中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050401

接好接滿—內接正多邊形之特徵與面積

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 王昕宸 高二 徐郁涵 高二 陳致融	蔡其南

關鍵詞：正多邊形、鋪磁磚問題

摘　　要

本研究主要針對大正 m 邊形內嵌小正 n 邊形的內部圖形做探討，初步想法：**因為對稱，所以中間交集的圖形大概也是正 m 邊形，或沒有交集！但事實似乎不是我們所想的那麼簡單**。首先在 *Geogebra* 繪製了許多圖形後，發現 n 的**奇偶性**會使圖形內部的重疊區塊有不同的特徵及規律，並進一步依照 $m>2n$、$m=2n$、$m<2n$ 分細項探討。接著，本研究使用數學法則證明了此規律的一般性質。特別值得一提的圖形有二：

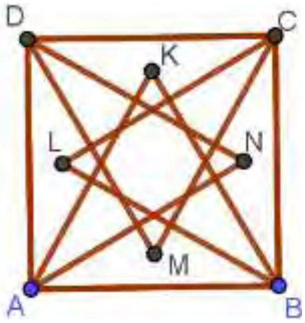
① m, n 皆為奇數且 $m<2n$ 的圖形會交集出**邊長相等的非正 $2m$ 邊形**，此 **$2m$ 邊形**既非正多邊形，頂點亦不共圓！

② m 為奇數且 n 為偶數且 $m<2n$ 的的圖形會交集出正 m 邊形，**唯獨 $(m, n)=(7, 4)$ 是例外的，它會出現沒有交集的結果**。

最後，我們以鋪磁磚問題落實面積通式之應用。

壹、研究動機

翻閱高中數學競賽教程一書的時候，發現了一道關於正方形四邊分別內嵌一個正三角形的題目：「(*IMO*.19.1)在已知正方形 *ABCD* 內，作等邊三角形 *ABK*、*CDM*、…………」。



我們做了延伸的思考：大正 m 邊形內嵌小正 n 邊形會是什麼樣的圖形呢？猜想一下：**因為對稱，所以中間交集的圖形大概也是正 m 邊形，或沒有交集！但事實似乎不是我們所想的那麼簡單**。我們使用 *GeoGebra* 繪製許多圖形，發現有的沒有交集、有的交集出正 m 邊形、有的卻會交集出**邊長相等的非正 $2m$ 邊形**，此 **$2m$ 邊形**既非正多邊形，頂點亦不共圓！(參閱第 11 頁和第 17 頁)

特別值得一提的是：仔細研究的規律當中，m 為奇數且 n 為偶數且 $m<2n$ 的情形下，中間交集出正 m 邊形，**唯獨 $(m, n)=(7, 4)$ 是例外的，它會出現沒有交集的結果**(參閱第 8 頁)，想去證明此規律也是最難思考的一個項目，終於在煞費苦心、挖空心思之後，解決了這個問題！

貳、研究目的

一、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為交集區域或空心區域。

二、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為一點、正 m 角星形、正 m 邊形或非正 $2m$ 邊形。

三、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$之面積。

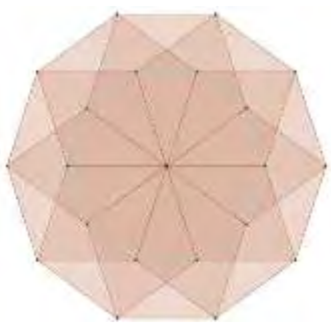
四、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討鋪磁磚問題。

參、研究設備及器材

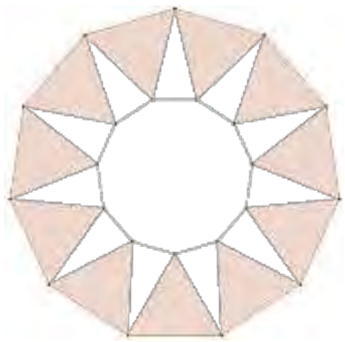
一、紙、筆、電腦、*geogebra*

肆、研究過程及方法

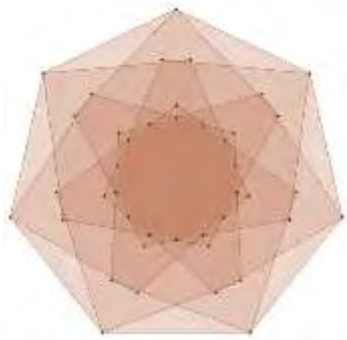
大正 m 邊形內嵌小正 n 邊形會是什麼樣的圖形呢？原本以為因為對稱，所以中間交集的圖形大概也是正 m 邊形，或沒有交集！但事實似乎不是我們所想的那麼簡單。我們運用 *GeoGebra* 繪製許多圖形，發現圖形的特徵有跡可循。圖形列舉如下：



$S(10, 5)$

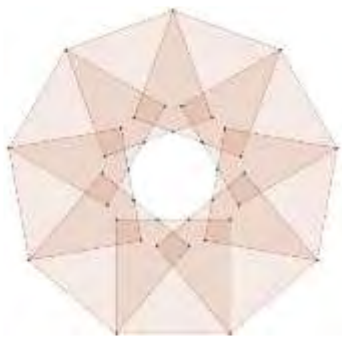


$S(11, 3)$

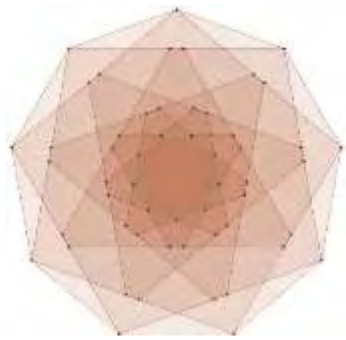


$S(7, 5)$

$S(12, 6)$



$S(9, 4)$



$S(9, 6)$

令人訝異的是根據 n 邊形奇偶數的不同，交集出圖形皆不相同(或不交集)，甚至會交集出非正多邊形、不共圓的 **$2m$ 邊形**。對於本文研究，我們先定義幾個符號，再分類探討。

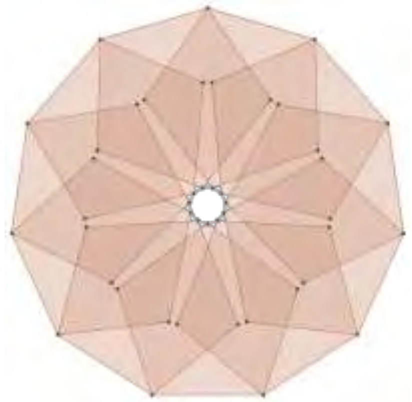
小正 n 邊形：含內部區域的正 n 邊形。

$S(m, n)$：邊長為 2 的**大正 m 邊形**每邊內接**小正 n 邊形**的情形下，

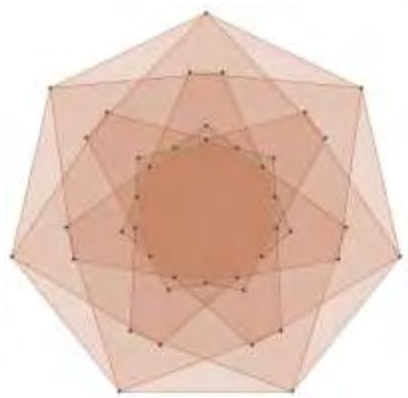
$$\begin{cases}\text{若沒有交集，則 } S(m, n) \text{ 為空心區域之圖形} \\ \text{若 有 交 集 ，則 } S(m, n) \text{ 為交集區域之圖形}\end{cases}\text{。}$$

如圖：

$S(11, 5)$為空心區域



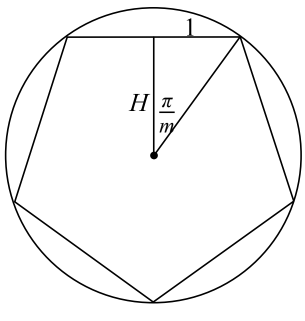
$S(7, 5)$為交集區域



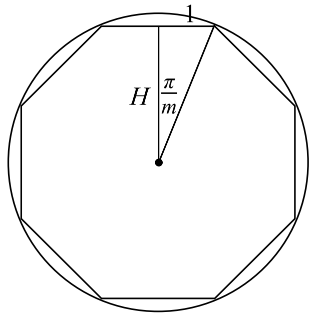
H：外心至大正 m 邊形之一邊的距離。而無論 m 為奇數或偶數，皆有 $\boldsymbol{H=\cot\frac{\pi}{m}}$。

如圖：

m 為奇數

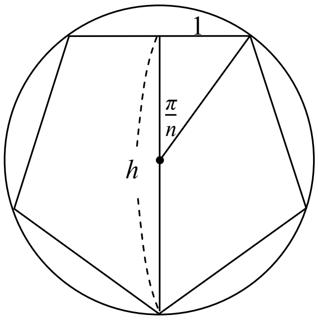


m 為偶數



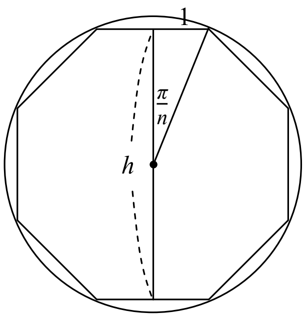
$\boldsymbol{h}$：正 n 邊形之對稱軸，h 值分以下兩類。

① n 為**奇數**時：$\boldsymbol{h=\cot\frac{\pi}{2n}}$



證明：$h=\cot\frac{\pi}{n}+\csc\frac{\pi}{n}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}}}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}=\cot\frac{\pi}{2n}$

② n 為**偶數**時：$\boldsymbol{h=2\cot\frac{\pi}{n}}$



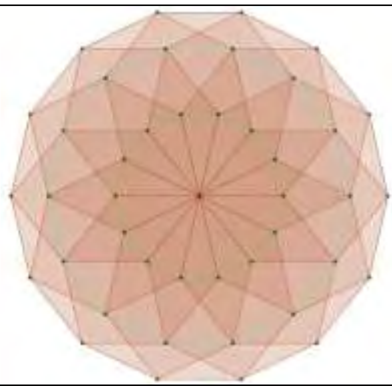
證明：$h=\cot\frac{\pi}{n}+\cot\frac{\pi}{n}=2\cot\frac{\pi}{n}$

考慮 H 與 h 之大小關係，易知 $\begin{cases}\text{若}H\le h\text{，則 }S(m,n)\text{ 為交集區域之圖形}\\ \text{若}H>h\text{，則 }S(m,n)\text{ 為空心區域之圖形}\end{cases}$。

遂先以 H 與 h 之大小關係，驗證此 6 種情形下 $S(m, n)$之圖形：

一、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為交集區域或空心區域

(一)當 n 為奇數且 $m=2n$ 時：

		
$S(6, 3)$	$S(10, 5)$	$S(14, 7)$

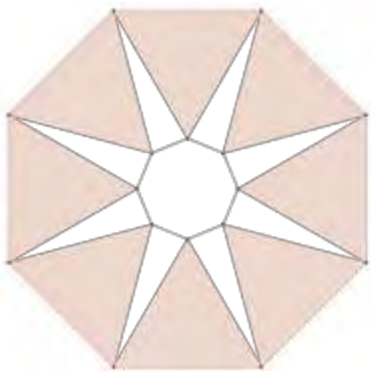
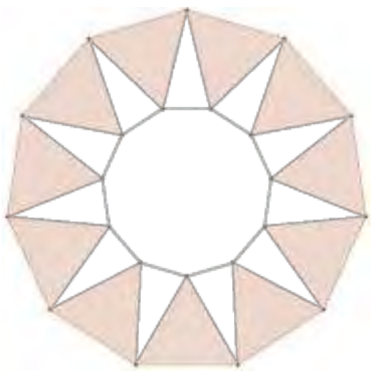
經由觀察，得知 **$S(m, n)$為交集區域之圖形**。

證明 考慮 H 和 h 之大小關係

$\because H=\cot\frac{\pi}{m}$，$h=\cot\frac{\pi}{2n}$ 且 $m=2n$

$\therefore H=\cot\frac{\pi}{m}=\cot\frac{\pi}{2n}=h \Rightarrow \boldsymbol{H=h} \Rightarrow \boldsymbol{S(m, n)}$為交集區域之圖形。

(二)當 n 為奇數且 $m>2n$ 時：

		
$S(8, 3)$	$S(11, 3)$	$S(11, 5)$

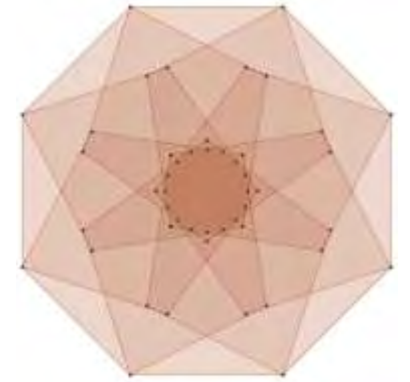
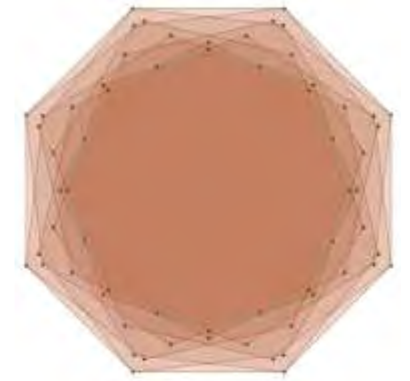
經由觀察，得知 **$S(m, n)$為空心區域之圖形**。

$\boxed{\textbf{證明}}$　考慮 H 和 h 之大小關係

$\because H=\cot\frac{\pi}{m}$，$h=\cot\frac{\pi}{2n}$ 且 $m>2n$

$\therefore H=\cot\frac{\pi}{m}>\cot\frac{\pi}{2n}=h \Rightarrow \boldsymbol{H>h} \Rightarrow \boldsymbol{S(m, n)}$**為空心區域之圖形**。

(三)當 n 為奇數且 $m<2n$ 時：

		
S(7, 5)	**S(8, 5)**	**S(8, 7)**

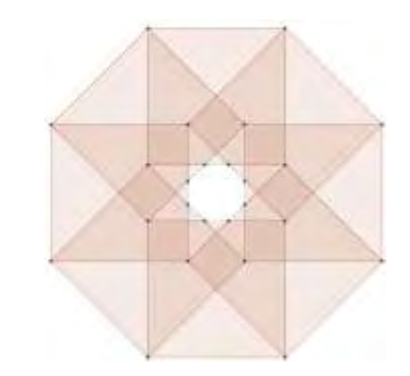
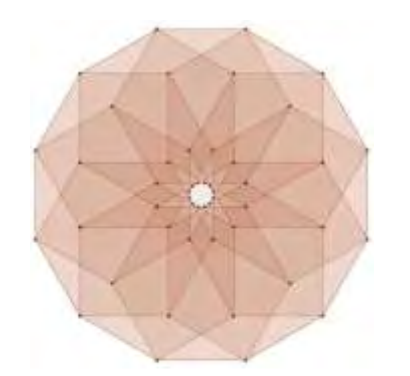
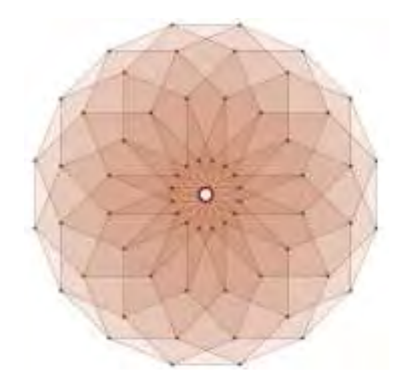
經由觀察，得知 **$S(m, n)$為交集區域之圖形**。

$\boxed{\textbf{證明}}$　考慮 H 和 h 之大小關係

$\because H=\cot\frac{\pi}{m}$，$h=\cot\frac{\pi}{2n}$ 且 $m<2n$

$\therefore H=\cot\frac{\pi}{m}<\cot\frac{\pi}{2n}=h \Rightarrow \boldsymbol{H<h} \Rightarrow \boldsymbol{S(m, n)}$**為交集區域之圖形**。

(四)當 n 為偶數且 $m=2n$ 時：

		
S(8, 4)	**S(12, 6)**	**S(16, 8)**

經由觀察，得知 **$S(m, n)$為空心區域之圖形**。

***Lemma* 1**：$\cot\frac{\pi}{2n} > 2\cot\frac{\pi}{n}$,$n\geq 3$

(1) 令 $x=\tan\frac{\pi}{2n}$，則 $\tan\frac{\pi}{n}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{2n}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2n}}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

(2) $\because n\geq 3$　$\therefore x=\tan\frac{\pi}{2n}\leq\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow 0\leq x^2\leq\frac{1}{3}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{n}-2\tan\frac{\pi}{2n}=\frac{2x}{1-x^2}-2x=\frac{2x^3}{1-x^2}>0$

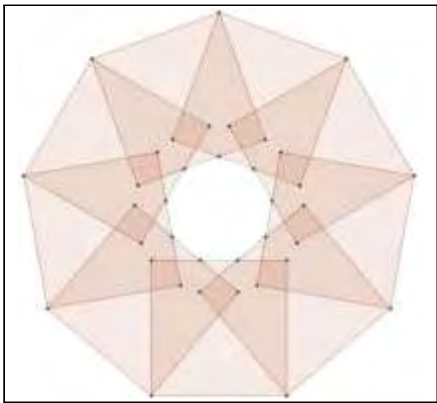
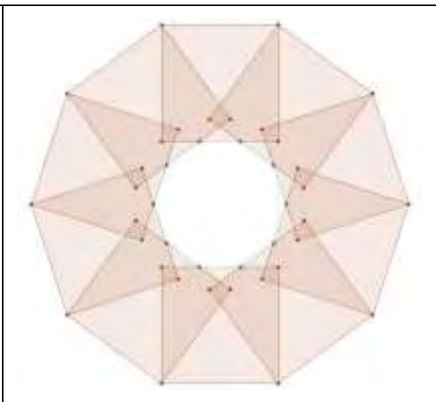
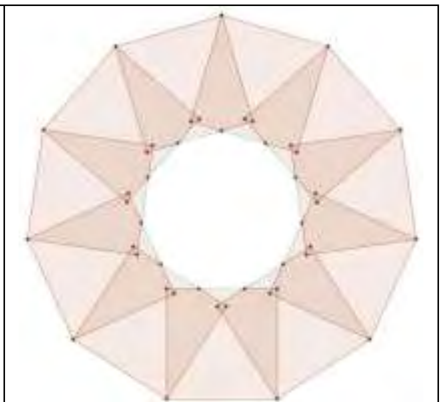
$\Rightarrow\tan\frac{\pi}{n}>2\tan\frac{\pi}{2n}$　$\Rightarrow\boldsymbol{\cot\frac{\pi}{2n}>2\cot\frac{\pi}{n}}$，證畢。

證明　考慮 H 和 h 之大小關係

$\because H=\cot\frac{\pi}{m}$，$h=2\cot\frac{\pi}{\text{n}}$ 且 $m=2n$

$\therefore H=\cot\frac{\pi}{m}=\cot\frac{\pi}{2n}\overset{Lemma\ 1}{>}2\cot\frac{\pi}{n}=h$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{H>h}$ $\Rightarrow$ **$S(m, n)$為空心區域之圖形**。

(五)當 n 為偶數且 $m>2n$ 時：

		
***S*(9, 4)**	***S*(10, 4)**	***S*(11, 4)**

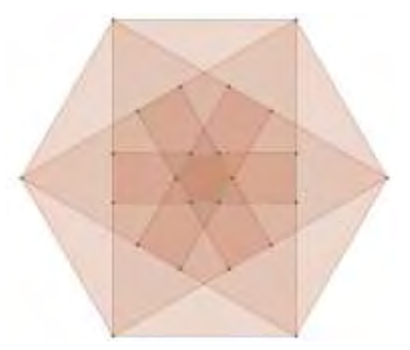
經由觀察，得知 **$S(m, n)$為空心區域之圖形**。

證明　考慮 H 和 h 之大小關係

$\because H=\cot\frac{\pi}{m}$，$h=2\cot\frac{\pi}{\text{n}}$ 且 $m>2n$

$\therefore H=\cot\frac{\pi}{m}>\cot\frac{\pi}{2n}\overset{Lemma\ 1}{>}2\cot\frac{\pi}{n}=h$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{H>h}$ $\Rightarrow$ **$S(m, n)$為空心區域之圖形**。

(六)當 n 為偶數且 $m<2n$ 時：

		
***S*(6, 4)**	***S*(7, 4)**	***S*(9, 6)**

經由觀察，得知唯獨$(m, n)=(7, 4)$時，**$S(m, n)$為空心區域之圖形**；

其餘狀況皆有 **$S(m, n)$為交集區域之圖形**。

***Lemma* 2**：若 $m, n\in N$，$\frac{m}{2}<n<m$ 且 $m\geq 11$ 且 m 為奇數、n 為偶數，則 $2\cot\frac{\pi}{n}>\cot\frac{\pi}{m}$

Note：$\because n>\frac{m}{2}\Rightarrow n\geq\frac{m+1}{2}$　$\therefore 2\cot\frac{\pi}{n}\geq 2\cot\frac{2\pi}{m+1}$　$\therefore$求證：$2\cot\frac{2\pi}{m+1}>\cot\frac{\pi}{m}$ 即可

(1) $(m+1)\tan\frac{\pi}{m+1}<m\tan\frac{\pi}{m}$

令函數 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$，其中 $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sec^2 x\cdot x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}>0\ (x>\sin x>\sin x\cos x)$

$\therefore f(x)=\frac{\tan x}{x}$ 為遞增函數 $\Rightarrow f(\frac{\pi}{m})>f(\frac{\pi}{m+1})\Rightarrow\frac{m}{\pi}\tan\frac{\pi}{m}>\frac{m+1}{\pi}\tan\frac{\pi}{m+1}\Rightarrow m\tan\frac{\pi}{m}>(m+1)\tan\frac{\pi}{m+1}$

$\Rightarrow(m+1)\tan\frac{\pi}{m+1}<m\tan\frac{\pi}{m}$

(2) $1-\tan^2\frac{\pi}{m+1}>\frac{m}{m+1}$

① $m=11$ 時，左式$=1-\tan^2\frac{\pi}{12}=1-(2-\sqrt{3})^2=4\sqrt{3}-6>\frac{11}{12}$，上式成立。

② 設 $m=k$ 時，$1-\tan^2\frac{\pi}{k+1}>\frac{k}{k+1}$ 成立。

　則 $m=k+1$ 時，

$$1-\tan^2\frac{\pi}{k+2}\overset{由(1)}{>}1-\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2\tan^2\frac{\pi}{k+1}>1+\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2\left(\frac{k}{k+1}-1\right)>1-\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$>1-\frac{k+1}{(k+2)^2}>\frac{k^2+3k+3}{(k+2)^2}=\frac{(k+2)(k+1)+1}{(k+2)^2}>\frac{k+1}{k+2}$$ 上式成立。

③ 由數學歸納法：$1-\tan^2\frac{\pi}{m+1}>\frac{m}{m+1}$ $(\forall m\geq 11)$恆成立。

(3) $$2\tan\frac{\pi}{m}-\tan\frac{2\pi}{m+1}=2\tan\frac{\pi}{m}-\frac{2\tan\frac{\pi}{m+1}}{1-\tan^2\frac{\pi}{m+1}}\overset{\text{由(2)}}{>}2(\tan\frac{\pi}{m}-\frac{(m+1)}{m}\tan\frac{\pi}{m+1})\overset{\text{由(1)}}{>}2\tan\frac{\pi}{m}-2\tan\frac{\pi}{m}=0$$

$$\Rightarrow 2\tan\frac{\pi}{m}>\tan\frac{2\pi}{m+1}\Rightarrow 2\cot\frac{2\pi}{m+1}>\cot\frac{\pi}{m}\Rightarrow 2\cot\frac{\pi}{n}\geq 2\cot\frac{2\pi}{m+1}>\cot\frac{\pi}{m}$$，得證。

證明 考慮 H 和 h 之大小關係

(1)對於 $m<11$ 的情形

逐一檢驗 $S(10, 6)$、$S(10, 8)$、$S(9, 6)$、$S(9, 8)$、$S(8, 6)$、$S(7, 4)$、$S(7, 6)$、$S(6, 4)$、$S(5, 4)$中，

是否 $2\cot\frac{\pi}{n}>\cot\frac{\pi}{m}$，如下表：

m	10	10	9	9	8	7	7	6	5
n	6	8	6	8	6	4	6	4	4
$2\cot\frac{\pi}{n}$	3.46	4.83	3.46	4.83	3.46	2	3.46	2	2
$\cot\frac{\pi}{m}$	3.08	3.08	2.75	2.75	2.41	2.08	2.08	1.73	1.38

唯獨 ***S*(7, 4)有 *H*>*h*，為空心區域之圖形**；其餘狀況之 ***S*(*m*, *n*)皆有 *H*<*h*，為交集區域之圖形**。

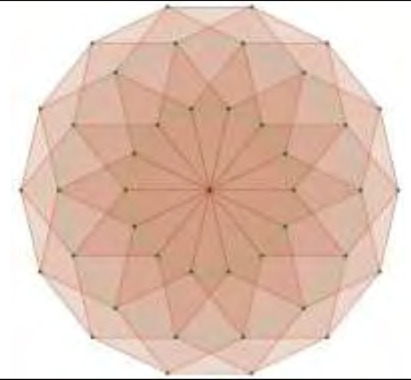
(2)對於 $m>11$ 的情形

$\because H=\cot\frac{\pi}{m}$，$h=2\cot\frac{\pi}{n}$ 且 $m<2n$

$\therefore H=\cot\frac{\pi}{m}\overset{\textit{Lemma 2}}{<}2\cot\frac{\pi}{n}=h \Rightarrow \boldsymbol{H<h} \Rightarrow$ ***S*(*m*, *n*)為交集區域之圖形**。

二、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為一點、正 m 角星形、正 m 邊形或非正 $2m$ 邊形

(一)當 n 為奇數且 $m=2n$ 時：

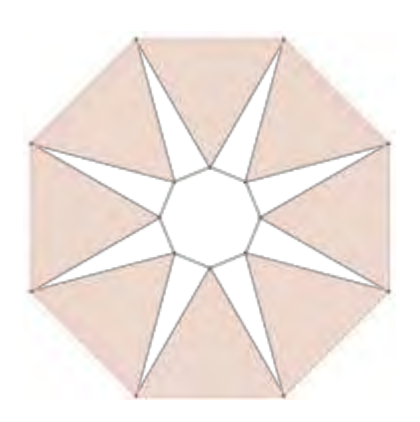
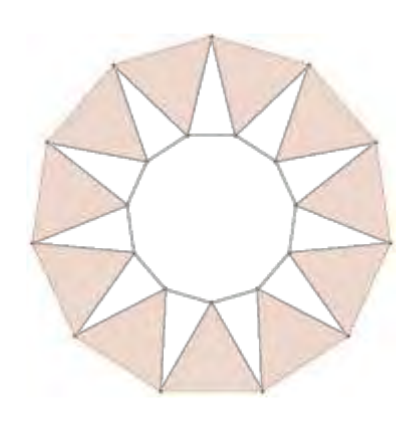
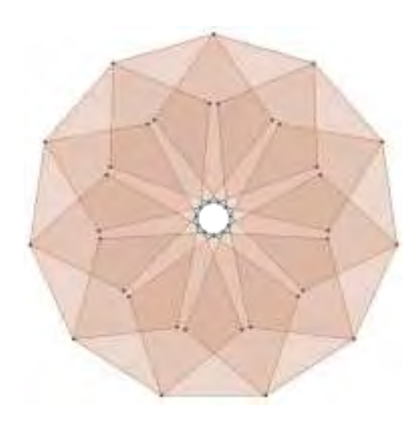
		
$S(6, 3)$	**$S(10, 5)$**	**$S(14, 7)$**

經由觀察，得知 **$S(m, n)$之圖形為一點**。

證明　考慮 H 和 h 之大小關係

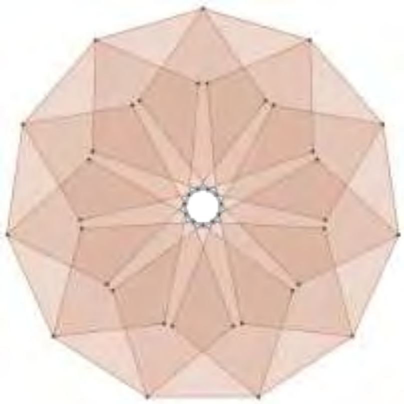
$\because H=h \Rightarrow$ 以外心為參考點，互為點對稱之兩個小正 n 邊形，其交集區域恰為外心，又所有點對稱組皆恰涵蓋外心，故得證 **$S(m, n)$之圖形為一點**。

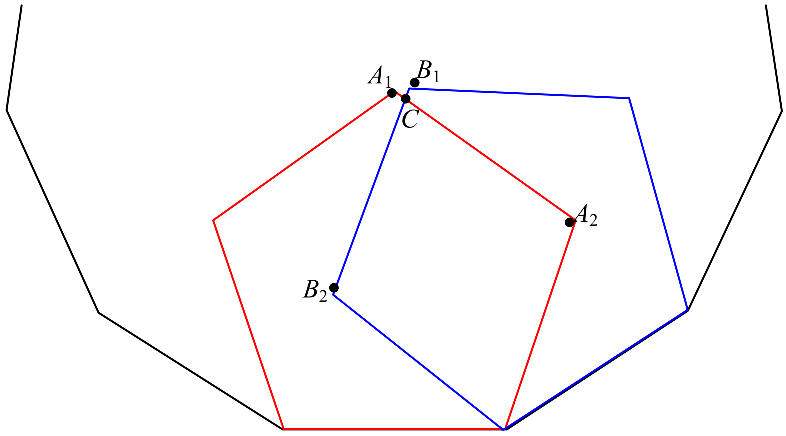
(二)當 n 為奇數且 $m>2n$ 時：

		
$S(8, 3)$	**$S(11, 3)$**	**$S(11, 5)$**

經由觀察，得知 **$S(m, n)$之圖形為正 m 角星形**。

證明





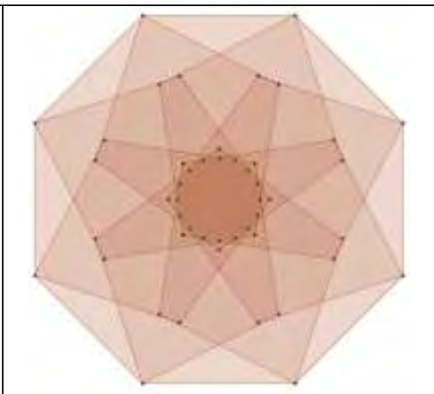
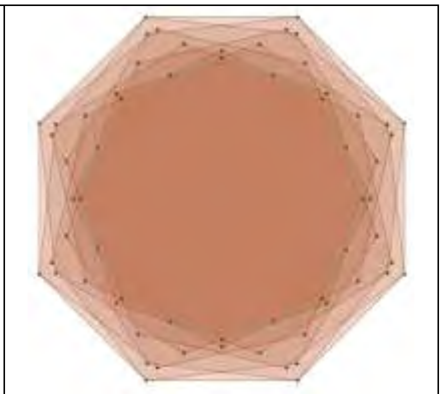
考慮 H 和 h 之大小關係

(1)$\because H>h \Rightarrow$ 得知每個小正 n 邊形**皆無法涵蓋住外心**。

(2)考慮兩相鄰小正 n 邊形之頂點 A_1、A_2、B_1、B_2，令 $\overline{A_1A_2}$ 交 $\overline{B_1B_2}$ 於 C，顯然 C 在 $\overline{A_1B_1}$ 下方，故 A_1、C、B_1 形成一角形。

(3)再由對稱性易知，**m 個角形即形成了正 m 角星形**。

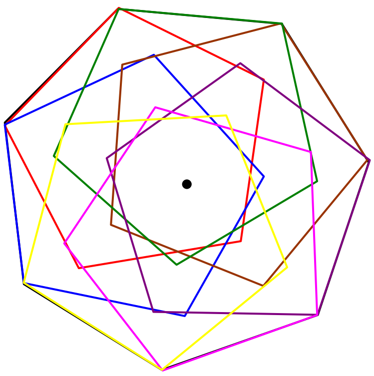
(三)當 n 為奇數且 $m<2n$ 時：

		
***S*(7, 5)**	***S*(8, 5)**	***S*(8, 7)**

經由觀察，得知 **$S(m, n)$之圖形為非正 $2m$ 邊形**。

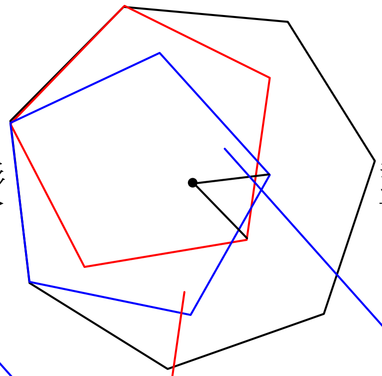
證明 考慮 H 和 h 之大小關係

(1)$\because H<h \Rightarrow$ 得知每個小正 n 邊形**必蓋過外心** $\Rightarrow$ 形成交集區域，如下圖。

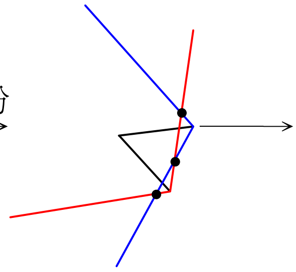


(2)觀察圖中 m 個小正 n 邊形對於 $S(m, n)$皆貢獻了一組對角邊，我們便依此討論分析

① 相鄰 n 邊形 →

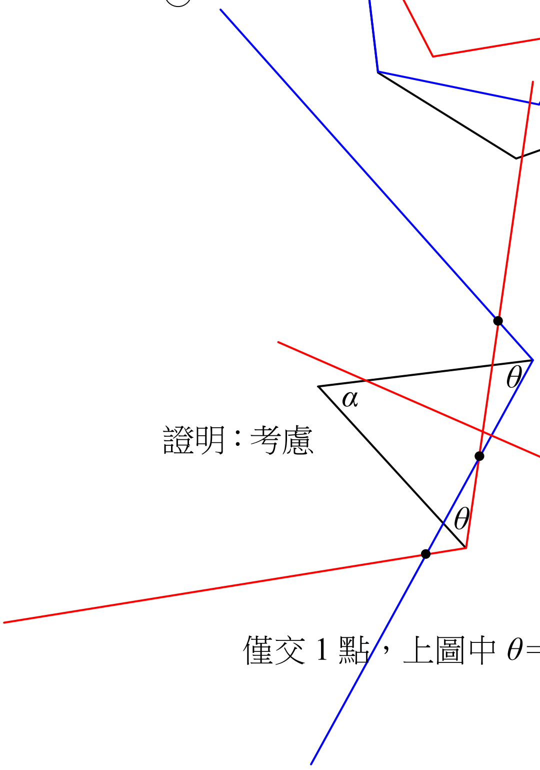


對角邊部份 →

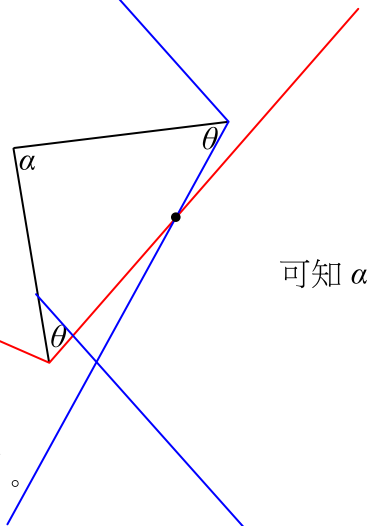


→相交 3 點

證明：考慮

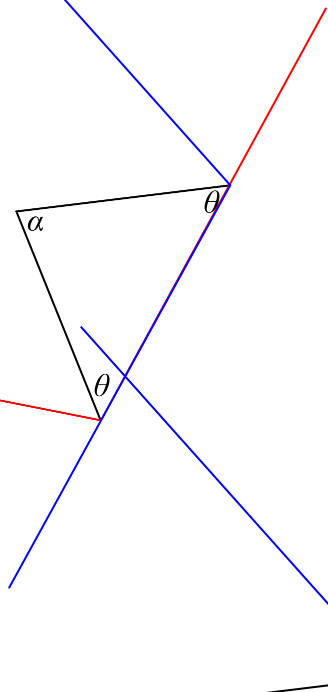


和



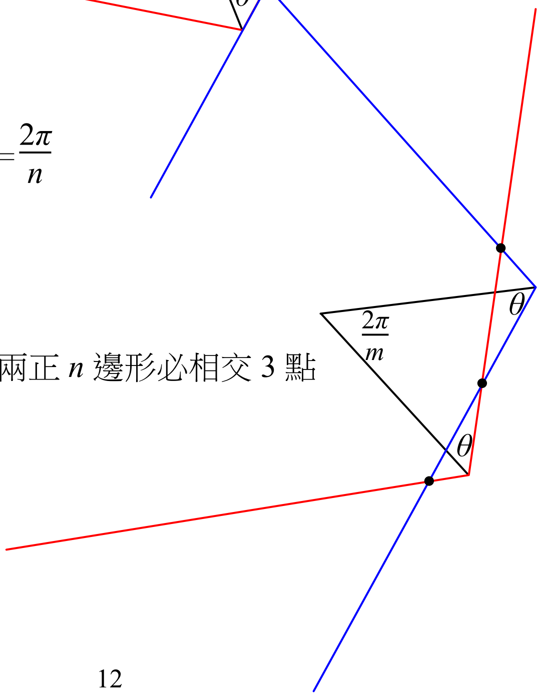
可知 α 角太大會造成兩組對角邊僅交 1 點，上圖中 $\theta=\dfrac{(n-2)\pi}{2n}$。

∴當兩組對角邊有重疊時，如圖

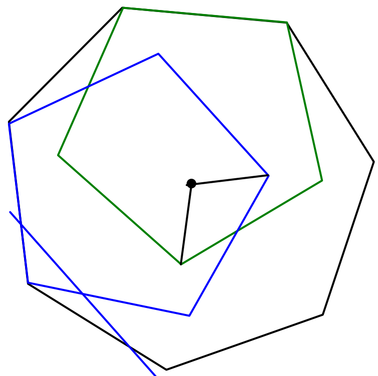


$$\alpha=\pi-2\theta=\pi-2\times\frac{(n-2)\pi}{2n}=\frac{2\pi}{n}$$

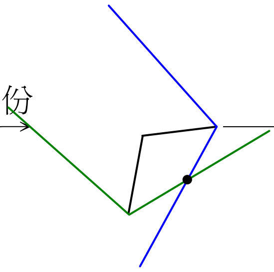
$\because n<m \quad \therefore \dfrac{2\pi}{m}<\dfrac{2\pi}{n}$ ⇒相鄰兩正 n 邊形必相交 3 點



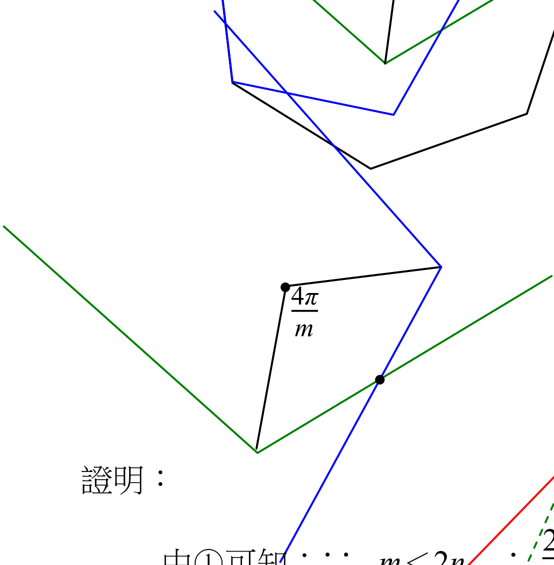
② 間隔 n 邊形 →



對角邊部份 →



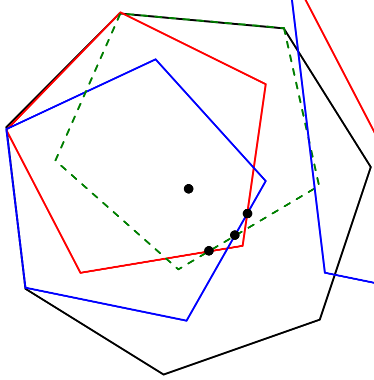
→ 相交 1 點



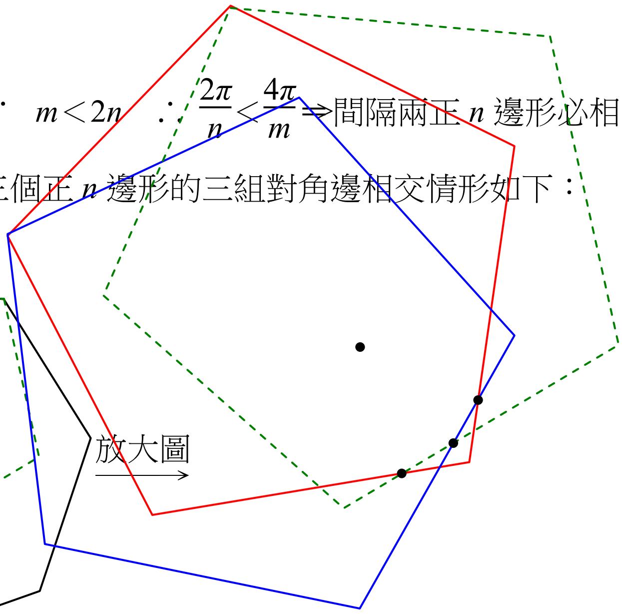
證明：

由①可知：∵ $m<2n$ ∴ $\frac{2\pi}{n}<\frac{4\pi}{m}$ ⇒間隔兩正 n 邊形必相交 1 點

③由①②可知連續相鄰三個正 n 邊形的三組對角邊相交情形如下：

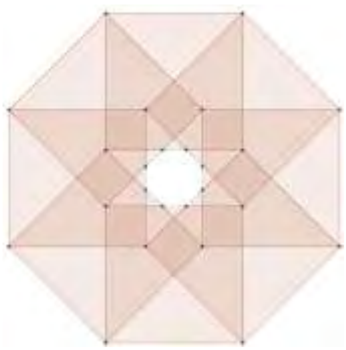
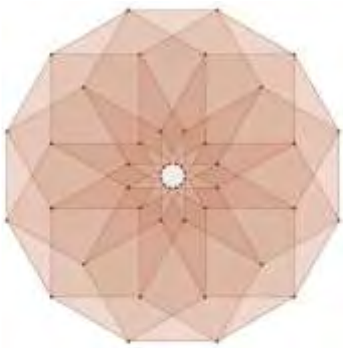
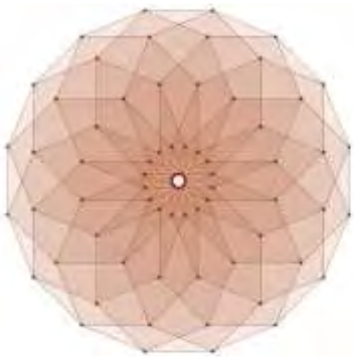


放大圖 →



故 $S(m, n)$之圖形為 $2m$ 邊形。

(四)當 n 為偶數且 $m=2n$ 時：

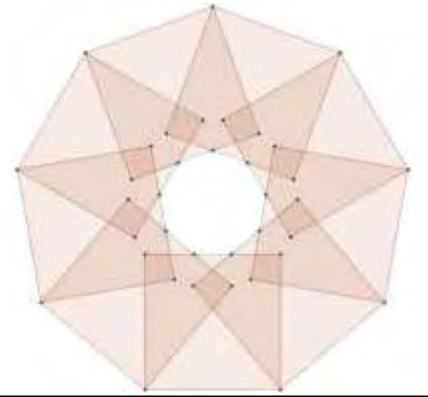
		
$S(8, 4)$	**$S(12, 6)$**	**$S(16, 8)$**

經由觀察，得知 **$S(m, n)$之圖形為正 m 邊形**。

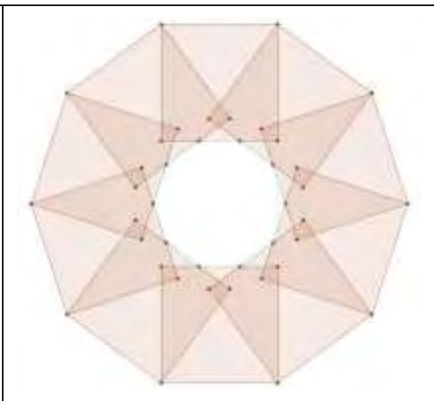
(1)∵ $H > h$ ⇒ 得知每個小正 n 邊形**皆無法涵蓋住外心**。

(2)觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻**平行其底邊之一邊**，故得證 $\boldsymbol{S(m, n)}$**之圖形為正 $\boldsymbol{m}$ 邊形**。

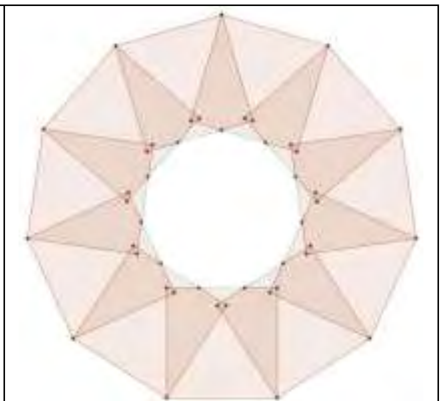
(五)當 $\boldsymbol{n}$ 為偶數且 $\boldsymbol{m > 2n}$ 時：



***S*(9, 4)**



***S*(10, 4)**



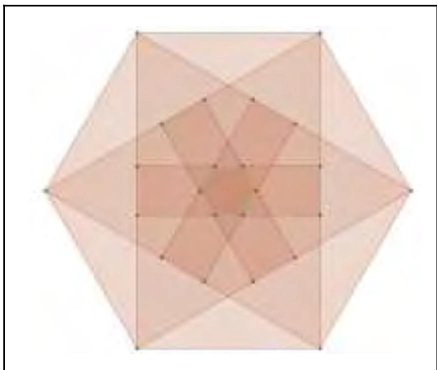
***S*(11, 4)**

經由觀察，得知 **$\boldsymbol{S(m, n)}$之圖形為正 $\boldsymbol{m}$ 邊形**。

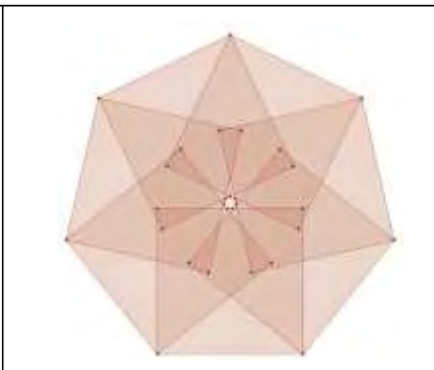
(1) ∵ $H > h$ ⇒ 得知每個小正 n 邊形**皆無法涵蓋住外心**。

(2)觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻**平行其底邊之一邊**，故得證 $\boldsymbol{S(m, n)}$**之圖形為正 $\boldsymbol{m}$ 邊形**。

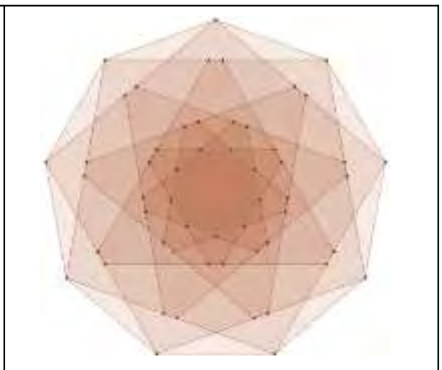
(六)當 $\boldsymbol{n}$ 為偶數且 $\boldsymbol{m < 2n}$ 時：



***S*(6, 4)**



***S*(7, 4)**



***S*(9, 6)**

經由觀察，得知 **$\boldsymbol{S(m, n)}$之圖形為正 $\boldsymbol{m}$ 邊形**。

對於 *S*(7, 4)

(1)∵ $H > h$ ⇒ 得知每個小正 n 邊形**皆無法涵蓋住外心**。

(2)觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻**平行其底邊之一邊**，故得證 $\boldsymbol{S(m, n)}$**為正 $\boldsymbol{m}$ 邊形**。

對於其餘之 $S(m, n)$

(1)$\because H<h \Rightarrow$ 得知每個小正 n 邊形**必蓋過外心** $\Rightarrow$ 形成交集區域

(2)觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻**平行其底邊之一邊**，故得證 **$S(m, n)$為正 m 邊形**。

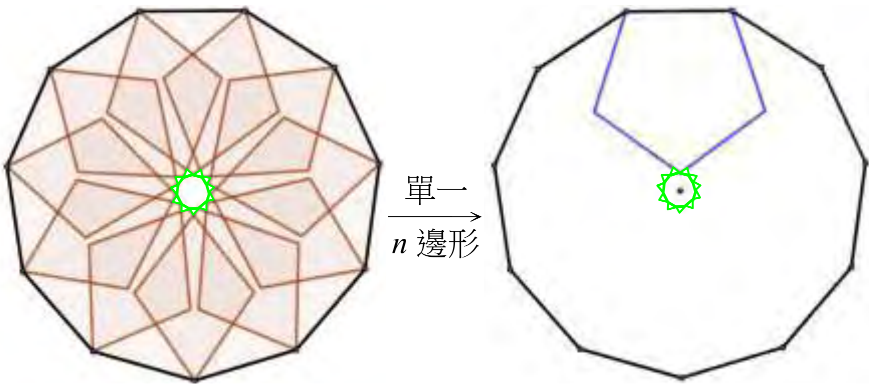
三、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$之面積

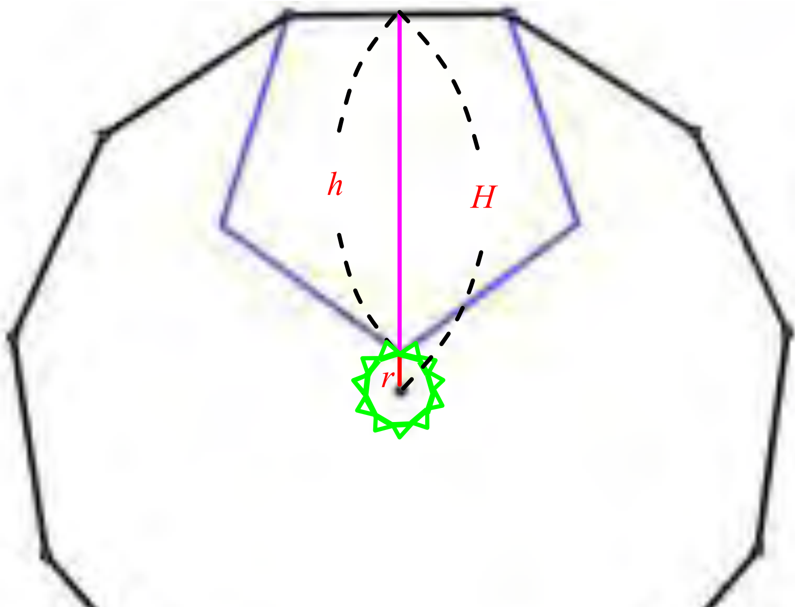
(一)當 n 為奇數且 $m=2n$ 時：

$\because$ 交集區域為一點 $\therefore$ **交集區域 $S(m, n)$面積＝0**

(二)當 n 為奇數且 $m>2n$ 時：

(1)

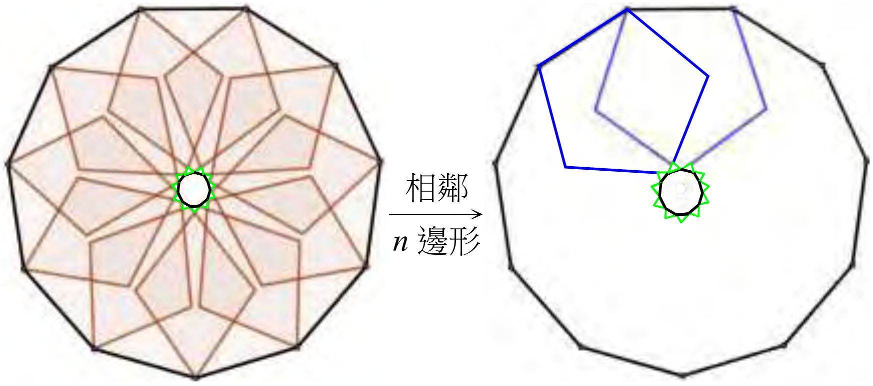


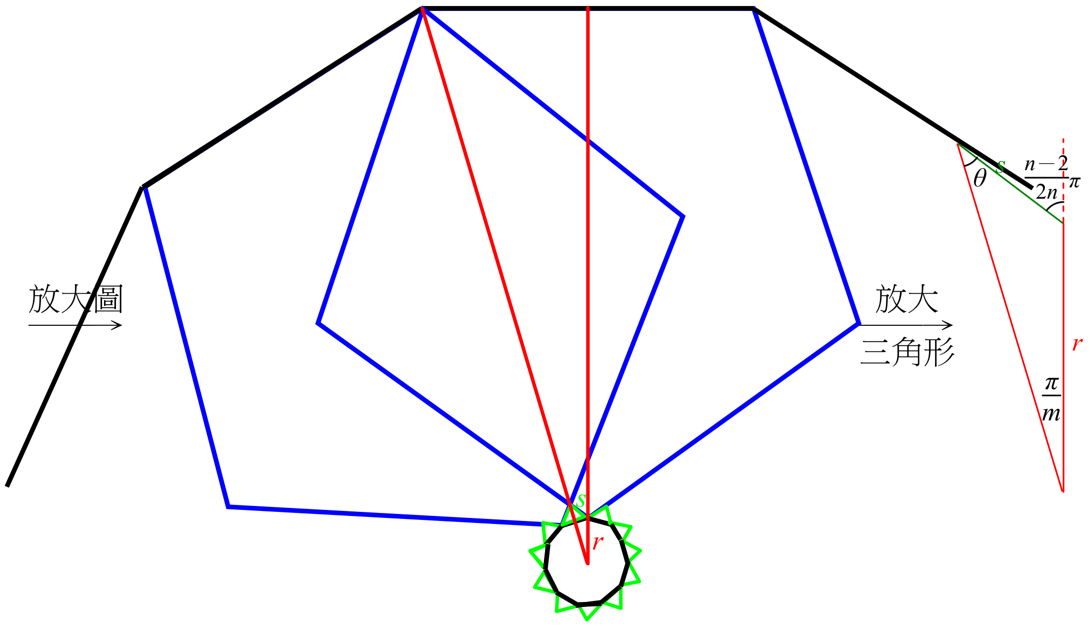


$\because r=H-h=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$

$\frac{k}{2}\cot\frac{90^\circ}{n}$ $\therefore$空心區域中正 m 邊形面積$=\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}$，其中 $r=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$

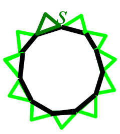
(2)





$\because r=H-h=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$、$\theta=\frac{n-2}{2n}\pi-\frac{\pi}{m}=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})$

正弦定理：$\frac{s}{\sin\frac{\pi}{m}}=\frac{r}{\sin\theta}\Rightarrow s=\frac{r\sin\frac{\pi}{m}}{\sin\theta}$

$\therefore$  中三角形的面積 $\frac{1}{2}ms^2\sin2\theta=\frac{1}{2}m\left(\frac{r^2\sin^2\frac{\pi}{m}}{\sin^2\theta}\right)2\sin\theta\cos\theta$

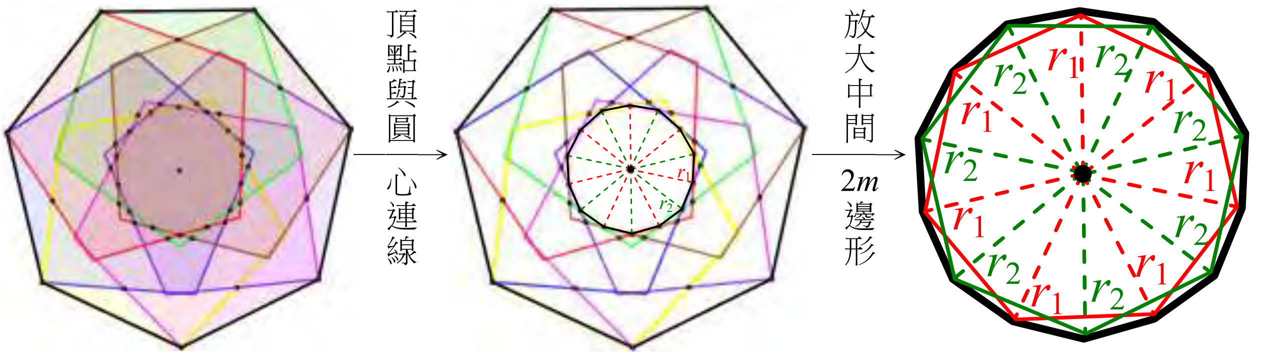
$=mr^2\sin^2\frac{\pi}{m}\cot\theta=mr^2\sin^2\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})$

由(1)(2)得 $S(m, n)$面積 $\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}+mr^2\sin^2\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})=\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}[1+\tan\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})]$

$\frac{k}{2}\cot\frac{90^\circ}{n}$ ∴**空心區域 $S(m, n)$面積$=\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}[1+\tan\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})]$，其中 $r=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$**

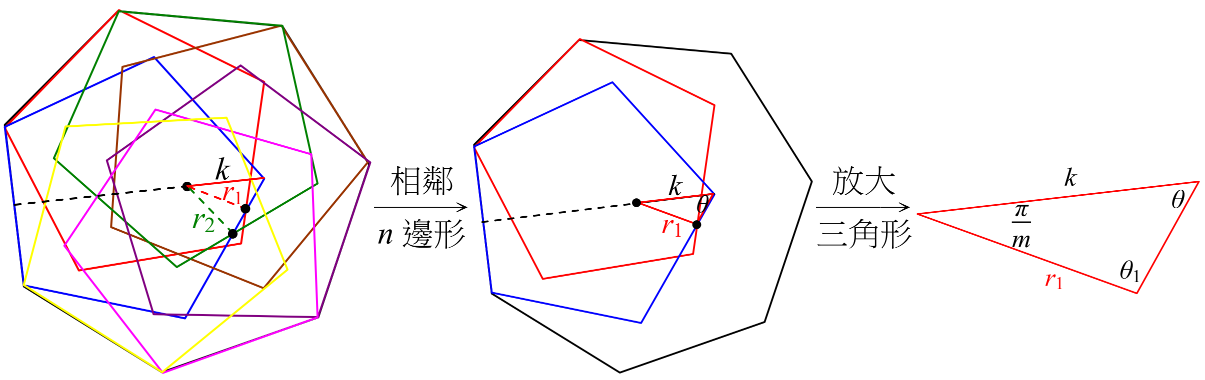
(三)當 n 為奇數且 $m<2n$ 時：

設正 m 邊形外接圓圓心 O、半徑 $R=\csc\frac{\pi}{m}$，相鄰兩正 n 邊形中間交點與圓心 O 距離為 r_1，間隔的兩正 n 邊形交點與圓心 O 距離為 r_2，參考下圖。



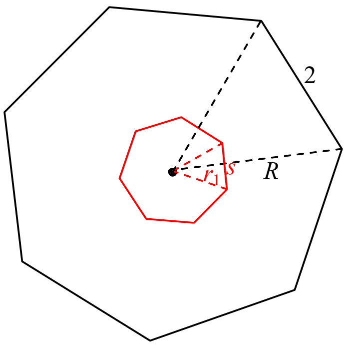
出現了 $2m$ 個全等三角形，因此 $S(m, n)$形成邊長相等的非正 $2m$ 邊形，又以 r_1 為外接圓半徑可得內接正 m 邊形邊長 s；另外以 r_2 為外接圓半徑亦可得內接正 m 邊形，r_1, s, r_2 的值求解如下，並且可計算出 $S(m, n)$面積：

(1) 由 k 求 r_1，再由 r_1 解 s 值，即可求得 $S(m, n)$面積

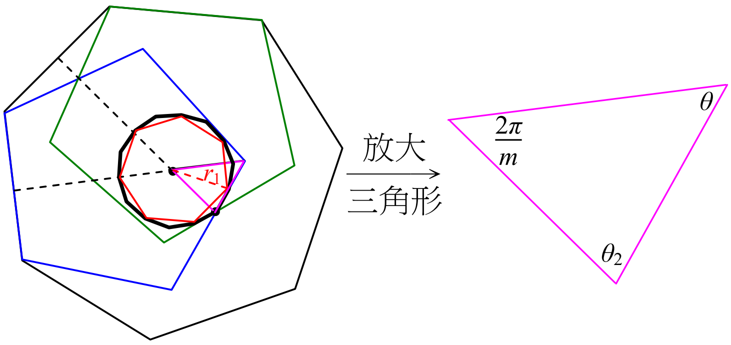


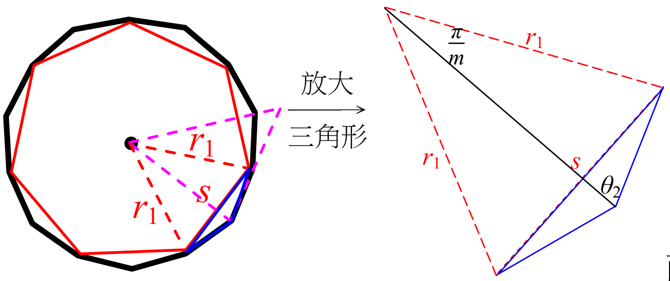
① $\theta=\frac{(n-2)\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$、$\theta_1=\pi-\theta-\frac{\pi}{m}=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})$、$k=h-H=\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m}$

② 正弦定理：$\frac{r_1}{\sin\theta}=\frac{k}{\sin\theta_1}$ $\Rightarrow$ $r_1=\sin\theta\times\frac{k}{\sin\theta_1}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})\times\frac{k}{\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}))}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$

③ 

$$\Rightarrow s=\frac{2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}=\frac{2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cot\frac{\pi}{m}+\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{2(\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{2n}-1)}{\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n}+1}$$

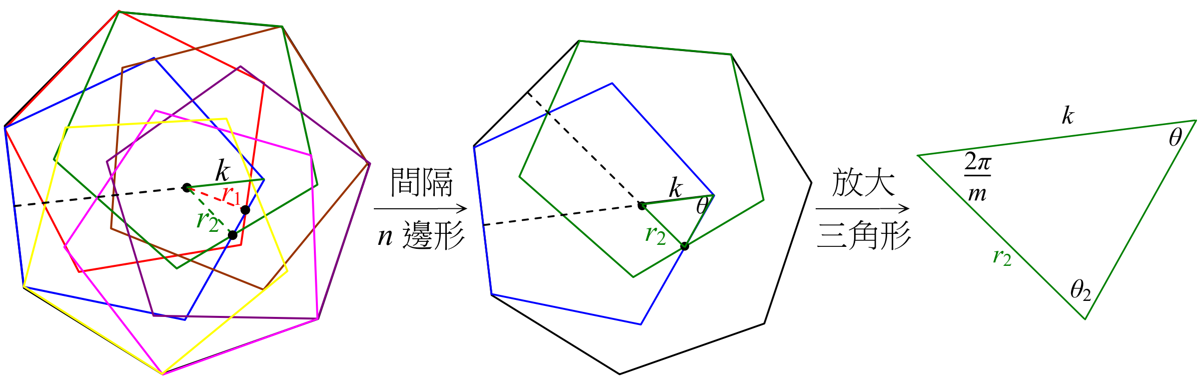
④ 



面積 $\frac{s^2}{4}(\cot\frac{\pi}{m}+\cot\theta_2)=\frac{s^2}{4}[\cot\frac{\pi}{m}+\tan(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})]$

$\therefore$**交集區域 $S(m, n)$面積$=\frac{ms^2}{4}[\cot\frac{\pi}{m}+\tan(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})]$，其中 $s=\dfrac{2(\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{2n}-1)}{\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n}+1}$**

(2) 解 r_2 值，並利用 r_1 和 r_2 亦可求得 $S(m, n)$面積



$\theta=\frac{(n-2)\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$、$k=h-H=\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m}$

正弦定理：$\dfrac{r_2}{\sin\theta}=\dfrac{k}{\sin(\pi-\theta-\frac{2\pi}{m})}$

$$\Rightarrow r_2=\sin\theta\times\frac{k}{\sin(\pi-\theta-\frac{2\pi}{m})}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})\times\frac{k}{\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n}))}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$$

$\therefore$**交集區域 $S(m, n)$面積＝$mr_1r_2\sin\frac{\pi}{m}$，其中 $r_1=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$、$r_2=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$**

※觀察 r_1、r_2 通式之分母：

If $r_1=r_2$

$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})=\cos(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})$

$\Rightarrow -(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})=\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{n}=\frac{3\pi}{m}$

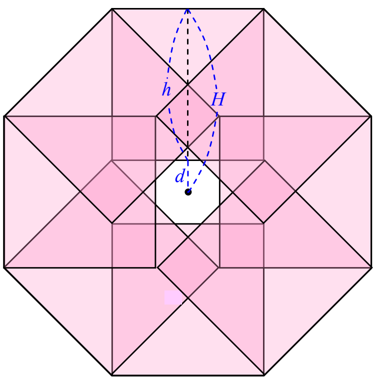
$\Rightarrow 2m=3n$

$\Rightarrow n$ 為偶 ⇒矛盾！！

故得證 $\boxed{r_1\neq r_2}$

⇒此 $2m$ 邊形必為**非正 $2m$ 邊形**

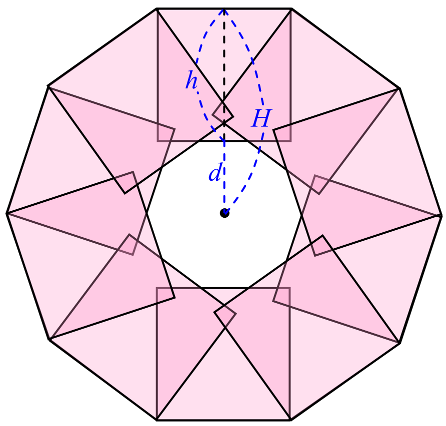
(四)當 n 為偶數且 $m=2n$ 時：設 $S(m, n)$內切圓半徑為 d



$\because d=H-h=\cot\frac{\pi}{m}-2\cot\frac{\pi}{n}$

$\frac{k}{2}\cot\frac{90^\circ}{n}$ $\therefore$**空心區域 $S(m, n)$面積＝$md^2\tan\frac{\pi}{m}$，其中 $d=\cot\frac{\pi}{m}-2\cot\frac{\pi}{n}$**

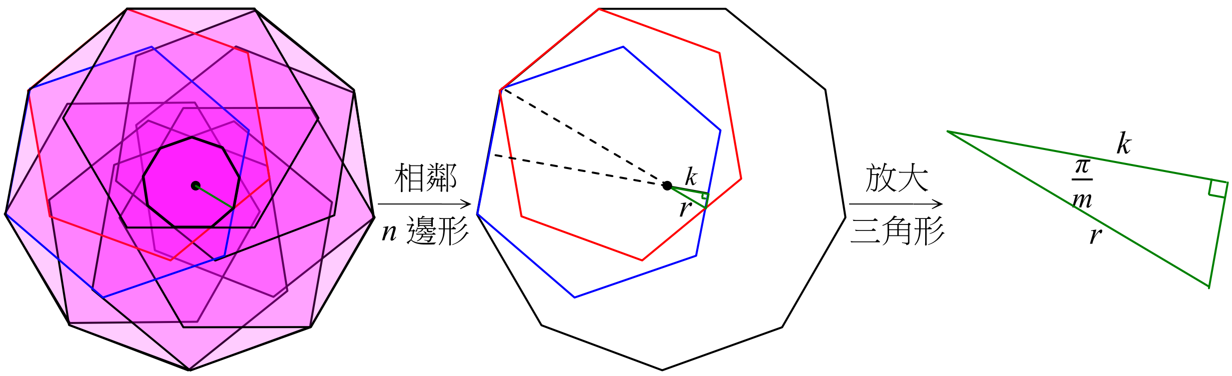
(五)**當 n 為偶數且 $m>2n$ 時：**設 $S(m, n)$內切圓半徑為 d



$\because d=H-h=\cot\frac{\pi}{m}-2\cot\frac{\pi}{n}$

$\frac{k}{2}\cot\frac{90^\circ}{n}$ $\therefore$**空心區域 $S(m, n)$面積$=md^2\tan\frac{\pi}{m}$，其中 $d=\cot\frac{\pi}{m}-2\cot\frac{\pi}{n}$**

(六)當 n 為偶數且 $m<2n$ 時：設 $S(m, n)$外接圓半徑為 r



$$k=h-H=2\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{m}\Rightarrow r=\frac{2\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{m}}$$

$\therefore$**交集區域 $S(m, n)$面積$=\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}$，其中 $r=\dfrac{2\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{m}}$**

四、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討鋪磁磚問題

問題假設

今有某工人，欲鋪設一塊邊長為 2 之大正 m 邊形之地。該工人希望以每邊內接一個邊長同樣為 2 之小正 n 邊形磁磚來鋪這塊地。

然而，若相鄰兩塊小正 n 邊形重疊，則必須切割多餘的重疊部分，是為**損失面積**；而若鋪設完成後，中間仍剩下空心區域，亦須以其他零碎磁磚補齊，視為**空心面積**。

而定義**損益值**為(損失面積＋空心面積)，且**損益比**為：$\dfrac{\textbf{損益值}}{\text{大正}m\text{邊形之面積}}$，則損益比越小，即代表該工程越符合經濟效益，反之，則越不符合經濟效益。

實際解決

我們想幫工人分析：在不同的大正 m 邊形之地及不同的小正 n 邊形磁磚下，其工作之經濟效益。因此依照原先所分之 **6 大類**分別進行探討。

(一)當 n 為奇數且 $m=2n$ 時：

空心面積：因其恰為一點，故沒有空心面積

損失面積：即為全部小正 n 邊形之面積－大正 m 邊形面積

我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
6	3	0.00	10.39	10.39	0.00	0.00	0.00	0.00
10	5	0.00	30.78	68.82	0.00	38.04	38.04	1.24
14	7	0.00	61.34	203.50	0.00	142.16	142.16	2.32
18	9	0.00	102.08	445.09	0.00	343.01	343.01	3.36
22	11	0.00	153.01	824.18	0.00	671.16	671.16	4.39
26	13	0.00	214.13	1371.32	0.00	1157.19	1157.19	5.40
30	15	0.00	285.43	2117.08	0.00	1831.65	1831.65	6.42
34	17	0.00	366.92	3092.03	0.00	2725.11	2725.11	7.43
38	19	0.00	458.59	4326.71	0.00	3868.12	3868.12	8.43
42	21	0.00	560.45	5851.69	0.00	5291.24	5291.24	9.44
46	23	0.00	672.50	7697.52	0.00	7025.03	7025.03	10.45
50	25	0.00	794.73	9894.77	0.00	9100.04	9100.04	11.45
54	27	0.00	927.14	12473.99	0.00	11546.84	11546.84	12.45
58	29	0.00	1069.75	15465.73	0.00	14395.99	14395.99	13.46
62	31	0.00	1222.54	18900.57	0.00	17678.03	17678.03	14.46
66	33	0.00	1385.51	22809.05	0.00	21423.54	21423.54	15.46
70	35	0.00	1558.67	27221.73	0.00	25663.06	25663.06	16.46
74	37	0.00	1742.02	32169.17	0.00	30427.15	30427.15	17.47

結論：隨著 ***m*,*n* 數值漸增**，會使損益比越大，越不符合經濟效益。

(二)當 n 為奇數且 $m>2n$ 時：

空心面積：即 $S(m, n)$面積

損失面積：即全部小正 n 邊形之面積＋$S(m, n)$面積－大正 m 邊形面積

(1)對於相同的 *m* 值，比較不同的 *n* 值，我們列表如下：

m	*n*	*S*(*m*,*n*)	大 *m* 面積	小 *n* 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
7	3	2.41	14.54	12.12	2.41	0.00	2.41	0.17
8	3	5.46	19.31	13.86	5.46	0.00	5.46	0.28
9	3	9.14	24.73	15.59	9.14	0.00	9.14	0.37
10	3	13.46	30.78	17.32	13.46	0.00	13.46	0.44
11	3	18.41	37.46	19.05	18.41	0.00	18.41	0.49
11	5	0.44	37.46	75.70	0.44	38.68	39.12	1.04
12	3	24.00	44.78	20.78	24.00	0.00	24.00	0.54
12	5	1.71	44.78	82.58	1.71	39.51	41.22	0.92
13	3	30.23	52.74	22.52	30.23	0.00	30.23	0.57
13	5	3.74	52.74	89.46	3.74	40.47	44.21	0.84
14	3	37.09	61.34	24.25	37.09	0.00	37.09	0.60
14	5	6.51	61.34	96.35	6.51	41.52	48.03	0.78
15	3	44.59	70.57	25.98	44.59	0.00	44.59	0.63
15	5	9.98	70.57	103.23	9.98	42.64	52.62	0.75
15	7	0.37	70.57	218.03	0.37	147.84	148.21	2.10
16	3	52.72	80.44	27.71	52.72	0.00	52.72	0.66
16	5	14.14	80.44	110.11	14.14	43.81	57.96	0.72
16	7	1.47	80.44	232.57	1.47	153.60	155.07	1.93

結論：對於同一種大正 *m* 邊形，使用**邊數越小**的小正 *n* 邊形，可使損益比越小，**越符合經濟效益**。

(2)對於相同的 *n* 值，比較不同的 *m* 值，我們列表如下：

m	*n*	*S*(*m*,*n*)	大 *m* 面積	小 *n* 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
7	3	2.41	14.54	12.12	2.41	0.00	2.41	0.17
8	3	5.46	19.31	13.86	5.46	0.00	5.46	0.28
9	3	9.14	24.73	15.59	9.14	0.00	9.14	0.37
10	3	13.46	30.78	17.32	13.46	0.00	13.46	0.44
11	5	0.44	37.46	75.70	0.44	38.68	39.12	1.04
12	5	1.71	44.78	82.58	1.71	39.51	41.22	0.92
13	5	3.74	52.74	89.46	3.74	40.47	44.21	0.84
14	5	6.51	61.34	96.35	6.51	41.52	48.03	0.78
15	7	0.37	70.57	218.03	0.37	147.84	148.21	2.10
16	7	1.47	80.44	232.57	1.47	153.60	155.07	1.93
17	7	3.27	90.94	247.11	3.27	159.44	162.71	1.79
18	7	5.77	102.08	261.64	5.77	165.33	171.10	1.68

19	9	0.35	113.86	469.82	0.35	356.31	356.66	3.13
20	9	1.39	126.28	494.55	1.39	369.66	371.05	2.94
21	9	3.11	139.33	519.27	3.11	383.05	386.16	2.77
22	9	5.50	153.01	544.00	5.50	396.49	401.99	2.63

結論：使用同一種小正 n 邊形，對於邊數越大的大正 m 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

※當 $n = 3$ 時，其損益比有相反之結論

(三)當 n 為奇數且 $m<2n$ 時：

空心面積：因其為交集區域，故沒有空心面積

損失面積：即為全部小正 n 邊形之面積－大正 m 邊形面積

(1)對於相同的 m 值，比較不同的 n 值，我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
7	5	2.10	14.54	48.17	0.00	33.64	33.64	2.31
8	5	0.92	19.31	55.06	0.00	35.74	35.74	1.85
8	7	10.20	19.31	116.29	0.00	96.97	96.97	5.02
9	5	0.23	24.73	61.94	0.00	37.21	37.21	1.50
9	7	6.92	24.73	130.82	0.00	106.09	106.09	4.29
10	7	4.37	30.78	145.36	0.00	114.58	114.58	3.72
10	9	19.11	30.78	247.27	0.00	216.50	216.50	7.03
11	7	2.44	37.46	159.89	0.00	122.43	122.43	3.27
11	9	14.43	37.46	272.00	0.00	234.54	234.54	6.26
12	7	1.08	44.78	174.43	0.00	129.64	129.64	2.89
12	9	10.51	44.78	296.73	0.00	251.94	251.94	5.63
12	11	30.57	44.78	449.55	0.00	404.77	404.77	9.04
13	7	0.27	52.74	188.96	0.00	136.22	136.22	2.58
13	9	7.26	52.74	321.45	0.00	268.71	268.71	5.09
13	11	24.56	52.74	487.01	0.00	434.27	434.27	8.23
14	9	4.64	61.34	346.18	0.00	284.84	284.84	4.64
14	11	19.29	61.34	524.48	0.00	463.14	463.14	7.55
14	13	44.59	61.34	738.40	0.00	677.07	677.07	11.04

結論：對於同一種大正 m 邊形，使用邊數越小的小正 n 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

(2)對於相同的 n 值，比較不同的 m 值，我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
4	3	0.45	4.00	6.93	0.00	2.93	2.93	0.73
5	3	0.10	6.88	8.66	0.00	1.78	1.78	0.26

6	5	3.91	10.39	41.29	0.00	30.90	30.90	2.97
7	5	2.10	14.54	48.17	0.00	33.64	33.64	2.31
8	5	0.92	19.31	55.06	0.00	35.74	35.74	1.85
9	5	0.23	24.73	61.94	0.00	37.21	37.21	1.50
8	7	10.20	19.31	116.29	0.00	96.97	96.97	5.02
9	7	6.92	24.73	130.82	0.00	106.09	106.09	4.29
10	7	4.37	30.78	145.36	0.00	114.58	114.58	3.72
11	7	2.44	37.46	159.89	0.00	122.43	122.43	3.27
10	9	19.11	30.78	247.27	0.00	216.50	216.50	7.03
11	9	14.43	37.46	272.00	0.00	234.54	234.54	6.26
12	9	10.51	44.78	296.73	0.00	251.94	251.94	5.63
13	9	7.26	52.74	321.45	0.00	268.71	268.71	5.09
12	11	30.57	44.78	449.55	0.00	404.77	404.77	9.04
13	11	24.56	52.74	487.01	0.00	434.27	434.27	8.23
14	11	19.29	61.34	524.48	0.00	463.14	463.14	7.55
15	11	14.71	70.57	561.94	0.00	491.37	491.37	6.96

結論：使用同一種小正 n 邊形，對於**邊數越大**的大正 m 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

(四)當 n 為偶數且 $m=2n$ 時：

空心面積：即 $S(m, n)$面積

損失面積：即全部小正 n 邊形之面積＋$S(m, n)$面積－大正 m 邊形面積

我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
8	4	0.569	19.31	32.00	0.57	13.25	13.82	0.72
12	6	0.231	44.78	124.71	0.23	80.15	80.38	1.79
16	8	0.126	80.44	309.02	0.13	228.71	228.83	2.84
20	10	0.079	126.28	615.54	0.08	489.34	489.42	3.88
24	12	0.055	182.30	1074.83	0.05	892.59	892.64	4.90
28	14	0.040	248.51	1717.46	0.04	1469.00	1469.04	5.91
32	16	0.031	324.90	2574.00	0.03	2249.13	2249.16	6.92
36	18	0.024	411.48	3674.99	0.02	3263.53	3263.56	7.93
40	20	0.019	508.25	5051.00	0.02	4542.77	4542.79	8.94
44	22	0.016	615.20	6732.59	0.02	6117.40	6117.42	9.94
48	24	0.014	732.34	8750.31	0.01	8017.98	8018.00	10.95
52	26	0.012	859.66	11134.72	0.01	10275.07	10275.08	11.95
56	28	0.010	997.17	13916.38	0.01	12919.22	12919.23	12.96
60	30	0.009	1144.87	17125.86	0.01	15981.00	15981.01	13.96

64	32	0.008	1302.75	20793.69	0.01	19490.95	19490.96	14.96
68	34	0.007	1470.82	24950.45	0.01	23479.64	23479.65	15.96
72	36	0.006	1649.07	29626.70	0.01	27977.63	27977.64	16.97
76	38	0.005	1837.51	34852.98	0.01	33015.47	33015.48	17.97

結論：隨著 ***m*, *n* 數值漸增**，損失面積越大，以致損益值越大，越不符合經濟效益。

(五)當 *n* 為偶數且 *m*>2*n* 時：

空心面積：即 $S(m, n)$面積

損失面積：即全部小正 n 邊形之面積＋$S(m, n)$面積－大正 m 邊形面積

(1)對於相同的 m 值，比較不同的 n 值，我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
9	4	1.83	24.73	36.00	1.83	13.10	14.93	0.60
10	4	3.77	30.78	40.00	3.77	13.00	16.77	0.54
11	4	6.38	37.46	44.00	6.38	12.92	19.30	0.52
12	4	9.65	44.78	48.00	9.65	12.86	22.51	0.50
13	4	13.56	52.74	52.00	13.56	12.82	26.38	0.50
13	6	1.13	52.74	135.10	1.13	83.48	84.61	1.60
14	4	18.12	61.34	56.00	18.12	12.78	30.90	0.50
14	6	2.69	61.34	145.49	2.69	86.84	89.53	1.46
15	4	23.32	70.57	60.00	23.32	12.75	36.08	0.51
15	6	4.91	70.57	155.88	4.91	90.22	95.13	1.35
16	4	29.17	80.44	64.00	29.17	12.73	41.90	0.52
16	6	7.78	80.44	166.28	7.78	93.62	101.39	1.26
17	4	35.65	90.94	68.00	35.65	12.71	48.36	0.53
17	6	11.30	90.94	176.67	11.30	97.02	108.32	1.19
17	8	0.86	90.94	328.33	0.86	238.25	239.12	2.63
18	4	42.78	102.08	72.00	42.78	12.70	55.47	0.54
18	6	15.46	102.08	187.06	15.46	100.44	115.90	1.14
18	8	2.25	102.08	347.65	2.25	247.82	250.07	2.45

結論：對於同一種大正 m 邊形，使用**邊數越**小的小正 n 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

(2)對於相同的 n 值，比較不同的 m 值，我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
9	4	1.83	24.73	36.00	1.83	13.10	14.93	0.60
10	4	3.77	30.78	40.00	3.77	13.00	16.77	0.54
11	4	6.38	37.46	44.00	6.38	12.92	19.30	0.52

12	4	9.65	44.78	48.00	9.65	12.86	22.51	0.50
13	6	1.13	52.74	135.10	1.13	83.48	84.61	1.60
14	6	2.69	61.34	145.49	2.69	86.84	89.53	1.46
15	6	4.91	70.57	155.88	4.91	90.22	95.13	1.35
16	6	7.78	80.44	166.28	7.78	93.62	101.39	1.26
17	8	0.86	90.94	328.33	0.86	238.25	239.12	2.63
18	8	2.25	102.08	347.65	2.25	247.82	250.07	2.45
19	8	4.30	113.86	366.96	4.30	257.40	261.69	2.30
20	8	6.99	126.28	386.27	6.99	266.99	273.98	2.17
21	10	0.73	139.33	646.31	0.73	507.71	508.44	3.65
22	10	2.02	153.01	677.09	2.02	526.10	528.12	3.45
23	10	3.97	167.34	707.87	3.97	544.50	548.46	3.28
24	10	6.56	182.30	738.64	6.56	562.90	569.46	3.12

結論：使用同一種小正 n 邊形，對於**邊數越大**的大正 m 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

(六)當 n 為偶數且 $m<2n$ 時：

$S(7,4)$： 空心面積：即 $S(m, n)$面積

損失面積：即全部小正 n 邊形之面積＋$S(m, n)$面積－大正 m 邊形面積

其他： 空心面積：因其為交集區域，故沒有空心面積

損失面積：即為全部小正 n 邊形之面積-大正 m 邊形面積

(1)對於相同的 m 值，比較不同的 n 值，我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
5	4	1.41	6.88	20.00	0.00	13.12	13.12	1.91
6	4	0.25	10.39	24.00	0.00	13.61	13.61	1.31
7	4	0.02	14.54	28.00	0.02	13.48	13.50	0.93
8	6	3.65	19.31	83.14	0.00	63.82	63.82	3.30
9	6	1.68	24.73	93.53	0.00	68.80	68.80	2.78
9	8	14.19	24.73	173.82	0.00	149.10	149.10	6.03
10	6	0.49	30.78	103.92	0.00	73.15	73.15	2.38
10	8	9.96	30.78	193.14	0.00	162.36	162.36	5.28
11	6	0.01	37.46	114.32	0.00	76.85	76.85	2.05
11	8	6.54	37.46	212.45	0.00	174.99	174.99	4.67
11	10	24.42	37.46	338.55	0.00	301.08	301.08	8.04
12	8	3.87	44.78	231.76	0.00	186.98	186.98	4.18
12	10	18.88	44.78	369.32	0.00	324.54	324.54	7.25

13	8	1.91	52.74	251.08	0.00	198.34	198.34	3.76
13	10	14.11	52.74	400.10	0.00	347.36	347.36	6.59
13	12	37.19	52.74	582.20	0.00	529.46	529.46	10.04
14	8	0.64	61.34	270.39	0.00	209.05	209.05	3.41
14	10	10.06	61.34	430.88	0.00	369.54	369.54	6.02
14	12	30.37	61.34	626.98	0.00	565.65	565.65	9.22

結論：對於同一種大正 m 邊形，使用邊數越小的小正 n 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

(2)對於相同的 n 值，比較不同的 m 值，我們列表如下：

m	n	$S(m,n)$	大 m 面積	小 n 總面積	空心面積	損失面積	損益值	損益比
5	4	1.41	6.88	20.00	0.00	13.12	13.12	1.91
6	4	0.25	10.39	24.00	0.00	13.61	13.61	1.31
7	4	0.02	14.54	28.00	0.02	13.48	13.50	0.93
7	6	6.49	14.54	72.75	0.00	58.21	58.21	4.00
8	6	3.65	19.31	83.14	0.00	63.82	63.82	3.30
9	6	1.68	24.73	93.53	0.00	68.80	68.80	2.78
10	6	0.49	30.78	103.92	0.00	73.15	73.15	2.38
9	8	14.19	24.73	173.82	0.00	149.10	149.10	6.03
10	8	9.96	30.78	193.14	0.00	162.36	162.36	5.28
11	8	6.54	37.46	212.45	0.00	174.99	174.99	4.67
12	8	3.87	44.78	231.76	0.00	186.98	186.98	4.18
11	10	24.42	37.46	338.55	0.00	301.08	301.08	8.04
12	10	18.88	44.78	369.32	0.00	324.54	324.54	7.25
13	10	14.11	52.74	400.10	0.00	347.36	347.36	6.59
14	10	10.06	61.34	430.88	0.00	369.54	369.54	6.02
13	12	37.19	52.74	582.20	0.00	529.46	529.46	10.04
14	12	30.37	61.34	626.98	0.00	565.65	565.65	9.22
15	12	24.28	70.57	671.77	0.00	601.20	601.20	8.52
16	12	18.90	80.44	716.55	0.00	636.12	636.12	7.91

結論：使用同一種小正 n 邊形，對於邊數越大的大正 m 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

伍、研究結果

我們已經將所有 $S(m, n)$形成的圖形綜合整理和討論分析，並且一一解釋與證明其形成的原理。在研究報告中，會附上討論類型中的某一圖形以方便說明，實際上所有的證明皆可合

理去適用於討論類型中的**任何正 m 邊形內接任何正 n 邊形**。研究結果中，值得注意的圖形有二：

① m, n 皆為奇數且 $m<2n$ 的圖形會交集出**邊長相等的非正 $2m$ 邊形**，此 **$2m$ 邊形**既非正多邊形，頂點亦不共圓！(參閱第 11 頁和第 17 頁)

② m 為奇數且 n 為偶數且 $m<2n$ 的的圖形會交集出正 m 邊形，**唯獨$(m, n)=(7, 4)$是例外的，它會出現沒有交集的結果**。(參閱第 8 頁)

我們依序研究了 $S(m,n)$為空心或交集、$S(m,n)$形狀，並計算其面積，以 n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下分別討論，於下表呈現：

分類		$S(m, n)$圖形特徵		$S(m, n)$面積通式
n 為奇數	$m=2n$	交集區域	一點	0
	$m>2n$	空心區域	正 m 角星形	$\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}[1+\tan\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})]$，其中 $r=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$
	$m<2n$	交集區域	非正 $2m$ 邊形	$\frac{ms^2}{4}[\cot\frac{\pi}{m}+\tan(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})]$，其中 $s=\frac{2(\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{2n}-1)}{\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n}+1}$
				$mr_1r_2\sin\frac{\pi}{m}$，其中 $r_1=\frac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$、$r_2=\frac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$
n 為偶數	$m=2n$	空心區域	正 m 邊形	$md^2\tan\frac{\pi}{m}$，其中 $d=\cot\frac{\pi}{m}-2\cot\frac{\pi}{n}$
	$m>2n$	空心區域	正 m 邊形	$md^2\tan\frac{\pi}{m}$，其中 $d=\cot\frac{\pi}{m}-2\cot\frac{\pi}{n}$
	$m<2n$	交集區域 除 $S(7, 4)$為空心區域	正 m 邊形	$\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}$，其中 $r=\frac{2\cot\frac{\pi}{n}-\cot\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{m}}$

而後，在鋪磁磚問題中，我們發現：對工人而言，在 n 為奇數且 $m=2n$ 以及 n 為偶數且 $m=2n$ 的分類之中，**隨著 m, n 數值漸增，會使損益比越大，越不符合經濟效益**；而在其餘的類型中，有共同的結論為：

①對於同一種大正 m 邊形，使用**邊數越小**的小正 n 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

②使用同一種小正 n 邊形，對於**邊數越大**的大正 m 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

我們從 $S(m, n)$面積延伸至鋪磁磚問題，結論如下：

一、$S(m, n)$

For (一)：$S(m, n)$為 0

For (四)：$S(m, n)$隨著 **m,n 數值漸增**而越小

For (二)、(五)：

(1)對於同一種大正 m 邊形，使用可選擇之**邊數越大**的小正 n 邊形，可使 $S(m,n)$越小

(2)使用同一種小正 n 邊形，對於可選擇之**邊數越小**的大正 m 邊形，可使 $S(m,n)$越小

For (三)、(六)：

(1)對於同一種大正 m 邊形，使用可選擇之**邊數越小**的小正 n 邊形，可使 $S(m,n)$越小

(2)使用同一種小正 n 邊形，對於可選擇之**邊數越大**的大正 m 邊形，可使 $S(m,n)$越小

二、損益比

For(一)、(四)：隨著 **m,n 數值漸增**，會使損益比越大，越不符合經濟效益。

For(二)、(三)、(五)、(六)：

(1)對於同一種大正 m 邊形，使用可選擇之**邊數越小**的小正 n 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

(2)使用同一種小正 n 邊形，對於可選擇之**邊數越大**的大正 m 邊形，可使損益比越小，越符合經濟效益。

三、結合 $S(m,n)$與損益比

(一)：$S(m,n)$為 0，與損益比**無關**

(三)、(六)：$S(m,n)$與損益比成**正相關**

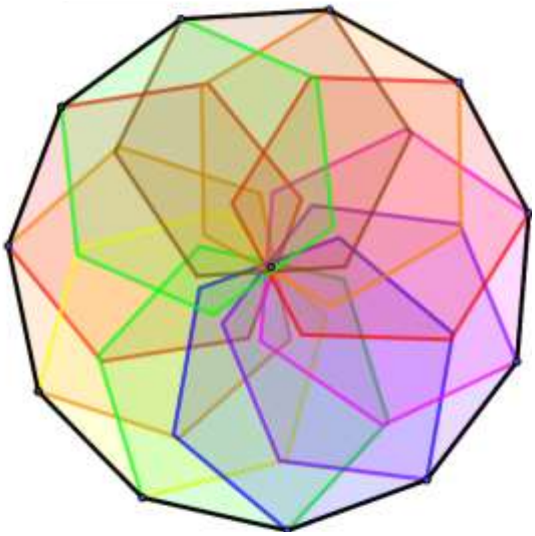
(二)、(四)、(五)：$S(m,n)$與損益比成**負相關**

陸、討論與結論

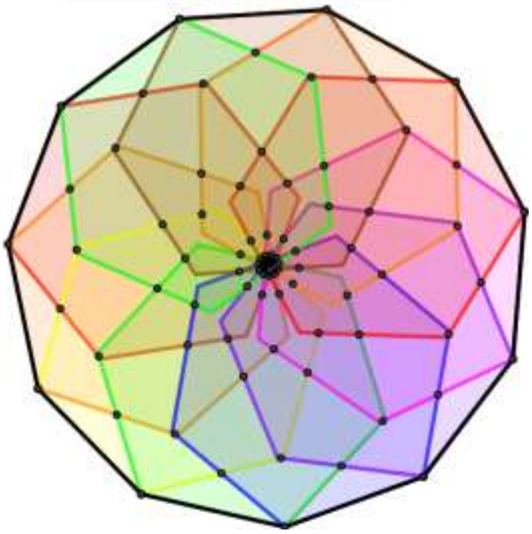
特別值得一提的是，本研究為一原創之作，是我們一步步推敲真理的心血結晶。從起初的不經意的繪圖，到發現可將圖形分為 6 大類探討；而後首先去論證了 $S(m,n)$為空心或交集

的特性，進而發現到 $S(m,n)$形狀亦各有所特色；接著煞費苦心求出 $S(m,n)$面積後，以鋪磁磚問題，一個生活上的實際應用的巧思，來落實了面積通式的具體展現，讓數學的美不再是朦朧之中的縹緲薄紗，而是一種生活中人人皆可心領神會的樸實之美。

另外，我們在思考「大正 m 邊形內接小正 n 邊形」圖形的過程中，也注意到整體圖形具有鑲嵌藝術的視覺之美，而內接小正 n 邊形相互之間的交點多寡，會讓圖形變化出不同層次的視覺感受。



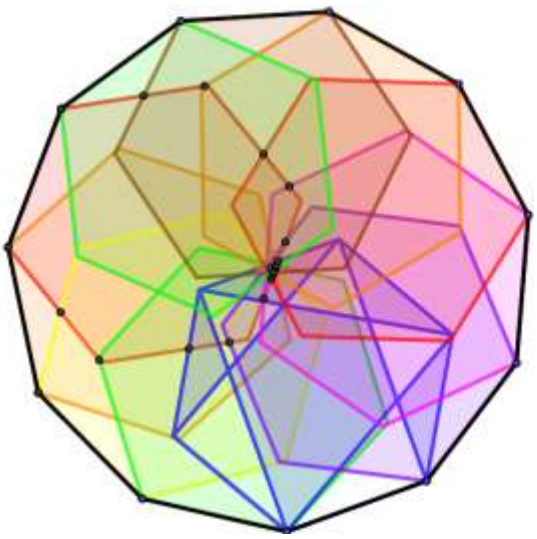
鑲嵌藝術的視覺之美



154 個點（ 交點和頂點 ）

讓圖形變化出不同層次的視覺感受

於是興起我們的好奇心以及藝術風，對一個正多邊形和其他正多邊形的交點個數作探討。如下圖：一個正六邊形到底能與其他正六邊形擦出什麼樣的火花呢？　　經過計算發現，其有 24 個交點，恰為 $n=6$ 的 4 倍！



我們又進而針對兩個正多邊形的位置關係，做了下述探討：

在$(m, n)=(7, 5)$時，

當兩正五邊形為鄰位關係時，其交點個數為 3

當兩正五邊形為間位關係時，其交點個數為 2

當兩正五邊形為對位關係時，其交點個數為 4

這些數字看似暗藏玄機。然而當隨著 m 值的增加，圖形卻跟著複雜化。我們希望在未來，能夠寫出有關交點個數的一般式，作為如此曼妙規律的最佳詮釋。

柒、參考資料及其他

一、高中數學競賽教程。九章出版社。

二、多邊形與其中重、頂重多邊形之性質探討(第 54 屆全國科展 國中組 數學科。)

三、「三」不轉「六」轉，「六」不轉機器人轉－－－從正多邊形翻轉問題到機器人掃樓梯。(第 55 屆全國科展 國中組 數學科。)

四、層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質(第 56 屆全國科展 高中組 數學科。)

五、正多邊形的圓舞曲(第 58 屆全國科展 國小組 數學科。)

六、高中數學課本第五冊第二章。南一出版社。

七、高中數學課本第六冊第二章。南一出版社。

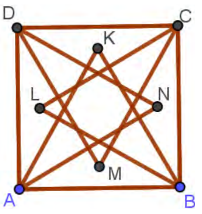
【評語】050401

本研究主要針對大正ｍ邊形內嵌小正ｎ邊形之交集區域作探討。直觀來看，如果小正ｎ邊形之ｎ值太小，交集是空集合。反之，如果小正ｎ邊形之ｎ值很接近ｍ，則產生交集。作者使用三角函數來驗證這個觀點，並求出交集區域之面積公式。至於，當ｍ為奇數時，交集並非正多邊形也可以很直觀從圖形觀察到這個現象，接下來便是數學驗證工作。本件作品計算上由於具有對稱性並不算困難。作品內容完整，但可以再多考慮一些較深度的問題。

作品海報

壹、 研究動機

翻閱高中數學競賽教程一書的時候，發現了一道關於正方形四邊分別內嵌一個正三角形的題目：「(*IMO*.19.1)在已知正方形 *ABCD* 內，作等邊三角形 *ABK*、*CDM*、…………」。



我們做了延伸的思考：大正 m 邊形內嵌小正 n 邊形會是什麼樣的圖形呢？猜想一下：**因為對稱，所以中間交集的圖形大概也是正 m 邊形，或沒有交集！但事實似乎不是我們所想的那麼簡單**。我們使用 *GeoGebra* 繪製許多圖形，發現有的沒有交集、有的交集出正 m 邊形、有的卻會交集出**邊長相等的非正 $2m$ 邊形**，此 **$2m$ 邊形**既非正多邊形，頂點亦不共圓！於是開啟了後續的研究之路。

貳、 研究目的

一、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為交集區域或空心區域。

二、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為一點、正 m 角星形、正 m 邊形或 $2m$ 邊形。

三、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$之面積。

四、n 為奇數或偶數，對應到 $m=2n$、$m>2n$、$m<2n$ 的 6 種情形下，探討鋪磁磚問題。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、*Word*、*Excel*、*Geogebra*

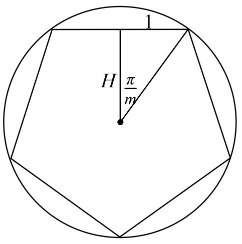
肆、研究方法及過程

定義

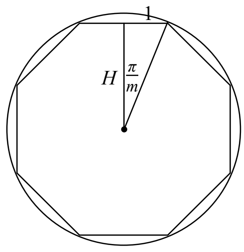
H：外心至大正 m 邊形之一邊的距離。

而無論 m 為奇數或偶數，皆有 $\boldsymbol{H=\cot\frac{\pi}{m}}$。

m 為奇數

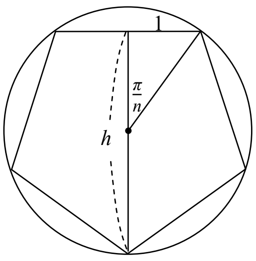


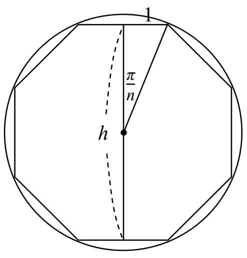
m 為偶數



h：正 n 邊形之對稱軸，h 值分以下兩類。

① n 為**奇數**時：$\boldsymbol{h=\cot\frac{\pi}{2n}}$　② n 為**偶數**時：$\boldsymbol{h=2\cot\frac{\pi}{n}}$

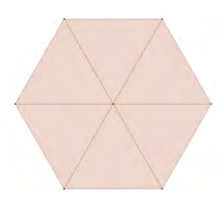
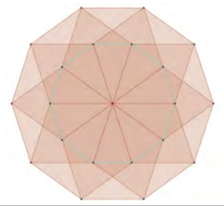
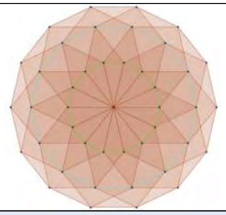




考慮 H 與 h 之大小關係，易知

$$\begin{cases}\text{若}H\le h\text{，則 } S(m, n) \text{ 為交集區域之圖形}\\ \text{若}H>h\text{，則 } S(m, n) \text{ 為空心區域之圖形}\end{cases}。$$

(一)當 n 為奇數且 $m=2n$ 時：

		
S(6, 3)	*S*(10, 5)	*S*(14, 7)

(1)**$S(m, n)$為交集區域之圖形，且圖形為一點**。

證明

∵ $H=h$ ⇒ 以外心為參考點，互為點對稱之兩個小正 n 邊形，其交集區域恰為外心，又所有點對稱組皆恰涵蓋外心，故得證。

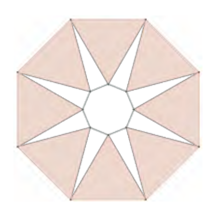
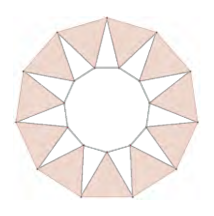
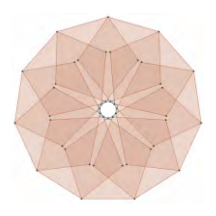
$S(m, n)$之圖形為一點。

(2) **$S(m, n)$面積：**

∵ 交集區域為一點

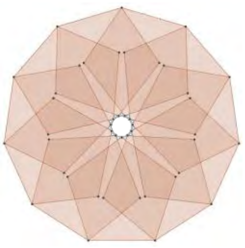
∴ **交集區域 $S(m, n)$面積＝0**

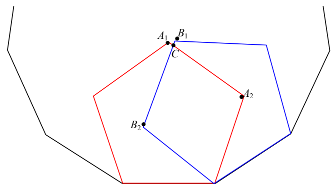
(二)當 n 為奇數且 $m>2n$ 時：

		
S(8, 3)	*S*(11, 3)	*S*(11, 5)

(1)**$S(m, n)$為空心區域之圖形，且為正 m 角星形**。

證明



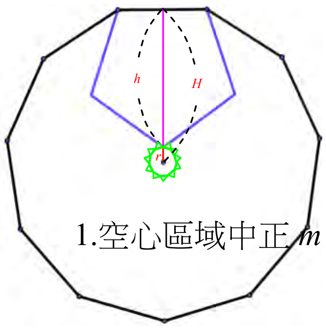


1.$H>h$ ⇒每個小正 n 邊形皆無法涵蓋住外心。

2.考慮兩相鄰小正 n 邊形之頂點 A_1、A_2、B_1、B_2，令 $\overline{A_1A_2}$ 交 $\overline{B_1B_2}$ 於 C，顯然 C 在 $\overline{A_1B_1}$下方，故 A_1、C、B_1 形成一角形。

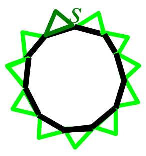
3.再由對稱性易知，**m 個角形即形成了正 m 角星形**。

(2) **$S(m, n)$面積：**



1.空心區域中正 m 邊形面積$=\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}$，

其中 $r=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$

2.  中三角形的面積$=\frac{1}{2}ms^2\sin2\theta$

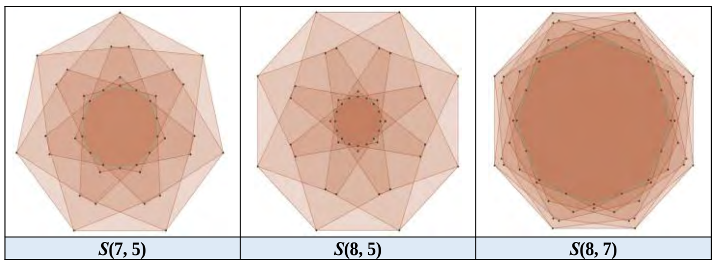
$=mr^2\sin^2\frac{\pi}{m}\cot\theta=mr^2\sin^2\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})$

3. ∴**空心區域 $S(m, n)$面積**

$$\boldsymbol{=\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}[1+\tan\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n})]}，$$

其中 $r=\cot\frac{\pi}{m}-\cot\frac{\pi}{2n}$

(三)當 n 為奇數且 $m<2n$ 時：

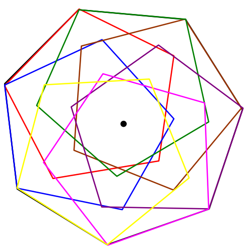


(1)**$S(m, n)$為交集區域之圖形，且圖形為 $2m$ 邊形**。

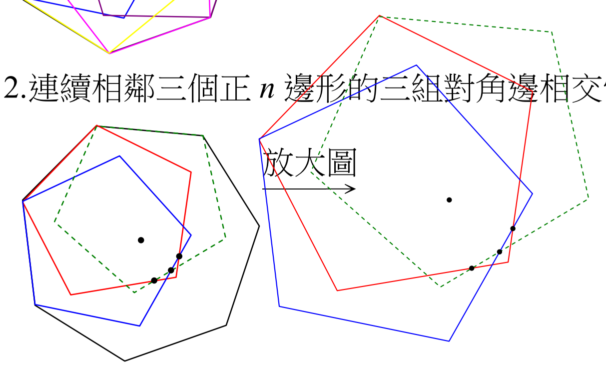
證明

1.$\because$ $H<h$ $\Rightarrow$ 得知每個小正 n 邊形**必蓋過外心**

$\Rightarrow$ 形成交集區域，如下圖。

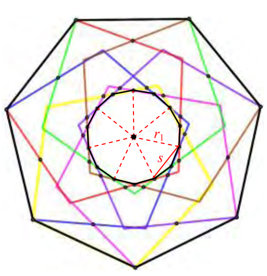


2.連續相鄰三個正 n 邊形的三組對角邊相交情形如下：

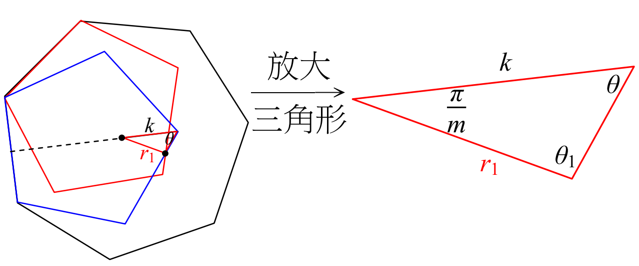


故 $S(m, n)$之圖形為 $2m$ 邊形。

(2) **$S(m, n)$面積：**



1.解 r_1 和 s 值，並可求得 $S(m, n)$面積

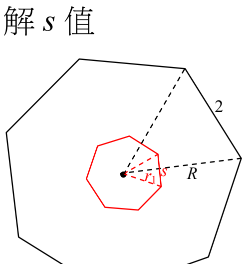


正弦定理：$\dfrac{r_1}{\sin\theta}=\dfrac{k}{\sin\theta_1}$

$$\Rightarrow r_1=\sin\theta\times\frac{k}{\sin\theta_1}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})\times\frac{k}{\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}))}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$$

解 s 值



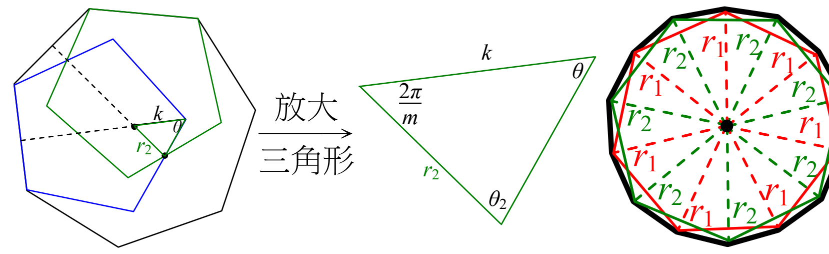
$$\Rightarrow s=\frac{2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}=\frac{2\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{2(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cot\frac{\pi}{m}+\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{2(\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{2n}-1)}{\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n}+1}$$

$\therefore$**交集區域 $S(m, n)$面積$=\dfrac{ms^2}{4}[\cot\dfrac{\pi}{m}+\tan(\dfrac{2\pi}{m}-\dfrac{\pi}{n})]$**

，其中 $s=\dfrac{2(\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{2n}-1)}{\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n}+1}$

2.解 r_2 值，並利用 r_1 和 r_2 亦可求得 $S(m, n)$面積



正弦定理：$\dfrac{r_2}{\sin\theta}=\dfrac{k}{\sin(\pi-\theta-\frac{2\pi}{m})}$

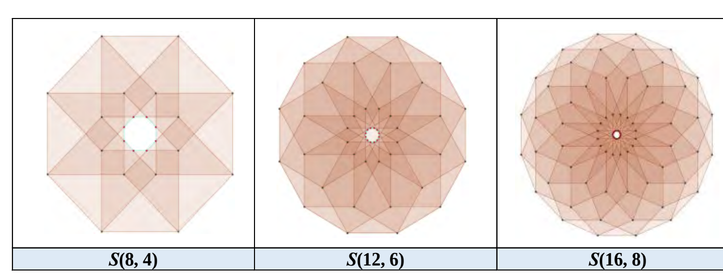
$$\Rightarrow r_2=\sin\theta\times\frac{k}{\sin(\pi-\theta-\frac{2\pi}{m})}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})\times\frac{k}{\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n}))}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$$

$\therefore$**交集區域 $S(m, n)$面積$=mr_1r_2\sin\dfrac{\pi}{m}$，**

其中 $r_1=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$、$r_2=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n}-\cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{2\pi}{m}-\frac{\pi}{n})}$

(四)當 n 為偶數且 $m=2n$ 時：



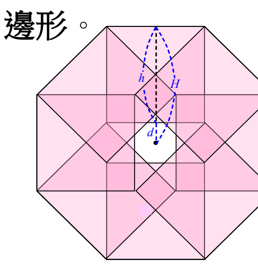
(1)**$S(m, n)$為空心區域之圖形，且圖形為正 m 邊形**。

證明

1.$H>h\Rightarrow$每個小正 n 邊形**皆無法涵蓋住外心**。

2.觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻**平行其底邊之一邊**，故得證 **$S(m, n)$之圖形為正 m 邊形**。

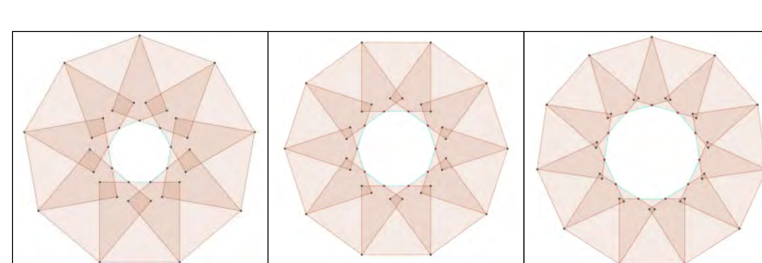
(2) **$S(m, n)$面積：**



$\because d=H-h=\cot\dfrac{\pi}{m}-2\cot\dfrac{\pi}{n}$

$\therefore$**空心區域 $S(m, n)$面積$=md^2\tan\dfrac{\pi}{m}$，其中 $d=\cot\dfrac{\pi}{m}-2\cot\dfrac{\pi}{n}$**

(五)當 n 為偶數且 $m>2n$ 時：



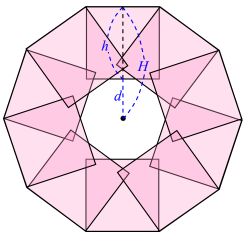
(1)**$S(m, n)$為空心區域之圖形，且圖形為正 m 邊形**。

證明

1.$H>h\Rightarrow$每個小正 n 邊形皆無法涵蓋住外心。

2.觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻平行其底邊之一邊，故得證 $S(m, n)$之圖形為正 m 邊形。

(2) **$S(m, n)$面積：**

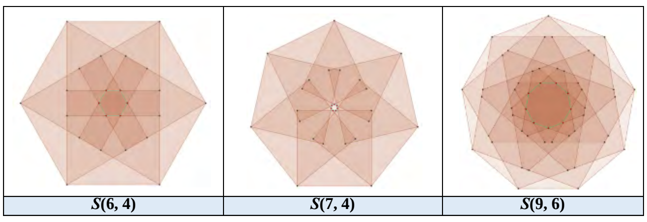


$\because d = H - h = \cot\frac{\pi}{m} - 2\cot\frac{\pi}{n}$

$\therefore$**空心區域 $S(m, n)$面積$= md^2\tan\frac{\pi}{m}$，**

其中 $d = \cot\frac{\pi}{m} - 2\cot\frac{\pi}{n}$

(六)當 n 為偶數且 $m < 2n$ 時：



$S(6, 4)$　$S(7, 4)$　$S(9, 6)$

(1)唯獨 **$S(7, 4)$為空心區域之圖形，且圖形為正七邊形**；其餘狀況皆有 **$S(m, n)$為交集區域之圖形，且圖形為正 m 邊形**。

證明

對於 $S(7, 4)$：

1.$H > h \Rightarrow$每個小正方形**皆無法涵蓋住外心**。

2.觀察圖中 7 個正方形，對於 $S(7, 4)$皆貢獻平行其底邊之一邊，故得證 **$S(7, 4)$為正七邊形**。

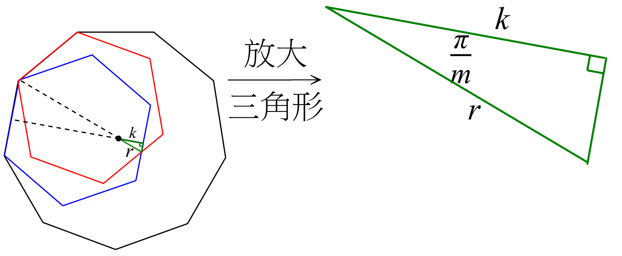
對於其餘之 $S(m, n)$：

1.$H < h \Rightarrow$每個小正 n 邊形**必蓋過外心**

$\Rightarrow$形成交集區域

2.觀察圖中 m 個正 n 邊形，對於 $S(m, n)$皆貢獻平行其底邊之一邊，故得證 **$S(m, n)$為正 m 邊形**。

(2) **$S(m, n)$面積：**



$k = h - H = 2\cot\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{m} \Rightarrow r = \dfrac{2\cot\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{m}}$

$\therefore$**交集區域 $S(m, n)$面積$= \frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}$，**

其中 $r = \dfrac{2\cot\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{m}}$

專論：鋪磁磚問題

今有某工人，欲鋪設一塊邊長為 2 之大正 m 邊形之地。該工人希望以每邊內接一個邊長同樣為 2 之小正 n 邊形磁磚來鋪這塊地。

而定義**損益值**為(損失面積＋空心面積)，且**損益比**為：$\dfrac{\text{損益值}}{\text{大正}m\text{邊形之面積}}$，則損益比越小，即代表該工程越符合經濟效益。

伍、研究結果與討論

一、n 為奇數或偶數，對應到 $m = 2n$、$m > 2n$、$m < 2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為交集區域或空心區域。

分類		$S(m, n)$
n 為奇數	$m = 2n$	交集區域
	$m > 2n$	空心區域
	$m < 2n$	交集區域
n 為偶數	$m = 2n$	空心區域
	$m > 2n$	空心區域
	$m < 2n$	交集區域 除 **$S(7, 4)$為空心區域**

二、n 為奇數或偶數，對應到 $m = 2n$、$m > 2n$、$m < 2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$為一點、正 m 角星形、正 m 邊形或 $2m$ 邊形。

分類		$S(m, n)$
n為奇數	$m = 2n$	一點
	$m > 2n$	正m角星形
	$m < 2n$	$2m$邊形
n為偶數	$m = 2n$	正m邊形
	$m > 2n$	正m邊形
	$m < 2n$	正m邊形

三、n 為奇數或偶數，對應到 $m = 2n$、$m > 2n$、$m < 2n$ 的 6 種情形下，探討 $S(m, n)$之面積。

分類		$S(m, n)$面積
n 為奇數	$m = 2n$	0
	$m > 2n$	$\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}[1 + \tan\frac{\pi}{m}\tan(\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n})]$，其中 $r = \cot\frac{\pi}{m} - \cot\frac{\pi}{2n}$
	$m < 2n$	$\frac{ms^2}{4}[\cot\frac{\pi}{m} + \tan(\frac{2\pi}{m} - \frac{\pi}{n})]$，其中 $s = \dfrac{2(\tan\frac{\pi}{m}\cot\frac{\pi}{2n} - 1)}{\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n} + 1}$
		$mr_1r_2\sin\frac{\pi}{m}$，其中 $r_1 = \dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n} - \cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{n})}$、$r_2 = \dfrac{\cos\frac{\pi}{n}(\cot\frac{\pi}{2n} - \cot\frac{\pi}{m})}{\cos(\frac{2\pi}{m} - \frac{\pi}{n})}$
n 為偶數	$m = 2n$	$md^2\tan\frac{\pi}{m}$，其中 $d = \cot\frac{\pi}{m} - 2\cot\frac{\pi}{n}$
	$m > 2n$	$md^2\tan\frac{\pi}{m}$，其中 $d = \cot\frac{\pi}{m} - 2\cot\frac{\pi}{n}$
	$m < 2n$	$\frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}$，其中 $r = \dfrac{2\cot\frac{\pi}{n} - \cot\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{m}}$

四、n 為奇數或偶數，對應到 $m = 2n$、$m > 2n$、$m < 2n$ 的 6 種情形下，探討鋪磁磚問題。

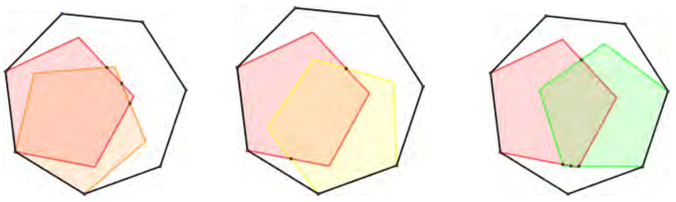
(一)：(m,n)與損益比**無關**

(三)、(六)：(m,n)與損益比成**正相關**

(二)、(四)、(五)：(m,n)與損益比成**負相關**

陸、 討論與結論

我們又進而針對兩個正多邊形的位置關係，做了下述探討：在$(m, n) = (7, 5)$時，



鄰位：3 個交點　間位：2 個交點　對位：4 個交點

希望在未來，我們能夠寫出有關**交點個數**的一般式，作為如此曼妙規律的最佳詮釋。

柒、參考文獻

一、高中數學競賽教程　。九章出版社。

二、「三」不轉「六」轉，「六」不轉機器人轉——從正多邊形翻轉問題到機器人掃樓梯　。(第 55 屆全國科展　國中組　數學科。)