中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050403

一個紙牌遊戲的策略問題

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 洪榆晴 高二 洪瑞婕	洪士薰

關鍵詞：成本矩陣、最佳策略、組合分配

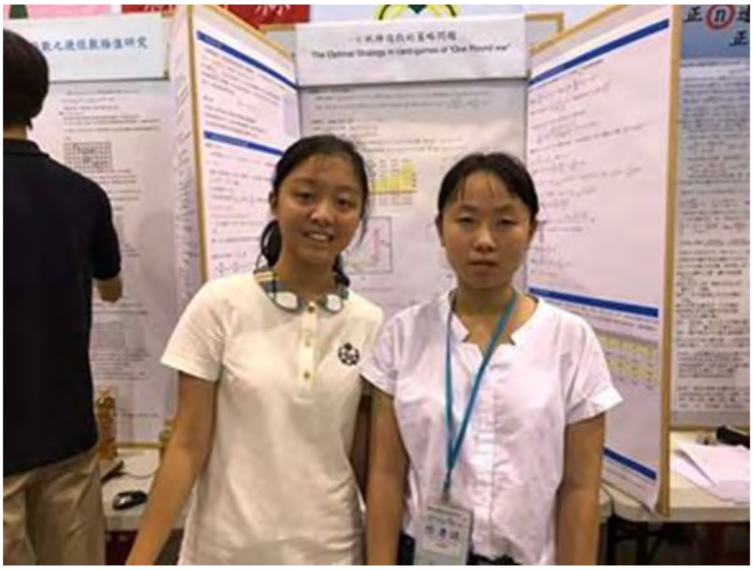
得獎感言

一趟科學之旅

對於能夠在這次的科展當獲得佳績，我們對此懷著深深的榮幸以及對家長、老師、評審教授、主辦人員、全體工作人員的付出十分感謝。謝謝家長的努力支持，使我們無後顧之憂。謝謝老師的教導，使我們在陷入困境時能有人拉一把。謝謝評審教授給予我們的鼓勵及肯定。謝謝主辦人員的努力讓我們有了參加科展的機會。謝謝工作人員們的辛勤工作，使科展能圓滿落幕。再次感謝各位的付出，沒有各位的協助，我們將沒有今天的成就。

雖然早已不是首次參與，但參加科展總會有些許緊張。參展第一天，從一早就吃不太下飯，懷著忐忑的心情一遍又一遍的重新閱讀著自己撰寫的文章，試圖讓自己冷靜。進了展場後，緊張的氛圍是更加凝重，但隨著一輪報告完後，我們的信心增加了不少，也逐漸冷靜了下來。只要把自己所能做的做到最好，一定能得到好結果，要相信自己，我們一直在內心這麼告訴自己。參展第二天是問答時間，雖然對於是否能順利地回答問題還是有點擔心，不過最後很好的發揮了，也為科展畫下圓滿的結尾。

科展的目的並不止於獲得佳績，對於各領域的研究成果才是真正的無價之寶。透過研究成果，一整個產業鏈、國家，甚至是世界都可能因此而改變。千萬不要輕視自己的成果，因為誰都不知道會不會因為你的研究而帶來巨大的變化。相信自己，並且不要停止地在科學之路上持續探究，我想將給人生帶來無比的樂趣。



這張照片是在我們的攤位前面，由我們的學校老師所拍攝。在經過上午緊張的第二階段評審後，我們都鬆了一口氣，在下午的公開展覽中，也展現了更輕鬆、大方的態度，希望能帶給參觀者好的體驗！

摘要

A、B 兩方以一副牌面數字為 1~m 的 m 張牌進行遊戲，每方各持有其中 n 張牌，其中 $2n \le m$。雙方每次各出一張牌，牌面數字大者獲勝，如此進行 n 回合的比賽稱為(m, n)-遊戲。若 $m > 2n$ 時，B 方就不能根據自己手上的牌確認對手 A 方的牌，因此每一回合的勝負是隨機的。但若 B 方能知道 A 方的出牌邏輯，則 B 方是否有一個輸得比較少(即贏得比較多)的策略？

本文找出，犧牲多少牌是策略成本最小的?

進一步，我們推廣到：如果 B 方有 K 張最好牌(稱為 K-優勢模型)，應犧牲多少張牌是

策略最小的?

而若出現 A,B 兩方牌面數字只相差 1 時(稱為和局模型，此時最佳策略也會有所不同：

令 $\chi(m) = C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{2n} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1}$

$\mu^* = \min_{1 \le m \le n-K}\{m \mid \chi(m) \ge 0\}$

則犧牲 $n - \mu^*$張牌是最佳策略。

最後我們得到了$n - \mu^*$的估計如下：

$$\sqrt{n \ln C} - \frac{1}{2}\ln C < n - \mu^* < \sqrt{n \ln n} + \ln n$$

壹、研究動機

A、B 兩方以一副牌面數字為 1~m 的 m 張牌進行遊戲，每方各持有其中 n 張牌，其中 $2n\le m$。雙方每次各出一張牌，牌面數字大者獲勝，如此進行 n 回合的比賽，稱為一輪。若 $m>2n$ 時，B 方就不能根據自己手上的牌確認對手 A 方的牌，因此每一回合的勝負是隨機的。但若 B 方能知道 A 方的出牌邏輯，則 B 方是否有一個輸得比較少(即贏得比較多)的策略?

假設每一輪的遊戲中，A、B 兩方手上的牌面數字是隨機分配的，而且 A 方會根據自己手上的牌的牌面數字大小，依由小而大的順序出牌(也可以是任一固定的大小順序出牌)，則一輪遊戲的 n 個回合中，B 方要以什麼樣的順序出牌，才能使得每一輪遊戲 B 方輸的回合數之期望值較小呢?

貳、研究目的

考慮數字為 1~m 的 m 張牌中，若 A,B 兩方各有其中的 3 張牌，而牌面的數字分別為

A：a_1, a_2, a_3

B：b_1, b_2, b_3

以 m = 10 為例：A、B 兩方分三回合每次各出手上的一張牌，牌面數字較大的一方贏得該回合，比完三回合稱為一輪，每一輪計算雙方輸贏的回合數。

若 A 方手中牌面的數字為 1、5、9，B 方手中牌面的數字為 10、8、3

	10	8	3
1	0	0	**0**
5	0	**0**	1
9	**0**	1	1

表 1

上面表格中，若值為 0 表示相應的回合中 A 方輸了；若值為 1 表示相應的回合中 B 方輸了。

假設 B 方知道 A 方的出牌策略為由小而大的順序出牌。

當 B 方設想一個出牌牌面數字的大小順序，例如：

B 方以手中數字最大的牌對 A 中數字最小的牌；

B 方以手中數字第二大的牌對 A 中數字第二小的牌；

B 方以手中數字最小的牌對 A 方手中數字最大的牌；

則依表 1 計算，在這一輪(三回合)的比賽中，B 方會輸的回合總數為

***表中第一列第一行的值＋第二列第二行的值＋第三列第三行的值* = 0 + 0 + 1。**

在上例中 B 方採取了某種數字大小的出牌順序與 A 方進行比賽，這個順序就稱為**策略**。

當Ｂ方採取某種策略出牌時，會依 A、B 兩方手中牌面的數字分配情形不同，而有不同的輸牌回合數。上面表一可以表示成矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因為Ａ、Ｂ兩方分配到的牌面數字有各種可能，所以我們考慮所有可能的情形。設 A 方的數字為 x, y, z，B 方的數字為 p, q, r 其中 $x > y > z, p < q < r$。

模仿表 1，我們會得到不同的矩陣，將所有這些矩陣加起來所得到的矩陣記為$[g_{ij}]_{3\times3}$，則 g_{ij} 表示 A 方牌面數字由小而大數來第 i 大的牌，與 B 方牌面數字由大而小數來第 j 小的牌比賽時，A 方在所有可能分配中獲勝的情形總數。

若將Ａ、Ｂ兩方分配到的牌面數字視為隨機，而且Ｂ方採取的策略為以手中數字最大牌對Ａ方中數字最小牌；手中數字第二大牌對Ａ方中數字第二小牌；手中數字最小牌對Ａ方中數字最大牌，則在一輪比賽後，Ｂ方會輸的回合數的期望值為

$$\frac{1}{C_3^m C_3^{m-3}}(g_{12}+g_{21}+g_{33})$$

這個期望值會因當Ｂ方所採取的策略不同而改變。因此，使得這個期望值最小(B 方輸掉的回合數之期望值為最小)的策略稱為**<u>最佳策略</u>**。為了計算上的方便，定義Ｂ方在策略{(1,2), (2,1), (3,3)}下的成本為 $g_{12} + g_{21} + g_{33}$。

在 m=6, n=3 時

$$[\,g_{ij}]_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 4 & 10 & 16 \\ 10 & 16 & 19 \end{bmatrix}$$

此時，Ｂ方在{(1,2), (2,1), (3,3)}策略下的成本為 4＋4＋19＝27。

本文中我們的研究目標為下列的問題：

(1)對於一般的 m, n(其中 $2n \le m$)，B 方策略中成本最小的策略是什麼。

(2)如果Ｂ方手上有 K 張牌是全部牌面中數字最大的 K 張牌時，成本最小的策略是什麼。

(3)如果將雙方數字相差 1 時的回合視為和局，此時 B 方策略中成本最小的策略是什麼。

參、研究過程或方法

一、說明及定義

定義 1-1.(m, n)-遊戲及 *B 方遊戲策略*

(1)考慮 A、B 兩方以一副牌面數字為 1~m 的 m 張牌進行遊戲，每方各持有其中 n 張牌，其中 $m \ge 2n$。雙方每次各出一張牌，牌面數字大者獲勝。如此進行 n 回合的比賽，稱為<u>一輪</u>。如果知道每輪比賽中 A 方的出牌大小順序，不妨假設為最小到最大順序，而 B 方

依手中牌面數字大小順序 $s_1, s_2,\cdots, s_n$ 出牌，其中 $s_1, s_2,\cdots, s_n$ 是 1 到 n 的重新排列(1 為 B 手中牌面數字最小的牌，n 的為最大的牌)。記算計算雙方獲勝牌數結果，這樣的比賽稱為**(*m*, *n*)**-遊戲。

(2)在(1)中的重排 $s = (s_1, s_2,\cdots, s_n)$，稱為 B 方的策略。

s 可以看成是$\{1, 2, 3,\cdots, n\}$到$\{1, 2, 3,\cdots, n\}$的一對一函數，其中 $s(i) = s_i$, $i = 1, 2, 3,\cdots, n$。同時為了討論的方便，我們也把策略標示在 $n\times n$ 的方格上，對應坐標為(i, s_i)的點為策略 s 的一個策略點。例如下圖的策略為 $s = (1, 3, 4, 7, 2, 5, 8, 10, 6, 9)$

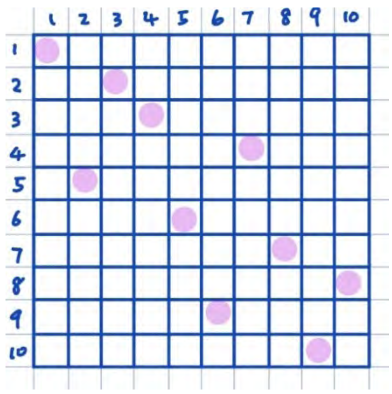


圖 2 策略 s 的策略點

顯然的，策略點分佈的位置在任一行及任一列都恰只有一個。

(*m*, *n*)-遊戲時，我們先說明：A 所擁有的第 i 小的牌與 B 所擁有的 n 張牌做比較時，會是 B 方手中第 j 大的牌的情況有 $C^m_{2n}\cdot C^{n-i+j-1}_{n-i}\cdot C^{n+i-j}_{i-1}$ 種。

首先，從 m 中選出 $2n$ 張牌，方法數有 C^m_{2n}；這 $2n$ 張牌平分給 A、B 後，先考慮比 A 方第 i 小的牌數字大的牌：在 A 方中有 n-i 張，在 B 方中有 j-1 張，故 A 有$(n-i)+(j-1)$中的 n-i 張的情況數為 $C^{n-i+j-1}_{n-i}$ ；再考慮比 A 方第 i 小的牌數字小的牌：在 A 方中有 i–1 張，在 B 方中有 n–j+1 張，故 A 有$(i-1)+(n-j+1)$張中的 i–1 張的情況數為 C^{n+i-j}_{i-1} 。因此共有 $C^m_{2n}\cdot C^{n-i+j-1}_{n-i}\cdot C^{n+i-j}_{i-1}$ 種情況。

由以上結果知：A 所擁有的第 i 小的牌與 B 所擁有的 n 張牌做比較時，會是 B 方手中第 j 大的牌的機率為

$$\frac{C^m_{2n}\cdot C^{n-i+j-1}_{n-i}\cdot C^{n+i-j}_{i-1}}{C^m_{2n}\cdot C^{2n}_n}=\frac{C^{n-i+j-1}_{n-i}\cdot C^{n+i-j}_{i-1}}{C^{2n}_n}$$

令 $f_{ij} = C^{n-i+j-1}_{n-i}\cdot C^{n+i-j}_{i-1}$ ，並且定義

***定義 1-2.* (*m*, *n*)**-*遊戲基本矩陣及增廣矩陣*

(1) **(*m*, *n*)**-遊戲 基本矩陣 $F=[f_{ij}]_{n\times n}$ ，其中 $f_{ij} = C^{n-i+j-1}_{n-i}\cdot C^{n+i-j}_{i-1}$

(2) **(*m*, *n*)**-遊戲 增廣矩陣 $F^*=[f_{ij}]_{n\times(n+1)}$ ，其中 $f_{i,(n+1)} = C^{2n-i}_{n-i}$

定義 1-3. *成本矩陣*

(*m*, *n*)-遊戲的 B 方成本矩陣 $G=[g_{ij}]_{n\times n}$ ，其中 $g_{ij}=\sum_{k=1}^{j} f_{ik}$

由定義 1-3 知，A 方第 i 小的牌勝過 B 方中第 j 大的牌的機率，是 A 方第 i 小的牌排在 B 方時會是第 1 到第 j 大的牌的機率之總和，即 $\dfrac{f_{i1}+f_{i2}+\cdots+f_{ij}}{C_n^{2n}}$

定義 1-4. *策略成本與最佳策略*

設 $s=(s_1, s_2,\cdots, s_n)$是一重排，則 (m, n)-遊戲中的 B 方在策略 s 的成本為

$$C(s)=\sum_{i=1}^{n} g_{i,s_i} 。$$

所有策略中<u>使得策略成本最小的策略稱為***最佳策略***</u>。

以(6, 3)遊戲為例，基本矩陣為

$$[f_{ij}]_{3\times 3}=\begin{bmatrix} C_2^2 & C_2^3 & C_2^4 \\ C_1^2C_1^4 & C_1^2C_1^3 & C_1^3C_1^2 \\ C_2^5 & C_2^4 & C_2^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 6 \\ 10 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

B 方的成本矩陣為

$$[g_{ij}]_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 4 & 10 & 16 \\ 10 & 16 & 19 \end{bmatrix}$$

若策略 $s=(1, 2, 3)$時，策略成本為 $g_{11}+g_{22}+g_{33}=30$

我們的目標是找出(m, n)-遊戲中的最佳策略。在文獻 *R. Chawtwin, D.Mackenzie* [1]中，對於$(2n, n)$-遊戲，有給出最佳策略。顯然，$(2n, n)$-遊戲的結果也可以推論到(m, n)-遊戲的情形，其中 $m\ge 2n$。事實上，文獻[1]中利用了$(2n, n)$-遊戲中成本矩陣的良好對稱性，及透過許多複雜的數學恆等式，得到$(2n, n)$-遊戲的結果。但在 K-優勢以及和局的情形中，成本矩陣都沒有[1]中的對稱性，所以[1]中的一些關鍵方法都不能使用，因此，我們發展了自己的技巧，在沒有良好對稱性下仍然得到一些結果。

二、文獻回顧

在文獻[1]中有下列主要結果：

引理 1**.** $(2n, n)$-遊戲的成本矩陣 $G=[g_{ij}]_{n\times n}$ 滿足

1. $g_{ij}=g_{ji}$
2. $g_{ij}=g_{n+1-j,\, n+1-i}=C_n^{2n}$

3a. $g_{ij}+g_{n+1-i,\, n+1-j}\ge g_{i,\, n+1-i}+g_{j,\, n+1-j}$

3b.若 i, j, k, l 滿足 $i<k, j<l, i+l\le n+1$ 且 $k+j\le n+1$，則 $g_{ij}+g_{kl}\ge g_{il}+g_{kj}$

3c.若 i, j, k, l 滿足 $i<k, j<l, i+l\ge n+1$ 且 $k+j\ge n+1$，則 $g_{ij}+g_{kl}\le g_{il}+g_{kj}$

定理(Optimal strategy for One-Round War).

$(2n, n)$-遊戲中，當 $n \geq 3$ 時，若令$k^* = \max_{1\leq k\leq n}\{k \mid g_{n+1-k,n+1-k} - \Delta S_{n+1-k} \leq 0\}$，

其中$\Delta S_{n+1-k} = \sum_{j=0}^{n-k} C_j^{2n}$，則 B 方的策略成本在犧牲$k^*$張牌的策略有最小值。

三、基本矩陣及成本矩陣的性質

(m, n)-遊戲中，基本矩陣具有一些對稱性。我們以幾何的方式重新証明了[1]的結果。

性質 3-1. (m, n)-遊戲基本矩陣 $F = [f_{ij}]_{n\times n}$ 滿足

(1) $f_{ij} = f_{n+1-i,\, n+2-j}$，其中 $j > 1$

(2) $f_{ij} = f_{i+1,\, j}$，其中 $i + j = n + 1$

(3) $f_{i1} + f_{i2} + \cdots + f_{i,\, n+1} = C_n^{2n}$

証明：(1)是顯然的。

(2)若 $i + j = n + 1$，因為 $f_{i,j} = C_{n-i}^{n-i+j-1} \cdot C_{i-1}^{n+i-j} = C_{j-1}^{2(j-1)} \cdot C_{i-1}^{2i-1}$

$f_{i+1,j} = C_{n-i-1}^{n-i+j-2} \cdot C_i^{n+i+1-j} = C_{j-2}^{2j-3} \cdot C_i^{2i}$

又，$C_{j-1}^{2(j-1)} \cdot C_{i-1}^{2i-1} = \dfrac{2j-2}{j-1} C_{j-2}^{2j-3} \cdot \dfrac{i}{2i} C_i^{2i} = C_{j-2}^{2j-3} \cdot C_i^{2i}$，可得証(2)

(3)若規定 $C_0^0 = 1$，則 $f_{i1} + f_{i2} + \cdots + f_{i,\, n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-i}^{n-i+k} \cdot C_{i-1}^{n+i-k-1} = C_n^{2n}$

性質 3-2. 增廣矩陣 $F^* = [f_{ij}]_{n\times(n+1)}$ 滿足：對所有 $0 \leq k \leq n-1$

$$f_{1,\, n+1-k} + f_{2,\, n+2-k} + \cdots + f_{k+1,\, n+1} = \frac{1}{2} C_n^{2n}$$

証明置於附錄。

以$n = 6$ 的增廣矩陣為例

$$C_5^{11} = C_5^{10} + C_4^{10} \cdot C_1^1 = C_5^9 + C_4^9 \cdot C_1^2 + C_3^9 \cdot C_2^2 = C_5^8 + C_4^8 \cdot C_1^3 + C_3^8 \cdot C_2^3 + C_2^8 \cdot C_3^3 = \cdots$$

性質 3-3. 基本矩陣 $F = [f_{ij}]_{n\times n}$ 滿足：$f_{ij} + f_{i+1,\, j+1} = f_{i-1,\, j} + f_{i,\, j+1}$，其中 $i + j = n + 1,\ 2 \leq i \leq n-1$

(1) $f_{ij} = f_{i+1,\, j}$，其中 $i + j = n + 1,\ 1 \leq i \leq n-1$

(2) $f_{ij} + f_{i+1,\, j+1} = f_{i-1,\, j} + f_{i,\, j+1}$，其中 $i + j = n + 1,\ 2 \leq i \leq n-1$

(3) $f_{i-1,\, j-1} + f_{ij} + f_{i+1,\, j+1} = f_{i,\, j-1} + f_{i+1,\, j} + f_{i+2,\, j+1}$，其中 $i + j = n + 1,\ 2 \leq i \leq n-2$

(4) $f_{i-1,\, j-1} + f_{ij} + f_{i+1,\, j+1} + f_{i+2,\, j+2} = f_{i-2,\, j-1} + f_{i-1,\, j} + f_{i,\, j+1} + f_{i+1,\, j+2}$，

其中 $i + j = n + 1,\ 3 \leq i \leq n-2$

(5)$\sum_{k=-s}^{s} f_{i+k,j+k} = \sum_{k=-s}^{s} f_{i+1+k,j+k}$，其中 $i + j = n + 1,\ s + 1 \leq i \leq n - 1 - s$

(6)$\sum_{k=-s+1}^{s} f_{i+k,j+k} = \sum_{k=-s+1}^{s} f_{i+k-1,j+k}$，其中 $i + j = n + 1,\ s + 1 \leq i \leq n - s$

同樣以$n = 6$的情形為例，性質3(3)即為

$$f_{14} + f_{25} + f_{36} = f_{24} + f_{33} + f_{46}$$

$$f_{23} + f_{34} + f_{45} = f_{33} + f_{44} + f_{55}$$

$$f_{32} + f_{43} + f_{54} = f_{42} + f_{53} + f_{64}$$

性質 3-3 等同於下列組合的恆等式

(2) $C^{2k}_{k} C^{2n-2k-1}_{n-k-1} + C^{2k}_{k-1} C^{2n-2k-1}_{n-k} = C^{2k+1}_{k+1} C^{2n-2k-2}_{n-k-2} + C^{2k+1}_{k} C^{2n-2k-2}_{n-k-1}$

(3)$C^{2k}_{k+1} C^{2n-2k-1}_{n-k-2} + C^{2k}_{k} C^{2n-2k-1}_{n-k-1} + C^{2k}_{k-1} C^{2n-2k-1}_{n-k}$

$= C^{2k-1}_{k} C^{2n-2k}_{n-k-1} + C^{2k-1}_{k-1} C^{2n-2k}_{n-k} + C^{2k-1}_{k-2} C^{2n-2k}_{n-k+1}$

(4) $C^{2k}_{k+1} C^{2n-2k-1}_{n-k-2} + C^{2k}_{k} C^{2n-2k-1}_{n-k-1} + C^{2k}_{k-1} C^{2n-2k-1}_{n-k} + C^{2k}_{k-2} C^{2n-2k-1}_{n-k}$

$= C^{2k+1}_{k+2} C^{2n-2k-1}_{n-k-2} + C^{2k+1}_{k+1} C^{2n-2k-2}_{n-k-2} + C^{2k+1}_{k} C^{2n-2k-2}_{n-k-1} + C^{2k+1}_{k-1} C^{2n-2k-2}_{n-k}$

(5) $\sum_{k=-s}^{s} C^{n-i+j-1}_{n-i-k} \cdot C^{n+i-j}_{i+k} = \sum_{k=-s}^{s} C^{n-i+j-1}_{n-i-k-1} \cdot C^{n+i-j}_{i+k}$

(6) $\sum_{k=-s+1}^{s} C^{n-i+j-1}_{n-i-k} \cdot C^{n+i-j}_{i+k} = \sum_{k=-s+1}^{s} C^{n-i+j+1}_{n-i-k-1} \cdot C^{n+i-j-2}_{i+k}$

我們証明(3)如下，其他的部份，留在附錄中。

下圖 3 由方格組成的圖形，考慮由左下角出發，每次只能往右或往上到達右上角的路徑

左下角 $\longrightarrow P_1 \longrightarrow$ 右上角 $C^{2k}_{k+1} C^{2n-2k-1}_{n-k-2}$

左下角 $\longrightarrow P_2 \longrightarrow$ 右上角 $C^{2k}_{k} C^{2n-2k-1}_{n-k-1}$

左下角 $\longrightarrow P_3 \longrightarrow$ 右上角 $C^{2k}_{k-1} C^{2n-2k-1}_{n-k-1}$

左下角 $\longrightarrow P_0 \longrightarrow$ 右上角 $C^{2k-1}_{k-2} \times 1 \times C^{2n-2k-1}_{n-k-2}$

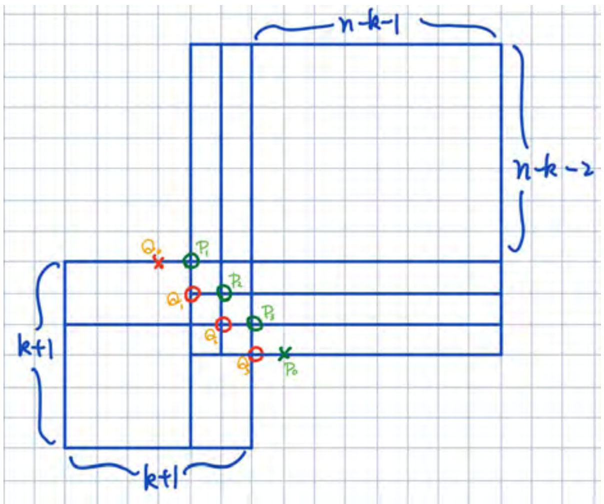


圖 3

因此路徑總數為

$$C^{2k}_{k+1} C^{2n-2k-1}_{n-k-2} + C^{2k}_{k} C^{2n-2k-1}_{n-k-1} + C^{2k}_{k-1} C^{2n-2k-1}_{n-k} + C^{2k-1}_{k-2} \times 1 \times C^{2n-2k-1}_{n-k-2}\text{。}$$

同樣的，路徑總數也可以分成

左下角 $\longrightarrow Q_1 \longrightarrow$ 右上角 $C^{2k-1}_{k} C^{2n-2k}_{n-k-1}$

左下角 $\longrightarrow Q_2 \longrightarrow$ 右上角 $C^{2k-1}_{k-1} C^{2n-2k}_{n-k}$

$$\text{左下角} \longrightarrow Q_3 \longrightarrow \text{右上角}\ C_{k-2}^{2k-1}C_{n-k+1}^{2n-2k}$$

$$\text{左下角} \longrightarrow Q_0 \longrightarrow \text{右上角}\ C_{k+1}^{2k-1}\times 1\times C_{n-k-2}^{2n-2k-1}$$

因此路徑總數為 $C_{k}^{2k-1}C_{n-k-1}^{2n-2k}+C_{k-1}^{2k-1}C_{n-k}^{2n-2k}+C_{k-2}^{2k-1}C_{n-k+1}^{2n-2k}+C_{k+1}^{2k-1}\times 1\times C_{n-k-2}^{2n-2k-1}$

所以 $C_{k+1}^{2k}C_{n-k-2}^{2n-2k-1}+C_{k}^{2k}C_{n-k-1}^{2n-2k-1}+C_{k-1}^{2k}C_{n-k}^{2n-2k-1}+C_{k-2}^{2k-1}\times 1\times C_{n-k-2}^{2n-2k-1}$

$$=C_{k}^{2k-1}C_{n-k-1}^{2n-2k}+C_{k-1}^{2k-1}C_{n-k}^{2n-2k}+C_{k-2}^{2k-1}C_{n-k+1}^{2n-2k}+C_{k+1}^{2k-1}\times 1\times C_{n-k-2}^{2n-2k-1}$$

故性質 3-3(3)成立。

性質 3−4. 基本矩陣 $F=[f_{ij}]_{n\times n}$ 滿足

$$f_{n,1}=f_{n-1,1}+f_{n-1,2}=\sum_{k=1}^{s}f_{n+1-s,k}=\frac{1}{2}C_{n}^{2n}\text{，}1\le s\le n$$

性質 3-4 的証明置於附錄。

引理 3-1. (Z 字中心性質) 基本矩陣 $F=[f_{ij}]_{n\times n}$ 滿足

$$\sum_{k=0}^{s-1}f_{i,j-k}=\sum_{k=0}^{s-1}f_{i+s,j-k}\text{，其中 } i+j=n+1,\ s\le n-i$$

引理 3-2.(Z 字左偏性質) 基本矩陣 $F=[f_{ij}]_{n\times n}$ 滿足

$$\sum_{k=0}^{s-1}f_{i,j-k}\le\sum_{k=0}^{s-1}f_{i+s,j-k}\text{，其中 } i+j<n+1,\ s\le n-i$$

引理 3-3.(Z 字右偏性質) 基本矩陣 $F=[f_{ij}]_{n\times n}$ 滿足

$$\sum_{k=0}^{s-1}f_{i,j-k}\ge\sum_{k=0}^{s-1}f_{i+s,j-k}\text{，其中 } i+j>n+1,\ s\le n-i$$

由引理 3-1~3-3 可得[1]中的引理 1， 進一步得到[1]中的主要結論。

四、*K*-優勢

1.說明及定義

進行(m, n)-*遊戲*，若 B 方的 n 張牌中有 K 張牌面的數字是全副牌中最大的，則此時的成本矩陣將有所不同。我們定義 K-優勢矩陣、增廣 K-優勢矩陣、K-優勢成本矩陣如下：

定義 4-1. *K-優勢矩陣、K-成本矩陣及 K-策略成本*

(1) K-優勢矩陣 $H(K)=[h_{ij}]_{n\times n}$，其中 $h_{ij}=\begin{cases}0, & j\le K\\ C_{n-i}^{n-i+j-K-1}\cdot C_{i-1}^{n+i-j}, & j>K\end{cases}$

(2)增廣 K-優勢矩陣 $H^*(K)=[h^*_{ij}]_{n\times(n+1)}$，其中 $h^*_{ij}=\begin{cases}h_{ij}, & j\le n\\ C_{n-i}^{2n-i}, & j=n+1\end{cases}$

(3) K-成本矩陣$\Phi(K)=[\phi_{ij}]_{n\times n}$，其中$\phi_{ij}=\sum_{t=1}^{j}h_{it}$

由ϕ_{ij}的定義可知 $\phi_{1j}<\cdots<\phi_{ij}<\phi_{i+1,j}<\cdots<\phi_{nj}$

(4) B 方在策略 s 下的 K-成本為 $c_K(s)=\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,s_i}$

(5)$H(n,K)=[h_{ij}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_{n-1}^{n-1}C_0^{n-K} & C_{n-1}^{n}C_0^{n-K-1} & \cdots & C_{n-1}^{2n-K-2}C_0^{1} \\ 0 & \cdots & 0 & C_{n-2}^{n-2}C_1^{n-K+1} & C_{n-2}^{n-1}C_1^{n-K} & \cdots & C_{n-2}^{2n-K-3}C_1^{2} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & C_0^{0}C_{n-1}^{2n-K-1} & C_0^{1}C_{n-1}^{2n-K-2} & \cdots & C_0^{n-K-1}C_{n-1}^{n} \end{bmatrix}$

其中令$C_0^0=1$。

當 $j>K$ 時，考慮 h_{ij} 與 $h_{i+1,j}$ 的比值。

若$\frac{h_{ij}}{h_{i+1,j}}\le 1$，可得 $\frac{C_{n-i}^{n-i+j-K-1}\cdot C_{i-1}^{n+i-j}}{C_{n-i-1}^{n-i+j-K-2}\cdot C_{i}^{n+i-j+1}}\le 1$，化簡得 $\frac{n-i+j-K-1}{n-i}\cdot\frac{i}{n+i-j+1}\le 1$，

故得$i\le n-\frac{n-1}{n-K+1}\cdot j$。顯然的，$n-\frac{n-1}{n-K+1}\cdot j$的值會隨著 j 的值遞減而遞減。

若規定$\alpha(n,K,j):=[n-\frac{n-1}{n-K}\cdot(j-K-1)]$，其中[ ]為高斯符號，我們可以得到以下引理。

引理 4-2.

n、K為正整數，其中$K<n$，K-優勢基本矩陣$H(K)=[h_{ij}]_{n\times n}$，若令

$\alpha(n,K,j):=[n-\frac{n-1}{n-K}\cdot(j-K-1)]$，其中[ ]為高斯符號,

則 (1)當 $i<\alpha(n,K,j)$時，$h_{ij}<h_{i+1,j}$

(2)當 $i>\alpha(n,K,j)$時，$h_{ij}>h_{i+1,j}$

(3)若$n-\frac{n-1}{n-K+1}\cdot j$為整數，則 $h_{i,\alpha(n,K,j)}=h_{i+1,\alpha(n,K,j)+1}$

註：對所有正整數 n、K，其中$K<n$，$\alpha(n,K,j)+j\ge n+1$。

若 n,K值固定，$\alpha(n,K,j)$的值隨 j 而遞減。

定義 4-3. $n\times n$ 的方格的子集合如下

$$NW\ Coner=\{(i,j)|1\le i\le n,\ i+j<n+1\}$$

$$SE\ Coner=\{(i,j)|1<i\le n,\ i+j>n+1\}$$

$$MAD\ line=\{(i,j)|1<i\le n,\ i+j=n+1\}$$

為了方便，我們把 $n\times n$ 的方格分成兩個部份

$D_0=\{(i,j)|1\le i\le n,\ 且 i\le\alpha(n,K,j)\}$ 及

$D_1=\{(i,j)|1\le i\le n,\ 1\le j\le n\}-D_0$

定義 4-4.

(1)若 $i < k \le n$，且 $j < l \le n$，

$$\Delta_\phi(i,j,k,l) = (\phi_{ij} + \phi_{kl}) - (\phi_{kj} + \phi_{il}),$$
$$\Delta_\phi(i,j) = \Delta_\phi(i,j,i+1,j+1),$$

我們也稱$\Delta_\phi(i,j,k,l)$ 為矩形Γ：$P(i,j), Q(j,k), R(k,l), S(i,l)$***對角差***，並記為$\Delta_\phi\Gamma$

(2)階梯形區域L：$P_1(a_1,b_1), P_2(a_1,b_2), P_3(a_2,b_2), \cdots, P_{2s-1}(a_s,b_s), P_{2s}(a_s,b_1)$,

其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$，$b_1 < b_2 < \cdots < b_s$，則階梯形區域L的**對角差**

$$\Delta_\phi L = \sum_{r=1}^{s} (-1)^s \phi_{P_s}$$

因為每個階梯形區域都可以正好分割成數個矩形區域$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$

$$\Delta_\phi L = \sum_{r=1}^{k} \Delta_\phi \Gamma_r,$$

如圖 4

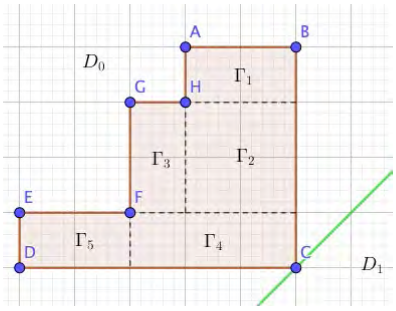


圖 4

引理 4-5. n、K及 k 為正整數，其中 $i < k \le n$，$j < l \le n$

(1)當 $i < \alpha(n, K, j)$ 時，$\Delta_\phi(i,j,k,l) > 0$

(2)當 $i \ge \alpha(n, K, j)$ 時，$\Delta_\phi(i,j,k,l) < 0$

(3)當 $i + j = n + 1$, $\alpha(n, K, l)+1 < i \le n - K$時，

即若 $(i-1, j) \in NW\ Coner$, $(i, j) \in MAD\ line$, $(i-1, l)$, $(i, l) \in D_1$時， $\Delta_\phi(i-1,j,i,l) < 0$

(4)當 $i + j = n$, $\alpha(n, K, j) < p \le n - K$時，

即若$(i, j) \in NW\ Coner$, $(i, j+1) \in MAD\ line$, (p, j), $(p, j+1) \in D_1$時， $\Delta_\phi(i,j,p,j+1) < 0$

証明：(1)(2)當 $i < \alpha(n, k, j)$時

$$\Delta_\phi(i,j-1) = h_{i+1,j} - h_{i,j} > 0\text{，其中 } H(K) = [h_{ij}]_{n\times n}\text{ 是 }K\text{-優勢矩陣}$$

利用 $\Delta_\phi(i,j-1) + \Delta_\phi(i+1,j-1) + \cdots + \Delta_\phi(k-1,j-1) = \Delta_\phi(i,j-1,k,j)$

$\Delta_\phi(i,j-1,k,j) + \Delta_\phi(i,j,k,j+1) + \cdots + \Delta_\phi(i,l-1,k,l) = \Delta_\phi(i,j,k,l)$

可得上面結果。

(3)(4)直接計算可得。

引理 4-5.可以進一步推廣。考慮一個集合$\{P_s \mid 1 \le s \le 8\}$

考慮 $P_1(1, 6)$, $P_2(1, 4)$, $P_3(2, 4)$, $P_4(2, 3)$, $P_5(4, 3)$, $P_6(4, 1)$, $P_7(5, 1)$, $P_8(5, 6)$這些點，將 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_1$ 連起來會形成一階梯形區域 L。

引理 4-6. (1)若階梯形區域 L 的頂點皆在 D_0 區域，則$\Delta_\phi L > 0$

(2)若階梯形區域 L 的頂點皆在 D_1 區域，則$\Delta_\phi L < 0$

定理 1. 假設策略s^*使得 K-成本$c_K(s^*)$為最小，$s^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$，

若$(p, s_p^*), (q, s_q^*) \in D_0$ ，$p \neq q$，則$(p-q)(s_p^* - s_q^*) < 0$

若$(p, s_p^*), (q, s_q^*) \in D_1$ ，$p \neq q$時，則$(p-q)(s_p^* - s_q^*) > 0$。

即<u>最佳策略s^*的策略點集在 D_0 區域是左下右上排列</u>;<u>在 D_1 區域中為左上右下排列</u>。

假設策略s^*為<u>最佳策略</u>，因為策略點集在每一行都恰有一個，所以恰有K個策略點成本為 0。底下我們証明這K個策略點落在區域

$$\{(i, j) | n - K < i \le n, 1 \le j \le K\}。$$

策略點(n, s_n), $s_n > K$，則至少有一個策略點(p, s_p), $p \le n - K$

由K-成本矩$[\phi_{ij}]_{n \times n}$的遞增性質：$\phi_{n,s_n} > \phi_{p,s_n}$，得 $\phi_{n,s_n} + \phi_{p,s_p} > \phi_{n,s_p} + \phi_{p,s_n}$。

令策略$s' = (s_1, \cdots, s_n, \cdots, s_p)$，則策略$s'$的$K$-成本將更小。

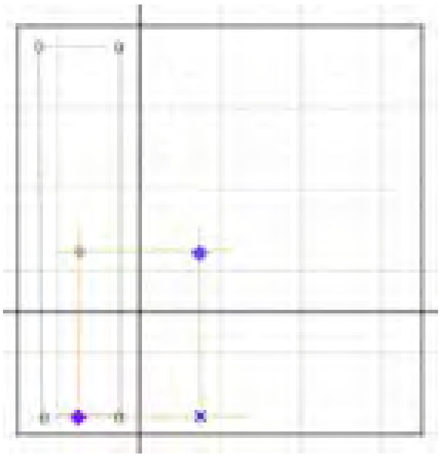


圖 6(a)

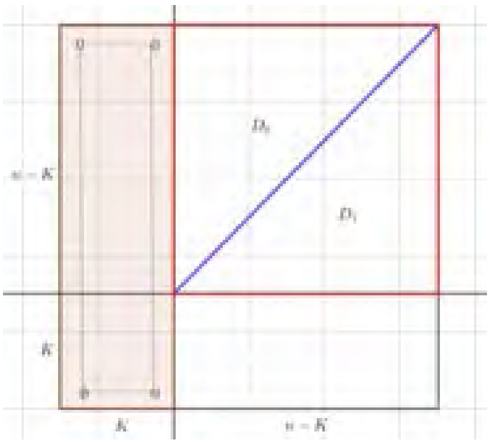


圖 6(b)

依此邏輯類推，可得到：<u>最佳策略</u>s^*恰有K個策略點成本為 0，且落在區域

$$\{(i, j) | n - K < i \le n, 1 \le j \le K\}。$$

定理 2. 若策略s^*使得K-成本$c(s^*)$為最小，則s^*恰有K個策略點成本為 0，且落在區域

$$\{(i, j) | n - K < i \le n, 1 \le j \le K\}$$

由定理 1、2，我們可以更進一步推出以下定理 3：

定理 3.若策略s^*為<u>最佳策略</u>，則s^*的策略點中有 K個策略點落在區域

$$\{(i,j)|n-K<i\le n,1\le j\le K\}。$$

其他 $n-K$個策略點的分佈為

區域 D_0： $(n-K-k,K+1),\ (n-K-k-1,K+2),\cdots,(1,n-k)$

區域 D_1： $(n-K-k+1,n-k+1),\ (n-K-k+2,n-k+2),\cdots,(n-K,n)$。

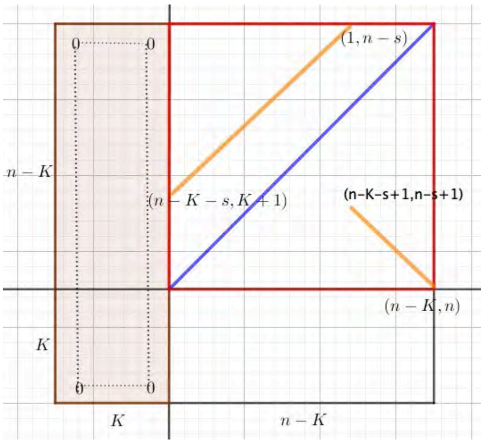


圖 7

證明：若策略s^*在區域 D_1 中有策略點，由定理 1 可知 D_1 中的策略點是左上右下排列，因此存在一策略點(p^*,q^*)，使得對任何s^*在區域D_1中的其他策略點(p,q)，都有 $p^*>p,\ q^*>q$。

令策略點$P_1(p^*,q^*)$，$P_2\big(n+1-q^*,s^*(n+1-q^*)\big)=P_2(p_2,q_2)$

$$P_3(p_3,q_3)=P_3\big(n+1-q_2,s^*(n+1-q_2)\big)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{i+1}(p_i,q_i)=P_i\big(n+1-q_i,s^*(n+1-q_i)\big)$$

直到

$$P_1(p^*,q^*)=P_l\big(n+1-q_l,s^*(n+1-q_l)\big)$$

其圖形如下例：

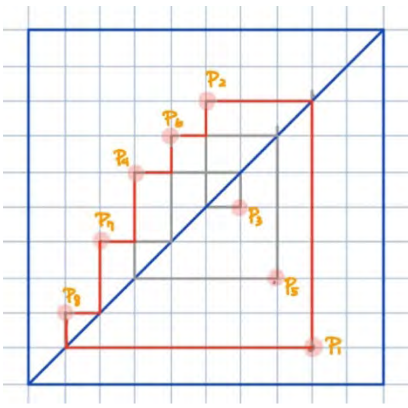


圖 8

取最外圍區域為一階梯形區域，令以$P_1,(p^*+1,q_k-1)$為對角的矩形為Γ_{down}(如圖 9)；以$P_1,(p_2,q^*+1)$為對角的矩形為Γ_{left}。若$p^*<n$，則Γ_{down}存在；若$q^*<n$，則Γ_{left}存在。

若Γ_{down}存在，令Γ_{down}的另外兩個角為 Q_2,Q_3，則對應於策略點$Q_2,Q_3,P_2,\cdots,P_l$的策略s'其 k-成本$c_K(s')$為 k-成本$c_K(s^*)$+ $\Delta_\phi\Gamma_{down}$，而由***引理 3-4(3)***，$\Delta_\phi\Gamma_{down}<0$，故$s^*$不可能有最低成本。

若Γ_{left}存在，証明類似。

所以若策略點在區域 D_1，最右下角的策略點必為$(n-K,n)$；排除此點，根據與前面相同的討論，可以得到另一個區域 D_1 中的策略點$(n-1-K,n-1)$；依此類推，直到剩下的策略點皆在區域 D_0，再依每行每列者只有一個策略點以及***定理 1*** 的結論：策略點在 D_0 是上升排列，可得定理 3。

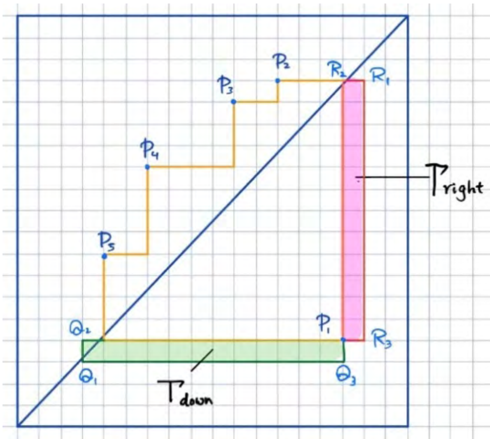


圖 9

定義 4-7. $\Theta_K(m)=\left(\mathrm{h}_{m,K+1}+\mathrm{h}_{m-1,K+2}+\cdots+\mathrm{h}_{1,K+m}\right)$

$c_\phi(m)=\left(\phi_{m,K+1}+\phi_{m-1,K+2}+\cdots+\phi_{1,K+m}\right)+(\phi_{m+1,m+K+1}+\phi_{m+2,m+K+2}+\cdots+\phi_{n-k,n})$

因此 $\Theta_K(m)=C_{n-m}^{n-m}\cdot C_{m-1}^{n-K+m-1}+C_{n-m+1}^{n-m+2}\cdot C_{m-2}^{n-K+m-3}+\cdots+C_{n-1}^{n+m-2}\cdot C_0^{n-K-m+1}$

$=\sum_{j=0}^{m-1}C_{n-m+j}^{n-m+2j}\cdot C_{m-j-1}^{n+m-2j-K-1}$

$\phi_{m,K+m}=C_{n-m}^{n-m}\cdot C_{m-1}^{n-K+m-1}+\cdots+C_{n-m}^{n-1}\cdot C_{m-1}^{n-K}$

$=\sum_{j=0}^{m-1}C_{n-m}^{n-m+j}\cdot C_{m-1}^{n-K+m-j-1}$

所以，

$$c_\phi(m)-\ c_\phi(m-1)=\left(\mathrm{h}_{m,K+1}+\mathrm{h}_{m-1,K+2}+\cdots+\mathrm{h}_{1,K+m}\right)-\phi_{n-K-k,n-k}$$
$$=\Theta_K(m)-\phi_{m,K+m}$$
$$=\sum_{j=0}^{m-1}C_{n-m+j}^{n-m+2j}\cdot C_{m-j-1}^{n+m-2j-K-1}-\sum_{j=0}^{m-1}C_{n-m}^{n-m+j}\cdot C_{m-1}^{n-K+m-j-1}$$

以 n=10, K=2 為例(如下圖 10)，

$\Theta_2(4)=C_6^6\cdot C_3^{11}+C_7^8\cdot C_2^9+C_8^{10}\cdot C_1^7+C_9^{12}\cdot C_0^5$=165+288+315+220=$C_1^{19}+C_3^{19}$

$\Theta_2(5)=C_5^5\cdot C_4^{12}+C_6^7\cdot C_3^{10}+C_7^9\cdot C_2^8+C_8^{11}\cdot C_1^6+C_9^{13}\cdot C_0^4$=$C_0^{19}+C_2^{19}+C_4^{19}$

$\phi_{5,7}$ =22761=$C_0^8\cdot C_0^{10}+C_1^8\cdot C_1^{10}+C_2^8\cdot C_2^{10}+C_3^8\cdot C_3^{10}+C_4^8\cdot C_4^{10}+C_5^8\cdot C_5^{10}$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11440 \\
9 & 72 & 315 & 990 & 2475 & 5148 & 9009 & 12870 \\
45 & 288 & 1008 & 2520 & 4950 & 7920 & 10296 & 10296 \\
165 & 840 & 2352 & 4704 & 7350 & 9240 & 9240 & 6864 \\
495 & 1980 & 4410 & 7056 & 8820 & 8820 & 6930 & 3960 \\
1287 & 3960 & 6930 & 8820 & 8820 & 7056 & 4410 & 1980 \\
3003 & 6864 & 9240 & 9240 & 7350 & 4704 & 2352 & 840 \\
6435 & 10296 & 10296 & 7920 & 4950 & 2520 & 1008 & 288 \\
12870 & 12870 & 9009 & 5148 & 2475 & 990 & 315 & 72 \\
24310 & 11440 & 5005 & 2002 & 715 & 220 & 55 & 10
\end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|cccccccc}
0 & 0 & 1 & 11 & 66 & 286 & 1001 & 3003 & 8008 & 19448 \\
0 & 0 & 9 & 81 & 396 & 1386 & 3861 & 9009 & 18018 & 30888 \\
0 & 0 & 45 & 333 & 1341 & 3861 & 8811 & 16731 & 27027 & 37323 \\
0 & 0 & 165 & 1005 & 3357 & 8061 & 15411 & 24651 & 33891 & 40755 \\
0 & 0 & 495 & 2475 & 6885 & 13941 & 22761 & 31581 & 38511 & 42471 \\
0 & 0 & 1287 & 5247 & 12177 & 20997 & 29817 & 36873 & 41283 & 43263 \\
0 & 0 & 3003 & 9867 & 19107 & 28347 & 35697 & 40401 & 42753 & 43593 \\
0 & 0 & 6435 & 16731 & 27027 & 34947 & 39897 & 42417 & 43425 & 43713 \\
\hline
0 & 0 & 12870 & 25740 & 34749 & 39897 & 42372 & 43362 & 43677 & 43749 \\
0 & 0 & 24310 & 35750 & 40755 & 42757 & 43472 & 43692 & 43747 & 43757
\end{array}\right)
$$

圖 10

由組合恆等式：

性質 4-8. $\sum_{j=0}^{m-1} C_{n-m+j}^{n-m+2j}\cdot C_{m-j-1}^{n+m-2j-K-1} = C_{m-1}^{2n-K+1}+C_{m-3}^{2n-K+1}+\cdots+C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n-K+1}$

$\sum_{j=0}^{m-1} C_{n-m}^{n-m+j}\cdot C_{m-1}^{n-K+m-j-1} = \sum_{j=0}^{m-1} C_j^n\cdot C_j^{n-K}$

可得

$$c_{\phi}(m)-\ c_{\phi}(m-1) = C_{m-1}^{2n-K+1}+C_{m-3}^{2n-K+1}+\cdots+C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n-K+1}-\sum_{j=0}^{m-1} C_j^n\cdot C_j^{n-K}$$

定義 4-9. $\omega(m) = C_{m-1}^{2n-K+1}+C_{m-3}^{2n-K+1}+\cdots+C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n-K+1}-\sum_{j=0}^{m-1} C_j^n\cdot C_j^{n-K}$

$$\lambda^* = \min_{1\le m\le n-K}\{k|\ \omega(m)\ge 0\}$$

定理 4. K-成本的<u>最佳策略</u>其策略點分佈為：

K 個策略點落在區域$\{(i,j)|n-K<i, 1\le j\le K\}$。

其他 n-K 個策略點的分佈為

區域1： $(\lambda^*, K+1),\ (\lambda^*-1, K+2),\cdots,(1,\lambda^*+K)$

區域2： $(\lambda^*+1,\lambda^*+K+1),\ (\lambda^*+2,\lambda^*+K+2),\cdots,(n-K,n)$。

五、和局

1.說明及定義

進行(m, n)-遊戲時，兩方實力相差不大時視為和局，即若兩方的牌面數字相差為 1 的情形視為兩方平手。此時考慮 A 所擁有的第 i 小的牌與 B 所擁有的 n 張牌做比較時，會是 B 方手中第 j 大的牌的情況有 $f_{ij}=C_{n-i}^{n-i+j-1}\cdot C_{i-1}^{n+i-j}$ ；而這之中 A 所擁有的第 i 小的牌與 B 所擁有的 n 張牌做比較時，剛好和 B 方中第 j 大的牌數字相差 1 的情形有$\alpha_{ij}=C_{n-i}^{n-i+j-1}\cdot C_{i-1}^{n+i-j-1}$

令$\beta_{ij} = C_{n-i}^{n-i+j-1} \cdot C_{i-1}^{n+i-j} - C_{n-i}^{n-i+j-1} \cdot C_{i-1}^{n+i-j-1} = C_{n-i}^{n-i+j-1}\left(C_{i-1}^{n+i-j} - C_{i-1}^{n+i-j-1}\right)$
$= C_{n-i}^{n-i+j-1} \cdot C_{i-2}^{n+i-j-1}$

則此時的成本矩陣將與 *K*-優勢的情形不同。我們定義和局矩陣、和局成本矩陣如下：

定義 5-1. 和局矩陣、和局成本矩陣與和局策略成本

(1)和局矩陣 $B_n = [\beta_{ij}]_{n\times n}$ ：$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ C_{n-i}^{n-i+j-1} \cdot C_{i-2}^{n+i-j-1}, & i > 1 \end{cases}$

(2)和局成本矩陣 $\Psi_n = [\psi_{ij}]_{n\times n}$ ，其中 $\psi_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \beta_{ik}$

由ψ_{ij}的定義可知 $\psi_{1j} < \cdots < \psi_{ij} < \psi_{i+1,j} < \cdots < \psi_{n,j}$ 。

(3) B 方在策略 *s* 下的和局成本為 $c_\Psi(s) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{i\,s_i}$

$$B_n = [\beta_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ C_{n-2}^{n-2}C_0^n & C_{n-2}^{n-1}C_0^{n-1} & \cdots & \cdots & C_{n-2}^{2n-3}C_0^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1^1C_{n-3}^{2n-3} & C_1^2C_{n-3}^{2n-4} & \cdots & & C_1^nC_{n-3}^{n-2} \\ C_0^0C_{n-2}^{2n-2} & C_0^1C_{n-2}^{2n-3} & \cdots & \cdots & C_0^{n-1}C_{n-2}^{n-1} \end{bmatrix}$$

考慮β_{ij}與$\beta_{i+1,j}$的比值。若$\frac{\beta_{ij}}{\beta_{i+1,j}} \le 1$，可得 $\frac{C_{n-i}^{n-i+j-1} \cdot C_{i-2}^{n+i-j-1}}{C_{n-i-1}^{n-i+j-2} \cdot C_{i-1}^{n+i-j}} \le 1$，化簡可得 $\frac{n-i+j-1}{n-i} \cdot \frac{i-1}{n+i-j} \le 1$，

因此 $n - i \ge \frac{n-1}{n}(j-1)$

若 $i + j = n + 2 \Leftrightarrow n - i = j - 2, j > 1$，由 $\frac{j-2}{j-1} \ge \frac{n-1}{n}$ 可得 $\frac{n-i}{j-1} \ge \frac{n-1}{n}$，即 $n - i \ge \frac{n-1}{n}(j-1)$ 。

若 $i + j = n + k \Leftrightarrow n - i = j - k, j \ge k$，由 $\frac{j-k}{j-1} \le \frac{n-1}{n}$ ，當 $k > 2$ 時，此時 $\frac{n-i}{j-1} < \frac{n-1}{n}$ 。

由前述討論可知，當 j 固定時，β_{ij}的值會隨著 *i* 而變化：
當 *i* 由 1 至 *n*+2–*j* 時，β_{ij}遞增；當 *i* 由 *n*+2–*j* 至 n 時，β_{ij}遞減。

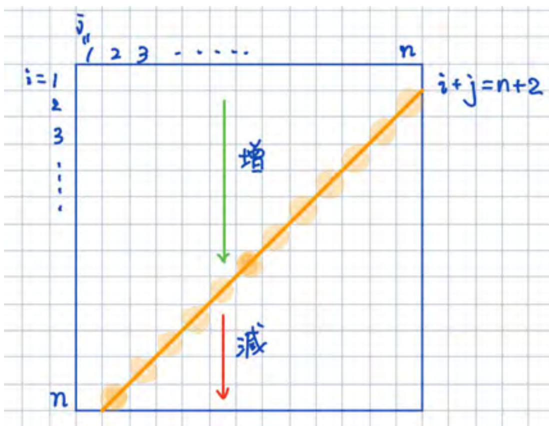


圖 11

引理 5-2. *n* 為正整數，則(1)當$i \le n+2-j$時，$\beta_{ij} < \beta_{i+1,j}$;

(2)當$i > n+2-j$時，$\beta_{ij} > \beta_{i+1,j}$。

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & 6435 \\
10 & 63 & 224 & 588 & 1260 & 2310 & 3696 & 5148 & 6006 \\
55 & 270 & 756 & 1568 & 2646 & 3780 & 4620 & 4752 & 3861 \\
220 & 825 & 1800 & 2940 & 3920 & 4410 & 4200 & 3300 & 1980 \\
715 & 1980 & 3300 & 4200 & 4410 & 3920 & 2940 & 1800 & 825 \\
2002 & 3861 & 4752 & 4620 & 3780 & 2646 & 1568 & 756 & 270 \\
5005 & 6006 & 5148 & 3696 & 2310 & 1260 & 588 & 224 & 63 \\
11440 & 6435 & 3432 & 1716 & 792 & 330 & 120 & 36 & 8
\end{pmatrix}
$$

圖 12 和局矩陣B_9

引理 5-3. *n* 及 *k* 為正整數，若$i < k \le n,\ j < l \le n$

(1)當 $k+l \le n+2$時，$\Delta_\psi(i,j,k,l) > 0$

(2)當 $i+j \ge n+2$時，$\Delta_\psi(i,j,k,l) < 0$

(3)當$i+j = n-1,\ l > j+2$ 時，$\Delta_\psi(i,j,k,l) < 0$

(4)當$i > 1\ \ i+j = n$ 時，$\Delta_\psi(i,j,n,j+1) < 0$

証明：(1)、(2)類似於***引理 4-4.(1)(2)***。$\Delta_\psi(i,j-1) = \beta_{i+1,j} - \beta_{i,j} > 0$，可得。

(3)和局矩陣 $B_n = [\beta_{ij}]_{n\times n}$ 如下：

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & \cdots & 0 \\
C_{n-2}^{n-2}C_0^{n} & C_{n-2}^{n-1}C_0^{n-1} & \cdots & C_{n-2}^{2n-3}C_0^{1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
C_1^{1}C_{n-3}^{2n-3} & C_1^{2}C_{n-3}^{2n-4} & \cdots & C_1^{n}C_{n-3}^{n-2} \\
C_0^{0}C_{n-2}^{2n-2} & C_0^{1}C_{n-2}^{2n-3} & \cdots & C_0^{n-1}C_{n-2}^{n-1}
\end{bmatrix}
$$

當 $i = n-k,\ j = n-i-1$時，

$$
\begin{aligned}
\Delta_\psi(i,j,k,l) &= (\beta_{i+1,j+1} + \beta_{i+1,j+2}) - (\beta_{i,j+1} + \beta_{i,j+2}) \\
&= \left(C_k^{2k}C_{n-k-2}^{2n-2k-2} + C_k^{2k+1}C_{n-k-2}^{2n-2k-3}\right) - \left(C_{k-1}^{2k-1}C_{n-k-1}^{2n-2k-1} + C_{k-1}^{2k}C_{n-k-1}^{2n-2k-2}\right) \\
&= \left(C_k^{2k}C_{n-k-2}^{2n-2k-2}\right)\left[\left(1 + \frac{2k+1}{k+1}\cdot\frac{n-k}{2n-2k-2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-2k-1}{n-k-1} + \frac{k}{k+1}\cdot\frac{n-k}{n-k-1}\right)\right] \\
&= \left(C_k^{2k}C_{n-k-2}^{2n-2k-2}\right)\frac{1}{(k+1)(2n-2k-2)}[n-2k-1],
\end{aligned}
$$

又由$k = n-\mathrm{i}$，因此 $i > \frac{n+1}{2}$ 時 $\Delta_\psi(i,j,i+1,j+2) < 0$。當 $l > j+2$ 時，考慮

$$\Delta_\psi(i,j,i+1,l) = \Delta_\psi(i,j,i+1,j+2) + \Delta_\psi(i,j+2,i+1,l) < 0$$

(4)因為 $\Delta_\psi(i,j,n,j+1) = (\beta_{n,j+1} - \beta_{i,j+1}) < 0$

為了方便，我們把 $n \times n$ 的方格分成兩個部份

$D_0 = \{(i,j) | 1 \le i \le n,\ i+j \le n+2\}$ 及

$D_1 = \{(i,j) | 1 < i \le n,\ i+j \ge n+2\}$

沿用***定義 4-5*** $n \times n$ 的方格的子集 $NW\ Coner$、$SE\ Coner$、$MAD\ line$，類似於 K-優勢中的情形，由引理 5-3(1)~(2)可以推得

定理 5.若策略s^*為<u>最佳策略</u>，$s^* = (s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$

若$(p, s_p^*), (q, s_q^*) \in D_0$，$p \ne q$，則$(p-q)(s_p^* - s_q^*) < 0$；

若$(p, s_p^*), (q, s_q^*) \in D_1$，$p \ne q$時，則$(p-q)(s_p^* - s_q^*) > 0$。

即策略s^*的策略點集在D_0區域是上升排列；而在D_1區域中為下降排列。

若策略 s 在區域D_1中最右下角的策略點為$\mathrm{R}(i,l)$，$i < n$, 則必有一策略點$\mathrm{S}(i+1,j)$位於區域D_0，考慮一新策略s'把策略點R, S更換成策略點$P(i,j), Q(i+1,l)$，其餘策略點與策略s維持相同，則和局成本 $c_\Psi(s') - c_\Psi(s) = \Delta_\psi(i,j,i+1,l) < 0$ (引理 **5-4.(3)**)。若策略 s 在區域D_1中最右下角的策略點為$\mathrm{R}(n,j)$，$j < n-1$, 則必有一策略點$\mathrm{S}(n-j, j+1)$位於區域D_0，考慮一新策略s'把策略點R, S更換成策略點$P(n-j,j), Q(n,j+1)$，其餘策略點與策略s維持相同，則和局成本

$$c_\Psi(s') - c_\Psi(s) = \Delta_\psi(n-j, j, n, j+1) < 0 \text{ (引理 5-4.(4))。}$$

依前述方法可推出若策略點在區域D_1，必為 $(n, n-1)$，$(n-1, n-2)$, $\cdots$。排除區域D_1的策略點，因為每行每列者只有一個策略點以及**定理 5** 的結論策略點在D_0是上升排列，因此，若策略s^*使得和局成本$c_\Psi(s^*)$最小，s^*的策略點必定滿足：

定理 6.若策略s^*使得和局策略成本$c_\Psi(s^*)$為最小，策略s^*的策略點分佈為

區域D_0： $(2,k)$, $(3,k-1), \cdots, (k+1,1)$及$(1,n)$

區域D_1： $(k+2,k+1)$, $(k+3,k+2), \cdots, (n,n-1)$。

定義 5-4.
$$\begin{aligned}\Lambda_r &= (\psi_{r+1,1} + \psi_{r,2} + \cdots + \psi_{2,r}) - (\psi_{r,1} + \psi_{r-1,2} + \cdots + \psi_{2,r-1}) \\ &= (\beta_{r+1,1} + \beta_{r,2} + \cdots + \beta_{2,r})\end{aligned}$$

$$c_\Psi(k) = (\psi_{k+1,1} + \psi_{k,2} + \cdots + \psi_{2,k}) + (\psi_{k+2,k+1} + \psi_{k+3,k+2} + \cdots + \psi_{n,n-1})$$

考慮所有滿足**定理 5** 的策略，其策略成本為

$$c_\Psi(m) = (\psi_{m+1,1} + \psi_{m,2} + \cdots + \psi_{2,m}) + (\psi_{m+2,m+1} + \psi_{m+3,m+2} + \cdots + \psi_{n,n-1})$$

$$c_\Psi(m) - c_\Psi(m-1) = \Lambda_m - \psi_{m+1,m}$$

因此 $c_\Psi(m) - c_\Psi(m-1) = (\beta_{k+1,1} + \beta_{k,2} + \cdots + \beta_{2,k}) - \psi_{k+1,k}$

$$= C_{n-(m+1)}^{n-(m+1)} \cdot C_{m-1}^{n+m-1} + C_{n-m}^{n-m+1} \cdot C_{m-2}^{n+m-3} + \cdots + C_{n-2}^{n+m-3} \cdot C_0^{n-m+1} - \psi_{m+1,m}$$
$$= \sum_{j=2}^{m+1} C_{n-j}^{n+(m+1)-2j} \cdot C_{j-2}^{n-m+2j-3} - \sum_{j=0}^{m-1} C_{n-m-1}^{n-j-2} \cdot C_{m-1}^{n+j}$$

由下列組合恆等式

***性質* 5-5.** $\sum_{j=2}^{m+1} C_{n-j}^{n+(m+1)-2j} \cdot C_{j-2}^{n-m+2j-3} = C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n}$

$$\sum_{j=0}^{m-1} C_{n-m-1}^{n-j-2} \cdot C_{m-1}^{n+j} = \sum_{j=0}^{m-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1}$$

故可得

$$c_\Psi(m) - c_\Psi(m-1) = C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1}$$

***定義* 5-6.** $\chi(m) = C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1}$

$$\mu^* = \min_{1\le m\le n}\{m \mid \chi(m) \ge 0\}$$

***定理* 7.** 最低和局成本的策略其策略點分佈為

區域D_0： $(2,\mu^*)$, $(3,\mu^*-1),\cdots,(\mu^*+1,1)$及$(1,n)$

區域D_1： (μ^*+2,μ^*+1), $(\mu^*+3,\mu^*+2),\cdots,(n,n-1)$。

六、和局 μ^*估計

接下來，我們將對和局及 K-優勢中定義 5-7 及定義 4-11 中的$\mu^* = \min_{1\le m\le n}\{m \mid \chi(m) \ge 0\}$和 $\lambda^* = \min_{1\le m\le n-K}\{k \mid \omega(k) \ge 0\}$進行估計。

***性質* 6-1.**若 n 為正整數, k 為非負整數，$0\le k\le n$，則比值 $\frac{C_k^n}{C_{k+1}^n}$ 隨 k 值增加而遞增。

當 $k = 0$ 時，比值為$\frac{1}{n}$。$k < [\frac{n}{2}]$時，比值<1；$k > [\frac{n}{2}]$時，比值>1。

證明：考慮 $\frac{C_k^n}{C_{k+1}^n} = \frac{k+1}{n-k}$ ，可得。

***性質* 6-2.**已知$\sum_{j=0}^{n-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1} = C_n^{2n-1}$，當 $m \ge \frac{n}{2}$時，$\sum_{j=0}^{m} C_j^n \cdot C_j^{n-1} \ge \frac{1}{2} C_n^{2n-1}$

證明：$\sum_{j=0}^{n-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1} = C_n^{2n-1}$ 為恆等式，

當 $m \ge \frac{n}{2}$時，由性質 6-1 可知$\sum_{j=0}^{m} C_j^n \cdot C_j^{n-1} \ge \sum_{j>m}^{n} C_j^n \cdot C_j^{n-1}$

故可得$\sum_{j=0}^{m} C_j^n \cdot C_j^{n-1} \ge \frac{1}{2} C_n^{2n-1}$。

***性質* 6-3.** (Stirling 公式)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$ ，即：當 n 很大時，$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$

考慮 $\frac{C_m^{2n}}{C_m^n C_m^{n-1}} = \frac{(2n)!\, m!(n-m)!(n-m-1)!}{(2n-m)!(n!)(n-1)!}$

若$m = \alpha n, 0 < \alpha < 1$，由 Stirling 公式，我們可以估計

$$\frac{C_m^{2n}}{C_m^n C_m^{n-1}} = \frac{(2n)!\ m!\,(n-m)!\,(n-m-1)!}{(2n-m)!\,(n!)(n-1)!}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{1}\frac{\sqrt{2n\cdot\alpha n\cdot(1-\alpha)n\cdot((1-\alpha)n-1)}}{\sqrt{(2-\alpha)n\cdot n\cdot(n-1)}} \times \frac{n-1}{(1-\alpha)n-1} \times$$

$$\frac{(2n)^{2n}(\alpha n)^{\alpha n}\ \ ((1-\alpha)n)^{(1-\alpha)n}\left(\frac{((1-\alpha)n-1)}{((1-\alpha)n)}\right)^{(1-\alpha)n}\ \ ((1-\alpha)n)^{(1-\alpha)n}}{((2-\alpha)n)^{(2-\alpha)n}\ n^n\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^n n^n}$$

$$= \sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)n((1-\alpha)n-1)}}{\sqrt{(2-\alpha)(n-1)}} \times \frac{(2)^{2n}(\alpha)^{\alpha n}\ (1-\alpha)^{2(1-\alpha)n}}{(2-\alpha)^{(2-\alpha)n}} \times \frac{n^{2n}n^{\alpha n}\ \ n^{2(1-\alpha)n}}{n^{(2-\alpha)n}\ n^n n^n} \times \frac{\left(\frac{((1-\alpha)n-1)}{((1-\alpha)n)}\right)^{(1-\alpha)n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}$$

$$\approx \sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)n((1-\alpha)n-1)}}{\sqrt{(2-\alpha)(n-1)}} \times \left(\frac{2^2\alpha^\alpha\ (1-\alpha)^{2(1-\alpha)}}{(2-\alpha)^{(2-\alpha)}}\right)^n$$

令$f(\alpha) = \ln\left(\frac{2^2\alpha^\alpha\ (1-\alpha)^{2(1-\alpha)}}{(2-\alpha)^{(2-\alpha)}}\right)$

$$= 2\ln 2 + \alpha\ln\alpha + 2(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - (2-\alpha)\ln(2-\alpha)$$

則$f'(\alpha) = \ln\alpha + \alpha\frac{1}{\alpha} + 2(-1)\ln(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\frac{(-1)}{1-\alpha} - (-1)\ln(2-\alpha) - (2-\alpha)\frac{(-1)}{2-\alpha}$

$$= \ln\alpha - 2\ln(1-\alpha) + \ln(2-\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)^2}\right)$$

當 $\alpha(2-\alpha) > (1-\alpha)^2$時，$f'(\alpha) > 0$；當 $\alpha(2-\alpha) < (1-\alpha)^2$時，$f'(\alpha) < 0$

由$f'(\alpha)$的正負，可知

$0 < \alpha < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，$f(\alpha)$ 遞減；$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 1$ 時，$f(\alpha)$ 遞增。

故$f(\alpha)$在區間(0,1)的最小值為$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(4(3-2\sqrt{2})\right) < 0$

$f(0) = \lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{4}{3\sqrt{3}}$，

在區間$(1-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$，$f(\alpha) < \ln\frac{4}{3\sqrt{3}}$； 在區間$(0,1-\frac{1}{\sqrt{2}})$，$f(\alpha) < 0$

因此若令 $\beta = e^{f(\alpha)}$，則當$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 時， $\beta < 1$

$$\frac{C_m^{2n}}{C_m^n C_m^{n-1}} \approx \sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)n((1-\alpha)n-1)}}{\sqrt{(2-\alpha)(n-1)}}\ \beta^n$$

引理 **6-4.** 若$m=\alpha n$，$0<\alpha<\frac{1}{2}$，

則對任何正數$\varepsilon>0$，都可以找到$N=N(\alpha)$，使得若$n\geq N$時，$C_m^{2n}\leq \varepsilon C_m^n C_m^{n-1}$。

從引理 6-4 可以了解，$m\leq\frac{n}{2}$ 時，
$C_0^{2n}+C_2^{2n}+\cdots+C_{m-1}^{2n}$ 或 $C_1^{2n}+C_3^{2n}+\cdots+C_{m-1}^{2n}$與 $\sum_{j=0}^{m} C_j^n\cdot C_j^{n-1}$ 相比都微不足道。
因此我們有底下結果：

引理 **6-5.** $\chi(m),\mu^*$如定義 5-7。若$m<\frac{n}{2}$，可以找到整數$N>0$，使得若$n\geq N$時，$\chi(m)<0$,
即 $\mu^*>\frac{n}{2}$.

性質 **6-6.** $m=n-t,t>0$ 則

$$C_{m-1}^{2n}+C_{m-3}^{2n}+\cdots+C_{m+1-2\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{2n}\leq\frac{n-t}{2t+1}C_m^{2n}$$

証明：$\frac{C_{m-1}^{2n}}{C_m^{2n}}=\frac{m}{2n-m+1}$，

令$\alpha=\frac{m}{2n-m+1}<1$, 由性質 6-1，$C_{m-t}^{2n}\leq\alpha^t C_m^{2n}$

所以$C_{m-1}^{2n}+C_{m-3}^{2n}+\cdots+C_{m+1-2\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{2n}<C_0^{2n}+C_1^{2n}+\cdots+C_{m-1}^{2n}$

$$\leq(\alpha+\alpha^2+\cdots)C_m^{2n}=\frac{\alpha}{1-\alpha}C_m^{2n}=\frac{n-t}{2t+1}C_m^{2n}$$

引理 **6-7.** $m=n-t,t>0,$ 若$t\geq\sqrt{n\ln n}+\ln n$ 則

$$\frac{C_n^{2n}}{C_{n-t}^{2n}}>\frac{4(n-t)}{2t+1}$$

証明：我們分成個步驟証明，若$t>t_+$，其中$t_+=\frac{\ln n+\sqrt{(\ln n)^2+4n\ln n}}{2}$，則

(1) $t^2>(n+t)\ln n$

(2) $e^{\frac{t^2}{n+t}}>\frac{n-t}{4(2t+1)}$

(3) $\frac{C_n^{2n}}{C_{n-t}^{2n}}>\frac{n-t}{(2t+1)}$

t_+是方程式$t^2-(n+t)\ln n=0$中較大的根，
因此$t>t_+$時，$t^2-(n+t)\ln n>0$，故(1)成立。

由(1) $t^2>(n+t)\ln n>(n+t)\ln n>(n+t)\ln\frac{n-t}{\frac{1}{4}(2t+1)}$，所以$\frac{t^2}{n+t}$>$\ln\frac{4(n-t)}{2t+1}$，即得(2)。

(3) $t > \sqrt{n\ln n} + \ln n > \frac{\ln n + \sqrt{(\ln n)^2 + 4n\ln n}}{2}$, 所以$e^{\frac{t^2}{n+t}} > \frac{4(n-t)}{2t+1}$。

由[3]中公式(3.9) $e^{-\frac{t^2}{n-t+1}} \le \frac{C_{n-t}^{2n}}{C_n^{2n}} \le e^{-\frac{t^2}{n+t}}$ 可得結果。

引理 6-8. $m = n - t, t > 0$, 若$t < \sqrt{n\ln n^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\ln(n^{\frac{1}{3}})$, 則

$$\frac{C_n^{2n}}{C_{n-t}^{2n}} < \ln n^{\frac{1}{3}}$$

証明：類似於**引理 6-7** 的証明可得。

定理 8. μ^*如定義 5-7，對任何大於 1 的正數 C, 則當n很大時

$$\sqrt{n\ln n^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\ln(n^{\frac{1}{3}}) < n - \mu^* < \sqrt{n\ln n} + \ln n。$$

証明：先考慮$n - \mu^*$的上界：

首先，由引理 6-5 知 $m > \frac{n}{2}$，因此由性質 6-2 知道

$$\sum_{j=0}^{m-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1} \ge \frac{1}{2} C_n^{2n-1} = \frac{1}{4} C_n^{2n}$$

再由性質 6-6 可知$C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n} \le \frac{n-t}{2t+1} C_m^{2n}$

回顧 $\chi(m) = C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^n \cdot C_j^{n-1}$，可得

$$\chi(m) < \frac{n-t}{2t+1} C_m^{2n} - \frac{1}{4} C_n^{2n}$$

再由引理 6-8 知，若$m = n - t, t \ge \sqrt{n\ln n} + \ln n$ 時$\frac{n-t}{2t+1} C_m^{2n} - \frac{1}{4} C_n^{2n} \le 0$,

因此得 $n - \mu^* < \sqrt{n\ln n} + \ln n$

再由引理 6-8 知，若$m = n - t, t \ge \sqrt{n\ln n} + \ln n$ 時 $\frac{n-t}{2t+1} C_m^{2n} - \frac{1}{4} C_n^{2n} \le 0$,

因此得 $\mathrm{n} - \mu^* < \sqrt{n\ln n} + \ln n$

接著考慮$\mathrm{n} - \mu^*$的下界：

若$\frac{2(P-1)n}{2P-1} < \frac{2Pn}{2P+1} < m$, 考慮$\frac{2Pn}{2P+1} \le k \le \frac{2(P+1)n}{2P+3}$

$$C_{\frac{2(P-1)n}{2P-1}}^{2n} + C_{\frac{2(P-1)n}{2P-11}+1}^{2n} + \cdots + C_{\mathrm{m}-1}^{2n} \ge \left(1 + \left(\frac{P-1}{P}\right) + \cdots + \left(\frac{P-1}{P}\right)^{\frac{n}{p(p+1)}}\right) C_{\mathrm{m}-1}^{2n}$$

$$\left(1 + \left(\frac{P-1}{P}\right) + \cdots + \left(\frac{P-1}{P}\right)^{\frac{n}{p(p+1)}}\right) = \frac{1 - \left(\frac{P-1}{P}\right)^{\frac{n}{p(p+1)}}}{1 - \frac{P-1}{P}}$$

若 $\frac{n}{p(p+1)} > P$，$\left(1+\left(\frac{P-1}{P}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{P}\right)^{P}\right)\to P(1-e^{-1})$

因此$\chi(m)$前半，$C^{2n}_{m-1}+C^{2n}_{m-3}+\cdots+C^{2n}_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]} \ge P(1-e^{-1})C^{2n}_{m-1}$

而另一方面 $\sum_{j=0}^{m} C_j^{n}\cdot C_j^{n-1}\le C_n^{2n-1}=\frac{1}{2}C_n^{2n}$, 令 $C=P(1-e^{-1})$

故$m-1=n-t$，且$t<\sqrt{n\ln C}-\frac{1}{2}\ln C$時

$\chi(m)\ge P(1-e^{-1})C^{2n}_{m-1}—\frac{1}{2}C_n^{2n}\ge 0$, 因此$\sqrt{n\ln C}-\frac{1}{2}\ln C$為$n-\mu^*$的下界

肆、研究結果與討論

一、不論是(*m*, *n*)-遊戲、*k*-優勢與和局模型，所有的策略都有 *n*!種。隨著 *n* 的增加，*n*!是很大的數，例如 $100!\approx 9.33\times 10^{157}$, 要在這些策略中找出成本最低的策略，是一件很可怕的事。我們的方法把情況縮小到 *n* 個策略中找，結果如下：

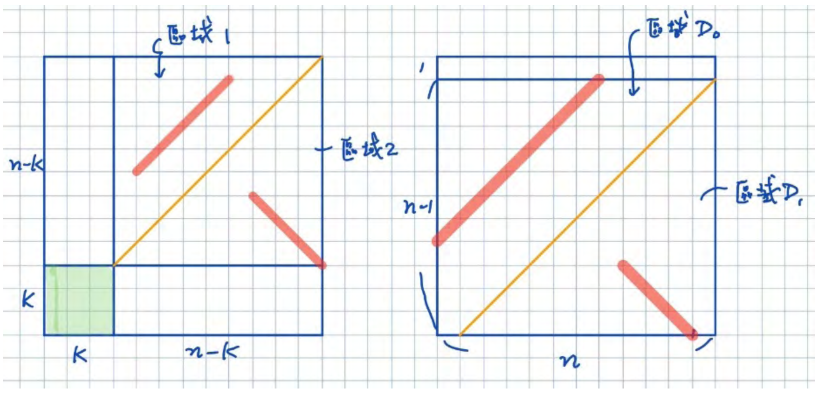


圖 13(左) *K*-優勢策略的策略點分佈　(右)和局策略的策略點分佈

與在文獻[1]中，(*m*, *n*)-遊戲的情形不大相同

二、在文獻[1]中k^*算的是：B 方λ^*，μ^*的值是B 方不犧牲的牌數為何時，有最低失敗成本。所以，換算要犧牲的牌數為 $n-K+1-\lambda^*$及$n-1-\mu^*$。由定理 8，要犧牲多少牌，以獲得最低失敗成本；**定理 4.**及**定理 7** 中的

$$\sqrt{\frac{1}{3}n\ln n}-\frac{1}{6}\ln n<n-\mu^*<\sqrt{n\ln n}+\ln n \quad 。$$

我們依 Mathematica 計算和局情況下<u>最佳策略</u>時，犧牲牌數如下表：

和局策略					
n	4	5~9	10~15	16~23	24~31
$n-\mu^{3}$	0	1	2	3	4
n	32~40	41~50	51~60	61~72	73~84
$n-\mu^{3}$	5	6	7	8	9
n	85~97	98~111	112~125	126~141	142~157
$n-\mu^{3}$	10	11	12	13	14
n	200	250	300	400	500
$n-\mu^{3}$	17	20	22	26	30
n	600	700	800	900	1000
$n-\mu^{3}$	34	37	41	44	46

在$n \le 1000$時， $n-\mu^{3}$ 的值與$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$是很相近的。

和局策略	與$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$比較				
n	16	24	32	41	51
$n-\mu^{3}$	3	4	5	6	7
$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$	3.74	4.9	5.91	6.93	7.95
n	61	73	85	98	112
$n-\mu^{3}$	8	9	10	11	12
$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$	8.89	9.93	10.91	11.9	12.9
n	126	142	200	250	300
$n-\mu^{3}$	13	14	17	20	22
$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$	13.86	14.89	18.27	20.86	23.22
n	400	500	600	700	800
$n-\mu^{3}$	26	30	34	37	41
$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$	27.48	31.29	34.78	38.01	41.05
n	900	1000			
$n-\mu^{3}$	44	46			
$\sqrt{0.29 \cdot n \cdot ln(n)}$	43.92	46.66			

三、K-優勢的情況則更為複雜及有趣，根據定義 4-11 及定理 4，我們計算 n=100 及 n=200 時，有最低失敗成本時，不同的 K 值所對應的犧牲牌數如下：

n=100					
K	1	2~3	4~5	6~7	8~10
n+1-*K*-λ^*	11	10	9	8	7
K	11~13	14~17	18~21	22~26	27~34
n+1-*K*-λ^*	6	5	4	3	2
K	35~48	49~			
n+1-*K*-λ^*	1	0			

n=200					
K	1	2~3	4~6	7~8	9~10
n+1-*K*-λ^*	17	16	15	14	13
K	11~13	14~16	17~19	20~22	23~26
n+1-*K*-λ^*	12	11	10	9	8
K	27~30	31~35	36~41	42~48	49~58
n+1-*K*-λ^*	7	6	5	4	3
K	59~72	73~98	99~		
n+1-*K*-λ^*	2	1	0		

上面兩個表中，我們有一些觀察：

(1)當 K=1 時，$\omega(m)=\chi(m)$

因此$\mathrm{n}+1-K-\lambda^*$ 的值與和局策略相同，此時，$\mathrm{n}+1-K-\lambda^* \approx \sqrt{0.29\times \mathrm{n}\ln n}$，

猜想$\mathrm{n}+1-K-\lambda^*$ 大約也是 $\sqrt{\alpha\cdot n\ln n}$ 的形式。

(2) $n+1-K-\lambda^*=0$ 時，最小的 K 值，大約使得$\dfrac{K}{n}=\dfrac{1}{2}$，這是很有趣的現象，即當 B 方手上有一半是好牌，不犧牲任何牌的策略才開始會是好策略。以玩牌的經驗來看，這機率實在太低。

(3)另外，當 K 的值變大，K 值的變動(ΔK)對犧牲牌數$n+1-\mathrm{K}-\lambda^*$ 的值影響越小。

(4)我們原先想像$\dfrac{K}{n}$相當時，$\mathrm{n}+1-K-\lambda^*$ 的值也會相當，但從上表看來，$\mathrm{n}+1-\mathrm{K}-\lambda^*$ 的值與$\dfrac{K}{n}$並沒有這樣的關係(但(2)時的$\dfrac{K}{n}=\dfrac{1}{2}$除外)。

伍、結論與應用

一、對於和局的情形，若將數字差在 2,3,4,..,等等以內視為和局，是否情況上會與本文中討論的情形有本質上的不同也是我們很關心的，希望在不久的未來，我們也能得到一些進展。

二、本文假設的情境中 B 方需要知道 A 方的策略，但在真實世界中不太可能發生。若考慮有三方 A, B, C，其中 A 方的策略已知，但 B 及 C 方各有策略，以 B 方的立場來想，在 C 方的各種可能策略中，<u>B 方的最佳策略各是什麼？是否存在 B, C 互利的策略選擇</u>？這些是我們未來想探討的問題，而本文的結果提供了一個基礎起點。

陸、參考文獻

1.*Richard Chawtwin, Dana Mackenzie, How to Win at (One-Round) War*
The COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL Mathematics vol.46 No.4 (2015), 242-253.

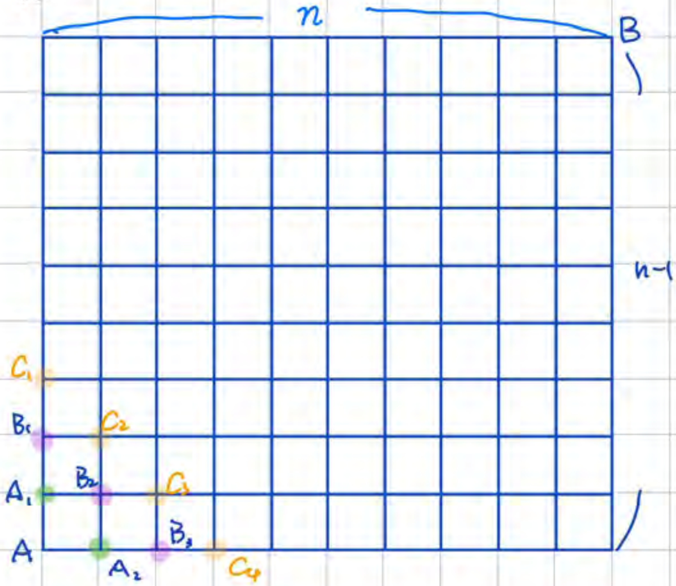
2.翰林高中數學 2 (排列組合)

3.L. Lovasz, J.Pelikan, K.Vesztergombi, Discrete Mathematics Elementary and Beyond
QA39.3 L68(2003) ISBN 0-387-95584-4

附錄

1.性質 3-2 的証明：

$$[f_{ij}]_{n\times n}=\begin{bmatrix} C^{n-1}_{n-1}\cdot C^{n}_{0} & C^{n}_{n-1}\cdot C^{n-1}_{0} & \cdots & C^{2n-4}_{n-1}\cdot C^{3}_{0} & C^{2n-3}_{n-1}\cdot C^{2}_{0} & C^{2n-2}_{n-1}\cdot C^{1}_{0} \\ C^{n-2}_{n-2}\cdot C^{n+1}_{1} & C^{n-1}_{n-2}\cdot C^{n}_{1} & \cdots & & C^{2n-4}_{n-2}\cdot C^{3}_{1} & C^{2n-3}_{n-2}\cdot C^{2}_{1} \\ C^{n-3}_{n-3}\cdot C^{n+2}_{2} & C^{n-2}_{n-3}\cdot C^{n+1}_{2} & & & & C^{2n-4}_{n-3}\cdot C^{3}_{2} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ C^{2}_{2}\cdot C^{2n-3}_{n-3} & & & & & \\ C^{1}_{1}\cdot C^{2n-2}_{n-2} & C^{2}_{1}\cdot C^{2n-3}_{n-2} & \cdots & & & \\ C^{0}_{0}\cdot C^{2n-1}_{n-1} & C^{1}_{0}\cdot C^{2n-2}_{n-1} & C^{2}_{0}\cdot C^{2n-3}_{n-1} & \cdots & & C^{n-1}_{0}\cdot C^{n}_{n-1} \end{bmatrix}$$



$$\left.\begin{array}{ll} A\longrightarrow A_1\longrightarrow B & C^{1}_{1}\cdot C^{n+n-2}_{n-2} \\ A\longrightarrow A_2\longrightarrow B & C^{1}_{0}\cdot C^{n-1+(n-1)}_{n-1} \end{array}\right\} C^{n+n-1}_{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A\longrightarrow B_1\longrightarrow B & C^{2}_{2}\cdot C^{2n-3}_{n-3} \\ \quad\longrightarrow B_2\longrightarrow B & C^{2}_{1}\cdot C^{2n-3}_{n-2} \\ \quad\longrightarrow B_3\longrightarrow B & C^{2}_{0}\cdot C^{2n-3}_{n-1} \end{array}\right\} C^{2n-1}_{n-1}$$

同樣 $A\longrightarrow C_i\longrightarrow B$, $i=1,2,3,4$

也是，依此可得

2.性質 3-4 的証明：

$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3}$	$f_{1,4}$	....	$f_{1,n-3}$	$f_{1,n-2}$	$f_{1,n-1}$	$f_{1,n}$
$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3}$	$f_{2,4}$	....	$f_{2,n-3}$	$f_{2,n-2}$	$f_{2,n-1}$	$f_{2,n}$
$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3}$	$f_{3,4}$	....	$f_{3,n-3}$	$f_{3,n-2}$	$f_{3,n-1}$	$f_{3,n}$
$f_{4,1}$	$f_{4,2}$	$f_{4,3}$	$f_{4,4}$	....	$f_{4,n-3}$	$f_{4,n-2}$	$f_{4,n-1}$	$f_{4,n}$
....	....	....	....	....	....	....	....	....
$f_{n-3,1}$	$f_{n-3,2}$	$f_{n-3,3}$	$f_{n-3,4}$	....	$f_{n-3,n-3}$	$f_{n-3,n-2}$	$f_{n-3,n-1}$	$f_{n-3,n}$
$f_{n-2,1}$	$f_{n-2,2}$	$f_{n-2,3}$	$f_{n-2,4}$	....	$f_{n-2,n-3}$	$f_{n-2,n-2}$	$f_{n-2,n-1}$	$f_{n-2,n}$
$f_{n-1,1}$	$\boxed{f_{n-1,2}}$	$f_{n-1,3}$	$f_{n-1,4}$	....	$f_{n-1,n-3}$	$f_{n-1,n-2}$	$f_{n-1,n-1}$	$f_{n-1,n}$
$f_{n,1}$	$\boxed{f_{n,2}}$	$f_{n,3}$	$f_{n,4}$	....	$f_{n,n-3}$	$f_{n,n-2}$	$f_{n,n-1}$	$f_{n,n}$

a

$a = f_{n-1,1} + f_{n,2}$ ，因為 $f_{n-1,2} + f_{n,2}$，所以$f_{n-1,1} + f_{n-1,2} = a = f_{n,1}$

a

$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3}$	$f_{1,4}$	....	$f_{1,n-3}$	$f_{1,n-2}$	$f_{1,n-1}$	$f_{1,n}$
$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3}$	$f_{2,4}$	....	$f_{2,n-3}$	$f_{2,n-2}$	$f_{2,n-1}$	$f_{2,n}$
$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3}$	$f_{3,4}$	....	$f_{3,n-3}$	$f_{3,n-2}$	$f_{3,n-1}$	$f_{3,n}$
$f_{4,1}$	$f_{4,2}$	$f_{4,3}$	$f_{4,4}$	....	$f_{4,n-3}$	$f_{4,n-2}$	$f_{4,n-1}$	$f_{4,n}$
....	....	....	....	....	....	....	....	....
$f_{n-3,1}$	$f_{n-3,2}$	$f_{n-3,3}$	$f_{n-3,4}$	....	$f_{n-3,n-3}$	$f_{n-3,n-2}$	$f_{n-3,n-1}$	$f_{n-3,n}$
$f_{n-2,1}$	$f_{n-2,2}$	$f_{n-2,3}$	$f_{n-2,4}$	....	$f_{n-2,n-3}$	$f_{n-2,n-2}$	$f_{n-2,n-1}$	$f_{n-2,n}$
$f_{n-1,1}$	$\boxed{f_{n-1,2}}$	$f_{n-1,3}$	$f_{n-1,4}$	....	$f_{n-1,n-3}$	$f_{n-1,n-2}$	$f_{n-1,n-1}$	$f_{n-1,n}$
$f_{n,1}$	$\boxed{f_{n,2}}$	$f_{n,3}$	$f_{n,4}$	....	$f_{n,n-3}$	$f_{n,n-2}$	$f_{n,n-1}$	$f_{n,n}$

$a = f_{n-2,1} + f_{n-1,2} + f_{n,3}$ ，因為 $f_{n-1,2} = f_{n,2}$，所以$f_{n-1,2} + f_{n,3} = f_{n,2} + f_{n,3}$

由性質3-3 (2) 可得 $f_{n-1,2} + f_{n,3} = f_{n,2} + f_{n,3} = f_{n-2,2} + f_{n-2,3}$

因此$f_{n-2,1} + f_{n-2,2} + f_{n-2,3} = f_{n-2,1} + f_{n-1,2} + f_{n,3} = a$

類似方法可得性質3-4其他情形。

Consider the case for n = 12 and K – stratege   no := 12   K := 3

$$
\begin{pmatrix}
1 & 12 & 78 & 364 & 1365 & 4368 & 12376 & 31824 & 75582 \\
10 & 99 & 528 & 2002 & 6006 & 15015 & 32032 & 58344 & 87516 \\
55 & 450 & 1980 & 6160 & 15015 & 30030 & 50050 & 68640 & 72930 \\
220 & 1485 & 5400 & 13860 & 27720 & 45045 & 60060 & 64350 & 51480 \\
715 & 3960 & 11880 & 25200 & 41580 & 55440 & 60060 & 51480 & 32175 \\
2002 & 9009 & 22176 & 38808 & 52920 & 58212 & 51744 & 36036 & 18018 \\
5005 & 18018 & 36036 & 51744 & 58212 & 52920 & 38808 & 22176 & 9009 \\
11440 & 32175 & 51480 & 60060 & 55440 & 41580 & 25200 & 11880 & 3960 \\
24310 & 51480 & 64350 & 60060 & 45045 & 27720 & 13860 & 5400 & 1485 \\
48620 & 72930 & 68640 & 50050 & 30030 & 15015 & 6160 & 1980 & 450 \\
92378 & 87516 & 58344 & 32032 & 15015 & 6006 & 2002 & 528 & 99 \\
167960 & 75582 & 31824 & 12376 & 4368 & 1365 & 364 & 78 & 12
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 91 & 455 & 1820 & 6188 & 18564 & 50388 & 125970 \\
0 & 0 & 0 & 10 & 109 & 637 & 2639 & 8645 & 23660 & 55692 & 114036 & 201552 \\
0 & 0 & 0 & 55 & 505 & 2485 & 8645 & 23660 & 53690 & 103740 & 172380 & 245310 \\
0 & 0 & 0 & 220 & 1705 & 7105 & 20965 & 48685 & 93730 & 153790 & 218140 & 269620 \\
0 & 0 & 0 & 715 & 4675 & 16555 & 41755 & 83335 & 138775 & 198835 & 250315 & 282490 \\
0 & 0 & 0 & 2002 & 11011 & 33187 & 71995 & 124915 & 183127 & 234871 & 270907 & 288925 \\
0 & 0 & 0 & 5005 & 23023 & 59059 & 110803 & 169015 & 221935 & 260743 & 282919 & 291928 \\
0 & 0 & 0 & 11440 & 43615 & 95095 & 155155 & 210595 & 252175 & 277375 & 289255 & 293215 \\
0 & 0 & 0 & 24310 & 75790 & 140140 & 200200 & 245245 & 272965 & 286825 & 292225 & 293710 \\
0 & 0 & 0 & 48620 & 121550 & 190190 & 240240 & 270270 & 285285 & 291445 & 293425 & 293875 \\
0 & 0 & 0 & 92378 & 179894 & 238238 & 270270 & 285285 & 291291 & 293293 & 293821 & 293920 \\
0 & 0 & 0 & 167960 & 243542 & 275366 & 287742 & 292110 & 293475 & 293839 & 293917 & 293929
\end{pmatrix}
$$

Consider the case for n = 12 and K – stratege   no := 10   K := 2

$$
\begin{pmatrix}
1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11440 \\
9 & 72 & 315 & 990 & 2475 & 5148 & 9009 & 12870 \\
45 & 288 & 1008 & 2520 & 4950 & 7920 & 10296 & 10296 \\
165 & 840 & 2352 & 4704 & 7350 & 9240 & 9240 & 6864 \\
495 & 1980 & 4410 & 7056 & 8820 & 8820 & 6930 & 3960 \\
1287 & 3960 & 6930 & 8820 & 8820 & 7056 & 4410 & 1980 \\
3003 & 6864 & 9240 & 9240 & 7350 & 4704 & 2352 & 840 \\
6435 & 10296 & 10296 & 7920 & 4950 & 2520 & 1008 & 288 \\
12870 & 12870 & 9009 & 5148 & 2475 & 990 & 315 & 72 \\
24310 & 11440 & 5005 & 2002 & 715 & 220 & 55 & 10
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 11 & 66 & 286 & 1001 & 3003 & 8008 & 19448 \\
0 & 0 & 9 & 81 & 396 & 1386 & 3861 & 9009 & 18018 & 30888 \\
0 & 0 & 45 & 333 & 1341 & 3861 & 8811 & 16731 & 27027 & 37323 \\
0 & 0 & 165 & 1005 & 3357 & 8061 & 15411 & 24651 & 33891 & 40755 \\
0 & 0 & 495 & 2475 & 6885 & 13941 & 22761 & 31581 & 38511 & 42471 \\
0 & 0 & 1287 & 5247 & 12177 & 20997 & 29817 & 36873 & 41283 & 43263 \\
0 & 0 & 3003 & 9867 & 19107 & 28347 & 35697 & 40401 & 42753 & 43593 \\
0 & 0 & 6435 & 16731 & 27027 & 34947 & 39897 & 42417 & 43425 & 43713 \\
0 & 0 & 12870 & 25740 & 34749 & 39897 & 42372 & 43362 & 43677 & 43749 \\
0 & 0 & 24310 & 35750 & 40755 & 42757 & 43472 & 43692 & 43747 & 43757
\end{pmatrix}
$$

Consider the case for n = 7 and 和局

(除錯) (Dialog) Out[256]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 \\ 8 & 35 & 90 & 175 & 280 & 378 & 420 \\ 36 & 112 & 210 & 300 & 350 & 336 & 252 \\ 120 & 252 & 336 & 350 & 300 & 210 & 112 \\ 330 & 420 & 378 & 280 & 175 & 90 & 35 \\ 792 & 462 & 252 & 126 & 56 & 21 & 6 \end{pmatrix}$$

(除錯) (Dialog) Out[257]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 \\ 8 & 43 & 133 & 308 & 588 & 966 & 1386 \\ 36 & 148 & 358 & 658 & 1008 & 1344 & 1596 \\ 120 & 372 & 708 & 1058 & 1358 & 1568 & 1680 \\ 330 & 750 & 1128 & 1408 & 1583 & 1673 & 1708 \\ 792 & 1254 & 1506 & 1632 & 1688 & 1709 & 1715 \end{pmatrix}$$

Consider the case for n = 8 and 和局

(除錯) (Dialog) Out[267]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\ 9 & 48 & 147 & 336 & 630 & 1008 & 1386 & 1584 \\ 45 & 180 & 420 & 735 & 1050 & 1260 & 1260 & 990 \\ 165 & 480 & 840 & 1120 & 1225 & 1120 & 840 & 480 \\ 495 & 990 & 1260 & 1260 & 1050 & 735 & 420 & 180 \\ 1287 & 1584 & 1386 & 1008 & 630 & 336 & 147 & 48 \\ 3003 & 1716 & 924 & 462 & 210 & 84 & 28 & 7 \end{pmatrix}$$

(除錯) (Dialog) Out[268]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 \\ 9 & 57 & 204 & 540 & 1170 & 2178 & 3564 & 5148 \\ 45 & 225 & 645 & 1380 & 2430 & 3690 & 4950 & 5940 \\ 165 & 645 & 1485 & 2605 & 3830 & 4950 & 5790 & 6270 \\ 495 & 1485 & 2745 & 4005 & 5055 & 5790 & 6210 & 6390 \\ 1287 & 2871 & 4257 & 5265 & 5895 & 6231 & 6378 & 6426 \\ 3003 & 4719 & 5643 & 6105 & 6315 & 6399 & 6427 & 6434 \end{pmatrix}$$

Consider the case for n = 9 and 和局

(除錯) (Dialog) Out[278]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & 6435 \\
10 & 63 & 224 & 588 & 1260 & 2310 & 3696 & 5148 & 6006 \\
55 & 270 & 756 & 1568 & 2646 & 3780 & 4620 & 4752 & 3861 \\
220 & 825 & 1800 & 2940 & 3920 & 4410 & 4200 & 3300 & 1980 \\
715 & 1980 & 3300 & 4200 & 4410 & 3920 & 2940 & 1800 & 825 \\
2002 & 3861 & 4752 & 4620 & 3780 & 2646 & 1568 & 756 & 270 \\
5005 & 6006 & 5148 & 3696 & 2310 & 1260 & 588 & 224 & 63 \\
11\,440 & 6435 & 3432 & 1716 & 792 & 330 & 120 & 36 & 8
\end{pmatrix}$$

(除錯) (Dialog) Out[279]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 9 & 45 & 165 & 495 & 1287 & 3003 & 6435 & 12\,870 \\
10 & 73 & 297 & 885 & 2145 & 4455 & 8151 & 13\,299 & 19\,305 \\
55 & 325 & 1081 & 2649 & 5295 & 9075 & 13\,695 & 18\,447 & 22\,308 \\
220 & 1045 & 2845 & 5785 & 9705 & 14\,115 & 18\,315 & 21\,615 & 23\,595 \\
715 & 2695 & 5995 & 10\,195 & 14\,605 & 18\,525 & 21\,465 & 23\,265 & 24\,090 \\
2002 & 5863 & 10\,615 & 15\,235 & 19\,015 & 21\,661 & 23\,229 & 23\,985 & 24\,255 \\
5005 & 11\,011 & 16\,159 & 19\,855 & 22\,165 & 23\,425 & 24\,013 & 24\,237 & 24\,300 \\
11\,440 & 17\,875 & 21\,307 & 23\,023 & 23\,815 & 24\,145 & 24\,265 & 24\,301 & 24\,309
\end{pmatrix}$$

Consider the case for n = 10 and 和局

(除錯) (Dialog) Out[289]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 9 & 45 & 165 & 495 & 1287 & 3003 & 6435 & 12\,870 & 24\,310 \\
11 & 80 & 324 & 960 & 2310 & 4752 & 8580 & 13\,728 & 19\,305 & 22\,880 \\
66 & 385 & 1260 & 3024 & 5880 & 9702 & 13\,860 & 17\,160 & 18\,018 & 15\,015 \\
286 & 1320 & 3465 & 6720 & 10\,584 & 14\,112 & 16\,170 & 15\,840 & 12\,870 & 8008 \\
1001 & 3575 & 7425 & 11\,550 & 14\,700 & 15\,876 & 14\,700 & 11\,550 & 7425 & 3575 \\
3003 & 8008 & 12\,870 & 15\,840 & 16\,170 & 14\,112 & 10\,584 & 6720 & 3465 & 1320 \\
8008 & 15\,015 & 18\,018 & 17\,160 & 13\,860 & 9702 & 5880 & 3024 & 1260 & 385 \\
19\,448 & 22\,880 & 19\,305 & 13\,728 & 8580 & 4752 & 2310 & 960 & 324 & 80 \\
43\,758 & 24\,310 & 12\,870 & 6435 & 3003 & 1287 & 495 & 165 & 45 & 9
\end{pmatrix}$$

(除錯) (Dialog) Out[290]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 10 & 55 & 220 & 715 & 2002 & 5005 & 11\,440 & 24\,310 & 48\,620 \\
11 & 91 & 415 & 1375 & 3685 & 8437 & 17\,017 & 30\,745 & 50\,050 & 72\,930 \\
66 & 451 & 1711 & 4735 & 10\,615 & 20\,317 & 34\,177 & 51\,337 & 69\,355 & 84\,370 \\
286 & 1606 & 5071 & 11\,791 & 22\,375 & 36\,487 & 52\,657 & 68\,497 & 81\,367 & 89\,375 \\
1001 & 4576 & 12\,001 & 23\,551 & 38\,251 & 54\,127 & 68\,827 & 80\,377 & 87\,802 & 91\,377 \\
3003 & 11\,011 & 23\,881 & 39\,721 & 55\,891 & 70\,003 & 80\,587 & 87\,307 & 90\,772 & 92\,092 \\
8008 & 23\,023 & 41\,041 & 58\,201 & 72\,061 & 81\,763 & 87\,643 & 90\,667 & 91\,927 & 92\,312 \\
19\,448 & 42\,328 & 61\,633 & 75\,361 & 83\,941 & 88\,693 & 91\,003 & 91\,963 & 92\,287 & 92\,367 \\
43\,758 & 68\,068 & 80\,938 & 87\,373 & 90\,376 & 91\,663 & 92\,158 & 92\,323 & 92\,368 & 92\,377
\end{pmatrix}$$

【評語】050403

這是一個對局論的問題，也是基本田忌賽馬問題之延伸。作者先建立一個策略矩陣，再從中建立基本矩陣與增廣矩陣，以供分析最佳策略之用。特別在分析 K-優勢策略，作者引進階梯形區域對角差觀念，儘管沒有成本矩陣的對稱性，仍可以分析出最佳策略落在右上方梯形區域內，在透過建立一些解析不等式去篩選最佳策略。儘管這樣仍然無法完全解決最佳策略，對於和局的定義也太過限縮(差距為１只是其中的一個部分)，作者仍然在這件作品中展現出不錯的創意與數學成熟度。最後，本研究在文獻探討部分中，需說明參考資料中第１及３筆英文文獻與本研究有何相關？又須說明那些部分是本研究的自創。

作品海報

壹、目的及介紹

相傳戰國時代，將軍田忌和齊威王賽馬，孫臏建議：「以下馬對齊威王的上馬；再以上馬對他的中馬，最後以中馬對他的下馬。」這樣的對局中，孫臏犧牲一馬的策略最是佳的。

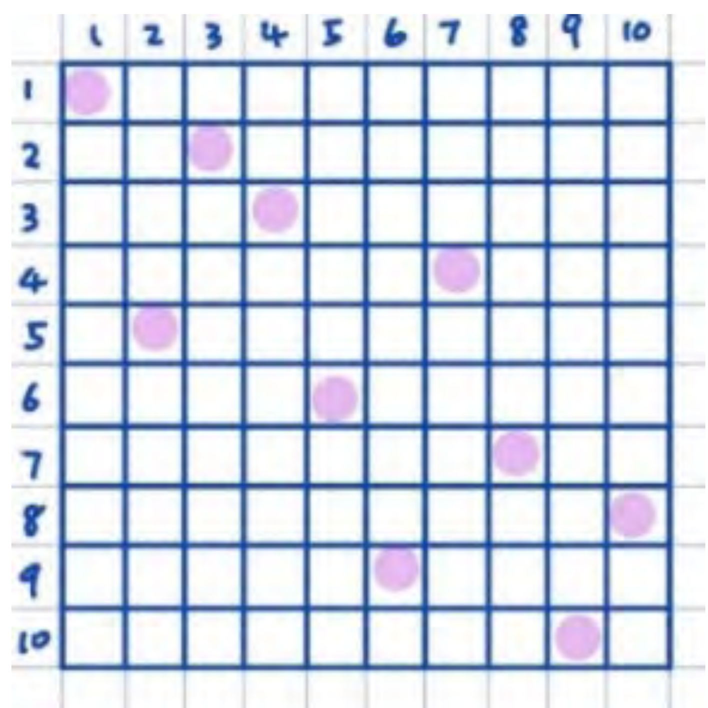


圖1 策略s的策略點

若令矩陣$\left[g_{ij}\right]_{3\times3}$，$g_{ij}$表示所有分配中，A方中第$i$小的數勝過B方中第$j$大的數的全部情形總數。田忌賽馬的例子中的策略，是A方最小對B方第2大；A方第2小對上B方最大；A方第3小對上B方第3 大。因此A獲勝的期望值為

$$\frac{1}{C_3^6}(g_{12}+g_{21}+g_{33})$$

我們打算

1.找出對一般n對n時B方輸得最少的策略又稱最佳策略。

2.接著再論如果B方手上有k張大牌時(***K*-優勢**)，最佳的策略會是什麼?

3.以及如果有些牌實力相當時(**和局**)最佳的策略又是什麼。

貳、文獻結果及成本矩陣的對稱性

定義1-1. 策略

B方的策略$s=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n)$，其中$s(i)=s_i,\ \ i=1,2,3,\cdots,n$。顯然策略點的位置在任一行及任一列都恰只有一個。

(m,n)-遊戲

考慮A，B兩方對局，$m\ (m\geq 2n)$ 張牌中，A、B兩方都各有其中n張牌。A方第i小的牌在B方中為第j大的牌之情況數為 $f_{ij}=C_{n-1}^{n-i+j-1}\cdot C_{i-1}^{n+i-j}$；定義

(1) 基本矩陣 $F=[f_{ij}]_{n\times n}$

(2) B方的成本矩陣$G=[g_{ij}]_{n\times n}$, 其中$g_{ij}=\sum_{k=1}^{j} f_{ik}$，策略成本為$c(s)=\sum_{k=1}^{j} g_{is_i}$

$(2n,n)$-遊戲(文獻[1])：

定理(Optimal strategy for One-Round War).

$(2n,n)$遊戲中，若$n\geq 3$，若令$k^*=k^*(n)=\max_k\left\{k\,|\,g_{n+1-k,n+1-k}-\triangle S_{n+1-k}\leq 0\right\}$，則B方犧牲$k^*(n)$張牌的策略有最小值。

顯然，$(2n,n)$-遊戲的結果也可以推論到(m,n)-遊戲的情形$(m\geq 2n)$。

圖2

性質3-3. 基本矩陣 $F=\left[f_{ij}\right]_{n\times n}$ 滿足:

(1) $\sum_{k=-s}^{s} f_{i+k,j+k}=\sum_{k=-s}^{s} f_{i+1+k,j+k},\ i+j=n+1, s+1\leq i\leq n-1-s$

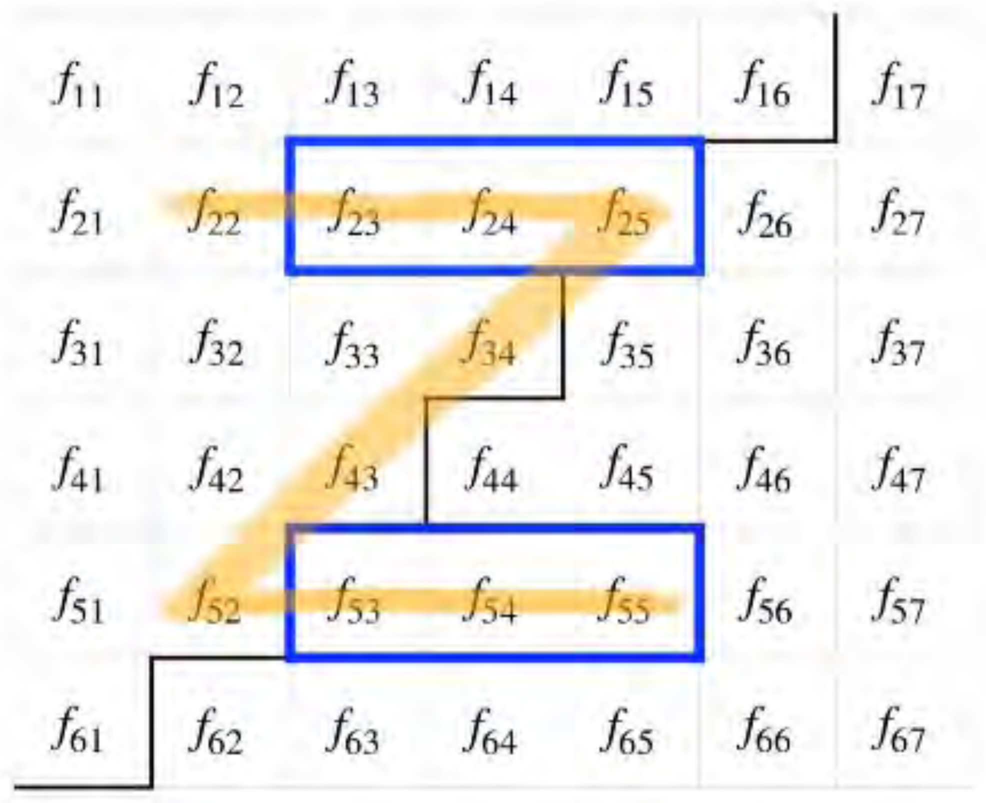
(2) $\sum_{k=-s+1}^{s} f_{i+k,j+k}=\sum_{k=-s+1}^{s} f_{i+1+k,j+k},\ i+j=n+1, s+1\leq i\leq n-s$

引理3-1,2和3. (Z字中心性質、Z字左偏、右偏性質) 基本矩陣 $F=\left[f_{ij}\right]_{n\times n}$ 滿足:

$\sum_{k=0}^{s-1} f_{i,j-k}=\sum_{k=0}^{s-1} f_{i+s,j-k}$，$i+j=n+1,\ s\leq n-i$ (Z字中心)

$\sum_{k=0}^{s-1} f_{i,j-k}\leq\sum_{k=0}^{s-1} f_{i+s,j-k}$，$i+j<n+1,\ s\leq n-i$； (Z字左偏)

$\sum_{k=0}^{s-1} f_{i,j-k}\geq\sum_{k=0}^{s-1} f_{i+s,j-k}$，$i+j>n+1,\ s\leq n-i$． (Z字右偏)



參、K-優勢 (若B方有K張最大的牌)

定義4-1.

(1) K-優勢矩陣 $H\,(\mathrm{n,K})=\left[h_{ij}\right]_{n\times n}$: $h_{ij}=\begin{cases}0 & j\leq K\\ C_{n-i}^{n-i+j-K-1}\bullet C_{i-1}^{n+i-j} & j>K\end{cases}$

(2) K-成本矩陣 $\Phi(n,K)=\left[\phi_{ij}\right]_{n\times n}$, 其中 $\phi_{ij}=\sum_{k=1}^{j} h_{ik}$ (令$C_0^0=1$)。

$$H(n,K)=\left[h_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & C_{n-1}^{n-1}C_0^{n-K} & C_{n-1}^{n}C_0^{n-K-1} & \cdots & C_{n-1}^{2n-K-2}C_0^1\\ 0 & \cdots & 0 & C_{n-2}^{n-2}C_1^{n-K+1} & C_{n-2}^{n-1}C_1^{n-K} & \cdots & C_{n-2}^{2n-K-3}C_1^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & C_0^0C_{n-1}^{2n-K-1} & C_0^1C_{n-1}^{2n-K-2} & \cdots & C_0^{n-K-1}C_{n-1}^{n}\end{bmatrix}$$

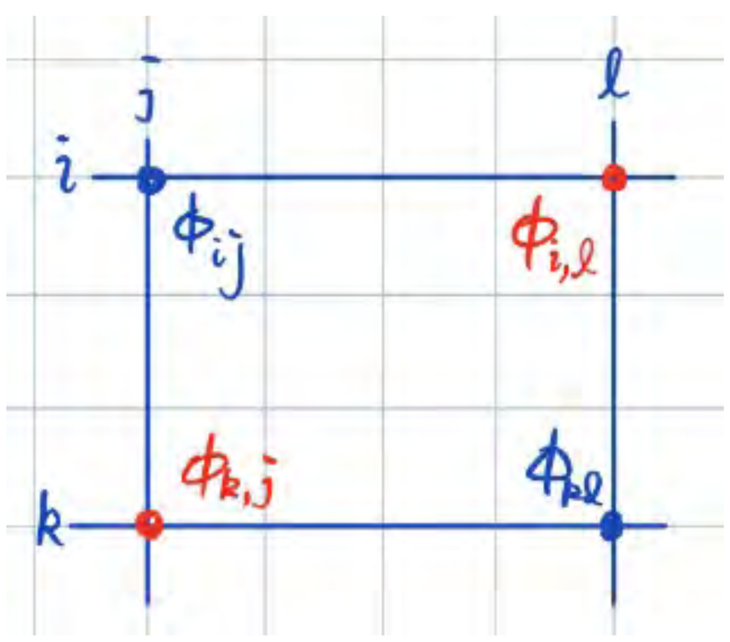


圖3

定義4-3. 若$i<k\leq n$, 且$j<l\leq n$，

$$\Delta_\phi(i,j,k,l)=\left(\phi_{ij}+\phi_{kl}\right)-(\phi_{kj}+\phi_{il})$$；矩形Γ：對角差並記為$\Delta_\phi\Gamma$

定義4-4. $n\times n$ 中的方格點(i,j)

$$NW\,Coner=\{(i,j)\,|\,i+j<n+1\};\ SE\,Coner=\{(i,j)\,|\,i+j>n+1\};\ MAD\,line=\{(i,j)\,|\,i+j=n+1\}$$

$$D_0=\{(i,j)\,|\,i\le\alpha(n,K,j)\}\text{及 }D_1=\{(i,j)\,|\,i>\alpha(n,K,j)\}\ \ \text{其中 }\alpha(n,K,j):=[n-\frac{n-1}{n-K+1}\cdot j](\frac{h_{ij}}{h_{i+1,j}}\le 1).$$

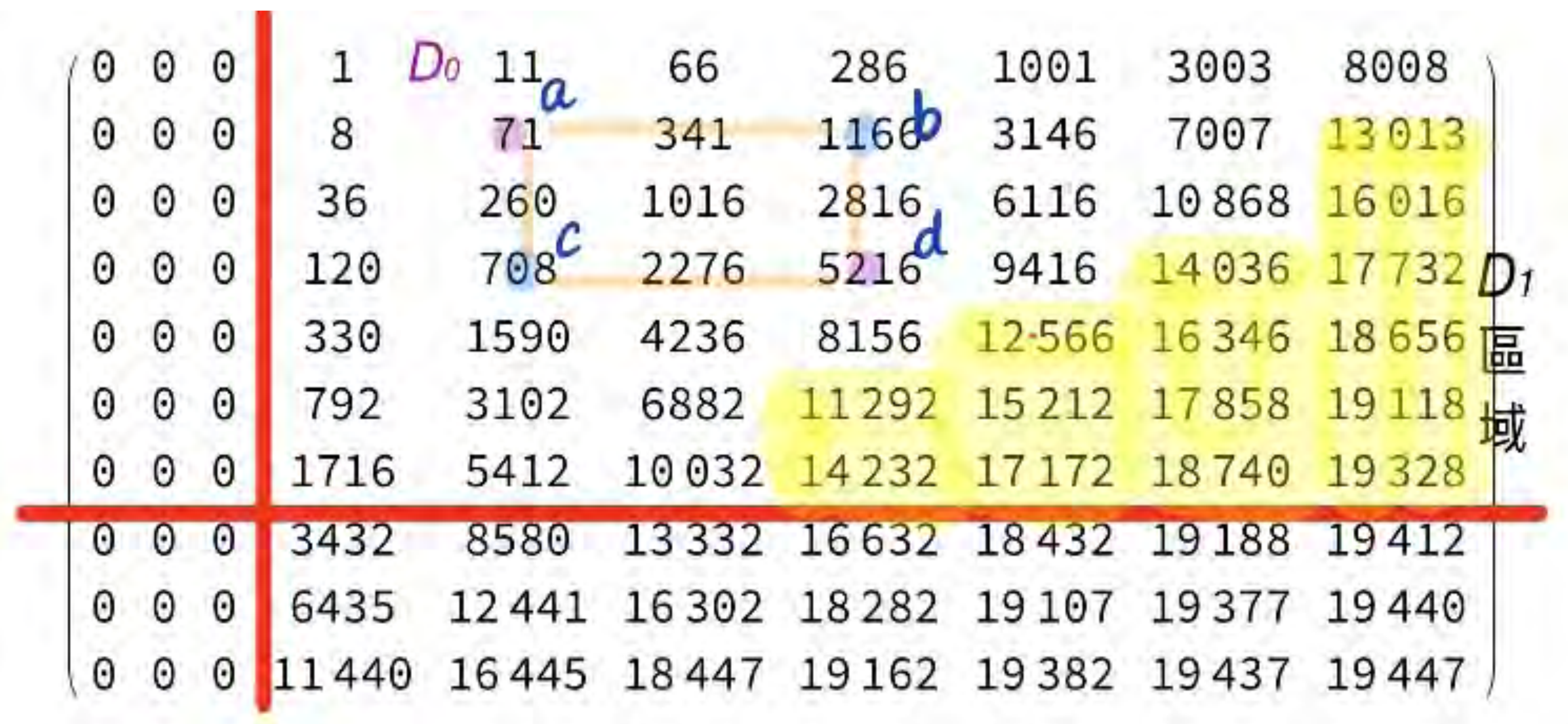
引理4-5. 正整數n,K及k，若$i<k\le n,\ j<l\le n$

(1)當 $i\le\alpha(n,K,j)$ 時， $\Delta_\phi(i,j,k,l)>0$；

(2)當 $i\ge\alpha(n,K,j)$ 時， $\Delta_\phi(i,j,k,l)<0$.

(3)若$(i-1,j)\in NWConer$,$(i,j)\in MAD\,line$, $(i-1,l),(i,l)\in D_1$時，則 $\Delta_\phi(i-1,j,i,l)<0$.

(4)若$(i,j)\in NWConer$,$(i,j+1)\in MAD\,line$, $(p,j),(p,j+1)\in D_1$時，則 $\Delta_\phi(i,j,p,j+1)<0$.



0	0	0	1	11	66	286	1001	3003	8008
0	0	0	8	71	341	1166	3146	7007	13013
0	0	0	36	260	1016	2816	6116	10868	16016
0	0	0	120	708	2276	5216	9416	14036	17732
0	0	0	330	1590	4236	8156	12566	16346	18656
0	0	0	792	3102	6882	11292	15212	17858	19118
0	0	0	1716	5412	10032	14232	17172	18740	19328
0	0	0	3432	8580	13332	16632	18432	19188	19412
0	0	0	6435	12441	16302	18282	19107	19377	19440
0	0	0	11440	16445	18447	19162	19382	19437	19447

圖5

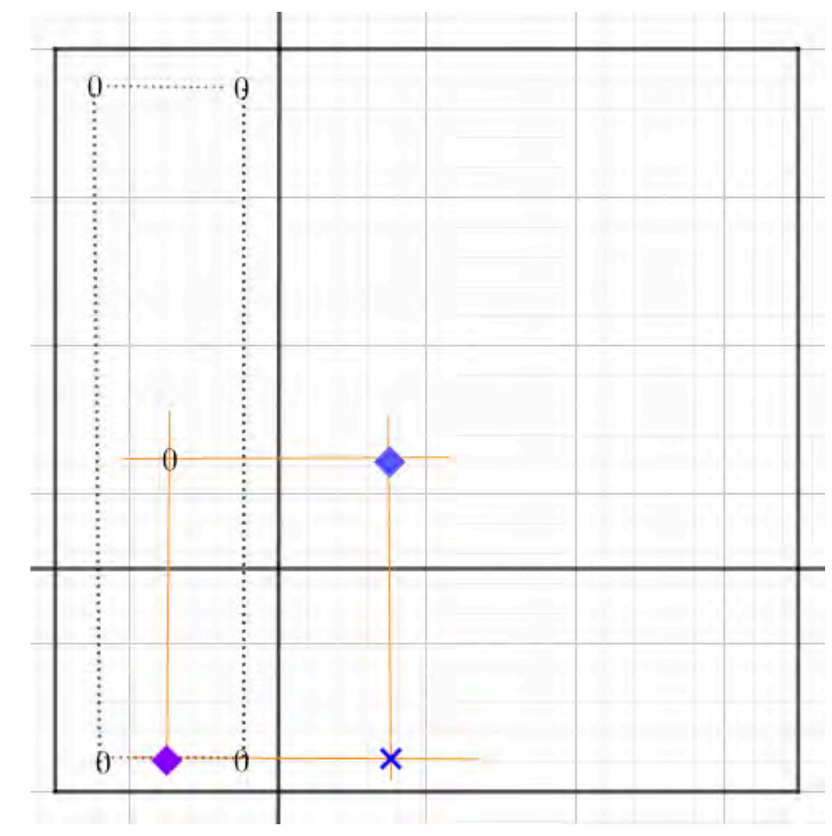


圖6

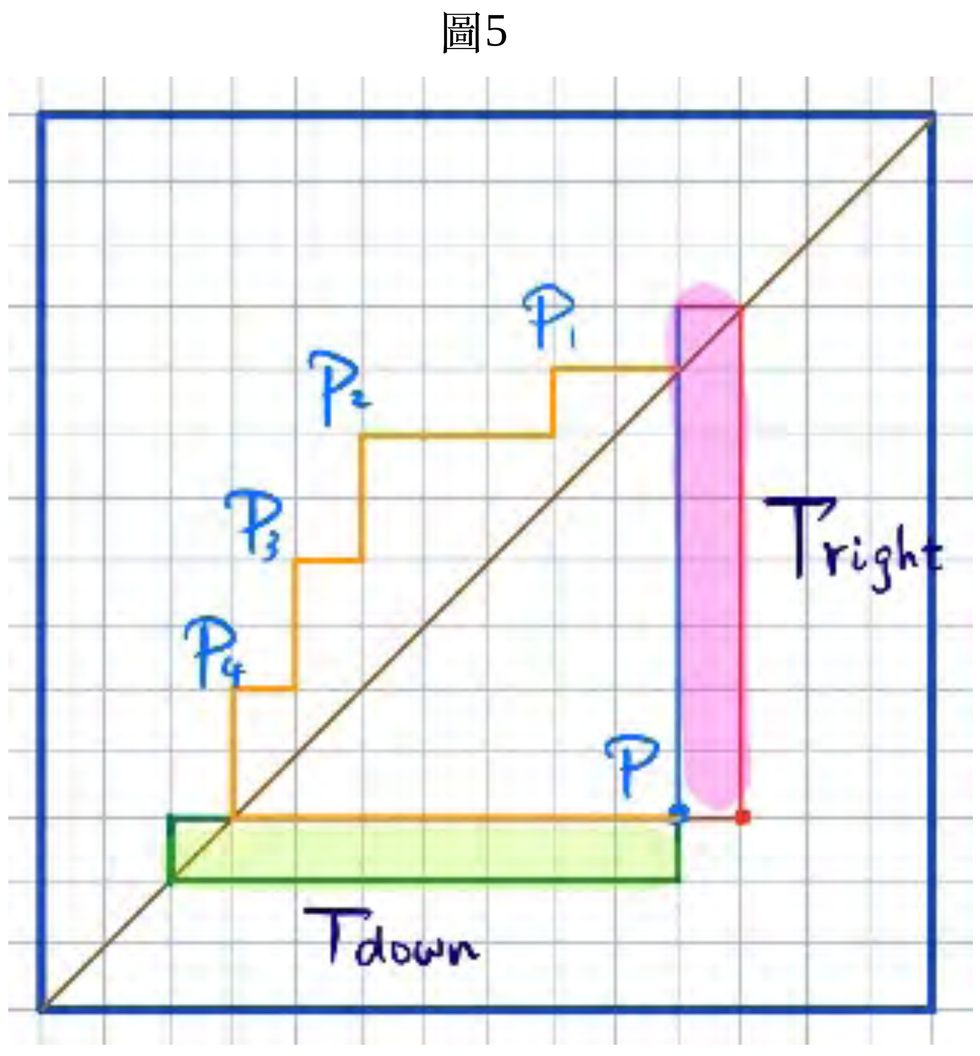


圖7

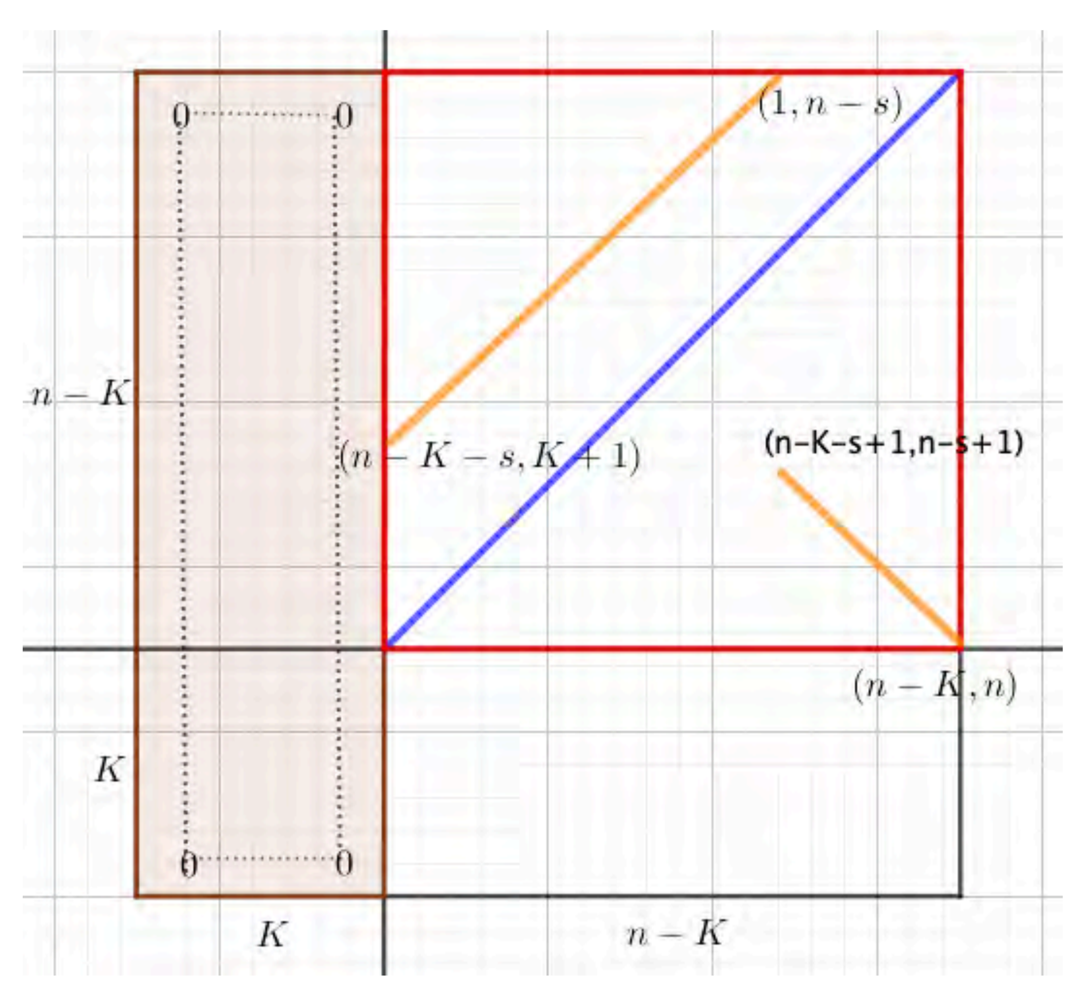


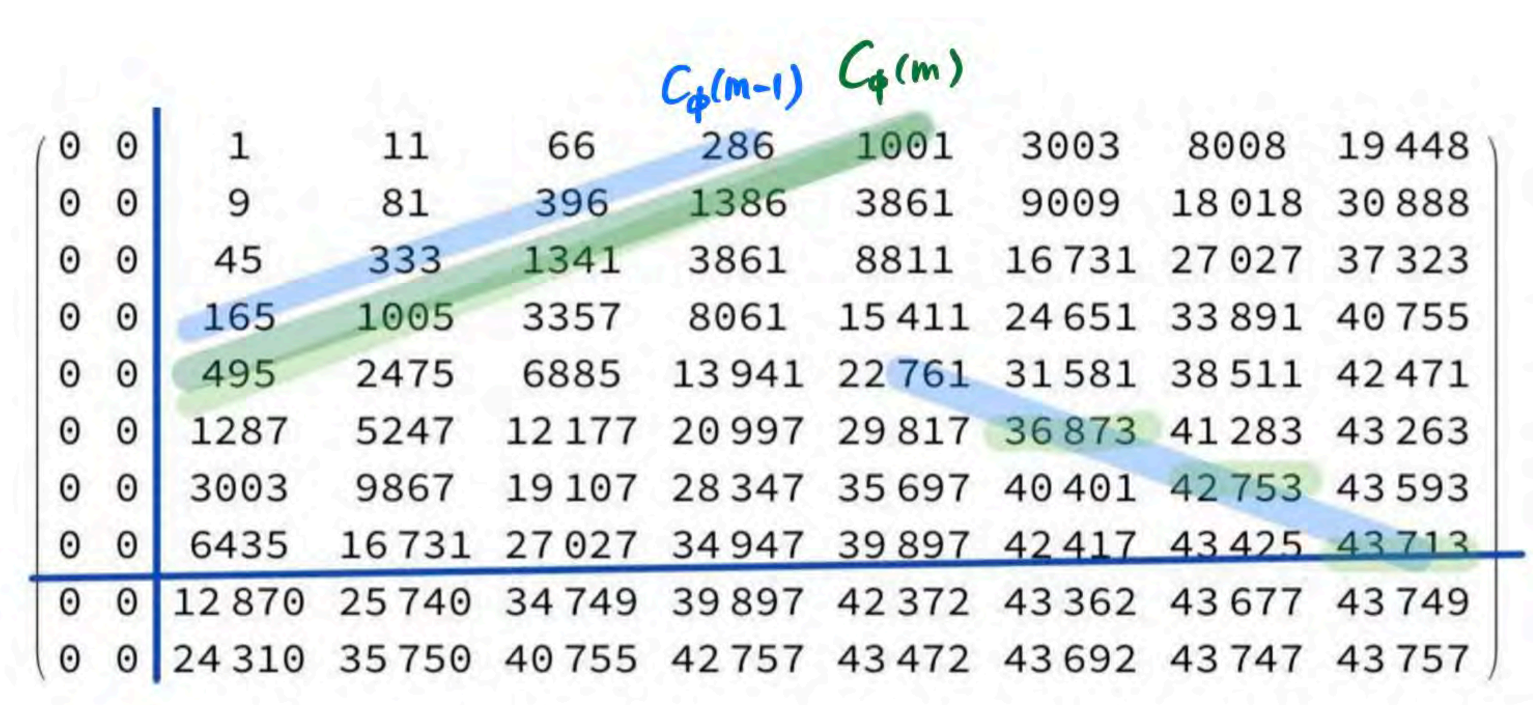
圖8 k-優勢策略的策略點分佈

定理4. 最低k-成本的策略其策略點分佈如圖8。

定義4-9.

$$\omega(m)=C_{m-1}^{2n-K+1}+C_{m-3}^{2n-K+1}+\ldots+C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n-K+1}-\sum_{j=0}^{m-1}C_j^nC_j^{n-K}$$

$$\lambda^*=\min_{1\le m\le n-K}\{m\,|\,\omega(m)\ge 0\}$$



0	0	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
0	0	9	81	396	1386	3861	9009	18018	30888
0	0	45	333	1341	3861	8811	16731	27027	37323
0	0	165	1005	3357	8061	15411	24651	33891	40755
0	0	495	2475	6885	13941	22761	31581	38511	42471
0	0	1287	5247	12177	20997	29817	36873	41283	43263
0	0	3003	9867	19107	28347	35697	40401	42753	43593
0	0	6435	16731	27027	34947	39897	42417	43425	43713
0	0	12870	25740	34749	39897	42372	43362	43677	43749
0	0	24310	35750	40755	42757	43472	43692	43747	43757

圖9 可能的最佳策略的成本$c_\phi(m)$與$c_\phi(m-1)$的差值

肆、和局 (若兩方的牌面數字相差為一的情形視為兩方平手)

定義5-1.

(1) 和局矩陣 $B_n=\left[\beta_{ij}\right]_{n\times n}$: $\beta_{ij}=\begin{cases}0 & i=1\\ C_{n-i}^{n-i+j-1}\bullet C_{i-2}^{n+i-j-1} & i>1\end{cases}$,

(2) 和局成本矩陣 $\Psi_n=\left[\psi_{ij}\right]_{n\times n}$, 其中 $\psi_{ij}=\sum_{k=1}^{j}\beta_{ik}$

定理7. 最低和局成本的策略其策略點分佈如圖10

定義5-7.

$$\chi(m)=C_{m-1}^{2n}+C_{m-3}^{2n}+\ldots+C_{m+1-2[\frac{m+1}{2}]}^{2n}-\sum_{j=0}^{m-1}C_j^nC_j^{n-1}$$

$$\mu^*=\min_{1\le m\le n}\{m\,|\,\chi(m)\ge 0\}$$

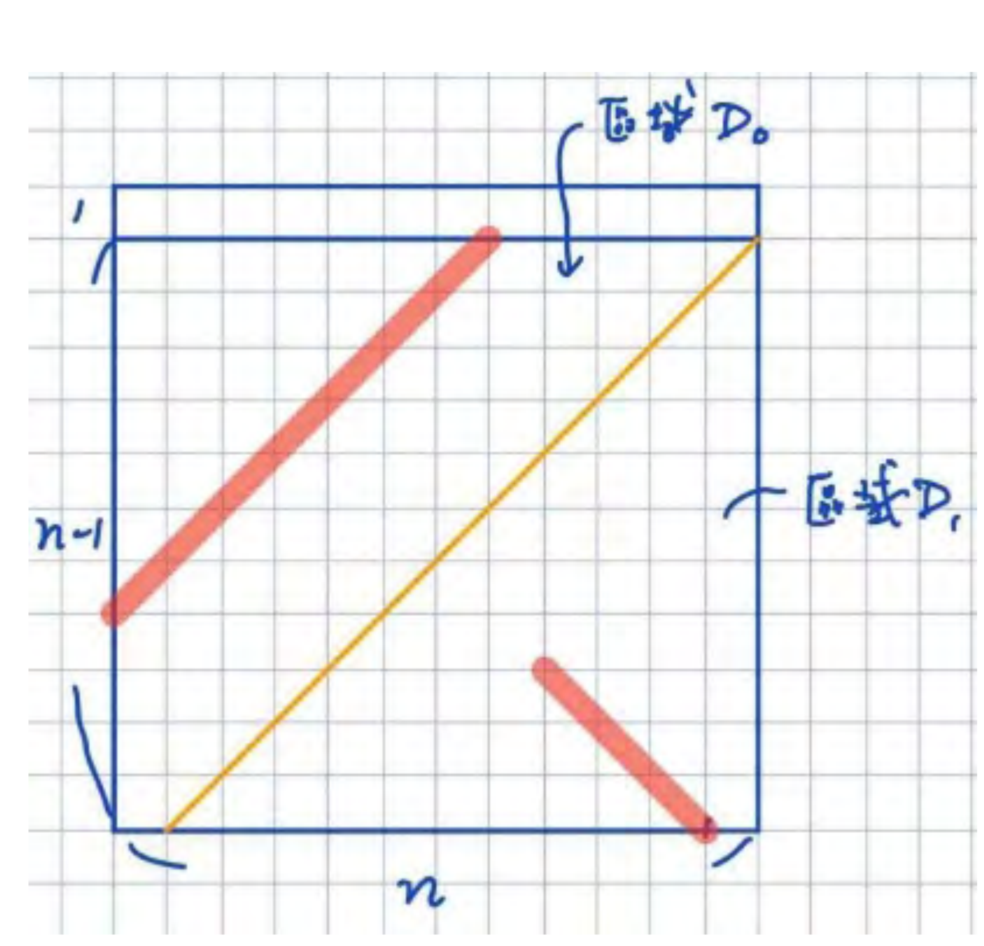


圖10

伍、和局下最佳策略的犧牲數估計

性質6-1. 若n為正整數, k為非負整數, $0 \le k \le n$，則比值 $\dfrac{C_k^n}{C_{k+1}^n}$ 隨k值增加而遞增。

性質6-2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} C_j^n \times C_j^{n-1} = C_n^{2n-1}$，且當 $m \ge \dfrac{n}{2}$ 時，$\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} C_j^n \times C_j^{n-1} > \frac{1}{2}C_n^{2n-1}$。

性質6-3. (Stirling公式) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\bullet\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$, ，即當n 很大時，$n! \sim \sqrt{2\pi n}\bullet\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$。

考慮 若$m = \alpha n,\ 0 < \alpha < 1/2$時，由Stirling公式，我們可以估計

$$\frac{C_m^{2n}}{C_m^n C_m^{n-1}} \approx \sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\alpha(1-\alpha)n\big((1-\alpha)n-1\big)}}{\sqrt{(2-\alpha)(n-1)}}\beta^n \quad (0 < \beta = F(\alpha) < 1)$$

引理6-4. 若$m = \alpha n, 0 < \alpha < 1/2$，則對任何正數$\varepsilon > 0$，都可以找到$N = N(\alpha)$，使得若$n \ge N$時， $C_m^{2n} \le \varepsilon C_m^n C_m^{n-1}$。

令 $r = \dfrac{C_{m-1}^{2n}}{C_m^{2n}} = \dfrac{m}{2n-m+1}$，顯然 $0 < r < 1$

由性質6-1，$C_{m-t}^{2n} = C_m^{2n} \times \dfrac{C_{m-1}^{2n}}{C_m^{2n}} \times \dfrac{C_{m-2}^{2n}}{C_{m-1}^{2n}} \times \ldots \times \dfrac{C_{m-t}^{2n}}{C_{m-t+1}^{2n}} \le C_m^{2n} r^t$

所以$C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{2n} < C_0^{2n} + C_1^{2n} + \ldots + C_{m-1}^{2n} \le (r + r^2 + \ldots)C_m^{2n} = \dfrac{r}{1-r}C_m^{2n} = \dfrac{n-t}{2t+1}C_m^{2n}$

性質6-6. $m = n - t,\ t > 0$ 則 $C_{m-1}^{2n} + C_{m-3}^{2n} + \cdots + C_{m+1-2\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{2n} \le \dfrac{n-t}{2t+1}C_m^{2n}$

引理6-7. $t \ge \sqrt{n ln\, n} + ln\, n$, 則 $\dfrac{C_n^{2n}}{C_{n-t}^{2n}} > \dfrac{4(n-t)}{2t+1}$.

証明分成3個步驟 $m = n - t$，$t > t_+$, $t_+ = \dfrac{ln\, n + \sqrt{(ln\, n)^2 + 4n ln\, n}}{2}$ ，則

(1) $t^2 > (n+t) ln\, n$ 。 (t_+是方程式$t^2 - (n+t)ln\, n = 0$較大的根)

(2) $e^{\frac{t^2}{n+t}} > \dfrac{4(n-t)}{2t+1}$

(3) 由[3]中公式(3.9) $\dfrac{C_n^{2n}}{C_{n-t}^{2n}} > e^{\frac{t^2}{n+t}}$

引理6-8. $t < \sqrt{n ln\, n^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{2} ln\, n^{\frac{1}{3}}$, 則 $\dfrac{C_n^{2n}}{C_{n-t}^{2n}} < ln\, n^{\frac{1}{3}}$.

定理8. μ^*如定義5-7，則當n很大時,

$$\sqrt{\frac{1}{3} n ln\, n} - \frac{1}{6} ln\, n < n - \mu^* < \sqrt{n ln\, n} + ln\, n\,.$$

陸、研究結果與討論

1.不論是(m,n)-遊戲、K-優勢遊戲或和局模型，策略都有$n!$ 個，例如$n = 100$時，$100! \approx 9.33 \times 10^{157}$, 要在這些策略中找出成本最低的，是一件很可怕的事，定理4,7把情況縮小到n個策略中找。再由定理8可知和局情況下最低失敗成本時，犧牲牌數如下表：

n − μ^* 與 $\sqrt{0.29 n \ln n}$ 比較											
n	16	24	32	41	51	61	73	85	98	112	126
n − μ^*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\sqrt{0.29 n \ln n}$	3.74	4.9	5.91	6.93	7.95	8.89	9.93	10.91	11.9	12.9	13.86
n	142	200	250	300	400	500	600	700	800	900	1000
n − μ^*	14	17	20	22	26	30	34	37	41	44	46
$\sqrt{0.29 n \ln n}$	14.89	18.27	20.86	23.22	27.48	31.29	34.78	38.01	41.05	43.92	46.66

表11

2.要有多少張大牌才使得不犧牲任何牌的策略是最佳? 從n=100及200的觀察可知是K=n/2

3.K=1時，$\omega(m) = \chi(m)$

n=100					
K	18~21	22~26	27~34	35~48	49~
$n-K+1-\lambda^*$	4	3	2	1	0
n=200					
K	42~48	49~58	59~72	73~98	99~
$n-K+1-\lambda^*$	4	3	2	1	0

表12

柒、參考文獻

1.*Richard Chawtwin, Dana Mackenzie, How to Win at (One-Round) War The COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL Mathematics vol. 46 No.4 (2015), 242-253.*

2.*L. Lovasz, J.Pelikan, K.Vesztergombi, Discrete Mathematics Elementary and Beyond QA39.3 L68(2003) ISBN 0-387-95584-4*