中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050402

方格陣列中阻隔點數之捷徑數極值研究

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高一　李梁玉軒 高一　朱柏叡	黃仁杰

關鍵詞：棋盤格、阻隔點、走捷徑

摘要

在一個方格陣列上擺放一定數量的阻隔點（即障礙物）時，從方格中由左下角走到右上角所需的捷徑步數與未受阻擋的方格比較，勢必會受到影響。本研究主要建立在此種模式中，經由觀察、假設到證明的過程，發現許多諸如對稱、分布、極值等性質。依次固定障礙數量，加以比較並歸納當障礙物擺放於何種位置或情況時，方格中的捷徑走法數量會產生極值，及探討障礙擺放於各位置時，所剩餘的捷徑走法數量分布情形與性質。

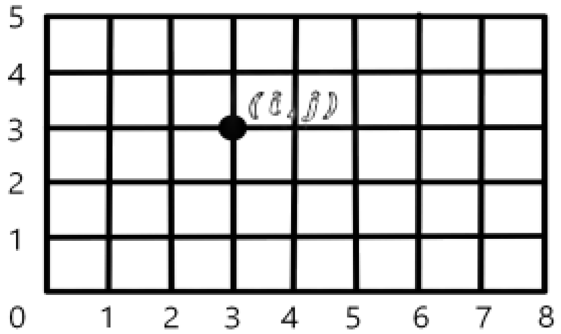
此外，我們也嘗試朝三維的方向進行討論。我們以二維情況的研究結果為基礎，研究出三維情形中捷徑走法數的計算方法與阻擋數分布情形，進而討論出當障礙物擺放於此方體陣列中，應擺放於何處才能使捷徑走法數產生極值。

壹、研究動機

排列組合的題目中，在方格陣列擺放障礙物並計算通過方格陣列的捷徑方法數是很常見的一種題目。可利用累加法，不必運用複雜的概念或計算，即可得到精確的答案。另外一種方法即是利用了組合的想法：在 $m \times n$ 的方格陣列中，由左下的頂點走到右上的頂點，有 m 步向右、n 向上進所以行排列，$m \times n$ 的方格陣列捷徑數即為 C_m^{m+n}，若有一格障礙物擺放在座標 (i, j) 處，即可應用此性質表示出剩餘的捷徑數：$C_m^{m+n} - C_i^{i+j} C_{(m-i)}^{(m-i)+(n-j)}$. 我們在計算中，發現某些數字反覆地出現，並且最後總捷徑數的大小，似乎與障礙物擺放的位置某些關聯性。因此我們想要研究：相同數量下，障礙物位置與捷徑走法數的關係；尤其是障礙物擺於何處捷徑數產生出極值。

貳、規則說明與定義

（一）方格陣列 $m \times n$ 與方體陣列 $m \times n \times l$：前者為：由長 m 個、寬 n 個正方形所組成的長方形方格陣列；後者為：由長 n 個、寬 m 個、高 l 的正方體所組成的長方體方體陣列。如圖一是一個 8×5 的方格陣列。



（圖一）

（二）將陣列 $m \times n$ 與 $m \times n \times l$ 中任意座標表示為 (i, j) 和 (i, j, t) 形式，如圖一所示，故 $m, n, l, i, j, t \in \mathbb{N}$，$m \geq i, n \geq j, l \geq t$. 我們在這些座標上放置障礙物。

（三）計算捷徑走法數的方法：除了使用公式之外，我們可以採用累加法，即可更加快速的計算當含有大量障礙物時所剩餘的捷徑走法數。

（四）捷徑走法分布圖：在 $k=1$ 的情況，我們在方格陣列的交點上方標示數字，表示若將障礙放在此點，捷徑走法所剩餘的數量。

（五）阻擋數 $P(i,j)$：$P(i,j)$ 表示阻擋的捷徑數，亦即必須通過 (i,j) 的捷徑數量，即

$$P(i,j)=C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}.$$

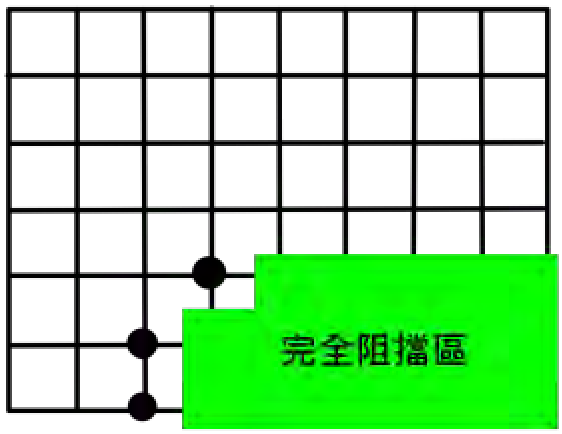
（六）捷徑數 S 代表由方格陣列 $m\times n$，$(0,0)$ 為起點，(m,n) 為終點，經過障礙物的淨數目總和；P_s 代表全部障礙物阻擋的捷徑數。

（七）使 $m\times n$ 陣列中剩餘捷徑數最少，至少需擺入 G 個障礙物置於交點上，其中 $G=\min\{m,n\}$.

（八）不可放置障礙物的位置及情形

1. 在任意陣列中，均不可將障礙置於起點或終點。

2. 在任意陣列中，可能因障礙物的位置或數量而使捷徑數為0，我們必須加以排除這些情況，否則此捷徑數最小值並無意義。
   (1) $\boxed{\text{基礎阻擋規則}}$：排除所有因障礙位置或數量而造成的0捷徑情形。
   (2) $\boxed{\text{完全阻擋規則}}$：在任意數量的障礙物中，若以某一點放置的障礙物為基準，其任一側的部分失去了所有通往異側的路徑，則稱為完全阻擋，如下圖二。



（圖二）

路徑無法前往的區域，我們稱為<u>完全阻擋區</u>或<u>受阻區域</u>，我們規定不能在此區放置障礙物，因為此區內的障礙物阻擋捷徑數必為0，這會使障礙物數量的增加沒有意義。

參、研究目的

我們嘗試在方格陣列$m\times n$的行列交點處放入數個障礙物，並加以探討其阻擋的捷徑數與擺放位置之關係，找出其極值發生位置並加以分析，以便歸納出在各$m\times n$陣列中均符合的規律。除了方格陣列的部分，我們也嘗試將此研究朝向三維的方向思考，得出在方體陣列$m\times n\times l$中的分布狀況。

以下各點即是我們的研究的主要目的：

（一）探究在方格陣列$m\times n$有1個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值。

（二）探究在方格陣列$m\times n$有k個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值。

（三）探究在方體陣列$m\times n\times l$有1個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值。

（四）探討在高維度陣列$m_1\times m_2\times m_3\times\ldots\times m_n$中放置1個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最小值。

肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Microsoft Word 2010、Math Type7.0、MediBang Paint Pro

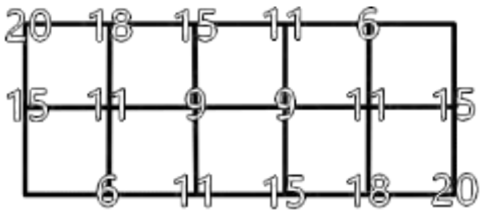
伍、研究過程

（一）方格陣列$m\times n$中 1 個障礙物的探究過程

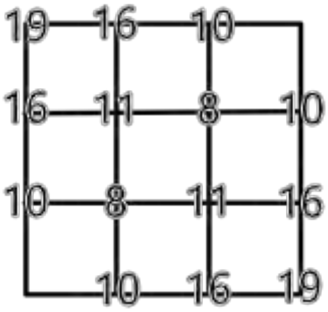
為方便計算總捷徑數與受阻擋的捷徑數量，我們使用的是基本的排列公式。欲求出通過方格陣列$m\times n$中有 1 個障礙物的捷徑數，即為計算無障礙物時的捷徑數，減去經過位於(i,j)的障礙物的捷徑數，其可表示為：

$$C_m^{m+n}-C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}.$$

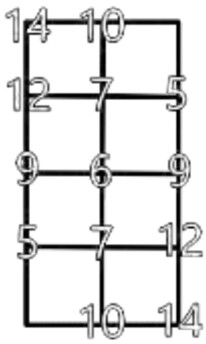
由此可見，在固定的方格陣列$m\times n$中，因m,n均屬定值，影響捷徑數的變數，只有障礙物所在的座標(i,j)所控制的$C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$，即阻擋數$P(i,j)$. 下列是幾個較為簡單的陣列，交點上的數字代表將障礙物放置在此點時，所剩餘的捷徑走法數，即「總捷徑走法數C_m^{m+n} $-$阻擋數$P(i,j)$」。



（圖三　$m>n, 5\times 2$ 時的捷徑數陣列）



（圖四　$m=n, 3\times 3$ 時的捷徑數陣列）



（圖五　$m<n, 2\times 4$ 時的捷徑數陣列）

經由對此幾個陣列的觀察，我們推測阻擋數的最大值通常發生在起點和終點附近，且似乎與 m 和 n 的大小關係有關。

以下比較 $(1,0)$ 、 $(1,1)$ 與 $(0,1)$ 的阻擋數大小：

$$P(1,0):P(1,1):P(0,1)$$
$$=C_{m-1}^{m+n-1}:2\cdot C_{m-1}^{m+n-2}:C_{m}^{m+n-1}$$
$$=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}:2\cdot\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}:\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=\frac{(m+n-1)}{n}:2:\frac{(m+n-1)}{m}.$$

故得當 $m>n$ 時， $P(1,0)$ 是這三點中的最大值；

當 $m=n$ 時， $P(1,1)$ 是這三點中的最大值；

當 $n>m$ 時， $P(0,1)$ 是這三點中的最大值。

接下來探討的是這三點是否為整個陣列阻擋數的最大值。

性質一：方格陣列 $m\times n$ 中阻擋數之點對稱性

一開始，我們透過對少數幾個陣列的觀察，進而發現此種**點對稱**的情形。根據上述公式，我們得到：

$$P(i,j)=C_{i}^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}=C_{m-i}^{(m-i)+(n-j)}\times C_{i}^{i+j}=P(m-i,n-j).$$

由上式得知，考慮兩座標 $P(i,j)$ 和 $(m-i,n-j)$ 之阻擋數，若將起點與終點連線，造出

方程式$i-\frac{m}{n}j=0$之圖形，捷徑走法圖上各座標點會以此圖形中點呈現點對稱情形，故只需探討障礙物在起點與終點連線右側的阻擋數，即可得出在左側相對應的阻擋數。

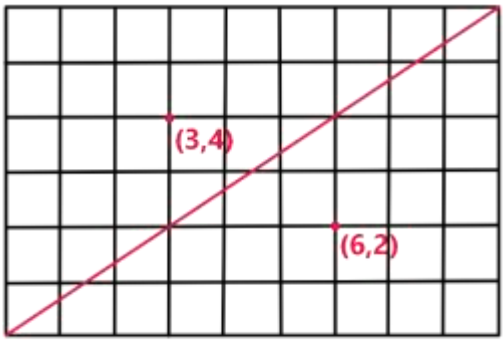
例如在(圖二)中，將障礙物放置於座標點$(3,4)$時，其阻擋的數量為

$$P(3,4)=C_{3}^{3+4}\times C_{9-3}^{9+6-3-4}=\frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{8!}{6!2!}=980$$

而將障礙物放置於座標點$(6,2)$時，其阻擋數亦為

$$P(6,2)=C_{6}^{6+2}\times C_{9-6}^{9+6-6-2}=\frac{8!}{6!2!}\cdot\frac{7!}{3!4!}=980$$

此兩點之位置以方程式$i-\frac{m}{n}j=0$中點呈$\boxed{\text{點對稱}}$.



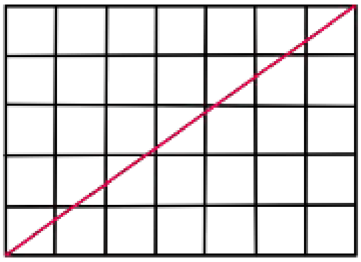
(圖六)

性質二：翻轉後對稱性質

在起點於陣列左下角、終點於陣列右上角且障礙數$k=1$的條件下，矩形陣列$m_0\times n_0(m_0,n_0$為自然數常數) 的上任取一點 (i_0,j_0)，若將原分布圖順時針旋轉$90°$後翻面(即維持由左下出發，終點在右上的情形)，我們可以得出 $n_0\times m_0$的分布圖。將此分布圖與原圖比較後經觀察得知，矩形陣列$n_0\times m_0$的(j_0,i_0)之阻擋數$P(j_0,i_0)$會與$m_0\times n_0$的(i_0,j_0)之阻擋數$P(i_0,j_0)$相等。因此我們在障礙數$k=1$時，只需證明得知$m>n$的情形，便可依此性質推得$n>m$之情形。故我們之後只需探討$m>n$或$m=n$的情形即可推知所有情況。

性質三：方格陣列$m\times n$中阻擋數之分布性

由性質一我們得知，障礙物放置於各位置上時，阻擋數的分布會呈斜角對稱，我們為加以探討其位置與大小關係之變化，將起點與終點連線，造出方程式 $i-\frac{m}{n}j=0$之圖形，而在此方程式右方的任意點須滿足$i-\frac{m}{n}j\geq 0$，根據此式我們得到$ni-mj\geq 0$.

（圖七　方程式$i-\frac{m}{n}j=0$之圖形）

我們取$i-\frac{m}{n}j=0$下方任兩點(i,j)與$(i+1,j)$，需比較兩式

$$C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}:C_{i+1}^{i+j+1}\times C_{m-i-1}^{m+n-i-j-1}$$

$$=\frac{(i+j)!}{i!j!}\times\frac{[(m+n)-(i+j)]!}{(m-i)!(n-j)!}:\frac{(i+j+1)!}{(i+1)!j!}\times\frac{[(m+n)-(i+j+1)]!}{(m-i-1)!(n-j)!}$$

$$=(i+1)(m+n-i-j):(m-i)(i+j+1).$$

欲判斷$(i+1)(m+n-i-j)$和$(m-i)(i+j+1)$大小，兩者相減

$$(i+1)(m+n-i-j)-(m-i)(i+j+1)=(ni-mj)+(n-j).$$

由於j是在縱坐標n上取的一數值，因此其值恆有$j\le n$，又$ni\ge mj$，故$C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}>C_{i+1}^{i+j+1}\times C_{m-i-1}^{m+n-i-j-1}$，即$P(i,j)\ge P(i+1,j)$. 在$i-\frac{m}{n}j\ge 0$時恆成立。

根據翻轉後對稱性質，我們可以依據以上結論直接證明：

$i-\frac{m}{n}j\ge 0$時，$P(i,j)\ge P(i,j-1)$.

性質四：方格陣列$m\times n$中捷徑總數之均勻分配性

在方格陣列$m\times n$中，若將所有捷徑走法一一標示於陣列上，會發現所有的捷徑不論是否受阻擋，將會一一在陣列路線上均勻分配並交疊，最後抵達終點。

(1)捷徑數 S 的最大值:

性質五：障礙物位於$(m,0)$和$(0,n)$時，捷徑數S有最大值

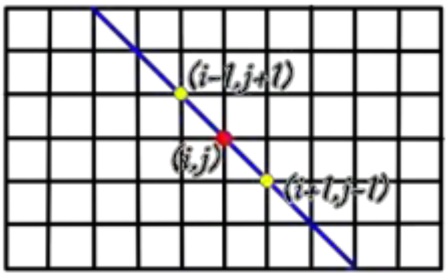
障礙物位在$(i,j)=(m,0)$時，$P(m,0)=C_m^{m+0}\times C_{m-m}^{m+n-m-0}=1.$

根據斜角對稱性，障礙物位在$(0,n)$，亦有阻擋數的最小值。故障礙物位於起點和終點外的二頂點時，捷徑數S有最大值。

(2)捷徑數 S 的最小值:

從出發點出發當下僅有 2 種選擇：往 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ 移動；故通過其中任一點的路徑數必佔總方法數的至少一半。

根據對陣列的觀察，我們推論在方格陣列 $m\times n$ 上，除上述及其斜角對稱情形外，任取一點放置障礙物，其阻擋數不會超過總捷徑數的一半。



（圖八 說明通過方程式 $i+j=s, 2\le s\le m+n-1$ 的捷徑數即為總捷徑數）

我們發現若 $\dfrac{P(i+1,j-1)}{P(i,j)}+\dfrac{P(i-1,j+1)}{P(i,j)}\ge 1$，代表通過 $(i-1,j+1)$，

$(i-1,j+1)$ 和 (i,j) 之阻擋數總和與通過 (i,j) 之阻擋數比值 $R\ge\dfrac{1}{2}$，若我們將

方程式 $i+j=t$ 上的各點與 (i,j) 的比值相加，必可得出其總和 $R_S\ge\dfrac{1}{2}$，即任取一點放置障礙物，其阻擋數不會超過總捷徑數的一半。

我們將原式改以下列形式表示：

$$\frac{P(i+1,j-1)}{P(i,j)}+\frac{P(i-1,j+1)}{P(i,j)}=\frac{C_{i+1}^{i+j}\cdot C_{m-i-1}^{m+n-i-j}}{C_{i}^{i+j}\cdot C_{m-i}^{m+n-i-j}}+\frac{C_{i-1}^{i+j}\cdot C_{m-i+1}^{m+n-i-j}}{C_{i}^{i+j}\cdot C_{m-i}^{m+n-i-j}}$$

$$=\frac{i!\,j!(m-i)!(n-j)!}{(i+1)!(j-1)!(m-i-1)!\left(n-j+1\right)!}+\frac{i!\,j!(m-i)!(n-j)!}{(i-1)!(j+1)!(m-i+1)!\left(n-j-1\right)!}$$

$$=\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}+\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\ge 1.$$

根據算幾不等式，

$$\because \frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}>0\text{ , }\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}>0$$

$$\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)+\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)\ge 1\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)+\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)}{2}\ge\sqrt{\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)\cdot\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)}\ge\frac{1}{2}$$

$$\therefore\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)\cdot\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)\ge\frac{1}{4}$$

此時為了簡化計算過程，我們不失一般性假設：

$$\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\ge\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}.$$

根據此式我們改解 $\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\geq\frac{1}{2}$ ，

整理後得算式 $\frac{i}{i+1}\cdot\frac{m-i}{m-i+1}\geq\frac{1}{2}$，為討論 $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ 型 $(\alpha\in\mathbb{N})$ 之情況，令 $m-i=y$，並強迫分解：

$\frac{i}{i+1}\cdot\frac{y}{y+1}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2iy\geq(i+1)(y+1)\Leftrightarrow iy-i-y+1\geq 2\Leftrightarrow(i-1)(y-1)\geq 2$.

當 $i-1=0$ 或 $y-1=0$ 時，原不等式不成立.

即 $i=1$ 或 $y=1\Leftrightarrow i=1$ 或 $m-i=1\Leftrightarrow i=1$ 或 $m-1=i$ 時，原不等式不成立.

$m-1=i$ 即為 $i=1$ 的對稱點，故只須證明 $i=1$ 的狀況.

當 $i-1=1$ 或 $y-1=1$ 時，原不等式不成立.

即 $i-1=1$ 或 $y-1=1\Leftrightarrow i=2$ 或 $m-i=2\Leftrightarrow i=2$ 或 $m=4$ 時，原不等式不成立.

因此論證得解只在 $i=0$ 或 1 或 $(i=2$ 且 $m=4)$ 時不成立。

即當 $i=0$ 或 1 或 $(i=2$ 且 $m=4)$ 時，任取一點放置障礙物，其阻擋數可能超過總捷徑數的一半（因翻轉對稱性，只需討論 i 之情形即可推知所有情況）。

因為只有 $i=0, i=1$ 和 $i=2$ 且 $m=4$ 三種特殊情況使得不等式 $\frac{i}{i+1}\cdot\frac{m-i}{m-i+1}\geq\frac{1}{2}$.

不成立，故可獨立討論之。

1. $i=0$ 的情況：

$$P(0,1)=1\times C_m^{m+n-1},\ P(0,j)=1\times C_m^{m+n-j}\ (2\leq j\leq n)$$

$$C_m^{m+n-1}:C_m^{m+n-j}=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}:\frac{(m+n-j)!}{m!(n-j)!}=\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!}:\frac{(m+n-j)!}{(n-j)!}$$

$$=\prod_{k=1}^{q-1}\frac{(m+n-j+k)}{(n-j+k)}:1,\because\prod_{k=1}^{q-1}\frac{(m+n-j+k)}{(n-j+k)}>1,\therefore P(0,1)>P(0,j).$$

故 $i=0$ 時，一定是放置在 $(0,1)$ 的障礙物阻擋最多路徑。

2. $i=1$ 的情況：

$m>n$ 時，方程式 $i-\frac{m}{n}j=0$ 和 $i=1$ 的交點必在 $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 之間。因在 $i-\frac{m}{n}j<0$ 且 $i=1$ 之範圍內，在 $(1,1)$ 有最大的阻擋數；而在 $i-\frac{m}{n}j>0$ 且 $i=1$ 之範圍內，在 $(1,0)$ 有最大的阻擋數，我們只需比較此兩點的阻擋數大小即可。

$$P(1,0):P(1,1)=C_{m-1}^{m+n-1}:2C_{m-1}^{m+n-2}=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}:\frac{2\times(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}=\frac{m+n-1}{n}:2$$

$\therefore m-1>n$ 時，$P(1,0)>P(1,1); m-1=n$ 時，$P(1,0)=P(1,1)$.

$m=n$ 時， $(1,1)\in i-\frac{m}{n}j=0$ ，所以 $P(1,1)$ 為 $i=1$ 上的最大值。

3. $i=2$ 且 $m=4$ 的情況：

在 $i=2$ 且 $m=4$ 的情況我們欲直接計數證明路徑數小於一半，可列式

$$2C_2^{j+2}\times C_2^{n-j+2}<C_4^{n+4}\Leftrightarrow 2\times\frac{(j+2)!}{2!j!}\times\frac{(n-j+2)!}{2!(n-j)!}<\frac{(n+4)!}{4!n!}$$

$$\Leftrightarrow (j+1)(j+2)(n-j+1)(n-j+2)<\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

當 $j=\frac{n}{2}$ 時，左式發生最大值 $(\frac{n}{2}+1)^2(\frac{n}{2}+2)^2$ ，改證

$$(\frac{n}{2}+1)^2(\frac{n}{2}+2)^2<\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$pf:(\frac{n}{2}+1)^2(\frac{n}{2}+2)^2<\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\Leftrightarrow 3n^2+18n+24<4n^2+16n+12$$

$$\Leftrightarrow n>1+\sqrt{13}\vee n<1-\sqrt{13}\text{（負不合）}$$

所以 n 的正整數解範圍是 $n\geq 5$ 。因此我們令 $n=2,3,4$ ，一一計算並討論此時的阻擋數 $P(i,j)$ 變化情形。

$\boxed{m=4,n=2}$

$j=2$	1	6	6	10	終點
$j=1$	5	8	9	8	5
$j=0$	起點	10	6	6	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

$\boxed{m=4,n=3}$

$j=3$	1	4	10	20	終點
$j=2$	5	12	18	20	15
$j=1$	15	20	18	12	5
$j=0$	起點	20	10	4	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

$\boxed{m=4,n=4}$

$j=4$	1	5	15	35	終點
$j=3$	5	16	30	40	35
$j=2$	15	30	36	30	15
$j=1$	35	40	30	16	5
$j=0$	起點	35	15	5	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

根據觀察結果與推論得證：

$n=2$時，因為$m>n$且$m-1\neq n$，阻擋數最大值發生在$(1,0)$；

$n=3$時，因為$m-1=n$，阻擋數最大值發生在$(1,0)$和$(1,1)$；

$n=4$時，因為$m=n$，阻擋數最大值發生在$(1,1)$.

綜合以上各點，我們得證了性質六：

性質六：障礙數$k=1$時擺放位置與阻擋數最大值關係

在$m\times n$方格陣列中，障礙數$k=1$時，其擺放位置與阻擋數最大值會滿足以下情形：

1. $m>n$且$m-1>n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,0)$.
2. $m>n$且$m-1=n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,0)$和$(1,1)$.
3. $m=n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,1)$.
4. $n>m$且$n-1>m$時，阻擋數的最大值發生在$(0,1)$.
5. $n>m$且$n-1=m$時，阻擋數的最大值發生在$(0,1)$和$(1,1)$.

（二）方格陣列$m\times n$中k個障礙物的探究過程

條件限制：$m\geq 2$且$n\geq 2$才使得討論此問題有意義。

與1個障礙物的探究過程相同，我們先研究總阻擋數再換算成總捷徑數。可將全部的捷徑走法數形成的集合視為宇集U，各個障礙物各自的阻擋數形成的集合為子集$U_1,U_2,U_3\cdots U_k$，則總阻擋數P_s即為每個子集的聯集的總元素數量

$n(U_1\cup U_2\cup U_3\cup\cdots U_k)$.

1. 方格陣列$m\times n$中2個障礙物的探究過程

我們假設一個障礙物k_1座標(i_1,j_1)，另一個障礙物命名為k_2座標(i_2,j_2).

當一個障礙物擺在$(1,0)$時，由起點出發下一步只能走到$(0,1)$.

故接下來的走法可視為：新方格陣列$m\times(n-1)$中1個障礙物的走法且新起點在$(0,1)$.

根據**性質一**可知：阻擋數最大值發生在$(1,1)$和$(m-1,n)$故在$(i_1,j_1)=(1,0)$時，阻擋數最大值發生在$(i_2,j_2)=(1,1)$和$(m-1,n)$. 在以下論證過程只特別討論障礙物擺在$(1,1)$的狀況，即同時代表障礙物擺在$(m-1,n)$的狀況。

(1) 關於$\boxed{i_1 < i_2 \text{ 及 } j_1 > j_2}$和$\boxed{i_1 > i_2 \text{ 及 } j_1 < j_2}$兩種情況：

此時通過k_1的所有捷徑不通過k_2且通過k_2的所有捷徑不通過k_1，亦即此兩子集沒

有交集。故 $P_s = n(U_1) + n(U_2)$.

已知 $P(1,0) > P(i_1, j_1)$，又因為一個障礙物擺在 $(1,0)$ 時，只要 $k_2(i_2, j_2)$ 其中 $j_2 \geq 1$，$P(1,1) > P(i_2, j_2)$。若 $j_2 = 0$，則 $P((1,0),(a,0)) = P(1,0)$，其中 $2 \leq a \leq m$.

故 $\boxed{i_1 < i_2 \text{ 及 } j_1 > j_2}$ 或 $\boxed{i_1 > i_2 \text{ 及 } j_1 < j_2}$ 其中之一成立時，

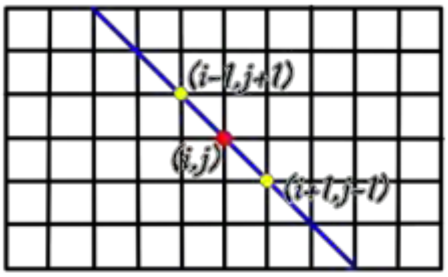
$$P((1,0),(1,1)) = P((1,0),(m-1,n)) \geq P((i_1, j_1),(i_2, j_2)).$$

(2) 若 $\boxed{i_1 \geq i_2 \text{ 且 } j_1 \geq j_2}$：

此時通過 k_1 的捷徑可能通過 k_2 或通過 k_2 的捷徑可能通過 k_1，兩子集會出現交集。

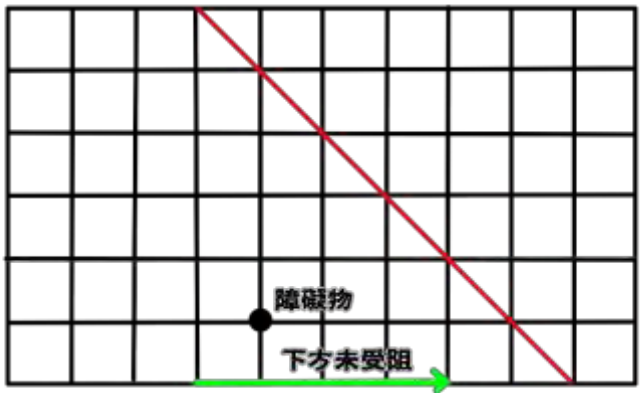
故 $P_s = n(U_1) + n(U_2) - n(U_1 \cap U_2)$.

由於我們在之前捷徑數最小值的研究過程中，已證明出在陣列中任取一條 $i+j=s, 2 \leq s \leq m+n-1$ 的方程式圖形，於其上放置一障礙物必不阻擋超過原捷徑總數之 $\frac{1}{2}$，如下圖九。



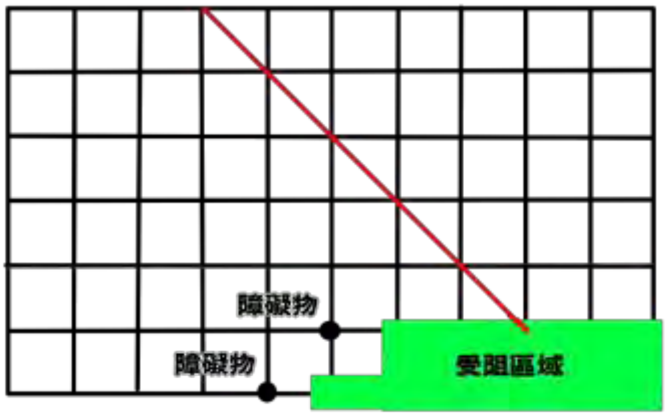
（圖九方程式 $i+j=s, 3 \leq s \leq m+n-2$ 的圖形）

再者，在一個規則矩形陣列中，捷徑數的走向是呈現均勻分布的，即在某點放置障礙物後，排去經過此障礙的捷徑數，剩餘的捷徑將依均勻分配性重新分配至各路線。



（圖十）

上圖中顯示了圖形 $i+j=s$ 下方未被完全阻擋時的情形。

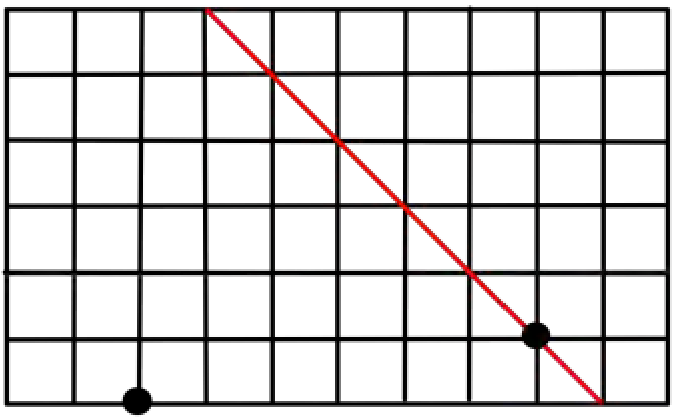


（圖十一）

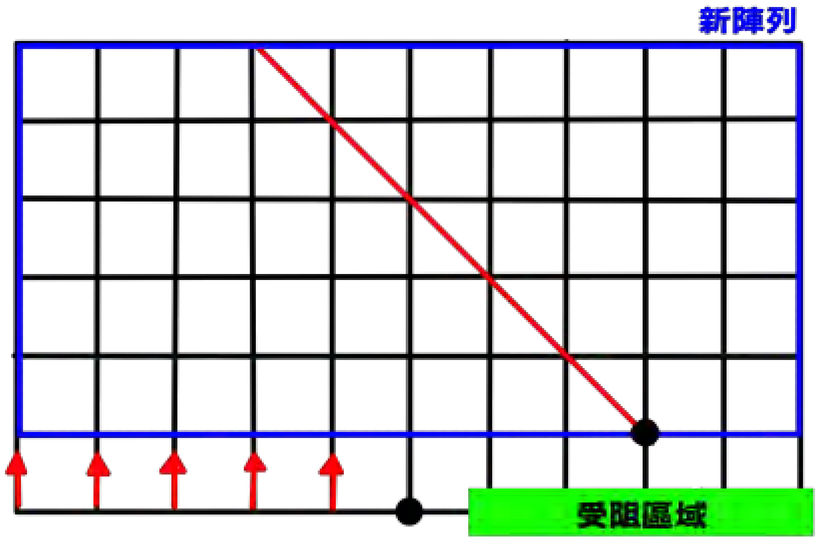
上圖中顯示了圖形$i+j=s$下方被完全阻擋時的情形。

因此，我們可以使用此兩性質證明$k=2$時的情形。

下方未被阻擋時，因為陣列捷徑的均勻分布性，$i+j=s, 3\le s\le m+n-2$上的障礙物依然阻擋了不超過$\frac{1}{2}$的總通過捷徑數，基於此規則，我們可以推得兩次障礙物共阻擋了不超過$1\text{-}(1\cdot\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$的總捷徑數。

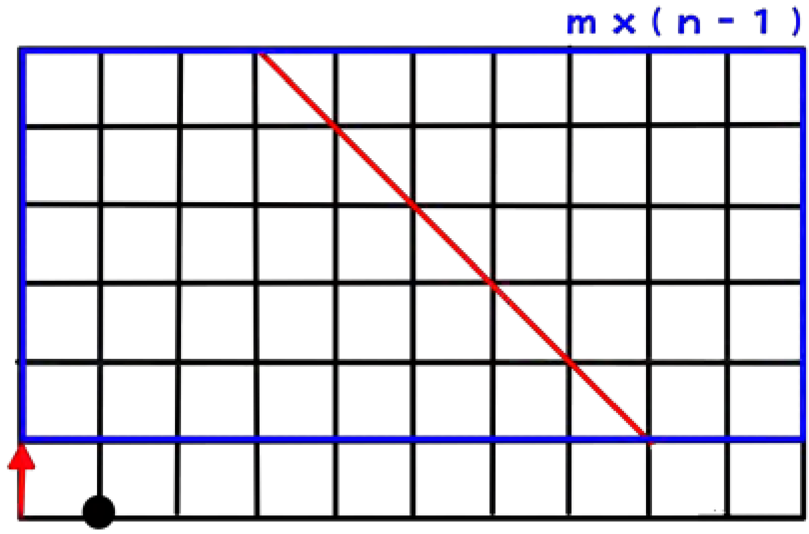

（圖十二）

當下方被完全阻擋時，我們可以把阻擋物上方的部分視為一個新的陣列，由於其來自陣列下方的額外捷徑數又均勻分配至此陣列中，故障礙物阻擋的數目範圍依然與前者相同，即不超過$\frac{3}{4}$的總捷徑數。



（圖十三）

欲使陣列中阻擋數超過總數的$\frac{3}{4}$，可以參考$k=1$時的研究結果，$m \neq n$時，將第一個障礙物直接置於$(1,0)$（$m>n$時）或$(0,1)$（$n>m$時），接著觀察剩餘的陣列部分：

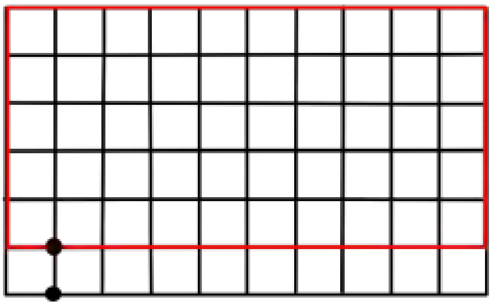


（圖十四　$m>n$時的情形）

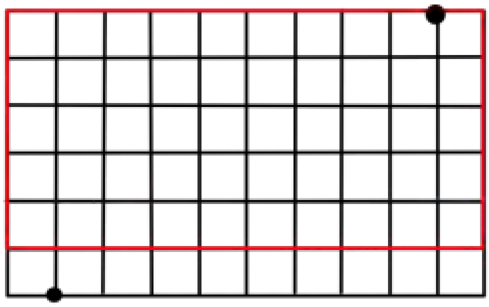
由圖中可知，在$(1,0)$（$m>n$時）或$(0,1)$（$n>m$時）放置障礙物，從出發走過$(0,0)$後，會發現之後的陣列完全形如一個$m\times(n-1)$（$m>n$時）或$(m-1)\times n$（$n>m$時）的陣列，依照$k=1$時的阻擋數極值發生位置，可以分為以下四種：

1. 若$m>n$：

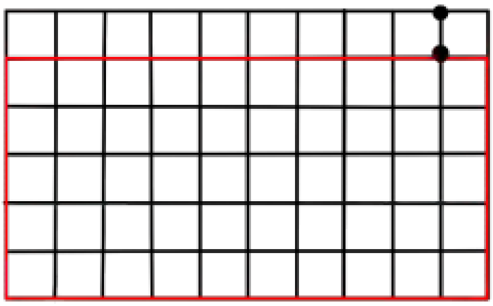
此時障礙物上方出現的是一個$m>n$的圖形，可完全依$k=1$的情形，推得以下各情形：



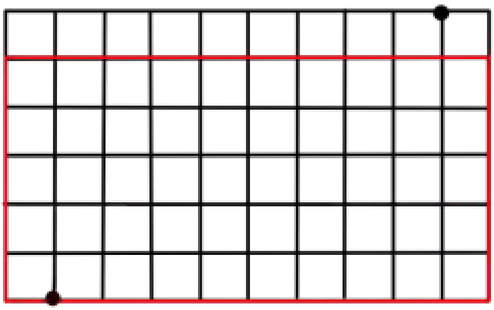
（圖十五）



（圖十六）



（圖十七）

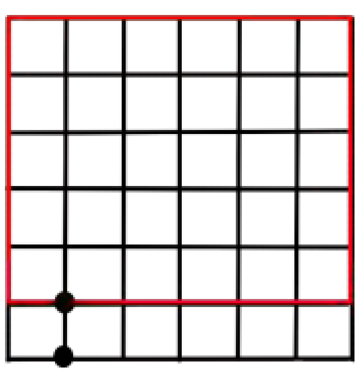


（圖十八）

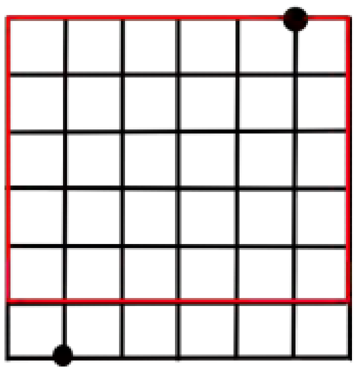
（我們定義第一個的圖形為標準型，經由翻轉可以得到其他三個圖形）

2. 若 $m=n$：

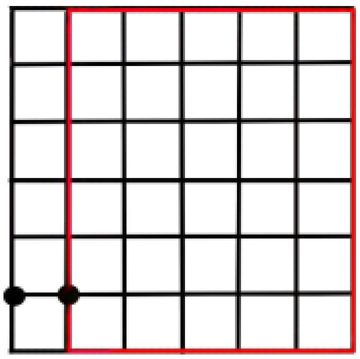
障礙物上方形成 $m=n+1$ 的陣列，按照 $k=1$ 的情形，可推得以下各情形：



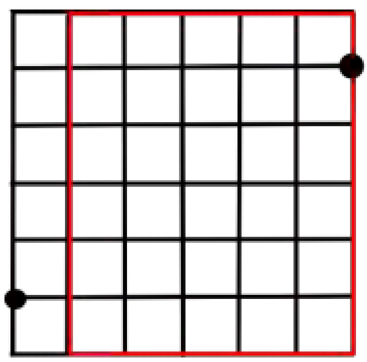
（圖十九）



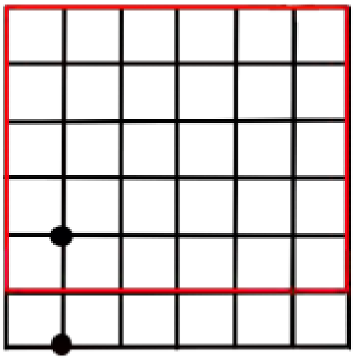
（圖二十）

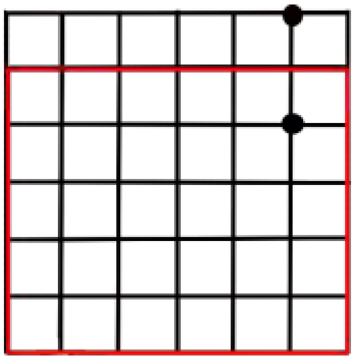


（圖二十一）

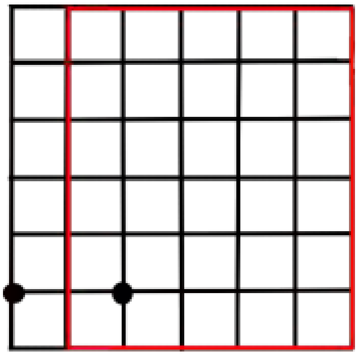


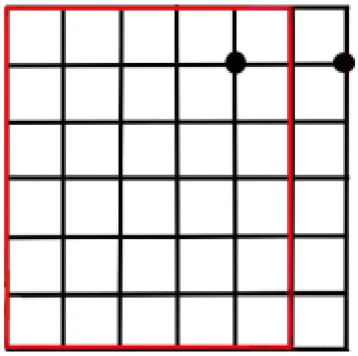
（圖二十二）



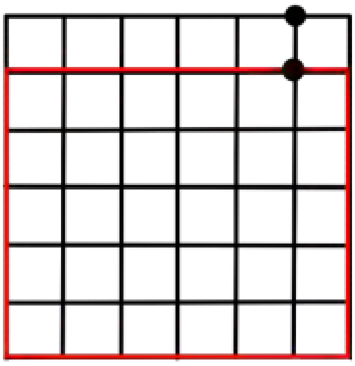


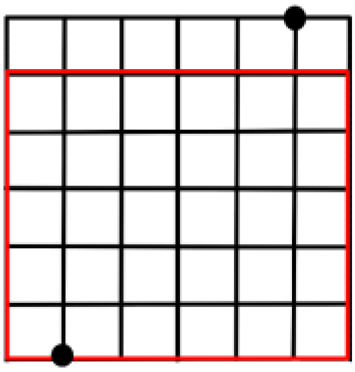
（圖二十三）　　　　（圖二十四）



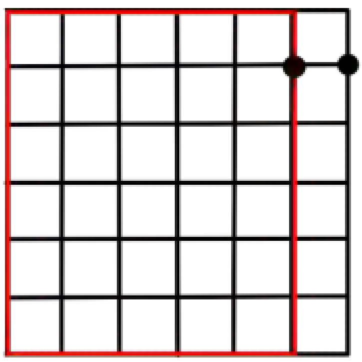


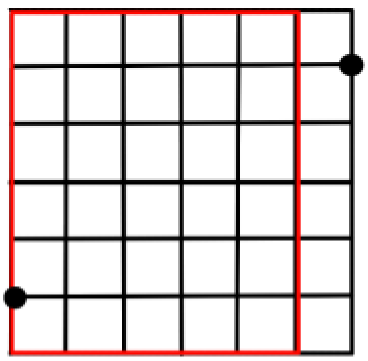
（圖二十五）　　　　（圖二十六）





（圖二十七）　　　　（圖二十八）

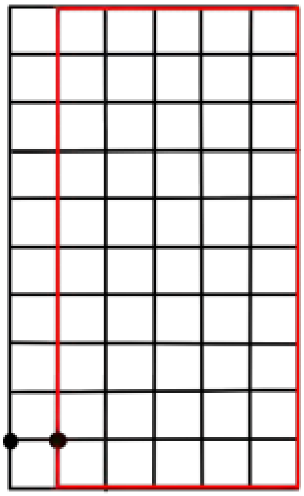




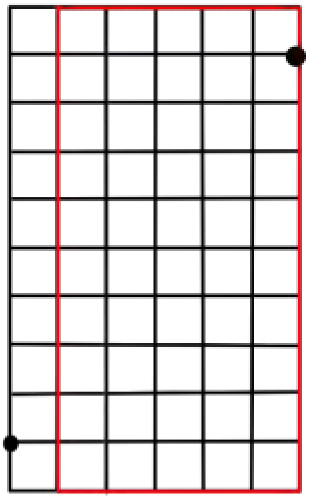
（圖二十九）　　　　（圖三十）

3. 若 $n > m$：

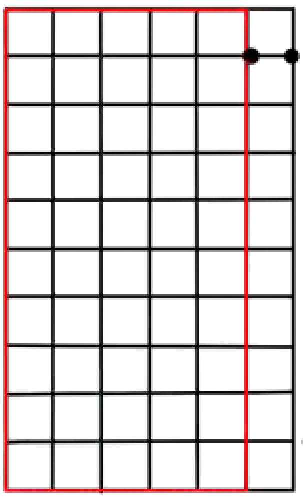
障礙物上方形成 $n > m$ 的陣列，按照 $k = 1$ 的情形，推得以下各情形：



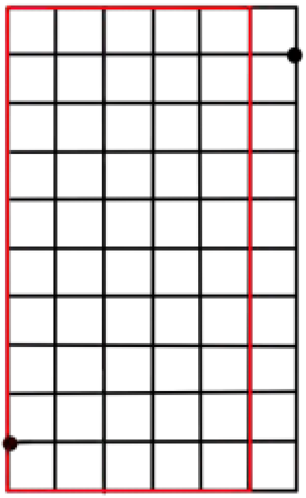
（圖三十一）



（圖三十二）



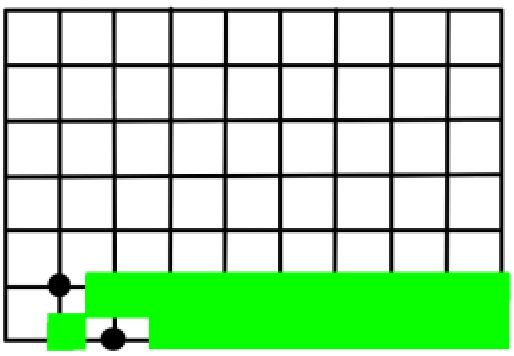
（圖三十三）



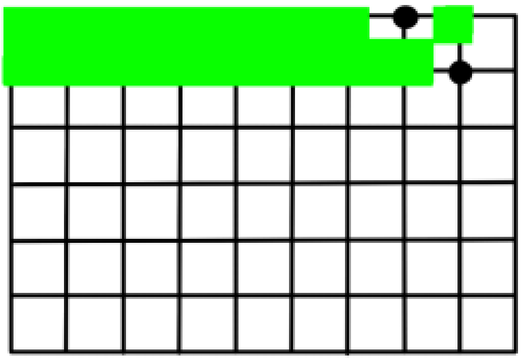
（圖三十四）

4. 特例

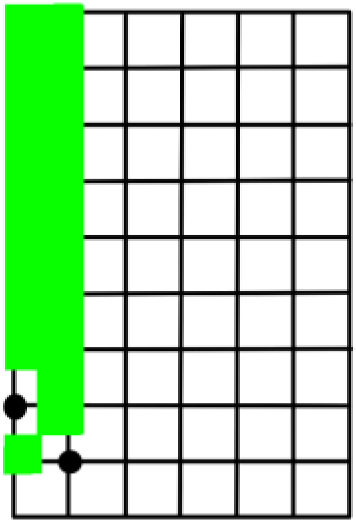
因障礙物性質而產生，無法依 $k = 1$ 的情形推得：（以綠色表示完全阻擋區）

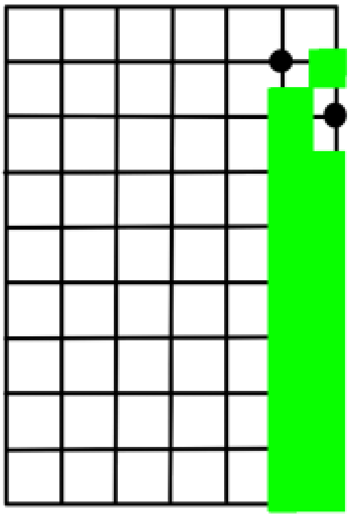


（圖三十五）



（圖三十六）





（圖三十七）　　　　　　（圖三十八）

2. 方格陣列 $m \times n$ 中 3 至 G 個障礙物阻擋數最大值的探究過程

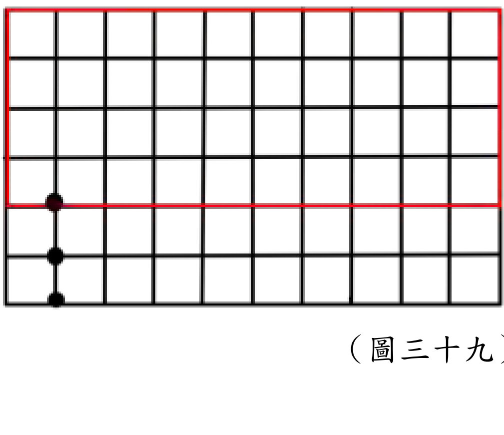
（1）3 個障礙物的研究過程：

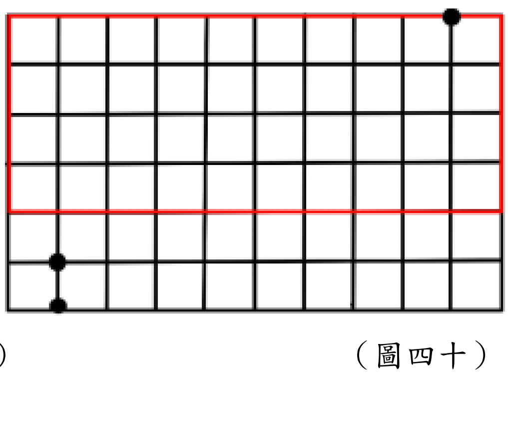
與 2 個障礙物時的解法類似，我們取圖形 $i+j=s$，$3 \le s \le m+n-2$ 上任一位置放置障礙物，其必阻擋不超過 $\frac{1}{2}$ 的總通過捷徑數，三個障礙物共阻擋了不超過 $1-(1\cdot\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ 的總捷徑數。與 $k=2$ 時相同，即使下方產生完全阻擋區，我們可直接觀察此區域上方的部分，並依均勻分配性得到相同的結果。

同理，欲找出使捷徑數被阻擋超過 $\frac{7}{8}$ 的情況，只需將障礙物置於 $(1,0)$ 和 $(1,1)$（$m>n$ 時）或 $(0,1)$ 和 $(1,1)$（$n>m$ 時），並觀察非完全阻擋區的部分，所餘下的部分仍然是一個 $m\times(n-2)$（$m>n$ 時）或 $(m-2)\times n$（$n>m$ 時）的陣列，亦可細分為以下各種情況：

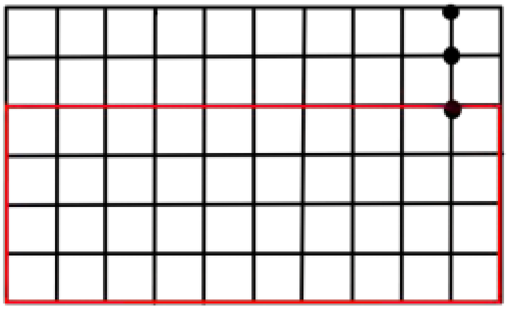
1. 若 $m>n$：

此時障礙物上方出現的是一個 $m>n$ 的圖形，可完全依 $k=1$ 的情形，推得以下各情形：

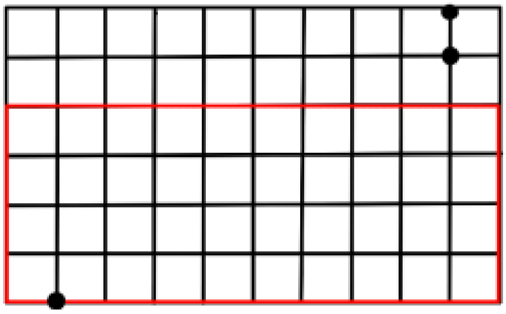




（圖三十九）　　　　　　（圖四十）



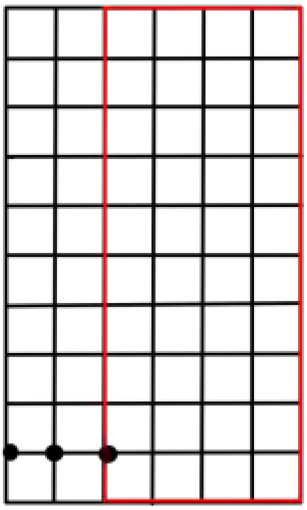
（圖四十一）



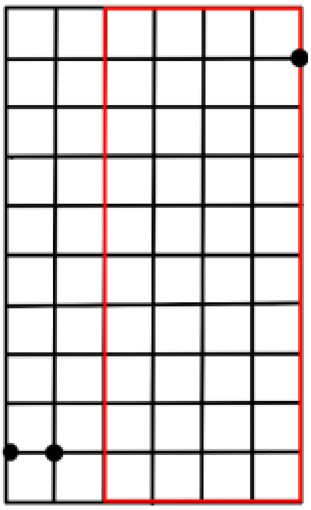
（圖四十二）

2. 若 $n>m$：

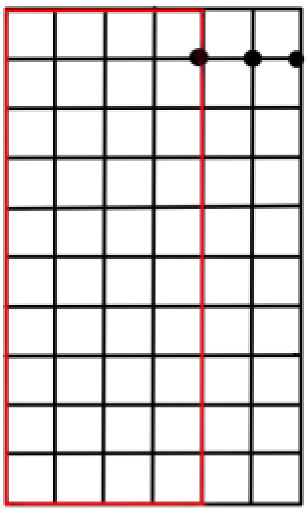
障礙物上方形成 $n>m$ 的陣列，按照 $k=1$ 的情形，推得以下各情形：



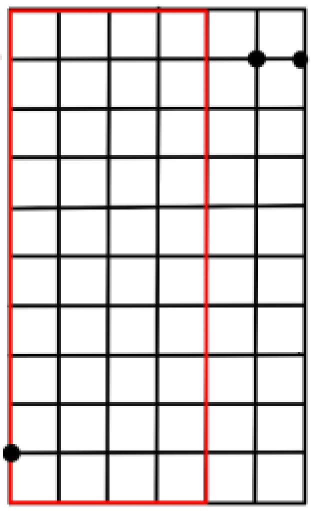
（圖四十三）



（圖四十四）



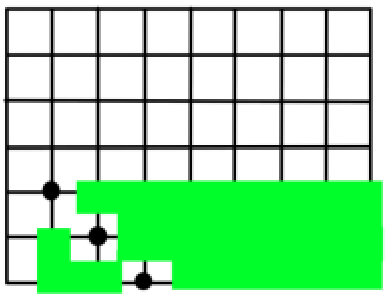
（圖四十五）



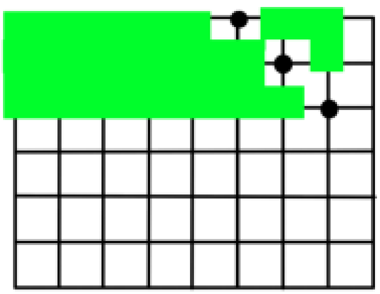
（圖四十六）

3. 特例

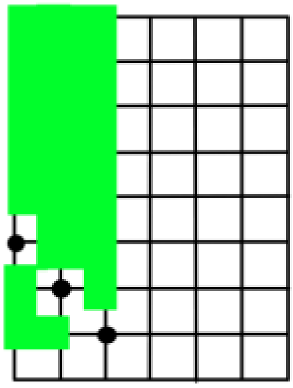
因障礙物性質而產生，無法直接依 $k=1$ 的情形推得，但我們在 $k>3$ 時將不再特別討論特例。這些因完全阻擋區而造成的特例，並非一般通用情況。



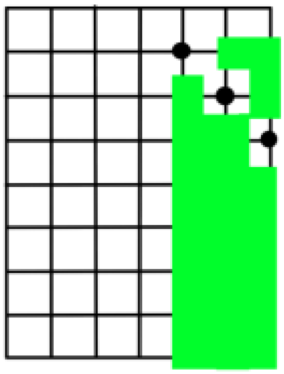
（圖四十七）



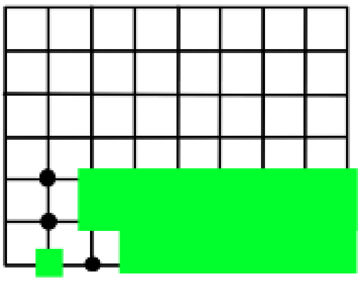
（圖四十八）



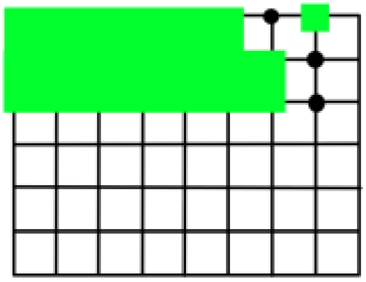
（圖四十九）



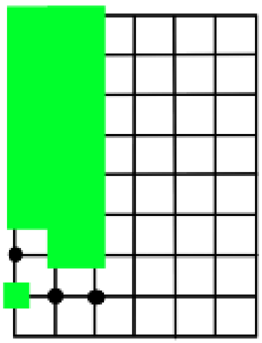
（圖五十）



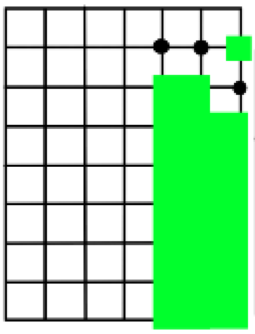
（圖五十一）



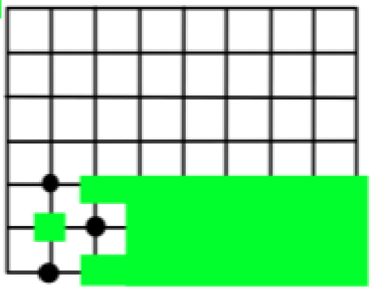
（圖五十二）



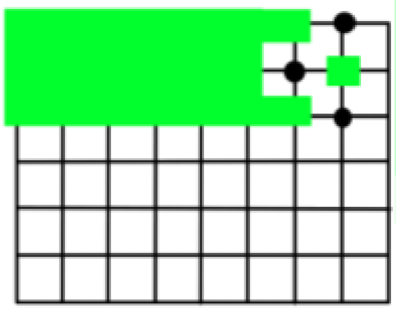
（圖五十三）



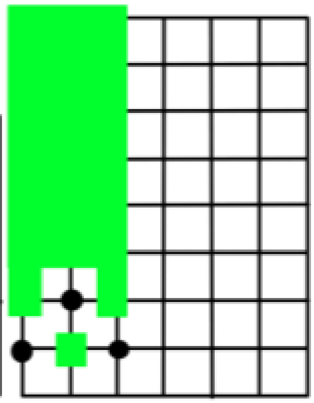
（圖五十四）



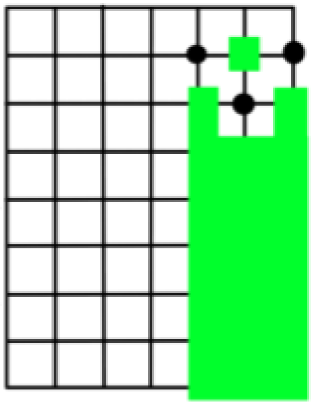
（圖五十五）



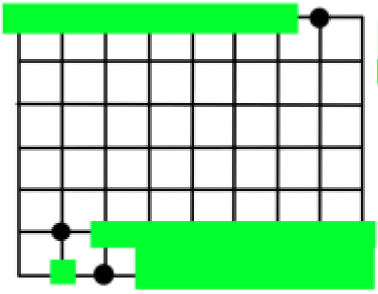
（圖五十六）



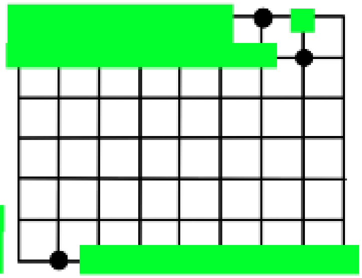
（圖五十七）



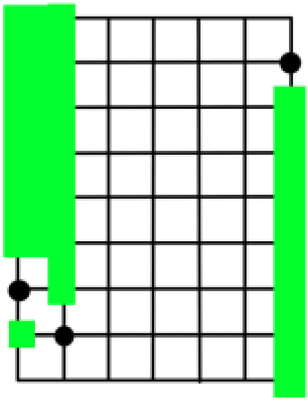
（圖五十八）



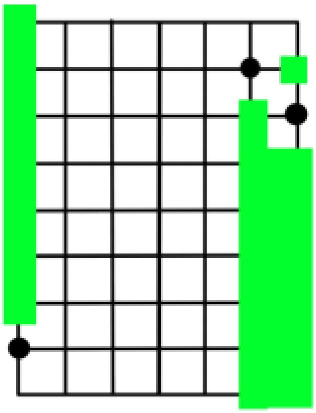
（圖五十九）



（圖六十）



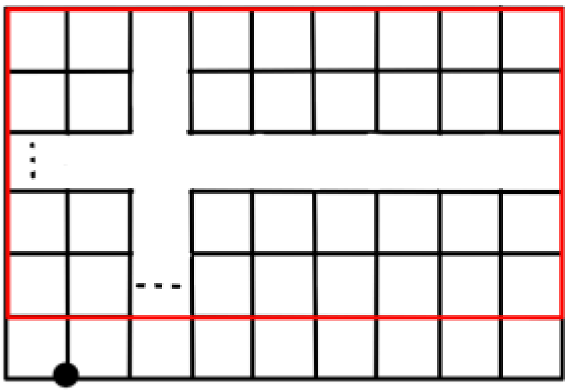
（圖六十一）



（圖六十二）

(2)4 個障礙物以上的研究過程:

以此類推，當我們欲求解ω個障礙物的情形時($4\le\omega\le G$)，只需將第一個障礙物放於$(1,0)$($m>n$時)或$(0,1)$ ($n>m$時)，之後直接採用$\omega-1$的陣列求之。

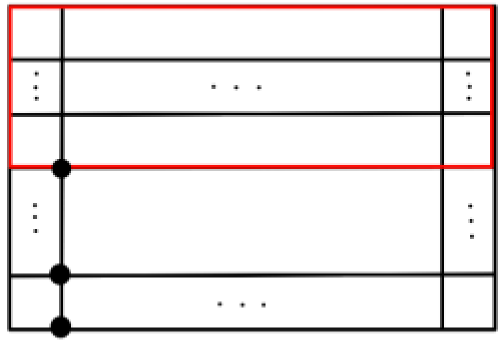


（圖六十三）

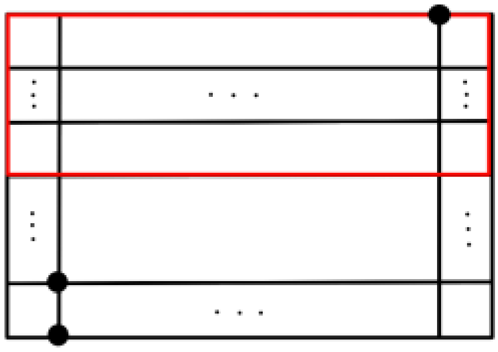
以下是求解ω個障礙物的情形時，各情況的通用解法，除特例之外，分為以下兩種情形：

1. 若$m>n$:

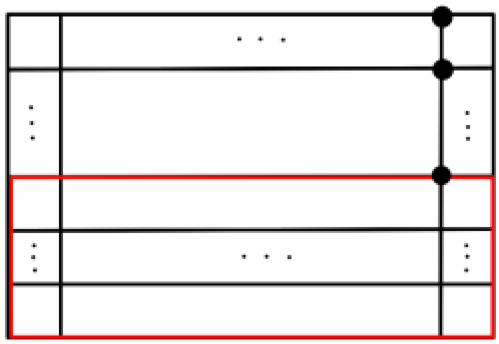
此時依照規律，將障礙物由$(1,0)$開始一一往上堆疊，並分析最後一個障礙物的對稱性即可求得。下方是四張簡圖：



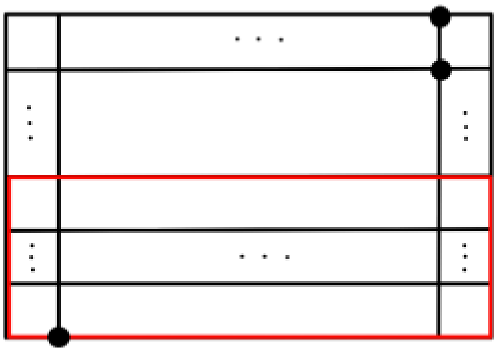
（圖六十四）



（圖六十五）



（圖六十六）

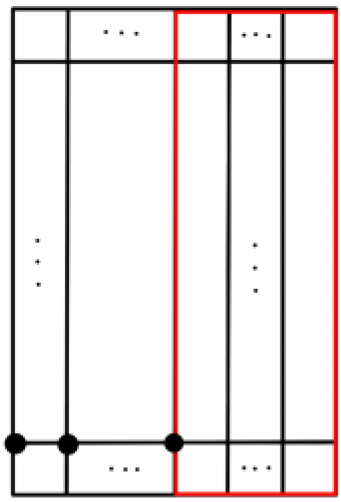


（圖六十七）

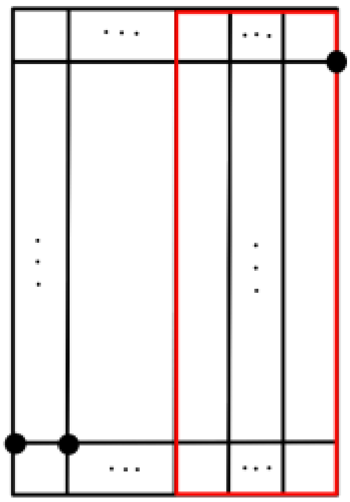
2. 若 $n>m$：

將障礙物由 (0,1) 開始一一往右堆疊，並分析最後一個障礙物的對稱性。

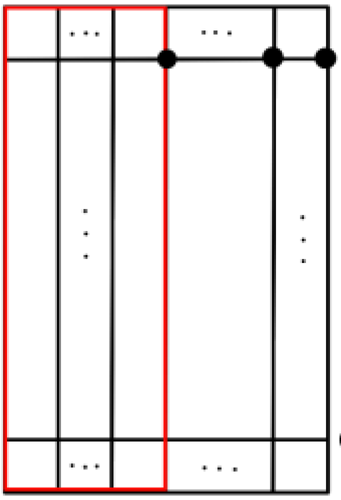
亦可得出四類圖形：



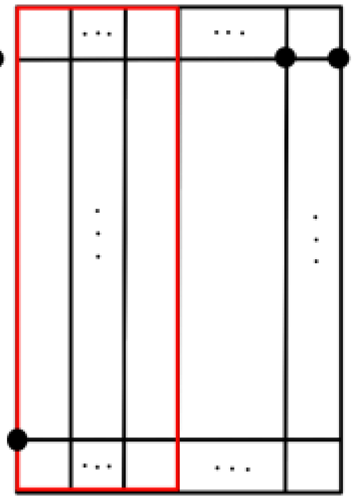
（圖六十八）



（圖六十九）



（圖七十）



（圖七十一）

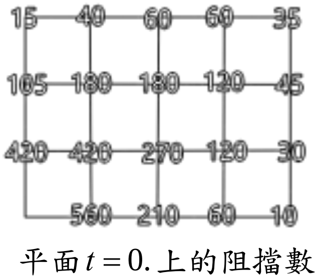
我們將以上結果歸納為性質七.

> **性質七：障礙數 $k=2\sim G$ 時擺放位置與阻擋數最大值關係**
>
> 當障礙物有 ω 個（$2\le\omega\le G$）時，
>
> 若 $m>n$，我們依序將其擺入 $(1,0)$、$(1,1)$、……、$(1,\omega-2)$ 後，最後一個障礙物擺在 $(1,\omega-1)$ 或 $(m-1,n)$ 時，阻擋數有最大值。
>
> 若 $m<n$，我們依序將其擺入 $(0,1)$、$(1,1)$、……、$(\omega-2,1)$ 後，最後一個障礙物擺在 $(\omega-1,1)$ 或 $(m,n-1)$ 時，阻擋數有最大值。
>
> 其中 $\omega=2$ 時，若 $m=n$，不僅適用上述兩種狀況，當障礙物分別擺在 $(1,0)$、$(1,2)$ 或 $(m-1,n-2)$、$(m-1,n)$ 時，亦有阻擋數最大值。
>
> 這些最大值中包含因完全阻擋區而造成的特例存在。

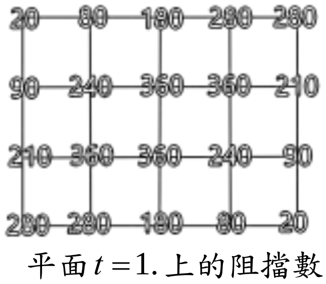
（三）方體陣列 $m\times n\times l$ 中 1 個障礙物的探究過程

在方體陣列 $m\times n\times l$ 中，其總捷徑數為 $\dfrac{(m+n+l)!}{m!n!l!}$，若在其任一座標點上放置 1 個障礙物，所阻擋的捷徑數量為 $\dfrac{(i+j+t)!}{i!j!t!}\cdot\dfrac{(m-i+n-j+l-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}$，故在方體陣列 $m\times n\times l$ 中，我們可以用 $\dfrac{(m+n+l)!}{m!n!l!}-\dfrac{(i+j+t)!}{i!j!t!}\cdot\dfrac{(m-i+n-j+l-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}$ 表示其剩餘的捷徑走法數。

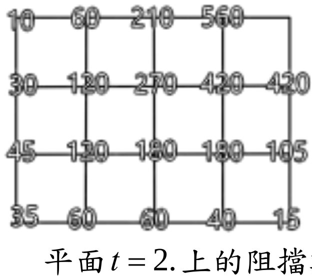
首先對 $m\times n\times l$=4×3×2 的方體陣列進行運算。



平面 $t=0$. 上的阻擋數



平面 $t=1$. 上的阻擋數



平面 $t=2$. 上的阻擋數

在 $m\times n\times l$=4×3×2 的方體陣列中，$P(i,j,t)$ 的最大值發生在

$(i,j,t)=(0,1,0)$ 和 $(3,3,2)$ ，並且觀察出阻擋數之間的某種對稱關係。

在下方進行討論：

性質八：方體陣列 $m\times n\times l$ 中阻擋數之點對稱性

一開始，我們透過對少數幾個陣列的觀察，進而發現此種**點對稱**的情形。根據上述公式，我們得到：

$$P(i,j,t)=\frac{(i+j+t)!}{i!j!t!}\cdot\frac{(m-i+n-j+l-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}$$
$$=\frac{(m-i+n-j+l-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}\cdot\frac{(i+j+t)!}{i!j!t!}=P(m-i,n-j,l-t).$$

由上式得知，考慮兩座標 $P(i,j,t)$ 和 $P(m-i,n-j,l-t)$ 之阻擋數，若將起點與終點連線，並取其中點，捷徑走法圖上各座標點會以此點呈現點對稱情形，故只需探討此方體陣列中一半層數中的捷徑走法數分布即可推知全圖分布。

經過方形陣列 $m\times n$ 中 1 個障礙物的探究，我們推測 $P(i,j,t)$ 的最大值會發生在起終點附近，並且與 m,n,l 的大小有關。

比較之間的大小：

$P(1,0,0):P(0,1,0):P(0,0,1)$

$$=\frac{(m+n+l-1)!}{(m-1)!n!l!}:\frac{(m+n+l-1)!}{m!(n-1)!l!}:\frac{(m+n+l-1)!}{m!n!(l-1)!}=m:n:l.$$

故 $\max\{m,n,l\}=m$ 時， $P(1,0,0)$ 是這三點中的最大值；

$\max\{m,n,l\}=n$ 時， $P(0,1,0)$ 是這三點中的最大值；

$\max\{m,n,l\}=l$ 時， $P(0,0,1)$ 是這三點中的最大值。

接下來探討的是這三點是否為整個陣列阻擋數的最大值。

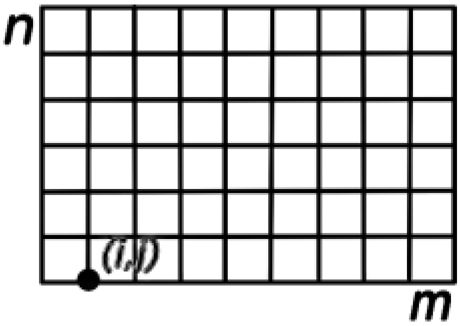
(1) **捷徑數 S 的最小值:**

對於在任意圖形中任意位置擺放障礙之捷徑數，可以有以下表示方法：

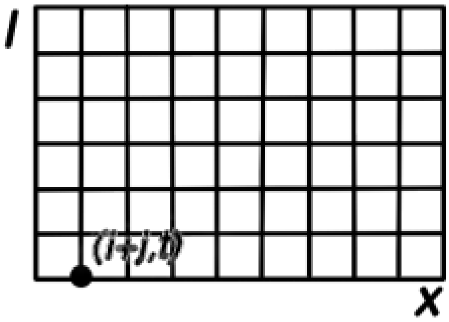
$$\frac{(i+j+t)!}{i!j!t!}\times\frac{(m+n+l-i-j-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}$$
$$=\frac{P_t^{i+j+t}}{t!}\times C_i^{i+j}\times\frac{P_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}}{(l-t)!}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$$
$$=C_t^{i+j+t}\times C_i^{i+j}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$$
$$=(C_t^{i+j+t}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t})\times(C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j})$$

事實上，在一立體空間，我們可以將其受一障礙物阻擋後所剩的捷徑數表示成兩個受阻平面所剩的捷徑數乘積。我們由已知的平面阻擋性質得知，若不考慮 m,n,l 之值之相對大小，於式 $C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$ 中產生最小值的前提必定有 $(i,j)=(1,0)$ 或 $(0,1)$.

我們姑且在前式 $C_t^{i+j+t}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}$ 中，令 $i+j=x$，形成 $C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$，則其亦表示了另一個平面中受阻後的剩餘捷徑情形；我們直接將上述二者繪製如圖。



（圖七十二）



（圖七十三）

此二圖中顯示了若欲在 $C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$ 產生最小值的同時，使 $C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$ 也產生最小值，我們可以分為以下狀況討論：

（我們先以 $m>n$ 為前提，其他可用翻轉後對稱性質得證）

1. 若 $m+n\geq l$ 時，

在此條件下，第二張方格陣列上，欲使捷徑數最少，應該將其置於 $(x,t)=(1,0)$ 之位置上（不討論對稱點的原因：我們希望在方體陣列上先找到一個「極值點」，其後再依三維性質找對稱。）

此時 $x=i+j=1$，又 $m>n$，故 $C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$ 圖形中障礙物位於 $(i,j)=(1,0)$ 時能符合上式並產生捷徑數最小值。

故若在方體陣列 (m,n,l) 中，$m>n$ 且 $m+n\geq l$，則捷徑數最小值會發生在 $(i,j,t)=(1,0,0)$ 及其對稱點 $(i,j,t)=(m-1,n,l)$.

2. 若 $m+n\leq l$ 時，

由於方體陣列和平面陣列一樣有可翻轉性質，假如我們對原式進行簡單的變數置換，即改變 $C_t^{i+j+t}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}\times C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$ 式中變數 m,n,l 的位置，可以得到在方體陣列 (m,n,l) 中，$m>n$ 且 $m+n\leq l$ 時，捷徑數最小值亦會發生在 $(i,j,t)=(1,0,0)$ 及其對稱點 $(i,j,t)=(m-1,n,l)$.

$m<n$ 的情形，則依翻轉後對稱性質推廣可得。

3. 上述討論僅遺漏了一種情況，故考慮 $m=n=l$ 時：

$$P(1,0,0)=P(0,1,0)=P(0,0,1)=\frac{(3m-1)!}{m!m!(m-1)!}\ ,$$

$$P(1,1,1)=6\cdot\frac{(3m-3)!}{(m-1)!(m-1)!(m-1)!}$$

$$\frac{(3m-1)!}{m!m!(m-1)!}:6\cdot\frac{(3m-3)!}{(m-1)!(m-1)!(m-1)!}$$
$$=\frac{(3m-1)(3m-2)}{m^2}:6=(9m^2-9m+2):6m^2$$

若 $P(1,0,0)=P(0,1,0)=P(0,0,1)>P(1,1,1)$ ，前者減後者大於零：

$(9m^2-9m+2)-6m^2>0$ 化簡得不等式 $3m^2-9m+2>0$ ，故其解為

$$m>\frac{9+\sqrt{57}}{6}\approx 2.75 \text{ 或 } m<\frac{9-\sqrt{57}}{6}\approx 0.24.$$

取 m 的正整數解為 $m\geq 3$.

若 $m=1$ 時，因為 $(1,1,1)$ 為終點，故 $P(1,1,1)$ 無意義。

若 $m=2$ 時， $P(1,1,1)=36$ ， $P(1,0,0)=30$ ，所以 $P(1,1,1)>P(1,0,0)$.

所以除了 $m=n=l=2.$，其他 $m=n=l$ 的方體陣列中，阻擋數最大值同時發生在 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$ ，$(0,0,1)$ 及其各自的對稱點。

(2) **捷徑數 S 的最大值:**

將障礙物擺放於除了起點和中點以外的頂點，其阻擋的路徑走法即為通過一平面，因此阻擋數的最小值發生在其中之一。為了確定阻擋數的最小值發生在哪一點，我們進行證明：$\boxed{\text{已知 } a>b>c \text{ ， } a,b,c\in\mathbb{N} \text{ ，欲證 } C_a^{a+b}>C_b^{b+c}.}$

證明:

$$\frac{(a+b)!}{a!b!}:\frac{(b+c)!}{b!c!}=(a+b)!c!:(b+c)!a!$$
$$=(a+1)(a+2)(a+3)...(a+c)...(a+b):(b+1)(b+2)(b+3)...(b+c)$$

$\because a>b>c$

$\therefore (a+1)(a+2)(a+3)...(a+c)>(b+1)(b+2)(b+3)...(b+c)$

$\because (a+c+1)(a+c+2)...(a+b)>1$

$\therefore (a+1)(a+2)(a+3)...(a+c)...(a+b)>(b+1)(b+2)(b+3)...(b+c)$

$\therefore \dfrac{(a+b)!}{a!b!}>\dfrac{(b+c)!}{b!c!}$ ，故得證.

由此可知： $\max\{m,n,l\}=m.$ 時， $P(m,0,0)$ 是阻擋數的最小值。
$\max\{m,n,l\}=n.$ 時， $P(0,n,0)$ 是阻擋數的最小值。
$\max\{m,n,l\}=l.$ 時， $P(0,0,l)$ 是阻擋數的最小值。

經過推廣後我們最終得到以下結論：

性質九：方體陣列 $m\times n\times l$ 中阻擋數之極值發生位置整理

$\max\{m,n,l\}=m$ 時，$P(1,0,0)$ 及其對稱點是阻擋數的最大值；
$P(m,0,0)$ 及其對稱點是阻擋數的最小值。
$\max\{m,n,l\}=n$ 時，$P(0,1,0)$ 及其對稱點是阻擋數的最大值；
$P(0,n,0)$ 及其對稱點是阻擋數的最小值。
$\max\{m,n,l\}=l$ 時，$P(0,0,1)$ 及其對稱點是阻擋數的最大值；
$P(0,0,l)$ 及其對稱點是阻擋數的最小值。
特別地，若 $m\times m\times m$ 的方體陣列中（$m\geq 3$），阻擋數最大值同時發生在 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ 及其各自的對稱點。

（四）關於 *n* 維陣列中，捷徑數的最小值討論

假設 n 維之陣列，邊長分別是 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$，其中 $m_1\geq m_2\geq m_3\geq\cdots\cdots\geq m_n$ 任一點座標為 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)$，此點之阻擋數為

$$\frac{(i_1+i_2+i_3+\cdots\cdots+i_n)!}{i_1!i_2!i_3!\cdots\cdots i_n!}\times\frac{(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n-i_1-i_2-i_3-\cdots\cdots-i_n)!}{(m_1-i_1)!(m_2-i_2)!(m_3-i_3)!\cdots\cdots(m_n-i_n)!}.$$

我們可將此式改寫為

$C_{i_n}^{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_n}C_{m_n-i_n}^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n-i_1-i_2-\cdots\cdots-i_n}C_{i_{n-1}}^{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_{n-1}}C_{m_{n-1}-i_{n-1}}^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_{n-1}-i_1-i_2-\cdots\cdots-i_{n-1}}\cdots\cdots C_{i_2}^{i_1+i_2}C_{m_2-i_2}^{m_1+m_2-i_1-i_2}$，將其視為 $n-1$ 個平面，其中第 k 個平面橫軸長為 $\sum_{p=1}^{n-k}m_p$ 縱軸長為 m_{n+1-k} 的平面上，障礙物置於同一座標之阻擋數相乘的結果。因為在每個平面中，阻擋數最大值都發生在 $(1,0)$，故相乘的積的最大值可為 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0)$，即 $(1,0)$ 符合每個平面中最大值的出現位置，此時則成為一連串的阻擋數最大值相乘。

所以阻擋數的最大值，亦即捷徑數的最小值，發生在 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0)$.

性質十：高維度陣列 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$. 中阻擋數之最大值發生位置

在一高維度陣列 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$ 中，已知 $m_1\geq m_2\geq m_3\geq\cdots\cdots\geq m_n$，阻擋數之最大值（捷徑數最小值）會發生在障礙物置於 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0)$ 時.

（四）關於 *n* 維陣列中，捷徑數的最大值推論

任意 n.維陣列中，其捷徑數最大值可由 $n-1$ 維之情形推得，因為 n.維陣列中之捷徑數最大值乃是 $n-1$ 維中各個陣列發生最大值之位置互相比較大小，而取其中最大者。
基於先前對於 $m\times n$ 及 $m\times n\times l$ 陣列中捷徑數最大值的研究，已知 $m_1\geq m_2\geq m_3\geq\cdots\cdots\geq m_n$，我們可將 n 維陣列中捷徑數最大值表示為 $(m_1,0,0,\cdots\cdots,0)$.

陸、研究結果與結論

1. 在$m\times n$的方格陣列中，通過一個障礙物擺在(i,j)的捷徑數和通過一個障礙物擺在$(m-i,n-j)$的捷徑數相等。

2. 在$m\times n$的方格陣列中，將起點、終點連線，形成直線$i-\frac{m}{n}j=0$在直線右方，在同一條水平線上，捷徑數越向左越小，在同一條鉛直線上，捷徑數越向上越小。

3. 在$m\times n$的方格陣列中，擺放一個障礙物時，置於$(0,n)$或$(m,0)$捷徑數發生最大值。而最小值發生的位置則和$m,n.$的相對大小有關。下列每個座標的對稱點之捷徑數在相同條件下，也會發生最小值。
   (1) 若$m>n$且$m-1>n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,0)$.
   (2) 若$m>n$且$m-1=n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,0)$和$(1,1)$
   (3) 若$m=n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,1)$.
   (4) $n>m$且$n-1>m$時，阻擋數的最大值發生在$(0,1)$.
   (5) $n>m$且$n-1=m$時，阻擋數的最大值發生在$(0,1)$和$(1,1)$.

4. 在$m\times n$的方格陣列中，擺放兩個障礙物時，置於$(0,n)$和$(m,0)$捷徑數發生最大值；
   當$m>n$時，擺在$(1,0)$和$(1,1)$，或是$(m-1,n)$和$(m-1,n-1)$發生最小值。
   當$m<n$時，擺在$(0,1)$和$(1,1)$，或是$(n-1,m)$和$(m-1,n-1)$發生最小值。

5. 在$m\times n$的方格陣列中，擺入ω個（$2\le\omega\le G$）障礙物時：
   若$m>n$，我們依序將其擺入$(1,0)$、$(1,1)$、……、$(1,\omega-2)$後，最後一個障礙物擺在$(1,\omega-1)$或$(m-1,n)$時，捷徑數有最小值。
   若$m<n$，我們依序將其擺入$(0,1)$、$(1,1)$、……、$(\omega-2,1)$後，最後一個障礙物擺在$(\omega-1,1)$或$(m,n-1)$時，捷徑數有最小值。
   其中$\omega=2$時，若$m=n$，不僅適用上述兩種狀況，當障礙物分別擺在$(1,0)$、$(1,2)$或$(m-1,n-2)$、$(m-1,n)$時，亦有捷徑數最小值。
   這些最小值中包含因完全阻擋區而造成的特例存在。

6. $\max\{m,n,l\}=m$時，$P(1,0,0)$及其對稱點是阻擋數的最大值；
   $P(m,0,0)$及其對稱點是阻擋數的最小值。
   $\max\{m,n,l\}=n$時，$P(0,1,0)$及其對稱點是阻擋數的最大值；
   $P(0,n,0)$及其對稱點是阻擋數的最小值。
   $\max\{m,n,l\}=l$時，$P(0,0,1)$及其對稱點是阻擋數的最大值；
   $P(0,0,l)$及其對稱點是阻擋數的最小值。
   特別地，若$m\times m\times m$的方體陣列中（$m\ge 3$），阻擋數最大值同時發生在$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$及其各自的對稱點。

7. 在一高維度陣列$m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$中，已知$m_1\ge m_2\ge m_3\ge\cdots\cdots\ge m_n$，阻擋數之最大值（捷徑數最小值）會發生在障礙物置於$(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0)$時；而阻擋數之最小值（捷徑數最大值）會發生在障礙物置於$(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(m_1,0,0,\cdots\cdots,0)$時。

柒、未來展望

1. 在$m \times n$的方格陣列中，我們可研究單一鉛直線或水平線上，阻擋數對稱性與阻擋數數值大小分布趨勢的關係。希望之後可以在$m \times n \times l$的方體陣列中，探討單一直線或單一平面上的阻擋數數值大小的分布趨勢。
2. 在本篇報告中，尚未探討在$m \times n \times l$的方體陣列中，放置k個$(k \geq 2)$障礙物時，捷徑數極值發生的可能的座標。
3. 希望能找到一個函數，代入維度、陣列之各邊長、障礙物數量，即可求出捷徑數極值。

捌、參考文獻

1. 第55屆全國科展高中組數學科作品　<<超越障礙的勝利之路>>
2. 普通數學第二冊　　翰林出版社

【評語】050402

本作品探討在方格陣列擺上阻隔點時，要擺在哪裡才能得到捷徑數之最大與最小值。研究發現，阻隔點越接近起點、終點所得捷徑數最少(實際位置和 M，N 哪個數字大有關)；反之，越遠端之捷徑數越大。此研究並推廣到任意阻隔點之擺設位置使的捷徑數得到極值，其基本結論算是單一阻隔點之合理延伸。本作品內容完整，但是數學論證嚴謹度須再加強，特別是多個阻隔點的擺放位置最佳擺法並未嚴格論證，只能算是一個合理直觀結果。最後一點，本研究題材未說明其來源，與參考資料第 55 屆全國科展高中組數學科作品有何不同須詳實探討，建議多做文獻探討。

作品海報

壹、摘要

在一個方格陣列上擺放一定數量的阻隔點（即障礙物）時，從方格中由左下角走到右上角所需的捷徑步數與未受阻擋的方格比較，勢必會受到影響. 本研究主要建立在此種模式中，經由觀察、假設到證明的過程，發現許多諸如對稱、分布、極值等性質. 依次固定障礙數量，加以比較並歸納當障礙物擺放於何種位置或情況時，方格中的捷徑走法數量會產生極值，及探討障礙擺放於各位置時，所剩餘的捷徑走法數量分布情形與性質.

此外，我們也嘗試朝三維的方向進行討論. 我們以二維情況的研究結果為基礎，研究出三維情形中捷徑走法數的計算方法與阻擋數分布情形，進而討論出當障礙物擺放於此方體陣列中，應擺放於何處才能使捷徑走法數產生極值.

貳、名詞定義與解釋

（一）**方格陣列** $m\times n$ **與方體陣列** $m\times n\times l$ ：前者為：由長 m 個、寬 n 個正方形所組成的長方形方格陣列；後者為：由長 m 個、寬 n 個、高 l 個的正方體所組成的長方體陣列.

（二）**捷徑走法分布圖**：在的情況，我們在方格陣列上的交點上方標示數字，表示若將障礙放在此點，捷徑走法所減少的數量.

（三）**阻擋數** $P(i,j)$ ： $P(i,j)$ 表示阻擋的捷徑數，亦即必須通過 (i,j) 的捷徑數量，即 $P(i,j)=C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m-i+n-j}$.

參、研究目的

研究目的一：探究在方格陣列 $m\times n$ 有1個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值.

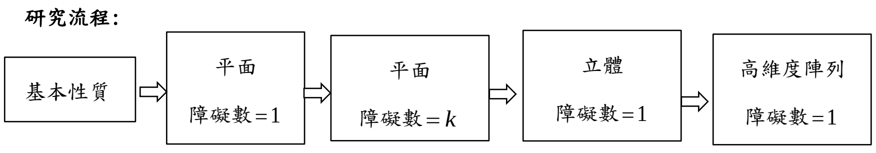
研究目的二：探究在方格陣列 $m\times n$ 有 k 個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值.

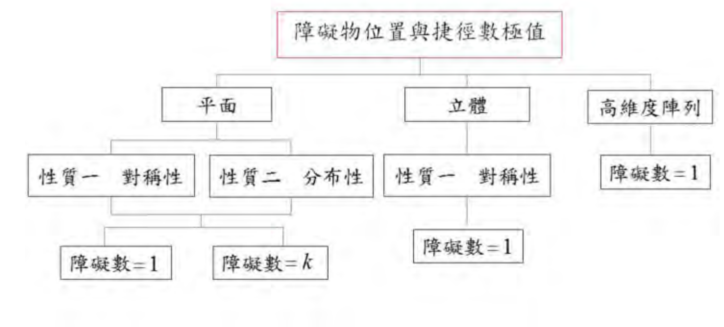
研究目的三：探究在方體陣列 $m\times n\times l$ 有 1 個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值.

研究目的四：探究在高維度陣列有 1 個障礙物時，障礙物於何處捷徑走法數發生最大值和最小值.

肆、研究過程

研究流程：





（一）方格陣列中障礙物 $k=1$ 的探究過程：

性質一：方格陣列 $m\times n$ 中阻擋數之點對稱性

$P(i,j)=C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}=C_{m-i}^{(m-i)+(n-j)}\times C_i^{i+j}=P(m-i,n-j)$ ，由此式得知，考慮兩座標 $P(i,j)$ 和 $P(m-i,n-j)$ 之阻擋數，若將起點與終點連線，造出方程式 $i-\frac{m}{n}j=0$ 之圖形，捷徑走法圖上各座標點會以此圖形中點呈現點對稱情形，故只需探討障礙物在起點與終點連線右側的阻擋數，即可得出在左側相對應的阻擋數.

性質二：翻轉後對稱性質

在起點於陣列左下角、終點於陣列右上角且障礙數 $k=1$ 的條件下，矩形陣列 $m_0\times n_0$ (m_0,n_0 為自然數常數) 的上任取一點 (i_0,j_0) ，若將原分布圖順時針旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後翻面（即維持由左下出發，終點在右上的情形），我們可以得出 $n_0\times m_0$ 的分布圖。將此分布圖與原圖比較後經觀察得知，矩形陣列 $n_0\times m_0$ 的 (j_0,i_0) 之阻擋數 $P(j_0,i_0)$ 會與 $m_0\times n_0$ 的 (i_0,j_0) 之阻擋數 $P(i_0,j_0)$ 相等。因此我們在障礙數 $k=1$ 時，只需證明得知 $m>n$ 的情形，便可依此性質推得 $n>m$ 之情形。故我們之後只需探討 $m>n$ 或 $m=n$ 的情形即可推知所有情況.

性質三：方格陣列 $m\times n$ 中阻擋數之分布性

將起點與終點連線，造出方程式 $i-\frac{m}{n}j=0$ 之圖形，而在此方程式右方的任意點須滿足

$i-\frac{m}{n}j\ge 0$ ，根據此式我們得到 $ni-mj\ge 0$.

我們取 $i-\frac{m}{n}j=0$ 下方任兩點 (i,j) 與 $(i+1,j)$ ，需比較兩式

$$C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}:C_{i+1}^{i+j+1}\times C_{m-i-1}^{m+n-i-j-1}$$

$$=\frac{(i+j)!}{i!\,j!}\times\frac{[(m+n)-(i+j)]!}{(m-i)!(n-j)!}:\frac{(i+j+1)!}{(i+1)!\,j!}\times\frac{[(m+n)-(i+j+1)]!}{(m-i-1)!(n-j)!}$$

$$=(i+1)(m+n-i-j):(m-i)(i+j+1).$$

欲判斷 $(i+1)(m+n-i-j)$ 和 $(m-i)(i+j+1)$ 大小，兩者相減

$(i+1)(m+n-i-j)-(m-i)(i+j+1)=(ni-mj)+(n-j)$.

由於 j 是在縱坐標 n 上取的一數值，因此其值恆有 $j\le n$ ，又 $ni\ge mj$

，故 $C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}>C_{i+1}^{i+j+1}\times C_{m-i-1}^{m+n-i-j-1}$ ，即 $P(i,j)\ge P(i+1,j)$.

在 $i-\frac{m}{n}j\ge 0$. 時恆成立.

根據翻轉後對稱性質，我們可以依據以上結論直接證明：

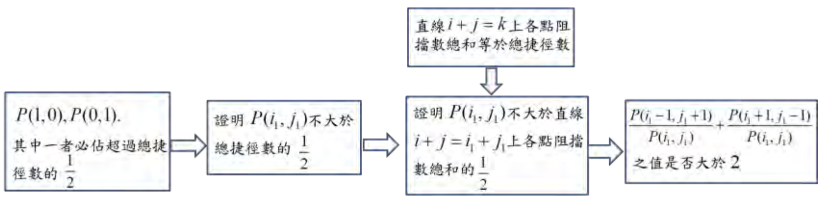
$i-\frac{m}{n}j\ge 0$. 時， $P(i,j)\ge P(i,j-1)$.

性質四：障礙物位於 $(m,0)$ 和 $(0,n)$ 時，捷徑數 S 有最大值.

障礙物位在 $(i,j)=(m,0)$ 時， $P(m,0)=C_m^{m+0}\times C_{m-m}^{m+n-m-0}=1$. 同理

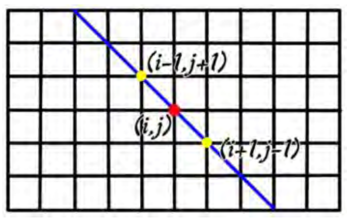
障礙物位在 $(i,j)=(0,n)$ 時， $P(0,n)=C_n^{0+n}\times C_{n-n}^{m+n-n-0}=1$.

捷徑數 S 的最小值討論：



從出發點出發當下僅有 2 種選擇：往 $(1,0)$ 或 $(0,1)$ 移動；故通過其中任一點的路徑數必佔總方法數的至少一半.

根據對陣列的觀察，我們推論在方格陣列 $m\times n$ 上，除上述及其斜角對稱情形外，任取一點放置障礙物，其阻擋數不會超過總捷徑數的一半.



（圖 1 ）

我們發現若 $\frac{P(i+1,j-1)}{P(i,j)}+\frac{P(i-1,j+1)}{P(i,j)}\ge 1$ ，代表通過 $(i-1,j+1)$ ， $(i-1,j+1)$ 和 (i,j) 之阻擋數總和與通過 (i,j) 之阻擋數比值 $R\ge\frac{1}{2}$ ，若我們將方程式 $i+j=s$ 上的各點與 (i,j) 的比值相加，必可得出其總和 $R_S\ge\frac{1}{2}$ ，即任取一點放置障礙物，其阻擋數不會超過總捷徑數的一半.

我們將原式改以下列形式表示：

$$\frac{P(i+1,j-1)}{P(i,j)}+\frac{P(i-1,j+1)}{P(i,j)}=\frac{C_{i+1}^{i+j}\cdot C_{m-i-1}^{m+n-i-j}}{C_i^{i+j}\cdot C_{m-i}^{m+n-i-j}}+\frac{C_{i-1}^{i+j}\cdot C_{m-i+1}^{m+n-i-j}}{C_i^{i+j}\cdot C_{m-i}^{m+n-i-j}}$$
$$=\frac{i!\,j!(m-i)!(n-j)!}{(i+1)!(j-1)!(m-i-1)!(n-j+1)!}+\frac{i!\,j!(m-i)!(n-j)!}{(i-1)!(j+1)!(m-i+1)!(n-j-1)!}$$
$$=\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}+\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\ge 1.$$

根據算幾不等式，

$$\because\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}>0,\ \frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}>0$$
$$\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)+\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)\ge 1\Rightarrow$$
$$\frac{\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)+\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)}{2}\ge\sqrt{\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)\cdot\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)}\ge\frac{1}{2}$$

$$\therefore\left(\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\right)\cdot\left(\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\right)\ge\frac{1}{4}$$

此時為了簡化計算過程，我們不失一般性假設：

$$\frac{n-j}{j+1}\cdot\frac{j}{n-j+1}\ge\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}$$

根據此式我們改解 $\frac{m-i}{i+1}\cdot\frac{i}{m-i+1}\ge\frac{1}{2}$ ，整理後得算式 $\frac{i}{i+1}\cdot\frac{m-i}{m-i+1}\ge\frac{1}{2}$ ，為討論 $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ 型 $(\alpha\in\mathbb{N})$ 之情況，令 $m-i=y$ ，並強迫分解：

$$\frac{i}{i+1}\cdot\frac{y}{y+1}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2iy\ge(i+1)(y+1)\Leftrightarrow iy-i-y+1\ge 2\Leftrightarrow(i-1)(y-1)\ge 2.$$

情況一：當 $i=1$ 或 $y=1$ 時，原不等式不成立.

即 $i=1$ 或 $m-i=1\Leftrightarrow i=1$ 或 $m-1=i$ 時，原不等式不成立

$m-1=i$ 即為 $i=1$ 的對稱點，故只須證明 $i=1$ 的狀況.

情況二：當 $i=2$ 或 $y=2$ 時，原不等式不成立.

即 $i=2$ 或 $m-i=2\Leftrightarrow i=2$ 或 $m=4$ 時，原不等式不成立

因此論證得解只在 $i=0$ 或 1 或 $(i=2$ 且 $m=4)$ 時不成立.

即當 $i=0$ 或 1 或 $(i=2$ 且 $m=4)$ 時，任取一點放置障礙物，其阻擋數可能超過總捷徑數的一半(因翻轉對稱性，只需討論 i 之情形即可推知所有情況).

因為只有 $i=0,i=1$ 和 $i=2$ 且 $m=4$ 三種特殊情況使得不等式

$\frac{i}{i+1}\cdot\frac{m-i}{m-i+1}\ge\frac{1}{2}$ 不成立，故可獨立討論之.

當 $i=0$ 的情況，

$$P(0,1)=1\times C_m^{m+n-1},\ P(0,j)=1\times C_m^{m+n-j}(2\le j\le n)$$
$$C_m^{m+n-1}:C_m^{m+n-j}=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}:\frac{(m+n-j)!}{m!(n-j)!}=\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!}:\frac{(m+n-j)!}{(n-j)!}$$
$$=\prod_{k=1}^{q-1}\frac{(m+n-j+k)}{(n-j+k)}:1,\because\prod_{k=1}^{q-1}\frac{(m+n-j+k)}{(n-j+k)}>1,\therefore P(0,1)>P(0,j).$$

故 $i=0$ 時，一定是放置在 $(0,1)$ 的障礙物阻擋最多路徑.

當 $i=1$ 的情況，

$m>n$ 時，方程式 $i-\frac{m}{n}j=0$ 和 $i=1$ 的交點必在 $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 之間. 因在

$i-\frac{m}{n}j<0$ 且 $i=1$ 之範圍內，在 $(1,1)$ 有最大的阻擋數；而在 $i-\frac{m}{n}j>0$ 且 $i=1$

之範圍內，在$(1,0)$有最大的阻擋數，我們只需比較此兩點的阻擋數大小即可.

$$P(1,0):P(1,1)=C_{m-1}^{m+n-1}:2C_{m-1}^{m+n-2}=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}:\frac{2\times(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}=\frac{m+n-1}{n}:2$$

$\therefore m-1>n$ 時，$P(1,0)>P(1,1).$；$m-1=n$.時，$P(1,0)=P(1,1).$

$m=n.$時，$(1,1)\in i-\frac{m}{n}j=0.$，$\therefore P(1,1).$為$i=1$上的最大值

當$i=2.$且$m=4.$的情況，

在$i=2.$且$m=4.$的情況我們欲直接計數證明路徑數小於一半，可列式

$$2C_2^{j+2}\times C_2^{n-j+2}<C_4^{n+4}\Leftrightarrow 2\times\frac{(j+2)!}{2!j!}\times\frac{(n-j+2)!}{2!(n-j)!}<\frac{(n+4)!}{4!n!}$$

$$\Leftrightarrow (j+1)(j+2)(n-j+1)(n-j+2)<\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

當 $j=\frac{n}{2}.$ 時，左式發生最大值$(\frac{n}{2}+1)^2(\frac{n}{2}+2)^2$，只需證明以下不等式成立.

性質：$(\frac{n}{2}+1)^2(\frac{n}{2}+2)^2<\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$，對所有$n\geq 5.$

證明：當$n\geq 5$時,

$$\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-(\frac{n}{2}+1)^2(\frac{n}{2}+2)^2=\frac{1}{48}(n+2)(n+4)(n^2-2n-12)$$

$>\frac{1}{48}((n-1)^2-13)\geq\frac{3}{48}>0$. 故原不等式成立，對所有$n\geq 5.$

因此我們令$n=2,3,4.$，一一計算並討論此時

的阻擋數$P(i,j)$變化情形.

$m=4,n=2.$

$j=2$	1	6	6	10	終點
$j=1$	5	8	9	8	5
$j=0$	起點	10	6	6	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

$m=4,n=3$

$j=3$	1	4	10	20	終點
$j=2$	5	12	18	20	15
$j=1$	15	20	18	12	5
$j=0$	起點	20	10	4	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

$m=4,n=4$

$j=4$	1	5	15	35	終點
$j=3$	5	16	30	40	35
$j=2$	15	30	36	30	15
$j=1$	35	40	30	16	5
$j=0$	起點	35	15	5	1
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

綜合以上各點，我們得證了性質五：

性質五：障礙數$k=1$時擺放位置與阻擋數最大值關係

在$m\times n$方格陣列中，障礙數$k=1$時，其擺放位置與阻擋數最大值會滿足以下情形：

1. $m>n$且$m-1>n$時，阻擋數的最大值發生在$(1,0)$.
2. $m>n.$且$m-1=n.$時，阻擋數的最大值發生在$(1,0)$和$(1,1).$
3. $m=n.$時，阻擋數的最大值發生在$(1,1).$
4. $n>m.$且$n-1>m.$時，阻擋數的最大值發生在$(0,1).$
5. $n>m.$且$n-1=m.$時，阻擋數的最大值發生在$(0,1).$和$(1,1).$

（二）方格陣列$m\times n$中k個障礙物的探究過程：

條件限制：$m\geq 2$且$n\geq 2$才使得討論此問題有意義.

與1個障礙物的探究過程相同，我們先研究總阻擋數再換算成總捷徑數。可將全部的捷徑走法數形成的集合視為宇集U，各個障礙物各自的阻擋數形成的集合為子集$U_1,U_2,U_3\cdots U_k$，則總阻擋數P_s即為每個子集的聯集的總元素數量$n(U_1\cup U_2\cup U_3\cup\cdots U_k)$.

1. 方格陣列$m\times n$中2個障礙物的探究過程

我們假設一個障礙物k_1座標(i_1,j_1)，另一個障礙物命名為k_2座標(i_2,j_2).

當一個障礙物擺在$(1,0)$時，由起點出發下一步只能走到$(0,1)$.

故接下來的走法可視為：新方格陣列$m\times(n-1)$中1個障礙物的走法

且新起點在$(0,1)$.根據**性質一**可知：阻擋數最大值發生在$(1,1)$和$(m-1,n).$

故在$(i_1,j_1)=(1,0)$時，阻擋數最大值發生在$(i_2,j_2)=(1,1)$和$(m-1,n).$在以下論證過程只特別討論障礙物擺在$(1,1)$的狀況，

即同時代表障礙物擺在$(m-1,n)$的狀況.

情況一：當$i_1<i_2$且$j_1>j_2$ 或 $i_1>i_2$且$j_1<j_2$ 兩種情況討論：

此時通過k_1的所有捷徑不通過k_2且通過k_2的所有捷徑不通過k_1，亦即此兩子集沒有交集. 故

$P_s=n(U_1)+n(U_2).$

已知$P(1,0)>P(i_1,j_1)$，又因為一個障礙物擺在$(1,0)$時，只要$k_2(i_2,j_2)$其中$j_2\geq 1$，

$P(1,1)>P(i_2,j_2)$. 若$j_2=0$，則$P((1,0),(a,0))=P(1,0)$，其中$2\leq a\leq m$.

故$i_1<i_2$且$j_1>j_2$ 或 $i_1>i_2$且$j_1<j_2$ 其中之一成立時，

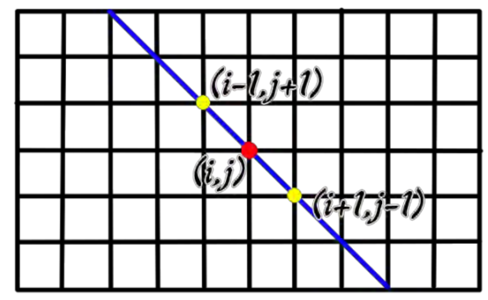
$$P((1,0),(1,1))=P((1,0),(m-1,n))\geq P((i_1,j_1),(i_2,j_2)).$$

情況二：若$i_1\geq i_2$且$j_1\geq j_2$：

此時通過k_1的捷徑可能通過k_2或通過k_2的捷徑可能通過k_1，兩子集會出現交集. 故

$P_s=n(U_1)+n(U_2)-n(U_1\cap U_2).$由於我們在之前捷徑數最小值的研究過程中，已證明出在陣列中任取一條$i+j=s,2\leq s\leq m+n-1$的方程式圖形，於其上放置一障礙物必不阻擋超過原捷徑總數之$\frac{1}{2}$，

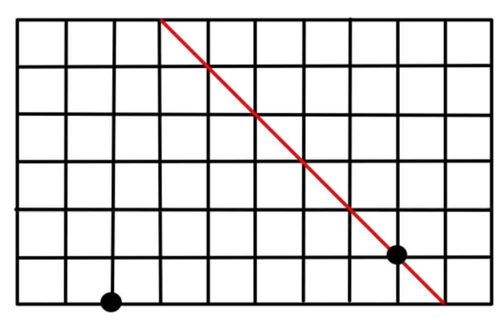
如下圖.



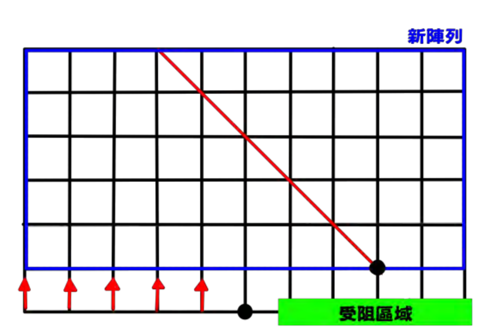
（圖 2 方程式的圖形）

再者，在一個規則矩形陣列中，捷徑數的走向是呈現均勻分布的，即在某點放置障礙物後，排去經過此障礙的捷徑數，剩餘的捷徑將依均勻分配性重新分配至各路線.

下方未被阻擋時，因為陣列捷徑的均勻分布性，$i+j=s,3\leq s\leq m+n-2$上的障礙物依然阻擋了不超過$\frac{1}{2}$的總通過捷徑數，基於此規則，我們可以推得兩次障礙物共阻擋了不超過$1-(1\cdot\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$的總捷徑數.

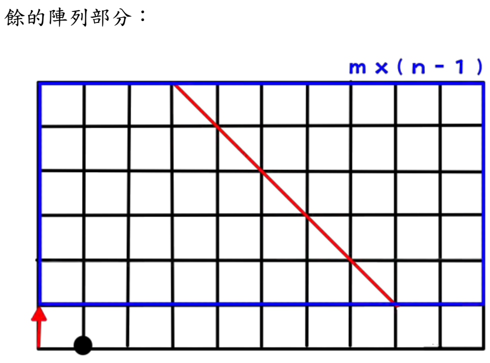

（圖 3）

當下方被完全阻擋時，我們可以把阻擋物上方的部分視為一個新的陣列，由於其來自陣列下方的額外捷徑數又均勻分配至此陣列中，故障礙物阻擋的數目範圍依然與前者相同，即不超過$\frac{3}{4}$的總捷徑數.



（圖 4）

欲使陣列中阻擋數超過總數的$\frac{3}{4}$，可以參考$k=1$時的研究結果，$m\neq n$時，將第一個障礙物直接置於$(1,0)$（$m>n$時）或$(0,1)$（$n>m$時），接著觀察剩餘的陣列部分：

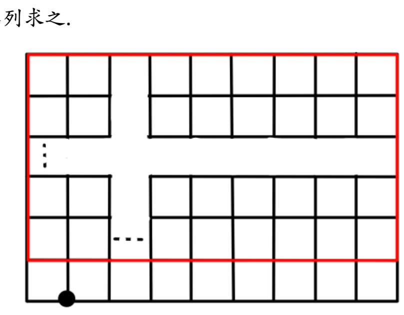


（圖 5 $m>n$時的情形）

由圖中可知，在$(1,0)$（$m>n$時）或$(0,1)$（$n>m$時）放置障礙物，從出發走過$(0,0)$後，會發現之後的陣列完全形如一個$m\times(n-1)$（$m>n$時）或$(m-1)\times n$（$n>m$時）的陣列，其分別有多種不同情形.

2. 方格陣列$m\times n$中3個障礙物以上的探究過程

以此類推，當我們欲求解3或ω個障礙物的情形時($4\leq\omega\leq G$)，只需將第一個障礙物放於$(1,0)$（$m>n$時）或$(0,1)$（$n>m$時），之後直接採用ω-1的陣列求之.


（圖 6）

以下是求解k個障礙物$2\leq k\leq G$的情形時，各情況的通用解法，除特例之外，我們將以上結果歸納為性質七.

性質七：障礙數 $k=2\sim G$ 時擺放位置與阻擋數最大值關係

當障礙物有 k 個（$2\le k\le G$）時，

若 $m\ge n$，我們依序將其擺入 $(1,0)$、$(1,1)$、……、$(1,k-2)$ 後，最後一個障礙物擺在 $(1,k-1)$ 或 $(m-1,n)$ 時，阻擋數有最大值.

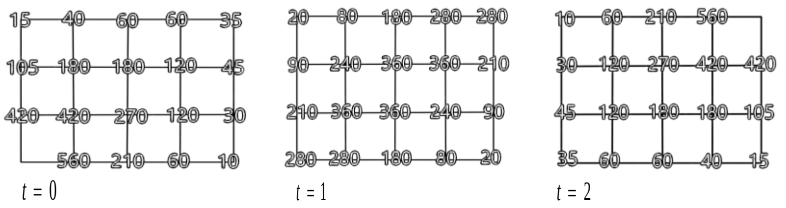
若 $m\le n$，我們依序將其擺入 $(0,1)$、$(1,1)$、……、$(k-2,1)$ 後，最後一個障礙物擺在 $(k-1,1)$ 或 $(m,n-1)$ 時，阻擋數有最大值.

其中 $k=2$ 時，若 $m=n$，不僅適用上述兩種狀況，當障礙物分別擺在 $(1,0)$、$(1,2)$ 或 $(m-1,n-2)$、$(m-1,n)$ 時，亦有阻擋數最大值.

這些最大值中包含因完全阻擋區而造成的特例存在.

（三）方體陣列 $m\times n\times l$ 中 1 個障礙物的探究過程

首先對 $m\times n\times l$=$4\times3\times2$. 的方體陣列進行運算.



性質八：方體陣列 $m\times n\times l$ 中阻擋數之點對稱性

首先我們透過對少數幾個陣列的觀察，進而發現此種**點對稱**的情形. 根據上述公式，我們得到：

$$P(i,j,t)=\frac{(i+j+t)!}{i!\,j!\,t!}\cdot\frac{(m-i+n-j+l-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}$$
$$=\frac{(m-i+n-j+l-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}\cdot\frac{(i+j+t)!}{i!\,j!\,t!}=P(m-i,n-j,l-t).$$

經過方形陣列 $m\times n.$ 中 1 個障礙物的探究，我們推測 $P(i,j,t).$ 的最大值會發生在起終點附近，並且與 $m,n,l.$ 的大小有關.

比較之間的大小：

$$P(1,0,0):P(0,1,0):P(0,0,1)=\frac{(m+n+l-1)!}{(m-1)!n!l!}:\frac{(m+n+l-1)!}{m!(n-1)!l!}:\frac{(m+n+l-1)!}{m!n!(l-1)!}=m:n:l.$$

接下來探討的是這三點是否為整個陣列阻擋數的最大值.

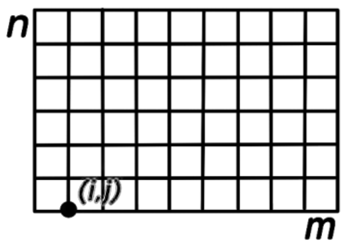
捷徑數 S 的最小值討論:

對於在任意圖形中任意位置擺放障礙之捷徑數，可以有以下表示方法：

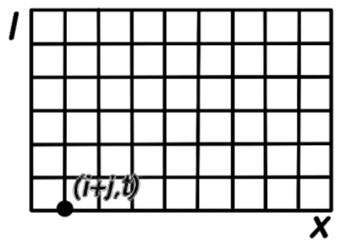
$$\frac{(i+j+t)!}{i!\,j!\,t!}\times\frac{(m+n+l-i-j-t)!}{(m-i)!(n-j)!(l-t)!}$$
$$=\frac{P_t^{i+j+t}}{t!}\times C_i^{i+j}\times\frac{P_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}}{(l-t)!}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$$
$$=C_t^{i+j+t}\times C_i^{i+j}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$$
$$=(C_t^{i+j+t}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t})\times(C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j})$$

事實上，在一立體空間，我們可以將其受一障礙物阻擋後所剩的捷徑數表示成**兩個受阻平面的阻擋數乘積**。我們由已知的平面阻擋性質得知，若不考慮 m,n,l 之值之相對大小，於式 $C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$ 中產生最小值的前提必定有 $(i,j)=(1,0)$ 或 $(0,1)$.

我們姑且在前式 $C_t^{i+j+t}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}$ 中，令 $i+j=x$，形成 $C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$，則其亦表示了另一個平面中受阻後的剩餘捷徑情形；我們直接將上述二者繪製如圖.



（圖 7）



（圖 8）

此二圖中顯示了若欲在 $C_i^{i+j}\times C_{m-i}^{m+n-i-j}$ 產生最小值的同時，使 $C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$ 也產生最小值，我們可以分為以下狀況討論：

（我們先以 $m>n$ 為前提，其他可用翻轉後對稱性質得證）

情況一: 若 $m+n\ge l$ 時，

在此條件下，第二張方格陣列上，欲使捷徑數最少，應該將其置於 $(x,t)=(1,0)$ 之位置上（不討論對稱點的原因：我們希望在方體陣列上先找到一個「極值點」，其後再依三維性質找對稱.）

此時 $x=i+j=1$，又 $m>n$，故 $C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$ 圖形中障礙物位於 $(i,j)=(1,0)$ 時能符合上式並產生捷徑數最小值.

故若在方體陣列 (m,n,l) 中，$m>n$ 且 $m+n\ge l$，則捷徑數最小值會發生在 $(i,j,t)=(1,0,0)$ 及其對稱點 $(i,j,t)=(m-1,n,l)$.

情況二: 若 $m+n\le l$ 時，

由於方體陣列和平面陣列一樣有可翻轉性質，假如我們對原式進行簡單的變數置換，即改變 $C_t^{i+j+t}\times C_{l-t}^{m+l+n-i-j-t}\times C_t^{x+t}\times C_{l-t}^{n+m+l-x-t}$ 式中變數 m,n,l 的位置，可以得到在方體陣列 (m,n,l) 中，$m>n$ 且 $m+n\le l$ 時，捷徑數最小值亦會發生在 $(i,j,t)=(1,0,0)$ 及其對稱點 $(i,j,t)=(m-1,n,l)$.

$m<n$ 的情形，則依翻轉後對稱性質推廣可得.

情況三: 上述討論僅遺漏了一種情況，考慮 $m=n=l$ 時的情形：

$$P(1,0,0)=P(0,1,0)=P(0,0,1)=\frac{(3m-1)!}{m!m!(m-1)!}，P(1,1,1)=6\cdot\frac{(3m-3)!}{(m-1)!(m-1)!(m-1)!}$$

$$\frac{(3m-1)!}{m!m!(m-1)!}:6\cdot\frac{(3m-3)!}{(m-1)!(m-1)!(m-1)!}$$
$$=\frac{(3m-1)(3m-2)}{m^2}:6=(9m^2-9m+2):6m^2$$

若 $P(1,0,0)=P(0,1,0)=P(0,0,1)>P(1,1,1)$，前者減後者大於零：

$$(9m^2-9m+2)-6m^2>0$$

$$3m^2-9m+2>0\Leftrightarrow m>\frac{9+\sqrt{57}}{6}\approx2.75 \text{ 或 } m<\frac{9-\sqrt{57}}{6}\approx0.24$$

取 m 的正整數解為 $m\ge3$.

(1) $m=1$ 時，因為 $(1,1,1)$ 為終點，故 $P(1,1,1)$ 無意義.

(2) $m=2$ 時，$P(1,1,1)=36$，$P(1,0,0)=30$，所以 $P(1,1,1)>P(1,0,0)$.

討論捷徑數 S 的最大值:

將障礙物擺放於除了起點和中點以外的頂點，其阻擋的路徑走法即為通過一平面，因此阻擋數的最小值發生在其中之一。為了確定阻擋數的最小值發生在哪一點，首先證明下列性質：

性質：已知 $a>b>c$，$a,b,c\in\mathbb{N}$，欲證 $C_a^{a+b}>C_b^{b+c}$.

證明：

$$\frac{(a+b)!}{a!b!}:\frac{(b+c)!}{b!c!}=(a+b)!c!:(b+c)!a!$$
$$=(a+1)(a+2)(a+3)...(a+c)...(a+b):(b+1)(b+2)(b+3)...(b+c)$$

$\because a>b>c$

$\therefore (a+1)(a+2)(a+3)...(a+c)>(b+1)(b+2)(b+3)...(b+c)$

$\because (a+c+1)(a+c+2)...(a+b)>1$

$\therefore (a+1)(a+2)(a+3)...(a+c)...(a+b)>(b+1)(b+2)(b+3)...(b+c)$

$\therefore \frac{(a+b)!}{a!b!}>\frac{(b+c)!}{b!c!}$，故得證.

由上討論得出下列結果:

若 $\max\{m,n,l\}=m$，則 $P(i,j,t)$ 最小值發生在 $(m,0,0)$.

若 $\max\{m,n,l\}=n$，則 $P(i,j,t)$ 最小值發生在 $(0,n,0)$.

若 $\max\{m,n,l\}=l$，則 $P(i,j,t)$ 最小值發生在 $(0,0,l)$.

（四）關於 n 維陣列中，捷徑數的最小值討論

假設 n 維之陣列，邊長分別是 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$，其中 $m_1>m_2>m_3>\cdots\cdots>m_n$

任一點座標為 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)$，此點之阻擋數為

$$\frac{(i_1+i_2+i_3+\cdots\cdots+i_n)!}{i_1!i_2!i_3!\cdots\cdots i_n!}\times\frac{(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n-i_1-i_2-i_3-\cdots\cdots-i_n)!}{(m_1-i_1)!(m_2-i_2)!(m_3-i_3)!\cdots\cdots(m_n-i_n)!}.$$

我們可將此式改寫為

$$C_{i_n}^{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_n}C_{m_n-i_n}^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n-i_1-i_2-\cdots\cdots-i_n}C_{i_{n-1}}^{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_{n-1}}C_{m_{n-1}-i_{n-1}}^{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_{n-1}-i_1-i_2-\cdots\cdots-i_{n-1}}\cdots\cdots C_{i_2}^{i_1+i_2}C_{m_2-i_2}^{m_1+m_2-i_1-i_2}$$

，將其視為 $n-1$ 個平面，其中第 k 個平面橫軸長為 $\sum_{p=1}^{n-k}m_p$ 縱軸長為 m_{n+1-k} 的平面上，**障礙物置於同一座標之阻擋數相乘的結果**.

證明：

利用數學歸納法

當 $n=2$ 時，原式成立.

假設 $n=k$ 時原式成立，即

$$\frac{(i_1+i_2+i_3+\cdots\cdots+i_n)!}{i_1!i_2!i_3!\cdots\cdots i_n!}\times\frac{(m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n-i_1-i_2-i_3-\cdots\cdots-i_n)!}{(m_1-i_1)!(m_2-i_2)!(m_3-i_3)!\cdots\cdots(m_n-i_n)!}=\prod_{k=1}^{n-1}C_{i_{k+1}}^{\sum_{p=1}^{k+1}i_p}C_{(m_{k+1}-i_{k+1})}^{\sum_{p=1}^{k+1}(m_p-i_p)}$$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\text{左式}=\frac{P_{i_{k+1}}^{i_1+i_2+\cdots i_{k+1}}}{i_{k+1}!}\times\frac{P_{m_{k+1}-i_{k+1}}^{m_1+m_2+\cdots m_{k+1}-(i_1+i_2+\cdots i_{k+1})}}{(m_{k+1}-i_{k+1})!}\times\prod_{k=1}^{n-1}C_{i_{k+1}}^{\sum_{p=1}^{k+1}i_p}C_{(m_{k+1}-i_{k+1})}^{\sum_{p=1}^{k+1}(m_p-i_p)}$$
$$=C_{i_{k+1}}^{i_1+i_2+\cdots i_{k+1}}\times C_{m_{k+1}-i_{k+1}}^{m_1+m_2+\cdots m_{k+1}-(i_1+i_2+\cdots i_{k+1})}\times\prod_{k=1}^{n-1}C_{i_{k+1}}^{\sum_{p=1}^{k+1}i_p}C_{(m_{k+1}-i_{k+1})}^{\sum_{p=1}^{k+1}(m_p-i_p)}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}C_{i_{k+1}}^{\sum_{p=1}^{k+1}i_p}C_{(m_{k+1}-i_{k+1})}^{\sum_{p=1}^{k+1}(m_p-i_p)}=\text{右式}$$

故若 $n=k$ 時原式成立，則 $n=k+1$ 時原式也成立.

由數學歸納法知，對 $\forall n\ge2$，原式均成立 故得證.

因為在每個平面中，阻擋數最大值都發生在 $(1,0)$，故相乘的積的最大值可為 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0)$，即 $(1,0)$ 符合每個平面中最大值的出現位置，此時則成為一連串的阻擋數最大值相乘.

所以阻擋數的最大值，亦即捷徑數的最小值，發生在 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0).$

性質十：高維度陣列 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$ 中阻擋數之最大值發生位置

在一高維度陣列，其邊長為 $m_1,m_2,m_3,\cdots\cdots,m_n$ 中，已知 $m_1>m_2>m_3>\cdots\cdots>m_n$，捷徑數最小值會發生在障礙物置於 $(i_1,i_2,i_3,\cdots\cdots,i_n)=(1,0,0,\cdots\cdots,0)$ 時.

（五）關於 n 維陣列中，捷徑數的最大值推論

任意 n.維陣列中，其捷徑數最大值可由 $n-1$ 維之情形推得，因為 n.維陣列中之捷徑數最大值乃是 $n-1$ 維中各個陣列發生最大值之位置互相比較大小，而取其中最大者。

基於先前對於 $m\times n$ 及 $m\times n\times l$ 陣列中捷徑數最大值的研究，已知 $m_1>m_2>m_3>\cdots\cdots>m_n$，我們可將 n 維陣列中捷徑數最大值表示為 $(m_1,0,0,\cdots\cdots,0).$

伍、未來展望

1. 在 $m\times n$ 的方格陣列中，我們可研究單一鉛直線或水平線上，阻擋數對稱性與阻擋數數值大小分佈趨勢的關係。希望之後可以在 $m\times n\times l$ 的方體陣列中，探討單一直線或單一平面上的阻擋數數值大小的分佈趨勢.
2. 在本篇報告中，尚未探討在 n 維陣列中 $(n\ge3)$，放置 k 個 $(k\ge2)$ 障礙物時，捷徑數極值發生的可能的座標.

陸、參考文獻

1. 第 55 屆全國科展高中組數學科作品 <<超越障礙的勝利之路>>
2. 普通數學第二冊　翰林出版社