{sin(\frac{90^\circ}{k})}x+1$

$$則\begin{cases}\beta=\frac{sin(\frac{90^o}{k})}{cos(\frac{90^o}{k})-1}\alpha-\frac{sin(\frac{90^o}{k})}{cos(\frac{90^o}{k})-1}.......(1)\\ \alpha=\frac{cos(\frac{90^o}{k})-1}{-sin(\frac{90^o}{k})}(-\beta)+1.......................(2)\end{cases}\qquad(*)$$

其中(2)式經移項後與(1)式相同，故可知聯立方程式(*) 有無限多解，故正n邊形(n=4k)可作無限多個內接正四邊形。

又$\overline{A_1B_1}=\sqrt{(1-a\ cos\,\theta)^2+(-a\ sin\,\theta)^2}$ ； $\overline{A_{k+1}B_2}=\sqrt{(-a\ sin\,\theta)^2+(1-a\ cos\,\theta)^2}$，故只要取$\overline{A_1B_1}=\overline{A_{k+1}B_2}$，並以$B_1$ 、B_2為兩頂點即可做出正n邊形(n=4k)的內接正四邊形。

(三) 正n(n=4k+2)邊形：

從前面的繪圖觀察，正六邊形有一個和其共中心的內接正四邊形，也一樣擁有對稱的性質，因此我們也能利用正n邊形的中心來作圖：

1. 取正六邊形的中心O

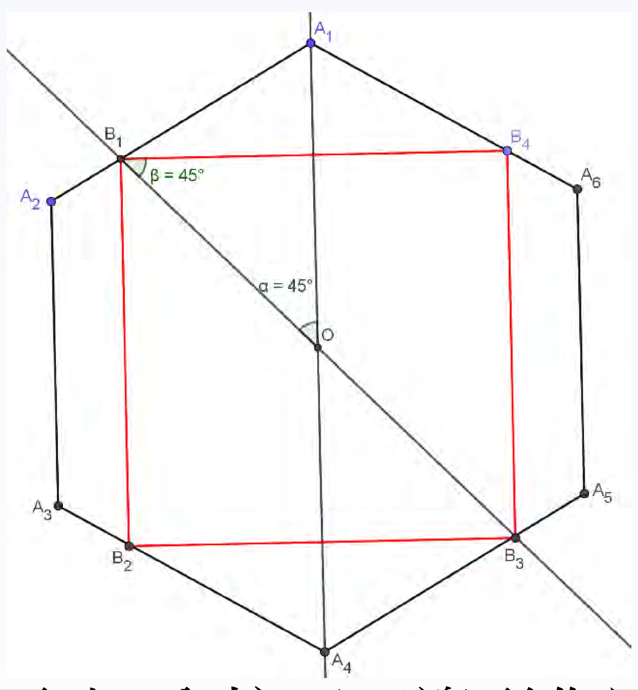
2. 以一頂點A_1和O連線

3. 以O為頂點，將$\overleftrightarrow{OA_1}$旋轉45°，並和正六邊形交於$B_1$點

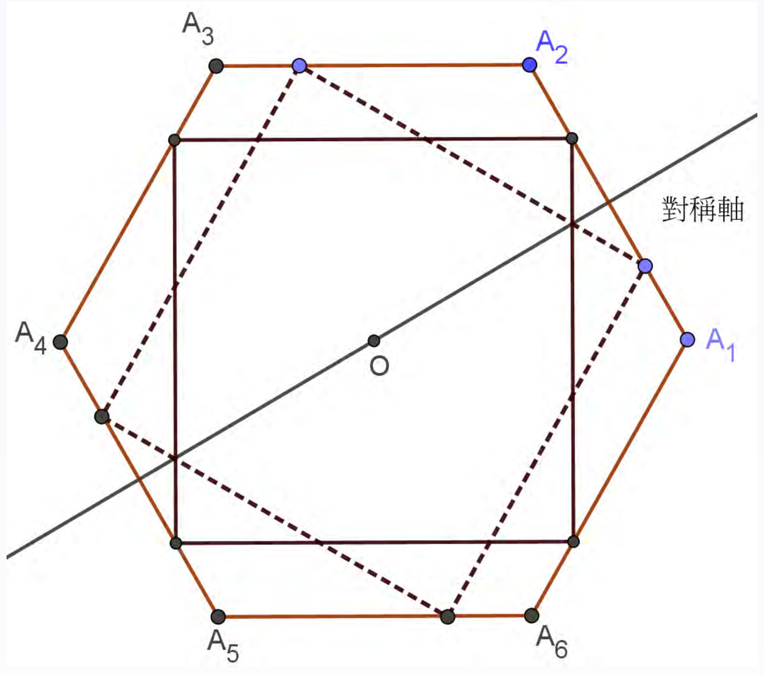
4. 以B_1為頂點，將$\overleftrightarrow{B_1O}$旋轉45°，並和正六邊形交於B2點

5. 以$\overline{B_1B_2}$為邊長做正四邊形

6. 正四邊形B1B2B3B4即所求



圖(七)內接正四邊形作圖



圖(八)case1和case2

(正n(n=4k+2)邊形證明中:令$A_1(1,0)$，$A_2(cos(\frac{360^o}{n}), sin(\frac{360^o}{n})) = (cos(\frac{90^o}{k}), sin(\frac{90^o}{k}))$ …..

$A_i(cos(\frac{360^o(i-1)}{n}), sin(\frac{360^o(i-1)}{n}))$……$A_n(cos(\frac{360^o(n-1)}{n}), sin(\frac{360^o(n-1)}{n})$

(四) 確認與正n(n=4k+2)邊形共中心的正四邊形的頂點位置

在正n(n=4k+2)邊形中，取正四邊形頂點$B_1(a\cos\theta, a\sin\theta) \in \overline{A_kA_{k+1}}$，$\frac{360°(k-1)}{n} < \theta < \frac{360°k}{n}$

則$B_2(a\cos(\theta+90^o), a\sin(\theta+90^o)) \in \overline{A_xA_{x+1}}$，且$\frac{360°(k-1)}{n} + 90° < \theta + 90° < \frac{360°k}{n} + 90°$

因n=4k+2，則$\frac{360^o(k-1)}{n} + 90^o = \frac{360^o(k-1)+90^o(4k+2)}{n} = \frac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n}$，故$\frac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n} < \theta+90^o < \frac{360^o(2k+\frac{1}{2})}{n}$，

又$B_2 \in \overline{A_xA_{x+1}}$，所以$\frac{360^o(x-1)}{n} < \frac{360^o(2k-\frac{1}{2})}{n} < \theta+90^o < \frac{360^o(2k+\frac{1}{2})}{n} < \frac{360^o(x-1)}{n}$且$x$為正整數

得x =2k或2k+1，故$B_2 \in \overline{A_{2k}A_{2k+1}}$或$\in \overline{A_{2k+1}A_{2k+2}}$

(五)與正六邊形共中心的內接正四邊形只有一個

證:正六邊形中(及n=6)。設正四邊形中，$\overline{OB_1} = a$，$\angle B_1OA_1 = \theta$，則$B_1(a\cos\theta, a\sin\theta) = (\alpha,\beta)\ \epsilon \overline{A_1A_2}$

$B_2(a\cos(\theta+90°), a\sin(\theta+90°)) = (-a\sin\theta, a\cos\theta) = (-\beta,\alpha)\ \epsilon \overline{A_2A_3}$或$\overline{A_3A_4}$

Case1 若$B_2 \in \overline{A_2A_3}$，因為$\overleftrightarrow{A_1A_2}: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$，$\overleftrightarrow{A_2A_3}: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

則$\begin{cases} \beta = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3} \\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 得$\beta = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$，故可以找到一個正四邊形，其$a = \sqrt{6-\sqrt{3}}$

Case2 若$B_2 \in \overline{A_3A_4}$，因為$\overleftrightarrow{A_1A_2}: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$，$\overleftrightarrow{A_2A_3}: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

則$\begin{cases} \beta = -\sqrt{3}\alpha + \sqrt{3} \\ \alpha = \sqrt{3}(-\beta) + \sqrt{3} \end{cases} \to \alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$，故可以找到一個正四邊形，其$a = \sqrt{6-\sqrt{3}}$

因case1和case2的半對角線一樣，故case1和case2的正四邊形為全等

(六)正n(n=4k+2)邊形是否有不共中心內接正四邊形

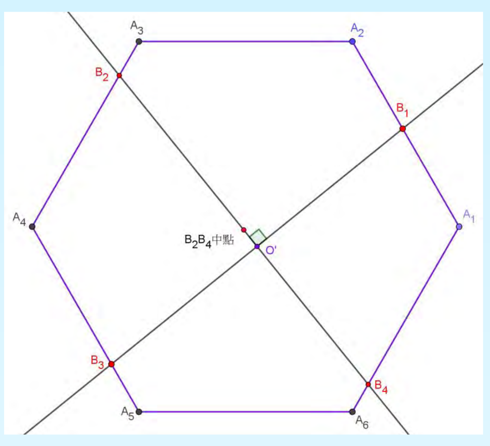
證: 設$y = mx + n$分別交$\overline{A_1A_2}: y = \frac{-\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}x + \frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}$於$B_1$及$\overline{A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}}: y = \frac{-\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}x - \frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}}$於$B_3$，

令$\frac{\sin\frac{360^0}{n}}{1-\cos\frac{360^0}{n}} = a$，$\begin{cases} y = mx + n \\ y = -ax + a \end{cases}$，得$B_1(\frac{n-a}{-a-m}, \frac{-a(n+m)}{a-m})$，$\begin{cases} y = mx + n \\ y = -ax - a \end{cases}$，得$B_3(\frac{a+n}{-a-m}, \frac{-a(n-m)}{-a-m})$

B_1和B_3中點(正四邊形中心O')= ($\frac{n}{-a-m}$, $\frac{-an}{-a-m}$)又過O'且和$\overleftrightarrow{B_1B_3}$垂直的直線為$y = -\frac{1}{m}x + \frac{(am+n)n}{m(a-m)}$，

交正n邊形於B_2、B_4，設B_2位於$y = bx + c$，B_4位於$y = bx - c$

$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}x + \frac{(am-1)n}{m(a+m)} \\ y = bx + c \end{cases}$，得$B_2(\frac{\frac{n(am-1)}{(a+m)m}+c}{-\frac{1}{m}-b}, \frac{-\frac{c}{m}-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}b}{-\frac{1}{m}-b})$，$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}x + \frac{(am-1)n}{m(a+m)} \\ y = bx - c \end{cases}$，得$B_4(\frac{\frac{n(am-1)}{(a+m)m}-c}{-\frac{1}{m}-b}, \frac{\frac{c}{m}-\frac{n(am-1)}{(a+m)m}b}{-\frac{1}{m}-b})$



圖(九) 必共中心證明

B_2和B_4中點$\left(\frac{(am+1)n}{(a+m)(1+mb)}, \frac{(am+1)nb}{(a+m)(1+mb)}\right)$即O'則$\begin{cases} \frac{n}{-a-m} = \frac{(am+1)n}{(a+m)(1+mb)} \dots(1) \\ \frac{-an}{-a-m} = \frac{(am+1)nb}{(a+m)(1+mb)} \dots(2) \end{cases}$，將(1)式乘上$b$，若n≠ 0，則得$a$=-$b$，

再將 a=-b 帶回式子中，得1=-1(→←)，故n=0，正四邊形中心為(0 ,0)，必和正n(n=4k+2)邊形共中心。

四、內接正四邊形與正n邊形不共中心

(一) 以平行底邊方式作圖，我們稱之為「平行法」:

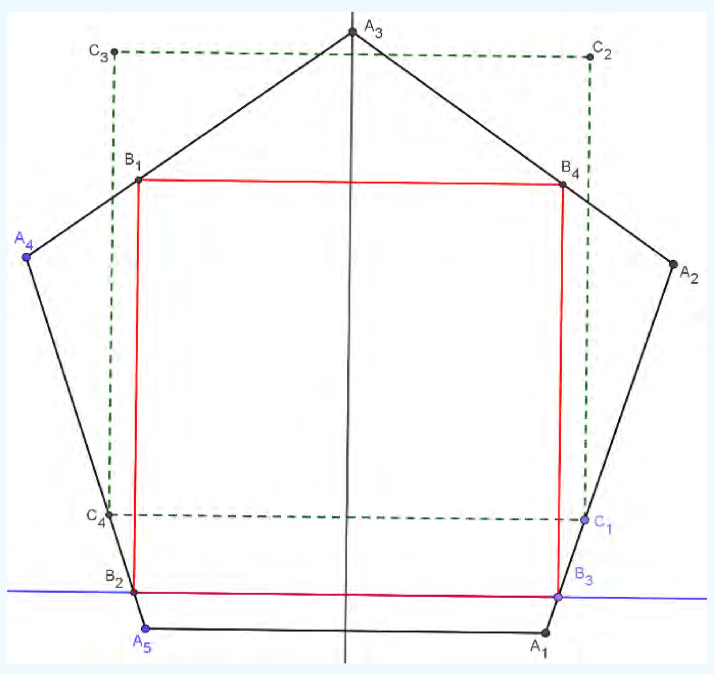
(1)在正n邊形上選一邊作為底邊$(\overline{A_1A_2})$

(2)在$\overline{A_1A_2}$上取一點B_1作為正四邊形之一頂點

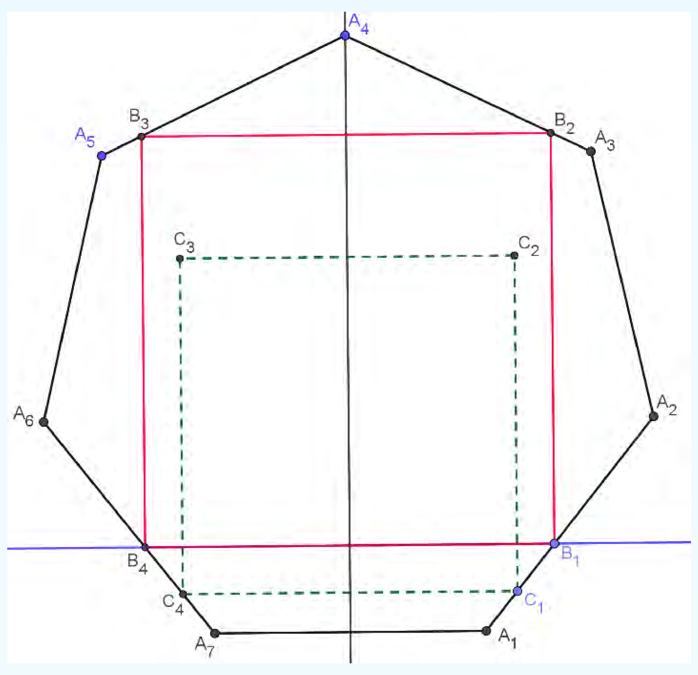
(3)作一平行線過B_1且交正n邊形於B_4

(4)以$\overline{B_1B_4}$為邊長作一正四邊形

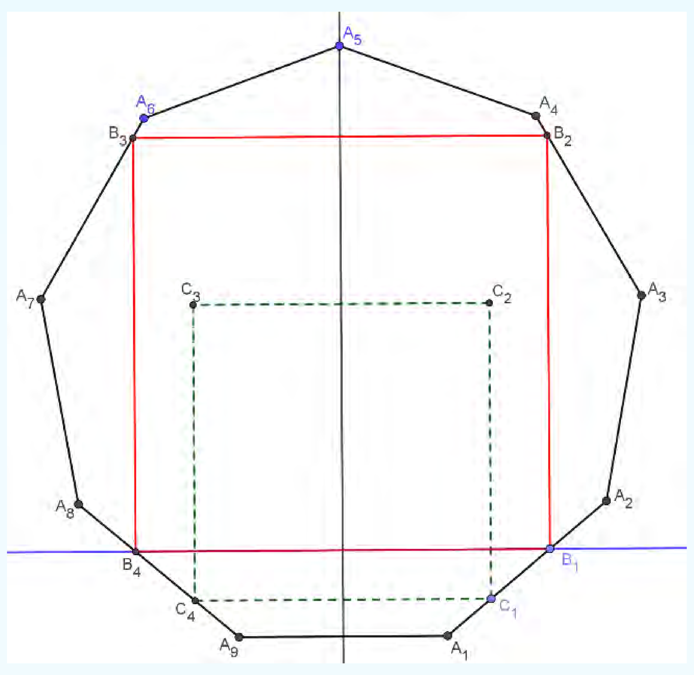
(5)移動B_1使正四邊形四個頂點皆位於正n邊形邊上



圖(十)正五邊形平行法作圖



圖(十一)正七邊形平行法作圖



圖(十二)正九邊形平行法作圖

（註1：因為B_1、B_4已在正四邊形邊上，當移動B_1點時，正四邊形放大縮時，必能找到B_2、B_3在正n邊形上，圖中正四邊形$C_1C_2C_3C_4$為移動過程中出現的正四邊形。

註2：圖中垂直平行邊且過兩圖形中心之直線為正n邊行與內接正四邊形的共用對稱軸。）

(二)平行法的尺規作圖步驟：上面我們利用移動B_1的方式找出內接正四邊形，下面我們給一個平行法的尺規作圖法，以下我們以正九邊形為例(如圖(十三))：

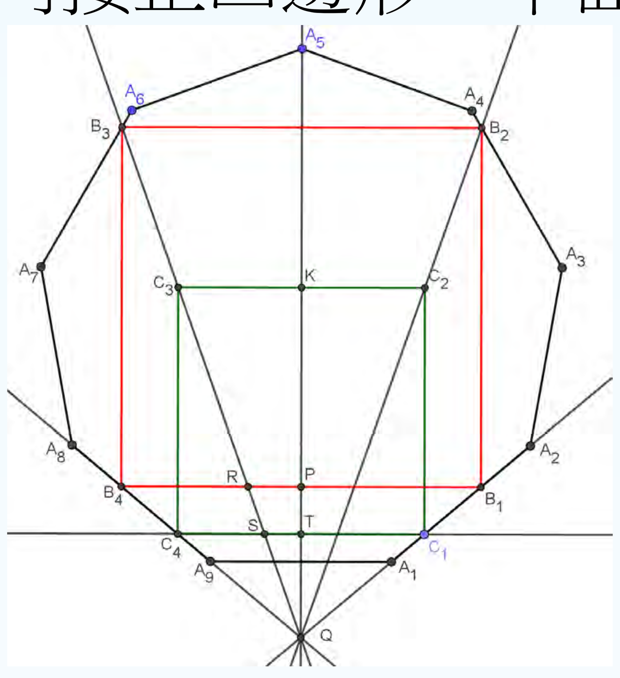
(1)作一正四邊形$C_1C_2C_3C_4$底邊平行$\overline{A_5A_6}$

(2)延長$\overline{A_4A_5}$及$\overline{A_6A_7}$取其交點Q

(3)找兩線$\overleftrightarrow{QC_1}$及$\overleftrightarrow{QC_2}$和正九邊形邊上的交點$B_1$、$B_2$

(4)以$\overline{B_1B_2}$為邊作一正四邊形

(5)正四邊形$B_1B_2B_3B_4$即所求



圖(十三)正九邊形尺規作圖

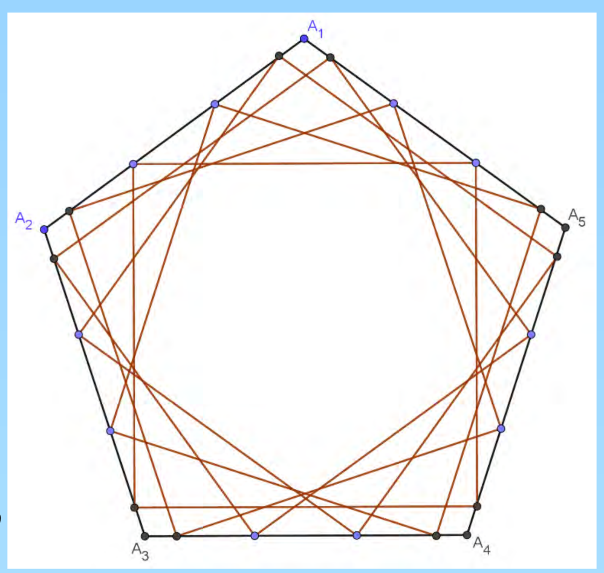
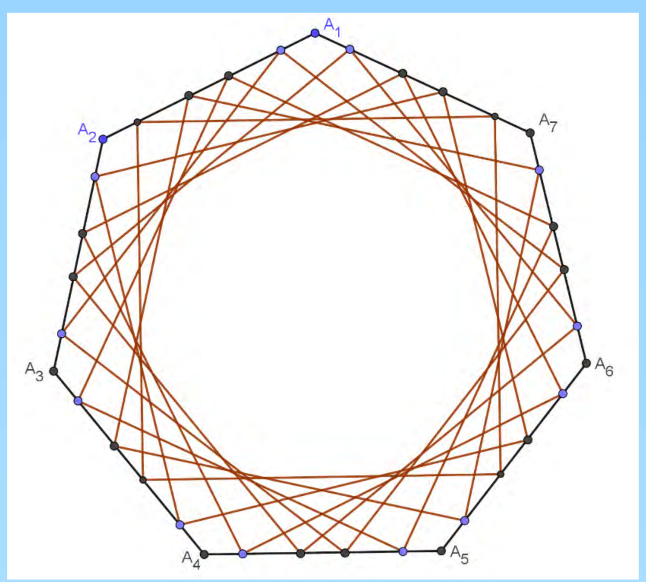
(定義$d = \left[\frac{\frac{n}{4}-1}{2}\right]$，其中[]為高斯記號，則$B_1$在$\overline{A_{d+1}A_{d+2}}$)

(說明：假設以B_2B_3為邊所作之正四邊形頂點B_4不在$\overline{A_8A_9}$上，則表B_4、C_4、Q不共線，則ΔB_4RQ與ΔC_4SQ不相似，得$\overline{RQ}:\overline{SQ} \neq \overline{SC_4}:\overline{RB_4}$，又$\Delta RPQ \sim \Delta STQ \sim \Delta SC_4C_3 \sim \Delta RB_4B_3$，故$\overline{RQ}:\overline{SQ} = \overline{SC_3}:\overline{RB_3} = \overline{SC_4}:\overline{RB_4}$ (矛盾)

故B_4、C_4、Q共線，B_4在$\overline{A_8A_9}$上，B_1同理$\overline{A_1A_2}$上，故四邊形$B_1B_2B_3B_4$為內接正四邊形。

(三)正n(n=4k+1、4k+3)邊形的內接正四邊形個數

一開始在我們使用繪圖觀察時，無法確定正n(n=4k+1或4k+3)邊形中內接正四邊形個數。現在我們將平行法在正n(n=4k+1、4k+3)邊形內所找到的內接正四邊形其中兩個頂點固定在正多邊形的邊上，並移動這兩個頂點，在移動的過程中，將能作為內接正四邊形的留下，我們發現，這些正四邊形分別是平行於正多邊形的不同邊，皆為全等，因此我們猜測只存在一個內接正四邊形。

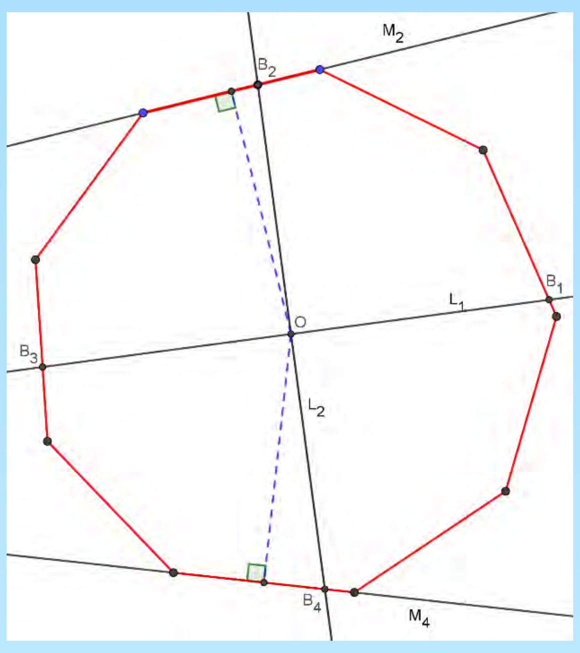
圖(十四)(十五)正五、七邊形內接正四邊形個數

五、正n(n=4k+1、4k+3)邊形只有一個與其不共中心的內接正四邊形

(一)沒有共中心之內接正四邊形

證: 設兩圖形共中心(0,0)，則存在一直線過(0,0)且交正n邊形於B_1、B_3使$\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$(半對角線)做一直線$L_2 \perp L_1$且過(0,0)，交正n邊形$B_2$ 、B_4，使$\overline{B_2O}=\overline{B_4O}=\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$，則正四邊形$B_1B_2B_3B_4$為內接正四邊形。

正n邊形中，B_2所在的邊定為M_2且B_4所在的邊定為M_4。



圖(十六)正九邊形示意圖

$\because \overline{B_2O}=\overline{B_4O} \therefore d(O；M_2)=d(0；M_4)$ (即為圖中虛線段)

延伸M_2、M_4交於P點，連接$\overline{OP}$，

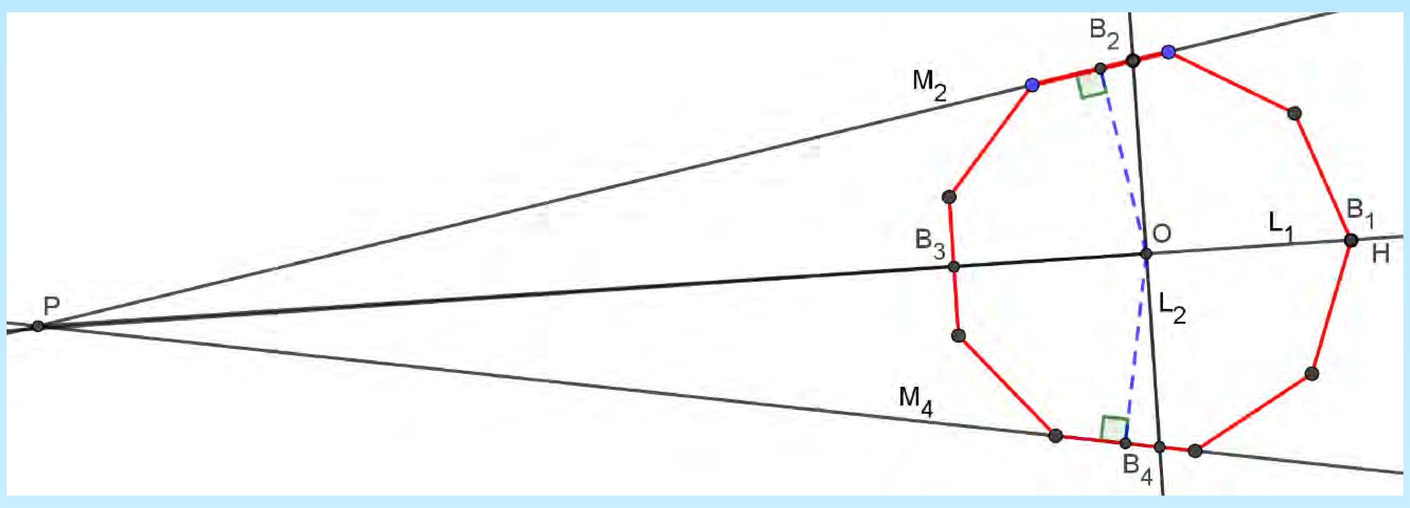
因為$d(0；M_2)=d(0；M_4)$，

因此$\overline{OP}$必為正n邊形之角平分線，

又正n邊形任取兩邊所作之角平分線必為其對稱軸(會過一頂點)，

故$\overline{B_1O} \neq \overline{B_3O}$(矛盾)，則

正n(n=4k+1、4k+3)邊形必無共中心之內接正四邊形。



圖(十七)正九邊形兩邊所作角平分線必為對稱軸

(二) 內接正四邊形的中心在正n邊形的對稱軸上

由上述的結論可知，當$\overline{B_2O}=\overline{B_4O}=\overline{B_1O}=\overline{B_3O}$，正四邊形的中心必 在正n邊形的對稱軸上。

(三) 正n(n=4k+1,4k+3)邊形只有一個內接正四邊形

證:由(二)可知內接正四邊形的中心在正n邊形的對稱軸上，假設正n邊形的對稱軸為x=0，

$A_1(1{,}0)$、$A_n(-1{,}0)$在x軸上、正四邊形中心為$O_2(0{,}b)$。

設內接正四邊形四個頂點分別為$B_1(x_1,y_1)$、$B_2(x_2,y_2)$、$B_3(x_3,y_3)$、$B_4(x_4,y_4)$，

且$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}=0$、$\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}=b$，得 $x_1=x_2=-x_3=-x_4$，又正n邊形對稱於x=0 ，

則B_1和B_4對稱於y軸，故$y_1=y_4$，同理$y_2=y_3$；若B_1交正n邊形於直線M_1 ：$y=m_1x+b_1$

、 B_2交正n邊形於直線M_2 ：$y=m_2x+b_2$ 、B_3交正n邊形於直線M_3 ：$y=-m_2x+b_2$

、B_4交正n邊形於直線M_4 ：$y=-m_1x+b_1$ （根據對稱性，不難假設M1、M2、M3、M4）

又$\overline{B_1B_2}=\overline{B_1B_4}$，故$y_2-y_1=x_1-x_4=2x_1$，推得 $m_2x_2+b_2-m_1x_1-b_1=2x_1$，

故$x_1=\frac{b_2-b_1}{2+m_1-m_2}$為唯一解，故正n(n=4k+1,4k+3)邊形只有一個內接正四邊形。

肆、研究結果

一、所有正n邊形皆有內接正四邊形。

二、正n邊形與內接正四邊形共對稱軸。

三、正n邊形的內接正四邊形之相異處：

	4k	4k+1	4k+2	4k+3
有無與正n邊形共中心	有	無	有	無
非全等內接正四邊形的個數	無限多個	1個	1個	1個

表(二)正n邊形內接正四邊形之結論

四、可利用同一尺規作圖「平行法」在所有正n邊形內找到一內接正四邊形。

伍、討論與未來展望

一、討論

在中華民國第54屆中小學科展 <探討正n邊形內接正三角形>中提到，正n邊形的內接正三角形有無限多個，而我們的研究發現，除了在n=4k時有無限多個內接正四邊形外，其餘皆只有一個(即有「唯一性」)，實際上，我們本來的想像是可能可以作出很多個，只是大小不同，這裡的唯一性，讓我們覺得驚奇，於是我們嘗試先用電腦軟體繪圖觀察正n邊形內接正m(m>4)邊形的情況，起初我們想像只要位置喬的夠好，應該可以將正m邊形塞入正n邊形中，但經過我們移動圖形後發現：1、內接正五邊形：除了n為五的倍數外，並無法作出圖形。2、內接正六邊形：除了n為六的倍數以及n=9外，n=7,8,10,11皆無法成功畫出其他內接正多邊形。

二、未來展望：

除了在n和m具有倍數關係的情形時，正n邊形可以作出無限多個內接正m邊形外，其他還有哪些可以作出內接圖形呢？而這些圖形的m,n有何關聯？其內接的正m邊形又有幾個呢？是無限多個？(若有無限多個，其共同性質為何？)亦或是只有一個呢？(若只有一個，其共同性質為何？)，另外有內接正m邊形的情況中，有哪些是可以使用平行法作圖的呢？這些都是值得我們繼續探討的問題。

陸、參考資料

一、中華民國第54屆中小學科展 **<探討正n邊形內接正三角形>**

二、羅驥韡。**GeoGebra幾何與代數的美麗邂逅(第二版)**。臺北市:五南。2017

三、盧建民、蔡盛鴻、李姿樺。**難題剋星（13）幾何圖形與尺規作圖**。高雄市: 前程出版社。(2008)