

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國中組 數學科

第三名

030423

格子點的錯視全滿

學校名稱：新北市立永和國民中學

作者： 國二 黃炳君	指導老師： 徐佳安
---------------	--------------

關鍵詞：群、*Burnside* 定理、錯視全滿

## 摘要

本研究的内容關於：在一個三維的立方格子點(請見名詞定義)，在其中連接格線，使得從每一面透視，行與列都被填滿格線，我們稱為錯視全滿。

我們想要找到達成錯視全滿的方法、方法數與旋轉下的相異方法數……

對所有  $n$  立方格子點，我們得出以下的結果：

- (一) 達成錯視全滿至少需  $3n$  條格線，且必有  $3n$  格線達成的情況。
- (二) 收集  $n$  錯視點集中所有點的骨架，必達成錯視全滿。稱為錯視解。
- (三) 用 *Burnside* 定理製作程式，計算「旋轉下相異錯視解數」。
- (四) 使用 *Burnside*，計算「旋轉下相異錯視解數」的一般式、遞迴式。

## 壹、前言

### 一、研究動機

上學期生科課中，曾提到透視圖的作法，因而聯想到，如果要讓一個  $n^3$  立方格子點在透視的情況下，從六面垂直的看，都是連線連滿的，則如何作圖，才能使格子點之間的連線（連線須長度必為  $n - 1$ ，並且不能連斜線）最少呢？又有幾種方法連線？考慮鏡射、旋轉的情況又有幾種呢？

### 二、研究目的

- (一) 達到最佳錯視全滿的基礎技巧（ $n$  個骨架的錯視解）。
- (二) 考慮旋轉下，計算錯視解數。
- (三) 考慮旋轉下，錯視解數的一般式。

### 三、研究設備及器材

紙、筆、電腦、*GeoGebra*、*C* 語言

## 貳、研究結果與過程

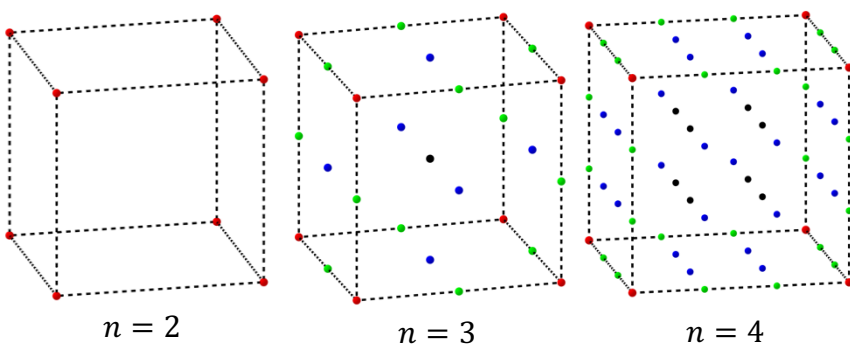
由於本研究的證明過程大多使用直觀幾何操作，以及需要比較空間中的點集合相等。因此，我們不採用純文字的證明敘述，而是採用邏輯符號來突顯證明的架構，以利讀者理解。

### 【名詞定義】

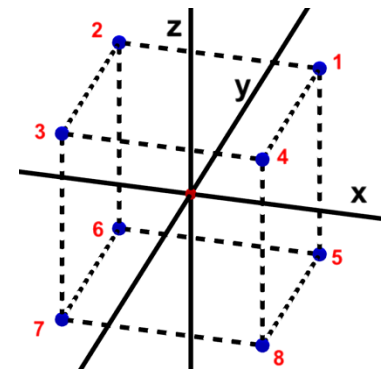
1.  $n$  立方格子點 ( $C_n$ ):  $1 < n \in N$ ，給定一邊長為  $n - 1$  單位，以原點為中心的正立方體 (如圖 1.2)， $C_n$  收集立方體邊界或內部的格點，任一格點以「立方體的第七卦限角  $p\left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2}\right)$ 」(如圖 1.1) 為參考點時， $x$ 、 $y$ 、 $z$  位置分量皆為整數，

$$C_n := \{(x, y, z)_p \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ and } 0 \leq x, y, z \leq n - 1\}$$

2.  $n$  立方體：給定一  $n$  立方格子點，則邊長為  $n - 1$  單位，以原點為中心的立方體，稱為  $n$  立方體。
3. 第一~八卦限角：給定一  $n$  立方體，立方體的八個角，以其所在的卦限，命名為第一~八卦限角，如圖 1.2。

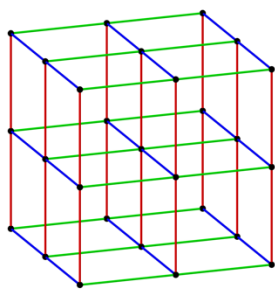


▲圖 1.1

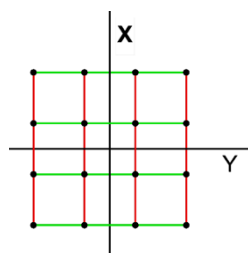


▲圖 1.2

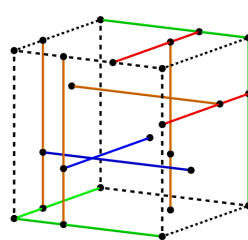
4. 格線： $n$  立方格子點中任兩點的連線，若平行  $x, y, z$  軸其中之一，並長度  $n - 1$  單位，則稱為格線。圖 1.3 為  $n = 3$  時所有的格線。
5. 錯視全滿：在一  $n$  立方格子點中，某些格線集合，由  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸的方向透視， $n$  行  $n$  列都連滿格線，稱為錯視全滿，如圖 1.4 (a)。圖 1.4 (b)，為  $n = 4$  時一種錯視全滿情況。
6. 最佳錯視全滿：以最少條格線達成錯視全滿的情況。
7. 骨架： $n$  立方格子點  $C_n$  中，通過任一格子點  $p$  的三條格線，稱為點  $p$  骨架。如圖 1.5。



▲圖 1.3

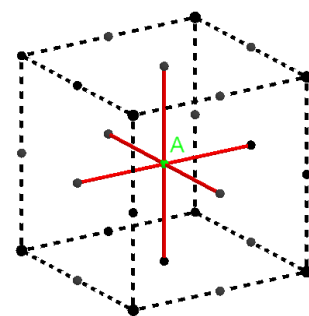


(a) 透視



(b) 錯視全滿

▲圖 1.4



▲圖 1.5

## 一、達到最佳錯視全滿的基礎技巧（錯視解）

**性質 1.1** 任一  $n$  立方格子點達成錯視全滿，至少需要  $3n$  條格線。

證明.

給定一  $n$  立方格子點的格線集合  $U_n$ ， $U_n$  達成錯視全滿。

定義  $U_{nx} = \{u \in U_n | u \text{ 平行 } x \text{ 軸}\}$ ，同理  $U_{ny}$ 、 $U_{nz}$ ，很明顯的  $U_n = U_{nx} \sqcup U_{ny} \sqcup U_{nz}$  因此  $|U_n| = |U_{nx}| + |U_{ny}| + |U_{nz}|$ 。

聲稱： $|U_{nx}|, |U_{ny}|, |U_{nz}| \geq n$ ，因此  $|U_{nx}| + |U_{ny}| + |U_{nz}| \geq 3n$ 。

若  $|U_{nx}| < n$ 。由  $y$  軸透視  $U_n$ ，不失一般性，設「行」平行  $x$  軸，則最多有  $|U_{nx}|$  行格線，少於  $n$  行格線，與假設「 $U_n$  達成錯視全滿」矛盾。

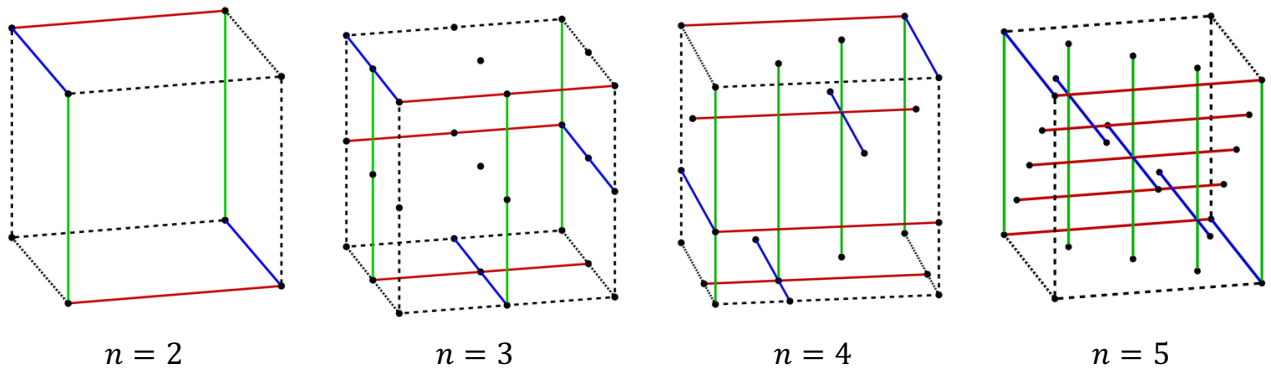
同樣，若  $|U_{ny}| < n$  和  $|U_{nz}| < n$  皆導致矛盾，因此  $|U_{nx}|, |U_{ny}|, |U_{nz}| \geq n$ ，所以  $|U_{nx}| + |U_{ny}| + |U_{nz}| \geq 3n$ 。

□

有了**性質 1.1**，就要看看對於所有的  $n$  立方格子點，是否必存在  $3n$  條格線的格線集合，達成錯視全滿。若存在，則  $3n$  條格線達成錯視全滿，為最佳錯視全滿。

於是我們嘗試了一下，發現基本上所有的  $n$  立方格子點，都存在多組  $3n$  條格線達成錯視全滿。

**範例 1.1** 以下幾張圖，為  $n = 2, 3, 4, 5$  的立方格子點中的格線集合，皆以  $3n$  條格線達成錯視全滿。

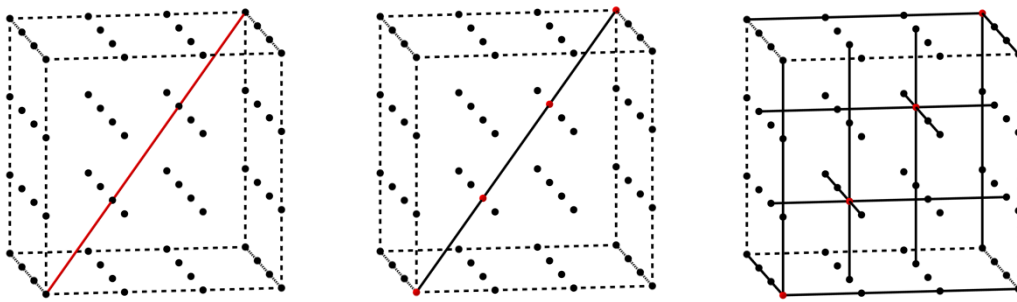


▲圖 2.1

**性質 1.2** 給定一  $n$  立方格子點集合  $\mathbb{C}_n$ ，必存在  $3n$  條格線達成錯視全滿的情況。

策略.

只要找到一個合適的方式，在所有  $n$  立方格子點排列  $3n$  條格線，達成錯視全滿便能得證。方法為：「選擇一條最長的對角線，其上所有點的骨架，形成解。如圖 2.2」



▲圖 2.2

證明.

給定一  $n$  立方格子點集合  $\mathbb{C}_n$ ，將第一卦限角、第七卦限角連線  $L$ ，定義集合  $A := \{p \in L | p \in \mathbb{C}_n\}$  收集連線上的  $n$  個格點，集合  $U = \{u | u \text{ 屬於點 } p \text{ 的骨架}, p \in A\}$ 。

由於投影不改變點和線的結合性，格點集合  $A$  的  $n$  格點，投影到對角線上的  $n$  格點，如圖 2.3 (a)

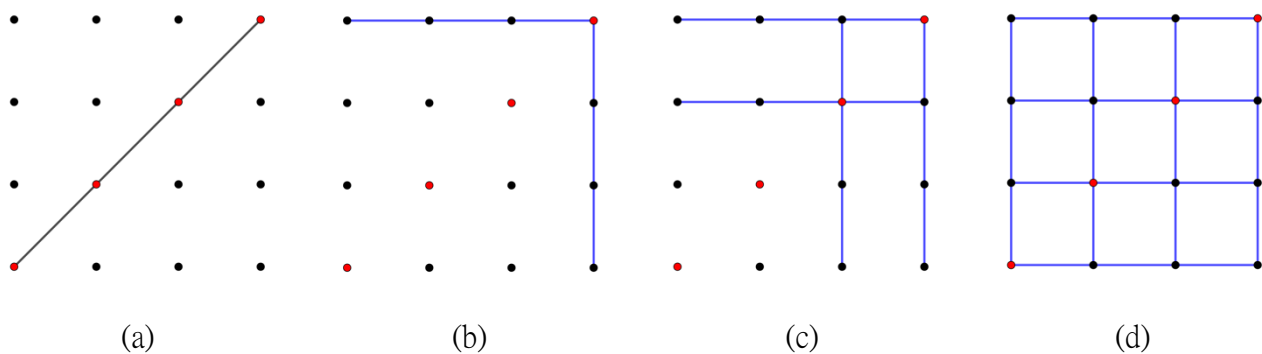
$\Rightarrow n$  行  $n$  列都有格點屬於  $A$

$\Rightarrow$  將集合  $U$  投影在此面上，可得出  $n$  行  $n$  列都有格線，如圖 2.3 (b)、(c)、(d)。

$\Rightarrow$  集合  $U$  達成錯視全滿。

集合  $U$  的大小為  $3n$ ，且達成錯視全滿，因此達成最佳錯視全滿。

□



▲圖 2.3

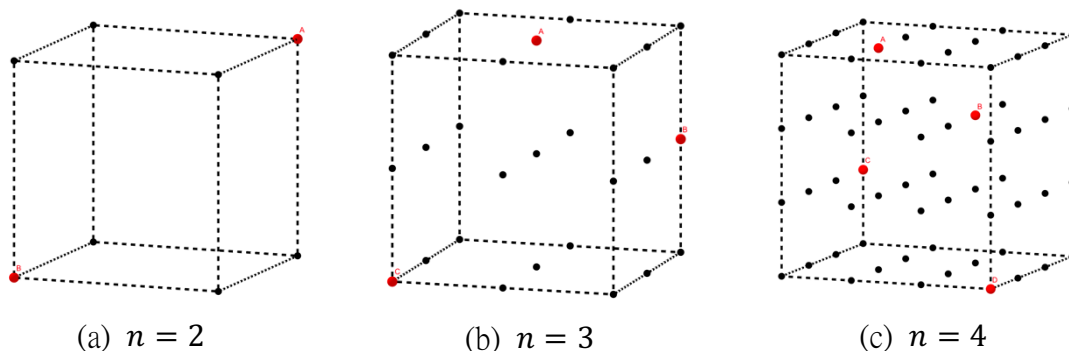
**定義 1.1 (錯視點集合  $X_n$ )** 定義集合  $X(n)$  從邊長為  $n$  的立方格子點中取  $n$  個點，使得此一點集中，任兩點的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  座標皆互不相同

$$X(n) := \{p \in \mathbb{C}_n \mid \text{given any } p(x, y, z), q(\alpha, \beta, \gamma) \in X(n), x \neq \alpha, y \neq \beta, z \neq \gamma\}$$

稱  $X(n)$  為錯視點集合，或稱  $n$  錯視點集合。如圖 2.4。

定義集合  $\mathbb{X}(n) := \{X(n) \mid X(n) \subset \mathbb{C}_n\}$  收集所有  $X(n)$ 。

嘗試了一些其他解法，發現對角線方法，只是一小部分的最佳錯視全滿情況，因此得到了以下的性質。



▲圖 2.4

**定義 1.2 (錯視性質)** 給定多個點  $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{C}_n$ ，若滿足以下兩條件之一，(事實上條件 1、2 互為充份必要條件) 則稱這  $k$  個點具有錯視性質：

1. 若存在一  $n$  錯視點集合，使得  $p_1, p_2, \dots, p_k \in n$  錯視點集合。
2. 給定任兩點  $p_i(x, y, z), p_j(\alpha, \beta, \gamma), 1 \leq i < j \leq k$ ，則  $x \neq \alpha, y \neq \beta, z \neq \gamma$ 。

**性質 1.3** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定一  $n$  錯視點集合  $X(n) \subset \mathbb{C}_n$ ，定義集合  $U$  收集  $X(n)$  中所有元素的骨架，

$$U = \{u \mid u \text{ 屬於點 } p \text{ 的骨架}, p \in X(n)\}$$

則  $U$  必能達成最佳錯視全滿。

證明.

給定一  $n$  立方格子點，給定一錯視點集合  $X(n)$ ，定義集合  $U$  收集  $X(n)$  中所有元素的骨架， $U = \{u | u \text{ 屬於點 } p \text{ 的骨架}, p \in X(n)\}$ 。如圖 2.5（取用圖 1.10(c)的錯視點集合）。

聲稱：由任一軸透視， $X_n$  中任兩點，互不在同一行或列

給定任兩點  $p(x, y, z)$ 、 $q(\alpha, \beta, \gamma)$  屬於  $X(n)$ 。由  $x$  軸透視後， $p$ 、 $q$  若在同一行（令行平行  $y$  軸），如圖，則找得到一平面  $f$  平行  $xy$  平面，使得  $p$ 、 $q$  兩點皆在  $f$  上，因此  $p$ 、 $q$  的  $z$  軸座標相同，與  $X(n)$  的定義矛盾。

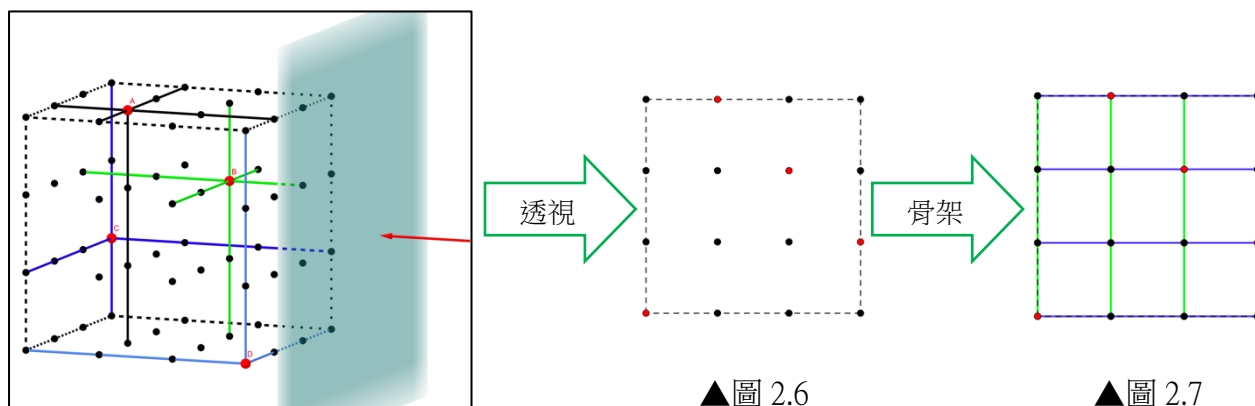
⇒ 由任一軸透視，如圖 2.7， $X(n)$  中任兩點，互不在同一行或列。

⇒ 任一行或列都有格點屬於  $X(n)$ 。如圖 2.7。

聲稱： $U$  達成錯視全滿。

由於任一行或列都有格點屬於  $X(n)$ ，而此格點的骨架，會將這一行或列填滿，因此每一行每一列都連滿格線。如圖 1.11。

由於  $U$  達成錯視全滿，且格線數只有  $3n$  條，因此達成最佳錯視全滿。



▲圖 2.5

▲圖 2.6

▲圖 2.7

**定義 1.3** 給定一  $n$  立方格子點，給定一錯視點集合  $X(n)$ ，定義集合  $U$  收集  $X(n)$  中所有元素的骨架，

$$U = \{u | u \text{ 屬於點 } p \text{ 的骨架}, p \in X(n)\}$$

則  $U$  達成最佳錯視全滿，且稱為「錯視解」或「 $n$  錯視解」。

同樣的，上述方法只是達成最佳錯視全滿的方法之一，還有許多方法，如圖 2.1，但我們現在只關心錯視解的數量。

**性質 1.4** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，則有  $n!^2$  個錯視點集合  $X(n) \subset \mathbb{C}_n$ 。

證明.

給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ 。接下來要計算組成  $X(n)$  的  $n$  個點有幾種選擇

根據定義，以  $n$  立方體的第七卦限角作為參考點， $n$  立方格子點當中任一格點的任一軸座標，只有  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$  共  $n$  個整數做選擇。接下來看看，一個  $n$  錯視點集合，其  $n$  個點，有幾種組成可能。

首先是  $x$  軸座標： $n$  個點，分配  $n$  個  $x$  軸座標，有  $n!$  種配對方式。

再來  $y$  軸、 $z$  軸座標，也是個  $n!$  種配對方式，但由於  $n$  個點不相異，因此除以  $n!$ ，得出  $(n!)^2$ 。

□

**性質 1.5** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，則有  $n!^2$  組  $n$  錯視解。

證明.

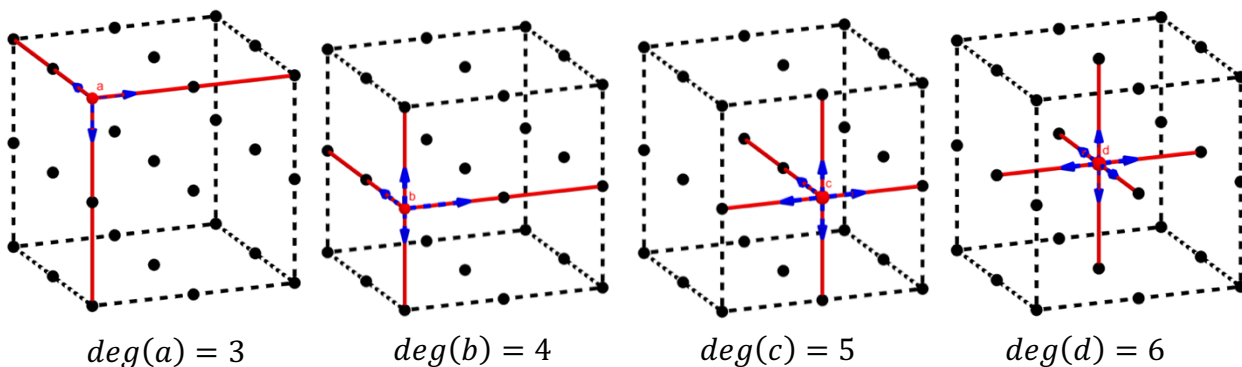
每一個錯視點集合  $X(n) \subset \mathbb{C}_n$ ，皆對應唯一一個  $n$  錯視解，而共有  $n!^2$  個錯視點集合  $X_n \subset \mathbb{C}_n \Rightarrow$  有  $n!^2$  組  $n$  錯視解。

□

**定義 1.4** 給定點  $A$  屬於立方格子點集合， $deg(A)$  為點  $A$  骨架的枝幹數量。由不同方向連出的線段，則為不同枝幹。 $deg$  的設計，是為了分類「錯視解」，以方便計算數量。

**定義 1.5** 為了簡化符號，分別將七種解分別計作  $X_1(n)$ 、 $X_2(n)$ 、 $\dots$ 、 $X_7(n)$ ，而搜集所有  $X_1(n)$  類解的集合記為  $\mathbb{X}(n)$ 。另外  $\bigcup_{i=1}^7 X_i(n) = X(n)$ 。

**備註 1.2** 立方格子點中任一點  $A$ ， $deg(A) = \{3, 4, 5, 6\}$  分別在角落、邊上、面上、內部。如圖 2.8。



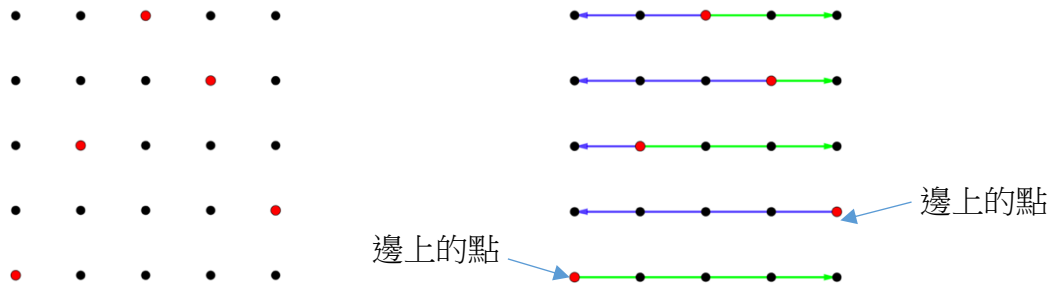
▲圖 2.8



**性質 1.6** 對於邊長為  $n$  的立方格子點集中錯視點集合  $X(n)$ ，所有  $X(n)$  中的點的  $deg$  和必為  $6n - 6$ ，即滿足以下等式， $\sum_{p \in p(n)} deg(p) = \sum_{i \in 1,2,3,\dots,n} deg(p_i) = 6n - 6$ 。

證明.

由於每個點都有平行  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸的枝幹，因此可以先從平行  $z$  軸的方向透視，數平行  $x$ 、 $y$  的枝條，接著再透視  $zy$  平面，數平行  $z$  軸的枝條數。



▲圖 2.9

由定義，我們知道所有錯視點皆不會在同一行或列，因此每一行會有 2 條枝條，但因為在邊上必有兩格點，此兩點各只有一條行上的枝條，如圖 2.9，所以共有  $2n - 2$  條。

很顯然地，平行  $y$  軸、 $z$  軸的枝條也是  $2n - 2$  條。最後得出，共有  $3(2n - 2)$  枝條。 □

由上述引理、以及定義，我們知道所有  $X(n)$  的大小為  $n$ ，且  $deg$  總合皆為  $6n - 6$ 。藉由性質 1.6 和簡單的窮舉，得出下表，依照錯視點集中，不同  $deg$  的點的數量進行分類。

表一 錯視點集的分類

種類 \ $deg$	3	4	5	6	各點 $deg$ 總和
	此 $deg$ 點的數量				
$X_1(n)$	2	0	0	$n - 2$	$3 \times 2 + 6(n - 2) = 6n - 6$
$X_2(n)$	0	2	2	$n - 4$	$4 \times 2 + 5 \times 2 + 6(n - 4) = 6n - 6$
$X_3(n)$	0	3	0	$n - 3$	$4 \times 3 + 6(n - 3) = 6n - 6$
$X_4(n)$	1	1	1	$n - 3$	$3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6(n - 3) = 6n - 6$
$X_5(n)$	1	0	3	$n - 4$	$3 \times 1 + 5 \times 3 + 6(n - 4) = 6n - 6$
$X_6(n)$	0	1	4	$n - 5$	$4 \times 1 + 5 \times 4 + 6(n - 5) = 6n - 6$
$X_7(n)$	0	0	6	$n - 6$	$5 \times 6 + 6(n - 6) = 6n - 6$

**備註 1.3** 在邊長為  $n$  的立方格子點集合中，經過簡單的計算，可得出各類的錯視點集合數量分別如下：

$$\text{第一類：} |\mathbb{X}_1(n)| = 4[(n-2)!]^2$$

$$\text{第二類：} |\mathbb{X}_2(n)| = 30(n-2)(n-3)[(n-2)!]^2$$

$$\text{第三類：} |\mathbb{X}_3(n)| = 8(n-2)[(n-2)!]^2$$

$$\text{第四類：} |\mathbb{X}_4(n)| = 24(n-2)[(n-2)!]^2$$

$$\text{第五類：} |\mathbb{X}_5(n)| = 8(n-2)(n-3)[(n-2)!]^2$$

$$\text{第六類：} |\mathbb{X}_6(n)| = 12(n-2)(n-3)(n-4)[(n-2)!]^2$$

$$\text{第七類：} |\mathbb{X}_7(n)| = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)[(n-2)!]^2$$

**證明.**

由簡單的排列組合，即可算出**備註 1.3** 中七類錯視點集合的數量。

□

以上，皆在討論「錯視解」的情況，達成最佳錯視全滿，除了錯視解，還有許多方式能達成最佳錯視全滿，但目前我們只討論錯視解。

## 二、Burnside 定理

在上一章中，我們已得出構造解的方法，但很明顯的，考慮旋轉與鏡射下，我們一下就能找出多組相同的解。因此，我們希望能知道，究竟有多少組解，是立方格子點集合經過鏡射與翻轉後，依舊互不相同的，這時候我們就需要「Burnside 定理」來協助我們運算。

以下介紹一些將會用到數學名詞。

**定義 2.1** 考慮一個群  $(G,*)$  與一個集合  $X$ ，“ $\cdot$ ” 為一個群  $(G,*)$  與集合  $X$  之間的二元運算，滿足群作用的定義，我們定義幾個名詞：

1. **軌道(orbit,  $M(x)$ )**：對於  $x \in X$ ， $M(x) = \{g \cdot x | g \in G\}$ ，代表所有  $x \in X$  與  $g \in G$  運算出的元素所形成於  $X$  中的子群。
2. **穩定子群(stabilizer,  $Gx$ )**：對於  $x \in X$ ， $Gx = \{g \in G | g \cdot x = x\}$ ，代表所有與  $x$  運算後，使  $x$  不變的子群  $Gx \leq G$ 。
3. **固定點集(fixed point,  $Xg$ )**：對於  $g \in G$ ， $Xg = \{x \in X | g \cdot x = x\}$ ，代表所有與  $g$  運算後，本身不變的子集  $Xg$ 。

**定理 2.1 Burnside's Theorem** 考慮與引理相同的情況，定義  $N$  為軌道數。則

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|。$$

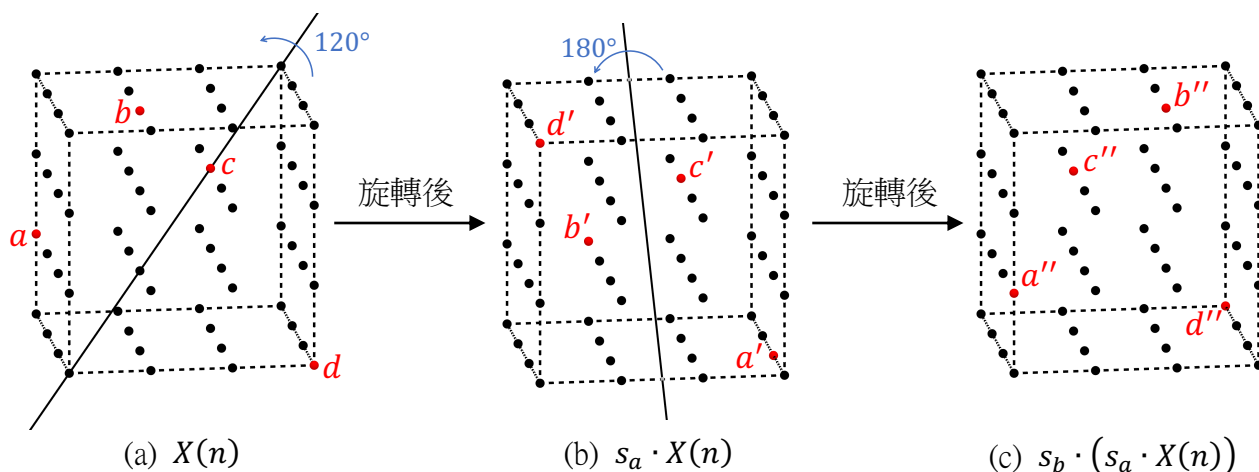
### 三、考慮旋轉下，計算基礎方法下錯視全滿的解數

考慮群  $S$  收集所有的立方體旋轉變換  $s_j$ ，令群  $S = \{s_j | j = 1 \sim (n!)^2\}$ 。

令群  $S$  作用在集合  $\mathbb{X}(n)$  上，給定任一  $s_j \in S$  以及  $X(n) \in \mathbb{X}(n)$ ，定義集合  $s_j \cdot X(n)$  為  $X(n)$  按照  $s_j$  的方式旋轉，則經過一些驗算及窮舉，可發現此運算，滿足群作用的性質。

同上，令群  $S$  作用在集合  $\mathbb{X}(n)$  上，我們知道同軌道的錯視點集合，可以經旋轉作用，變成對方，視為同一解（如圖 3.1。同理錯視解），因此，我們的問題「考慮旋轉下，相異的錯視解數量」，等同計算：

『「立方體的旋轉變換群」作用在「 $(n!)^2$  個  $n$  錯視解」下，有多少「軌道」。』



▲圖 3.1

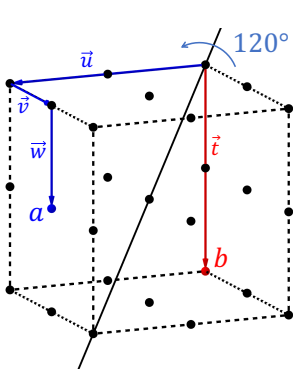
研究初期，由於我們沒有計算旋轉之下相異解數量的好方法，所以曾使用程式暴力計算  $N_1(n) \sim N_7(n)$  以及  $N(n)$  的個數，當  $n = 6$  時，電腦就當掉了，但使用 *Burnside* 定理修改程式後，卻能計算到  $n = 7$  的數量。讀者有興趣可和我們索取程式碼。

由於我們之後成功找出旋轉之下相異解數量的遞迴式與一般式，所以程式的細節就顯得不重要。所以我們只拿程式的數據做之後的驗算，並將偽代碼及數據，放在附錄。

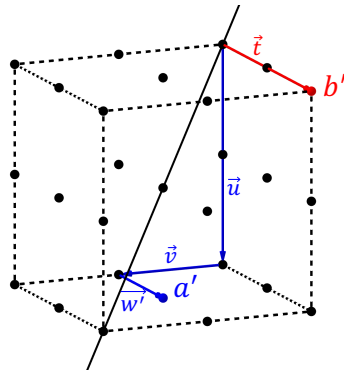
(一) 名詞定義與基本性質

**定義 3.1.1** 給定一集合  $A$  (或點  $p$ )，一立方體旋轉變換  $s_j$ ，定義一些符號：

1. 集合  $s_j \cdot A := \{a \mid a = s_j \cdot p, \text{對於一些 } p \in A\}$ ，也就是  $s_j$  對  $A$  作用。如圖 3.2 (a)。
2. 集合  $A(s_j) := \{s_j^n(A) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 。 $A(s_j)$  稱作「 $A$  的  $s_j$  對稱點集」。如圖 3.2 (b)。
3. 若  $s_j \cdot A = A$  則稱「集合  $A$  為  $s_j$  的固定點」或稱「 $s_j$  固定集合  $A$ 」。如圖 3.3。
4. 立方體旋轉群作用在集合  $\mathbb{X}(n)$  上， $\mathbb{X}(n)_{s_j}$  為  $s_j$  的固定點集。

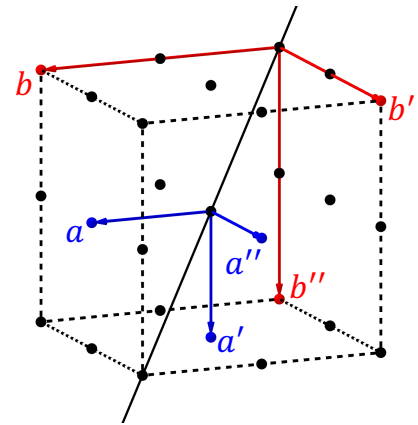


(a) 點  $p$



(b)  $s_a \cdot p$

▲圖 3.2



▲圖 3.3

**定義 3.1.2** 給定  $n$  立方格子點，定義集合  $C_{nx}$  蒐集所有格子點的  $x$  軸座標，同理  $C_{ny}$ 、 $C_{nz}$ ，很明顯的， $C_{nx} = C_{ny} = C_{nz}$ ，定義集合  $C_n = C_{nx} = C_{ny} = C_{nz}$ 。

**性質 3.1.1** 給定一集合  $A \subset C_n$ ，一立方體旋轉變換  $s_j$ 。我們有以下性質：

1. 若集合  $A$  為  $s_j$  的固定點，則  $\forall p \in A, p(s_j) \subset A$ 。
2. 若  $\forall p \in A, p(s_j) \subset A$ ，則集合  $A$  為  $s_j$  的固定點。

證明.

1.  $s_j$  為  $n$  立方格子點的旋轉變換。給一個錯視點集合  $A \subset C_n$ ，且  $A$  為  $s_j$  的固定點。用數學歸納法：

(1) 若點  $p \in A$ ，很明顯的  $s_j^{-1} \cdot p \in s_j(A) = A$ 。

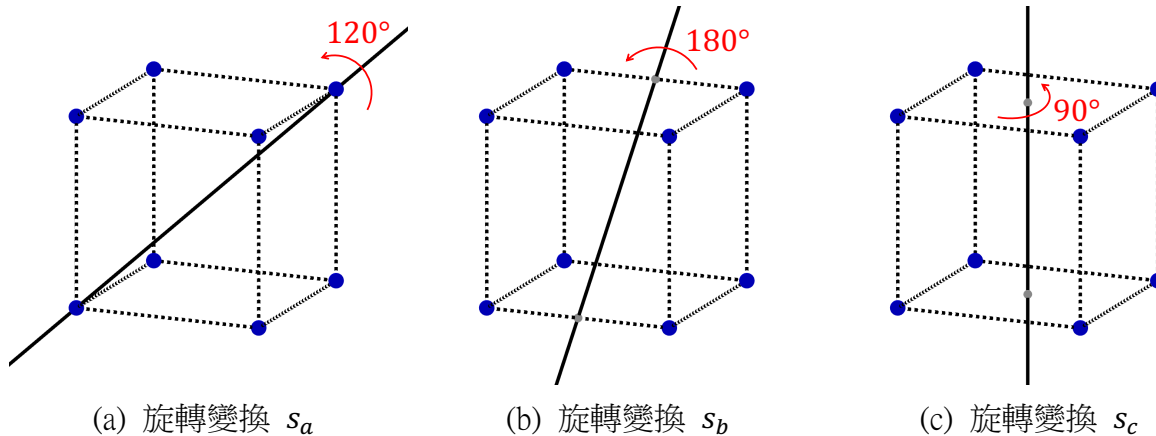
(2) 若點  $s_j^n \cdot p \in A$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則經旋轉後  $s_j(s_j^n \cdot p) = s_j^{n+1} \cdot p \in s_j(A) = A$ 。

所以  $\forall n \in \mathbb{N}, s_j^n \cdot p \in A$  所以  $p(s_j) \subset A$ 。

2.  $s_j$  為  $n$  立方格子點的旋轉變換。給一個點集合  $A \subset \mathbb{C}_n$ ，若  $\forall p \in A, p(s_j) \subset A$ 。根據定義  $s_j(A) = \{s_j \cdot p | \forall p \in A\}$ ，而對所有  $p \in A, p(s_j) \subset A$
- $\Rightarrow$  對所有  $p \in A, s_j \cdot p \in A$
- $\Rightarrow s_j(A) \subset A$ ，且  $|A| = |s_j(A)|$ 。
- 若存在  $a \in A$  但  $a \notin s_j(A)$ ，考慮集合  $A' = \{a \in A | a \notin s_j(A)\}$ ，則  $A = A \cup s_j(A)$
- $\Rightarrow |A| = |A'| + |s_j(A)|$ ，且根據假設， $|A'| > 0 \Rightarrow |A| > |s_j(A)| \rightarrow \leftarrow$
- $\Rightarrow$  不存在  $a \in A$  但  $a \notin s_j(A) \Rightarrow \forall a \in A, a \in s_j(A) \Rightarrow s_j(A) = A$
- $\Rightarrow A$  為  $s_j$  的固定點

□

**備註 3.1.1** 為了證明上的方便，接下來，我們會以  $s_a$ 、 $s_b$ 、 $s_c$  表示圖中的旋轉，分別代表「對角頂點連線」、「對邊中點連線」、「對面重心連線」。  $s_a$  代表以第一象限至第七象限的對角線為軸，如圖 3.4 (a)；  $s_b$  代表第一象限至第二象限的邊中點，與其對邊中點連線為軸，如圖 3.4 (b)；  $s_c$  代表以  $z$  軸為軸，如圖 3.4 (c)。另外，我們也計算出這三種旋轉矩陣，得出三種旋轉的一些性質，如下表。

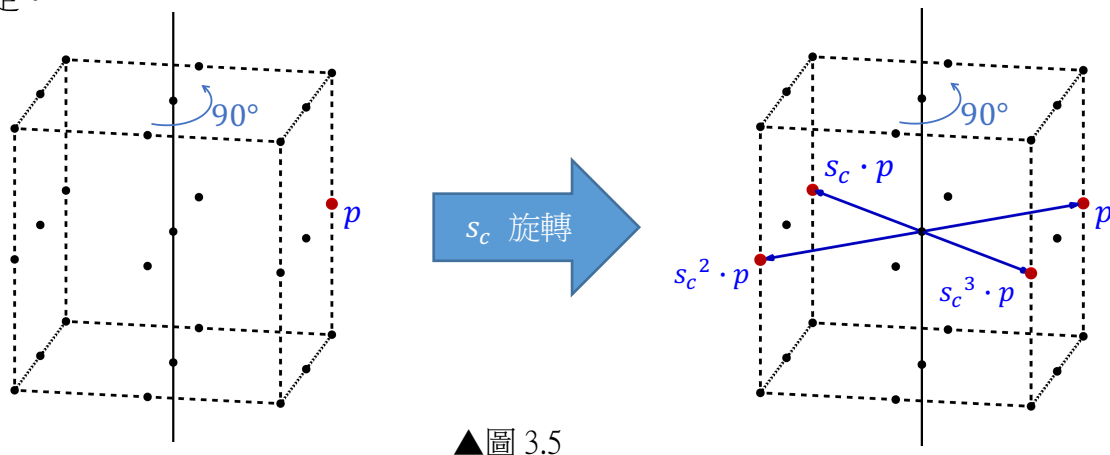


▲圖 3.4

表 2.1 三種標準旋轉變換之性質

	標準旋轉	符號	$s_j \cdot p(x, y, z)$
對角連線	(368)(254)	$s_a$	$s_a \cdot p(x, y, z) = p'(y, z, x)$
對邊中心連線	(12)(35)(46)(78)	$s_b$	$s_b \cdot p(x, y, z) = p'(-x, z, y)$
對面重心連線	(1234)(5678)	$s_c$	$s_c \cdot p(x, y, z) = p'(-y, x, z)$

接下來將旋轉變換  $s_c$  排除計算。從圖 3.5 中可以看出， $X(n)$  中任一格點  $p$  被  $s_c$  旋轉後， $z$  軸座標不變，因此  $s_c \cdot p, s_c^2 \cdot p, s_c^3 \cdot p$  不存在於錯視點集合，因此不會存在  $X(n)$  被  $s_c$  固定。



▲圖 3.5

**備註 3.1.2** 立方體旋轉群，對集合  $\mathbb{X}_n = \{X_i(n) | i = 1 \sim n!^2\}$  作用時， $s_c$  的固定點集為空集合  $\Leftrightarrow |\mathbb{X}_{n_{s_c}}|$  為零。

證明.

給定一  $n$  錯視點集合  $X_n$  ( $n > 1$ )，若  $X_n$  為  $s_j$  的固定點，若點  $p(x, y, z)$  屬於  $X_n$ ，根據 4.1.2 引理，點  $p$  的對稱點集  $p(s_c)$  包含於  $X_n \Rightarrow$  點  $s_c \cdot p = p'(-y, x, z)$  屬於  $X_n$ 。

$\therefore X(n)$  是錯視點集合

$\therefore$  若有兩點屬於  $X(n)$ ，其任意軸座標相同，則兩點必相等。

$\therefore \forall p \in X_n, p(x, y, z) = p'(-y, x, z)$ ，因此  $\begin{cases} x = -y \\ y = x \end{cases}$

$\therefore \forall p(x, y, z) \in X_n, x = y = 0 \Rightarrow \forall p(x, y, z), q(x', y', z') \in X_n, x = x' \text{ and } y = y' \rightarrow \leftarrow$

不存在  $X_n$  為  $s_j$  的固定點  $\Rightarrow |\mathbb{X}_{n_{s_c}}| = 0$

□

**定義 3.1.3** 給定  $m$  個點  $k_1(x_1, y_1, z_1), k_2(x_2, y_2, z_2), \dots, k_m(x_m, y_m, z_m)$  屬於  $\mathbb{C}_n$ ， $m < n$ ，定義集合  $M \subset \mathbb{C}_n$

$$M := \{p(x, y, z) | p \in \mathbb{C}_n, \exists i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m \text{ s.t. } x \neq x_i \text{ and } y \neq y_i \text{ and } z \neq z_i\}$$

稱  $M$  為點  $k_1(x_1, y_1, z_1), k_2(x_2, y_2, z_2), \dots, k_m(x_m, y_m, z_m)$  的  $n$  錯視補集。

**定義 3.1.4** 給定一  $n$  立方體，定義旋轉變換  $s_a$  的編號中心點為第七象限角，點  $n_a = \left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2}\right)$ ；旋轉變換  $s_b$  的編號中心點為點  $n_b = \left(0, -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2}\right)$ 。

### (三) 考慮旋轉下，計算相異解的數量遞迴式

根據 *Burnside* 定理，要計算軌道數，就要將三大類旋轉變換，固定點集  $X_{n_{s_j}}$  的大小算出通式，才能利用 *Burnside* 定理中的「 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$ 」算出錯視解的通式。

計算出，所有旋轉變換的固定點集大小，或是所有  $n$  錯視點集合的穩定子群大小。計算  $(n!)^2$  個  $X(n)$  的穩定子群大小，較為麻煩，因此，接下來，要來計算穩定子群的大小。

很顯然的，「對角連線、對邊中點連線、對面重心連線」三類旋轉軸，都可以用  $s_a$ 、 $s_b$ 、 $s_c$  代替，因此，計算  $s_a$ 、 $s_b$ 、 $s_c$  的固定點集大小，即可推出所有旋轉的固定點集大小。

給定旋轉變換  $s_t$  為  $s_a$  或  $s_b$ ，以及  $n$  立方格子點，我們的想法如下：

給定點  $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \dots, p_m(x_m, y_m, z_m)$  屬於  $n$  立方格子點，這幾個點被  $s_t$  固定，且具有錯視性質，如圖 3.6 (a)。

$n$  立方格子點中，將所有與這  $m$  個點聯集後，破壞錯視性質的點拿走，如圖 3.6 (b)。其實就是取這  $m$  個點的錯視補集。

如圖 3.6 (b)，對於所有  $p_i, i = 1 \sim m$ ，通過點  $p_i$ ，且與三軸之一垂直的面上的點，就是我們所要拿走的點。因為每次都是三個面、三個面（互相垂直）的取走，如圖，因此取走所有的點後，令集合  $M$  收集剩下的點，

$$M = \{m(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}_n \mid \alpha \neq x_i, \beta \neq y_i, \gamma \neq z_i, \forall i \in 1 \sim m\}$$

其實就是錯視補集（請見定義 3.1.3）。

集合  $M$  形成一個長方體，如圖 3.6 (c)、(d)，但是每邊的「格點」數相同，為  $n - m$ ，且被  $s_t$  固定。

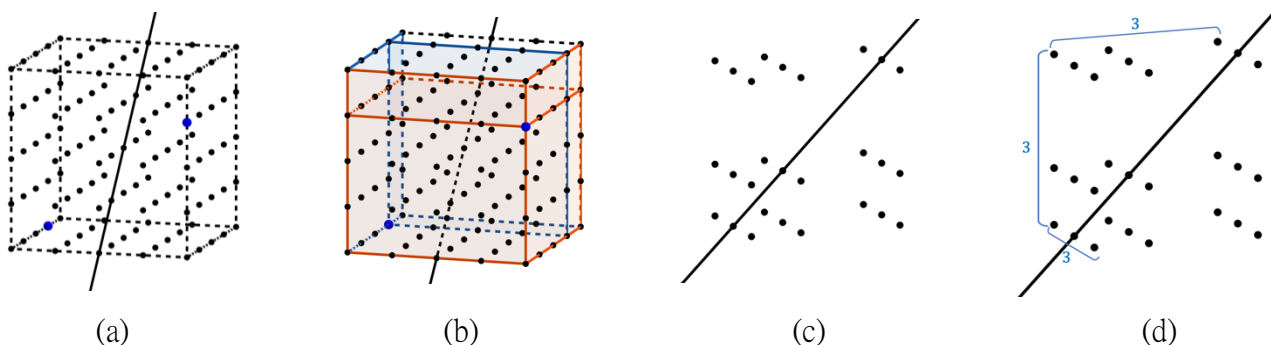
我們猜想（此猜想也就是之後的性質）：

1. 若把集合  $M$  看成  $(n - m)$  立方格子點，其中被  $s_t$  固定的錯視點集合，與被  $s_t$  固定的  $X(n - m)$  的數量相同。
2. 集合  $M$  中任一被  $s_t$  固定的「類錯視點集合」（具有錯視性質的  $n - m$  個點），與

$p_1, p_2, \dots, p_m$  聯集，變成被  $s_t$  固定的  $X(n)$ 。

若上面兩個猜想成立，則包含  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ，且被  $s_t$  固定的  $X(n)$ ，有  $|X(n)_{s_t}|$  個。

其中猜想一最難證明，因此，我們找到一個映射，能將每個集合  $M$  中被  $s_t$  固定的「類錯視點集合」，與一個被  $s_t$  固定的  $X(n-m)$  一對一對應。



▲圖 3.6

**定義 3.2.1** 給定一點集合  $A$ ，給定一點  $k(x_k, y_k, z_k)$ ，以點  $k$  對  $A$  編號，則給定任一點  $p = (x_p, y_p, z_p)$  屬於  $A$ ，向量  $\overrightarrow{kp} = (w, u, v)$ ，定義  $p := (a, b, c)_k$

$$|a| = |\{(x_r, y_p, z_p) \in A \mid x_r \in [x_k, x_p]\}|$$

$$|b| = |\{(x_p, y_r, z_p) \in A \mid y_r \in [y_k, y_p]\}|$$

$$|c| = |\{(x_p, y_p, z_r) \in A \mid z_r \in [z_k, z_p]\}|$$

若  $w > 0$ ，令  $a > 0$ ；若  $w = 0$ ，令  $a = 0$ ；若  $w < 0$ ，令  $a < 0$ ，同理  $u, v$  和  $b, c$ 。  
將  $a, b, c$  分別稱為  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸「編號」

以  $x$  軸為例，令向量  $\overrightarrow{kp}$  的  $x$  分量  $(w, 0, 0)$ ，由點  $p$  出發，在此向量上，屬於集合  $A$  的點的數量，與定義 3.2.1 中的集合  $\{(x_r, y_p, z_p) \in A \mid x_r \in [x_k, x_p]\}$ ，其元素個數相同。

**引理 3.2.1** 給定  $m$  個點  $k_1(x_1, y_1, z_1), k_2(x_2, y_2, z_2), \dots, k_m(x_m, y_m, z_m)$  具有錯視性質，屬於  $\mathbb{C}_n$ ， $m < n$ ，令集合  $M \subset \mathbb{C}_n$ ，為這  $m$  個點的錯視補集。

以任一點  $r(x_r, y_r, z_r)$  對  $M$  編號，給定兩點  $p(x_p, y_p, z_p) = (a_p, b_p, c_p)_r$ 、 $q(x_q, y_q, z_q) = (a_q, b_q, c_q)_r \in M$ 。則若  $a_p = a_q$ ，若且唯若  $x_p = x_q$ ；若  $b_p = b_q$ ，若且唯若  $y_p = y_q$ ；若  $c_p = c_q$ ，若且唯若  $z_p = z_q$ 。

證明。

給定  $m$  個點  $k_1(x_1, y_1, z_1), k_2(x_2, y_2, z_2), \dots, k_m(x_m, y_m, z_m)$  具有錯視性質，屬於  $\mathbb{C}_n$ ， $m < n$ 。集合  $M \subset \mathbb{C}_n$ ， $M$  為這  $m$  個點的錯視補集。以任一點  $r(x_r, y_r, z_r)$  對  $M$  編號，給



定兩點  $p(x_p, y_p, z_p) = (a_p, b_p, c_p)_r$ 、 $q(x_q, y_q, z_q) = (a_q, b_q, c_q)_r \in M$ 。

( $\Leftarrow$ )

假設  $x_p = x_q$ ，定義集合

$$A = \{(\alpha, y_p, z_p) \in M \mid \alpha \in [x_r, x_p]\}、B = \{(\beta, y_q, z_q) \in M \mid \beta \in [x_r, x_q]\}。$$

考慮一  $A$  到  $B$  的映射  $f: A \rightarrow B$ ，給定  $(\alpha, y_p, z_p) \in A$  定義  $f((\alpha, y_p, z_p)) = (\alpha, y_q, z_q) \in B$ ，我們要證明它是「一對一滿射」，便能得出  $|A| = |B|$ 。

一對一：略

滿射：給定一  $(\alpha, y_q, z_q) \in B$ ，很顯然的點  $(\alpha, y_p, z_p)$  也必屬於  $A$ 。

若  $(\alpha, y_p, z_p) \notin M$ ，則存在點  $k_i(x_i, y_i, z_i)$  使得  $\alpha = x_i$  or  $y_p = y_i$  or  $z_p = z_i$ 。若  $y_p = y_i \Rightarrow (\alpha, y_q, z_q) \notin B$ ，則導致矛盾，同理  $z_p = z_i$ ；若  $\alpha = x_i \Rightarrow (\alpha, y_p, z_p) \notin M$ ，則導致矛盾。

$$\therefore (\alpha, y_p, z_p) \in M，且 \alpha \in [x_r, x_q] \text{ and } [x_r, x_q] = [x_r, x_p] \Rightarrow \alpha \in [x_r, x_p]$$

$$\therefore (\alpha, y_p, z_p) \in A \text{ 且 } f(\alpha, y_p, z_p) \mapsto (\alpha, y_q, z_q)$$

$$\Rightarrow \forall (\alpha, y_q, z_q) \in B，存在一 (\alpha, y_p, z_p) \in A \text{ 使得 } f(\alpha, y_p, z_p) \mapsto (\alpha, y_q, z_q)$$

由上得出映射  $f$  為一對一滿射  $\Rightarrow |A| = |B|$

$$\Rightarrow \text{根據定義 } a_p = |A| = |B| = a_q$$

$\Rightarrow$  給定兩點屬於  $M$  若  $x$  軸座標相等，則  $x$  軸編號相等。

( $\Rightarrow$ )

假設  $a_p = a_q$ 。若  $x_p \neq x_q$ ，不失一般性，設  $0 < x_p < x_q$ ，根據前述定義  $A、B$ ，存在一點  $\alpha(x_p, y_q, z_q)$ ， $x$  軸座標與點  $p$  相同， $y_q, z_q$ 。

若點  $\alpha(x_p, y_q, z_q) \notin M$ ，則存在點  $k_i(x_i, y_i, z_i)$  使得  $x_p = x_i$  or  $y_q = y_i$  or  $z_q = z_i$ 。若  $x_p = y_i \Rightarrow p(x_p, y_p, z_p) \notin M$ ，則導致矛盾；若  $y_q = y_i \Rightarrow q(x_q, y_q, z_q) \notin M$ ，則導致矛盾，同理  $z_p = z_i$ 。

$\therefore \alpha(x_p, y_q, z_q) \in M$ ，並根據前段結果，點  $\alpha、p$  的  $x$  軸座標相等，可得出  $x$  軸編號相等，令  $\alpha(x_p, y_q, z_q) = (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ ， $a_\alpha = a_p$ 。

考慮集合  $B' = \{(\beta, y_q, z_q) \in M \mid \beta \in [x_r, x_p]\}$ ，很顯然的  $B' \subset B$ ，因此  $|B'| < |B|$ ，

$\Rightarrow$  根據定義  $a_p = a_\alpha = |B'| < |B| = a_q$

$\Rightarrow a_p < a_q$ ，最後與  $a_p$ 、 $a_q$  相等的前提矛盾，得出  $x_p = x_q$ 。

將以上證明對  $y$ 、 $z$  軸的座標、編號討論後，可得出相同結果。

□

**引理 3.2.2** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定旋轉變換  $s_t$  ( $s_a$  或  $s_b$ )，給定一  $\mathbb{C}_n$  的子集合  $M$  具有錯視性質且被  $s_t$  固定， $M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$ 。  
令  $M'$  為  $M$  的錯事補集，以  $n$  立方體的編號中心  $n_t$  編號  $M'$ 。  
給定  $(n-m)$  錯視點集合  $X_{n-m}$ ，以  $(n-m)$  立方體的編號中心  $(n-m)_t$  編號  $X_{n-m}$ 。  
則  $\forall q(a, b, c)_{(n-m)_t} \in X_{n-m}, \exists p(\alpha, \beta, \gamma)_{n_t} \in M' \text{ s.t. } a = \alpha, b = \beta, c = \gamma$ 。

證明.

給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定旋轉變換  $s_t$  ( $s_a$  或  $s_b$ )，給定一  $\mathbb{C}_n$  的子集合  $M$  具有錯視性質且被  $s_t$  固定， $M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$ 。

令  $M'$  為  $M$  的錯事補集，以  $n$  立方體的編號中心  $n_t$  編號  $M'$ 。

給定  $(n-m)$  錯視點集合  $X_{n-m}$ ，以  $(n-m)$  立方體的編號中心  $(n-m)_t$  編號  $X_{n-m}$ 。

先考慮  $s_a$  的情況。

沿著  $x$  軸由負至正，將  $M'$  分成  $n-m$  層，很明顯的，由右至左，每一層的  $x$  軸編號分別為 "0,1,2,3, ..., (n-m-1)"。  $y, z$  軸由負至正，將  $M'$  分層，也是如此。

同樣的，沿著  $x$  軸由負至正，將  $\mathbb{C}_n$  分成  $n-m$  層，很明顯的，由右至左，每一層的  $x$  軸編號分別為 "0,1,2,3, ..., (n-m-1)"。  $y, z$  軸由負至正，將  $\mathbb{C}_n$  分層，也是如此。

由上，可以發現，將  $M'$ 、 $\mathbb{C}_n$  編號後，可以將它們看成集合  $\{0,1,2,3, \dots, (n-m-1)\}^3$ ，因此  $\forall q(a, b, c)_{(n-m)_t} \in X_{n-m}, \exists p(\alpha, \beta, \gamma)_{n_t} \in M' \text{ s.t. } a = \alpha, b = \beta, c = \gamma$ 。

□

為了要讓每個集合  $M$  中的「類錯視點集合」，與一個  $X(n-m)$  對應，我們也要讓每個  $\mathbb{C}_{n-m}$  中的點，能與集合  $M$  中的一個點對應（以相同「編號」做對應），所以才需要此引理。

**引理 3.2.3** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定旋轉變換  $s_t$  ( $s_a$  或  $s_b$ )，給定一  $\mathbb{C}_n$  的子集合  $M$  具有錯視性質且被  $s_t$  固定， $M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$ 。

令  $M'$  為  $M$  的  $n$  錯視補集，以  $n$  立方體的編號中心  $n_t$  編號  $M'$ 。

1. 若  $s_t = s_a$ ，給定點  $p \in M'$ ， $p = (\alpha, \beta, \gamma)_{n_a}$ ，則  $s_a \cdot p = (\beta, \gamma, \alpha)_{n_a}$ 。
2. 若  $s_t = s_b$ ，給定點  $p \in M'$ ， $p = (\alpha, \beta, \gamma)_{n_a}$ ，則  $s_b \cdot p = (-\alpha, \gamma, \beta)_{n_a}$ 。

**證明.**

推論：若  $p \in \mathbb{C}_n \setminus M'$ ， $p = (x, y, z)$ ，則  $s_t \cdot p = \mathbb{C}_n \setminus M' \Rightarrow$  若  $p \in M'$ ， $p = (x, y, z)$ ，則  $s_t \cdot p \in M'$ 。

根據假設， $M$  被  $s_t$  固定。

若點  $p$  任一軸座標與  $M$  中任一點相同，則點  $p$  屬於  $\mathbb{C}_n \setminus M'$ ，因此不難發現  $\mathbb{C}_n \setminus M'$  被  $s_t$  固定。由於  $\mathbb{C}_n \setminus M' \cup M' = \mathbb{C}_n$ ，而  $\mathbb{C}_n$  被  $s_t$  固定，因此可推出  $M'$  被  $s_t$  固定。由上導出推論。

1. 給定點  $p$ ，令  $p = (\alpha, \beta, \gamma)$ 、 $s_a \cdot p = (\alpha', \beta', \gamma')$ ，令向量  $\overline{n_a p} = (w, u, v)$ 。向量  $(-w, 0, 0)$  由點  $p$  出發，令  $(-w, 0, 0) = \overline{kp}$ 。我們定義的編號（集合  $\{(x_r, y_p, z_p) \in M' | x_r \in [n_t, x_p]\}$  的大小），其實就是此向量上， $M'$  的元素個數。

$x$  軸編號——對應—— $(-w, 0, 0) = \overline{kp}$

$y$  軸編號——對應—— $(0, -u, 0)$

$z$  軸編號——對應—— $(0, 0, -v)$

2. 以  $s_t = s_a$  為例：

定義集合  $A = \{(x_r, y_p, z_p) \in M' | x_r \in [n_a, x_p]\}$ ， $|A| = \alpha$ 。

經過一些計算後，旋轉後向量  $\overline{kp}$  變成  $s_a \cdot \overline{kp} = (0, 0, -w)$ ，我們可以判定

$(0, 0, -w) = (0, 0, w')$ ，其中  $\overline{n_a(s_a \cdot p)} = (v', u', w')$ 。

由於旋轉後距離不變；以及旋轉後，集合  $A$  落回  $M'$  的性質，所以  $\overline{kp}$  上屬於  $M'$  的點（集合  $A$ ），旋轉後，都會落在  $s_a \cdot p$  起始的  $(0, 0, -w)$  向量上。由此，可得出  $\gamma' = \alpha$ ，同理  $\alpha' = \beta$ 、 $\beta' = \gamma$ 。

□

**性質 3.2.1** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定旋轉變換  $s_t$  ( $s_a$  或  $s_b$ )，給定一  $\mathbb{C}_n$  的子集合  $M$  具有錯視性質且被  $s_t$  固定， $M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$ 。  
 令  $M'$  為  $M$  的  $n$  錯視補集，以  $n$  立方體的編號中心  $n_t$  編號  $M'$ 。  
 給定  $(n-m)$  錯視點集合  $X_{n-m}$ ，以  $(n-m)$  立方體的編號中心  $(n-m)_t$  編號  $X_{n-m}$ 。  
 定義一映射  $\psi: X_{n-m} \rightarrow M'$ ，滿足  $\psi((a, b, c)_{(n-m)_t}) = (a, b, c)_{n_t} \in \mathbb{C}_n$ 。對所有  $p \in X_{n-m}$ ，我們有  $s_t \cdot \psi(p) = \psi(s_t \cdot p)$ 。

證明.

以  $s_t = s_a$  為例：

給定一點  $p = (x, y, z) \in M'$ ，編號為  $(w, u, v)_{n_a}$ ；令  $s_a \cdot p = p' = (x', y', z')$ ，編號為  $(w', u', v')_{n_a}$ 。

令  $n - m = h$ 。

令  $\psi(p) = q = (a, b, c) \in X_h$ ，編號為  $(w, u, v)_{h_a}$ ；令  $s_a \cdot q = q' = (a', b', c')$ ，編號為  $(w', u', v')_{h_a}$ 。

根據引理 3.2.3， $s_a \cdot \psi(p)$  編號為  $(u, v, w)_{h_a}$ ； $s_a \cdot p$  編號為  $(u, v, w)_{h_a}$ ，因此  $\psi(s_a \cdot p) = (u, v, w)_{h_a}$ ，很明顯的  $s_a \cdot \psi(p) = \psi(s_t \cdot p)$ 。

□

**性質 3.2.2** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定一  $\mathbb{C}_n$  的子集合  $M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_m, y_m, z_m)\}$ ， $M$  具有錯視性質且被  $s_t$  ( $s_b$  或  $s_b$ ) 固定。包含  $M$  且對  $s_t$  固定的  $n$  錯視點集合，共有  $|\mathbb{X}(n-m)_{s_t}|$  個。

討論.

考慮一集合  $O := \{X_n \in \mathbb{X}_n \mid X_n \supset M \text{ 且 } X_n \text{ 被 } s_a \text{ 固定}\}$ ，很明顯的  $|O|$  便是我們所求，我們只要找到一個  $\mathbb{X}(n-m)_{s_t}$ 、 $O$  之間的映射，為一對一滿射。

最後，我們找到性質 3.2.1 中的映射  $\psi$ ：「將  $\mathbb{C}_{n-m}$  與  $M$  的錯視補集  $M'$ ，分別以第七象限角編號，給定一  $X(n-m) \subset \mathbb{C}_n$ ，再給定  $(a, b, c)_{(n-m)_t} \in X(n-m)$ ，定義  $\psi((a, b, c)_{(n-m)_t}) = (a, b, c)_{n_t} \in M'$ 」

考慮一映射  $\Psi: \mathbb{X}(n-m)_{s_t} \rightarrow O$ ，定義為  $\Psi(X(n-m)) = (\psi \cdot X(n-m)) \cup M$ ，我們想要證明： $\Psi: \mathbb{X}(n-m)_{s_t} \rightarrow O$  為一對一滿射，便能證明性質 3.2.2。

整理一下我們要證明的條件，使得  $\Psi: \mathbb{X}(n-m)_{s_t} \rightarrow O$  為一對一滿射：

【值域為  $O$ 】  $\forall X(n-m) \in \mathbb{X}(n-m)_{s_t}$ ，集合  $(\Psi \cdot X(n-m))$  也被  $s_t$  固定且為  $n$  錯視點集合。

【一對一】 *Given any  $X_i(n-m), X_j(n-m) \in \mathbb{X}(n-m)_{s_t}$ , If  $X_i(n-m) \neq X_j(n-m)$ , then  $\psi \cdot X_i(n-m) \neq \psi \cdot X_j(n-m)$ 。*

【滿射】  $\forall X(n) \in O, \exists X(n-m) \in \mathbb{X}(n-m)_{s_t}$  s. t.  $\psi \cdot X(n-m) = X(n)$ 。

證明.

考慮一集合  $O := \{X_n \in \mathbb{X}_n | X_n \supset M \text{ and } X_n \text{ 被 } s_t \text{ 固定}\}$ ， $s_t$  為旋轉變換  $s_a$  或  $s_b$ ，很明顯的  $|O|$  便是我們所求，我們只要找到一個  $\mathbb{X}(n-m)_{s_t}$ 、 $O$  之間的映射，為一對一滿射。

最後，我們找到性質 3.2.1 中的映射  $\psi$ 。

考慮一映射  $\Psi: \mathbb{X}(n-m)_{s_t} \rightarrow O$ ，給定  $X_{n-m} \in \mathbb{X}(n-m)_{s_t}$ ，定義  $\Psi(X_{n-m}) = [\psi(X(n-m))] \cup M$ 。根據引理 3.2.2，給定一  $X(n-m)$ ，對所有點  $p(a, b, c)_{(n-m)_t} \in X(n-m)$ ， $\psi(p)$  都存在於  $\mathbb{C}_n$ 。

$\Rightarrow \psi(X(n-m))$  有定義

$\Rightarrow \Psi(X(n-m))$  有定義

$\Rightarrow \Psi$  對  $\mathbb{X}(n-m)_{s_t}$  中所元素都有意義。

我們想要證明： $\Psi: \mathbb{X}(n-m)_{s_t} \rightarrow O$  為一對一滿射。以下分三部分證明(令  $n-m=h$ )：

【值域為  $O$ 】

給定一錯視點集合  $X(h) \in \mathbb{X}(h)_{s_a}$ 。

- 檢驗  $\Psi(X(h))$  是否被  $s_a$  固定：給定任一點  $p \in \Psi(X(h))$ 。

若  $p \in M$ ，根據假設， $p(s_a) \subset \Psi(X(h))$ 。

若  $p \notin M$

$\Rightarrow p \in \psi(X(h))$

$\Rightarrow p = \psi(q)$ ，對於一些  $q \in X(h)$

根據性質 3.2.1， $\psi(s_a \cdot q) = s_a \cdot \psi(q) = s_a \cdot p$ ，且根據假設  $(s_a \cdot q) \in X(h)$

$$\Rightarrow \psi(s_a \cdot q) \in \psi(X(h))$$

$$\Rightarrow s_a \cdot p \in \psi(X(h))$$

最後得出  $p(s_a) \subset \Psi(X(h)), \forall p \in \Psi(X(h))$ 。

- 檢驗  $\Psi(X(h))$  是否為錯視點集合：

給定任意點  $p, q \in \Psi(X(h))$ ， $p = (a, b, c)_{n_a}$ 、 $q = (\alpha, \beta, \gamma)_{n_a}$ 。

1. 若  $p, q \in M$ ，根據假設， $p, q$  具有錯視性質。
2. 若  $p, q \notin M$ ，則  $p, q \in \psi(X(h))$ ，由於  $\psi$  保持編號相同，因此  $p, q$  的任一軸編號不同  $\Rightarrow$  任一軸座標不同  $\Rightarrow p, q$  具有錯視性質。
3. 若  $p \in M$  而  $q \in \psi(X(h))$ ，根據  $\psi$  的定義， $q$  屬於  $M'$ ， $M'$  為  $M$  錯視補集。根據錯視補集的定義， $p, q$  具有錯視性質。

由上兩點可得出此映射的值域等於或包含於  $O$ 。

### 【一對一】

---

給定  $X_i(h), X_j(h) \in \mathbb{X}(h)_{s_a}$ ，假設  $X_i(h) \neq X_j(h)$ ，則必有一點  $p$  屬於  $X_i(h)$ ，但不屬於  $X_j(h)$ 。

由於  $\psi(p)$  編號與  $p$  相同，若存在點  $\psi(q)$  等於  $\psi(p)$ ，則兩者編號相同  $\Rightarrow p, q$  編號相同  $\Rightarrow p, q$  座標相同。  $\rightarrow \leftarrow$

因此不存在  $\psi(q) \in \psi(X_i(h))$ ，使得  $\psi(q) = \psi(p)$ 。

$$\Rightarrow \psi(X_i(h)) \neq \psi(X_j(h))$$

由上得出  $\Psi, \psi$  為一對一映射。

### 【滿射】

- 給定  $X(n) \in O$ ，必存在一組  $X(h)$ ，使得  $X(n) \cup M = \psi(X(h)) \Rightarrow \Psi(X(h)) = X(n)$ 。

聲稱： $X(h) = \{p(a, b, c)_{n_t} \mid \exists q(\alpha, \beta, \gamma)_{n_t} \in X(n) \text{ s.t. } a = \alpha, b = \beta, c = \gamma\}$ 。

由於映射  $\psi$  保持編號相同，因此  $X(h)$  為  $h$  錯視點集合。

以下證  $s_t$  固定  $X(h)$ 。

- 檢驗  $X(h)$  是否被  $s_t$  固定：

給定一點  $p \in X(h)$ ，根據定義， $\psi(p) \in X(n)$ 。根據性質 3.2.1， $s_t \cdot \psi(p) \in X(n) \Rightarrow s_t \cdot \psi(p) = \psi(s_t \cdot p) \in X(n)$ ，由於  $\psi$  一對一，所以  $s_t \cdot p \in X(h)$ 。並利用數學歸納法，可得出  $p(s_t)$  包含於  $X(h)$ 。由性質 3.1.1 得出  $s_t$  固定  $X(h)$ 。

由上兩點得出  $\Psi$  為一對一映射。

從以上討論，可得出： $\Psi: \mathbb{X}(n-m)_{s_t} \rightarrow O$  為一對一滿射，因此  $|O| = |\mathbb{X}(n-m)_{s_t}|$ 。

□

得出以上性質後，首先我們計算出七類解固定點集合的數量遞迴式。再將七類解合併，得出完整的遞迴式，定義  $N(n)$  為旋轉群作用的相異軌道數。根據奇偶性分成兩類：

1.  $n$  為偶數

$$\begin{aligned} N(n) = & 8[|\mathbb{X}(n-2)_{s_a}| + 2(n-2)(n-3)|\mathbb{X}(n-3)_{s_a}| \\ & + (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)|\mathbb{X}(n-6)_{s_a}|] \\ & + 6[2|\mathbb{X}(n-2)_{s_b}| + 5(n-2)^2(n-3)|\mathbb{X}(n-4)_{s_b}| \\ & + (n-2)^2(n-3)(n-4)^2(n-6)|\mathbb{X}(n-6)_{s_b}|] \end{aligned}$$

2.  $n$  為奇數

$$\begin{aligned} N(n) = & 8[|\mathbb{X}(n-2)_{s_a}| + 2(n-2)(n-3)|\mathbb{X}(n-3)_{s_a}| \\ & + (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)|\mathbb{X}(n-6)_{s_a}|] \\ & + 6[2|\mathbb{X}(n-2)_{s_b}| + 5(n-2)^2(n-3)|\mathbb{X}(n-4)_{s_b}| + 4(n-2)|\mathbb{X}(n-3)_{s_b}| \\ & + 2(n-2)(n-3)^2(n-4)|\mathbb{X}(n-4)_{s_b}| \\ & + (n-2)^2(n-3)(n-4)^2(n-6)|\mathbb{X}(n-6)_{s_b}|] \end{aligned}$$

**性質 3.2.3** 給定一正整數  $n > 1$ ，則

$$|\mathbb{X}(n)_{s_a}| = |\mathbb{X}(n-1)_{s_a}| + (n-1)|\mathbb{X}(n-2)_{s_a}| \quad (s_a \text{ 的固定點集大小})$$

$$|\mathbb{X}(n)_{s_b}| = (n-1)(n-2)|\mathbb{X}(n-3)_{s_b}| \quad (s_b \text{ 的固定點集大小})$$

**證明.**

給定一  $n$  立方格子點，給定一數  $k$  屬於  $C_{nx}$ 。

在  $n$  立方格子點中，有  $n^2$  個點  $x$  軸座標等於  $k$ ，我們用這  $n^2$  個點，將  $\mathbb{X}(n)_{s_t}$  中

的錯視點集合進行分類。

考慮一集合  $K = \{k_i(k, y_i, z_i) | k_i \in C_n, i = 1 \sim n^2\}$ ，給定一點  $k_i \in K$ ，考慮一集合  $K_i = \{X(n) \in \mathbb{X}(n)_{s_t} | k_i \in X(n)\}$ 。給定  $k_i, k_j \in K$ ，若  $i \neq j$ ，則  $K_i \cap K_j = \emptyset$ ，因此

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1 \sim n^2} K_i &= \mathbb{X}(n)_{s_t} \\ \Rightarrow \sum_{i=1 \sim n^2} |K_i| &= |\mathbb{X}(n)_{s_t}| \end{aligned}$$

根據引理，對所有  $k_i \in K$ ， $K_i = \{X(n) \in \mathbb{X}(n)_{s_t} | k_i(s_t) \subset X(n)\}$ 。

1. 首先計算被  $s_a$  固定的  $X(n)$ ：

考慮  $k = \frac{n-1}{2} \in C_{nx}$ ，令集合  $K = \{k_i\left(\frac{n-1}{2}, y_i, z_i\right) | k_i \in C_n, i = 1 \sim n^2\}$ 。

(1) 給定一  $k_i\left(\frac{n-1}{2}, y_i, z_i\right) \in K$ ，若  $y_i = z_i$  或  $y_i = \frac{n-1}{2}$  或  $z_i = \frac{n-1}{2}$ ，但不考慮  $y_i = z_i = \frac{n-1}{2}$ ，則有  $3n - 3$  個如此的點，且  $|K_i| = 0$ 。

(2) 給定一  $k_i\left(\frac{n-1}{2}, y_i, z_i\right) \in K$ ，若  $\frac{n-1}{2} = y_i = z_i$ ，則有 1 個如此的點，且  $|K_i| = \mathbb{X}(n - |k_i(s_a)|)_{s_a} = \mathbb{X}(n - 1)_{s_a}$ 。

(3) 給定一  $k_i\left(\frac{n-1}{2}, y_i, z_i\right) \in K$ ，若  $\frac{n-1}{2} \neq y_i \neq z_i$ ，則有  $n^2 - 3n + 2 = (n - 1)(n - 2)$  個如此的點，且  $|K_i| = \mathbb{X}(n - |k_i(s_a)|)_{s_a} = \mathbb{X}(n - 3)_{s_a}$ 。

將以上  $|K_i|$  加總，可得出  $|\mathbb{X}(n)_{s_a}| = \mathbb{X}(n - 1)_{s_a} + (n - 1)(n - 2)\mathbb{X}(n - 3)_{s_a}$

2. 再來計算  $s_b$ ：考慮  $k = 0 \in C_{nx}$ ，令集合  $K = \{k_i(0, y_i, z_i) | k_i \in C_n, i = 1 \sim n^2\}$ 。

(1) 給定一  $k_i(0, y_i, z_i) \in K$ ，若  $y_i \neq z_i$ ，則有  $n(n - 1)$  個如此的點，且  $|K_i| = 0$ 。

(2) 給定一  $k_i(0, y_i, z_i) \in K$ ，若  $y_i = z_i$ ，則有  $n$  個如此的點，且  $|K_i| = \mathbb{X}(n - |k_i(s_a)|)_{s_b} = \mathbb{X}(n - 2)_{s_b}$ 。

將以上  $|K_i|$  加總，可得出  $|\mathbb{X}(n)_{s_b}| = n(n - 1)\mathbb{X}(n - 2)_{s_b}$



### (三) 考慮旋轉下，計算相異解的數量通式

**討論 3.3.1** 要計算被  $s_a$  or  $s_b$  固定的  $X_n$  數量，就是在  $\mathbb{C}_n$  中，決定  $n$  個點，這  $n$  個點(稱為集合  $X_n$ )要符合兩條件，

(1)任兩點的  $x, y, z$  座標皆不同  $\Leftrightarrow n$  個  $x, y, z$  軸座標數值，都要被選到。

(2)若點  $p$  在  $X_n$  中，則  $p(s_a)$  or  $p(s_b)$  也在  $X_n$  中  $\Leftrightarrow$  當點  $p(x_p, y_p, z_p)$  被選了，則  $x_p, y_p, z_p, x_{s_a p}, y_{s_a p}, z_{s_a p}$ ，都不能再選作相同軸的坐標了。

由以上兩條件，我們再一組一組的決定  $X_n$  中的對稱點集，最後算出有多少選擇的可能，也就是被  $s_a$  固定的  $X_n$  數量。

#### 計算 3.3.1 $|X(n)_{s_a}|$

當  $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，被  $s_a$  固定的  $X_n$  數量  $|X_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j)!}$

當  $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ ，被  $s_a$  固定的  $X_n$  數量  $|X_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i+1)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+1)!}$

當  $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ ，被  $s_a$  固定的  $X_n$  數量  $|X_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i+2)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+2)!}$

#### 策略.

由討論 3.3.1 中的兩條件，來決定一被  $s_a$  固定的  $X_n$ ，可以得出以下事實：

1. 若  $x, y, z$  三數中有兩數相同，但第三數不同，點  $p(x, y, z)$  不能選擇。如  $p(1, 4, 4)$ ，因為  $X_n$  被  $s_a$  固定，所以  $p'(4, 4, 1) \in X_n$ ，但  $p$  與  $p'$  的  $y$  軸座標相同，導致  $X_n$  失去錯視性質。
2.  $X_n$  中只有兩種點，三軸座標相同的點，稱為「一階點」；三軸座標皆不相同的點，稱為「三階點」
3. 一階點  $(a, b, c)$  的對稱點集只有一點；三階點  $(a, b, c)$  的對稱點集有三點  $(a, b, c), (c, b, a), (c, a, b)$ ，因此決定一個三階點屬於  $X_n$  後， $a, b, c$  三數都不能在選擇作為任一軸座標

由以上一些條件與限制，我們的計算方式，分幾個步驟：

【步驟 1】 給定一  $n$  立方格子點

【步驟 2】 決定一階點的數量  $m, m \equiv n(\text{mod } 3)$

【步驟 3】 決定  $m$  個一階點

【步驟 4】 決定  $n - m$  個三階點  $\Leftrightarrow$  決定  $\frac{n-m}{3}$  組對  $s_a$  固定的三階點

【步驟 5】 一階點的數量  $m$  跑遍所有可能的數值，將分別的選擇數相加。

計算.

先計算  $n \equiv 2(\text{mod } 3)$  時  $C_n$  中，被  $s_a$  固定的  $X_n$  數量。

---

【步驟 1】

令  $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ ,  $n = 3i + 2, 0 \leq i \in Z$

---

【步驟 2】

令  $m = 3j + 2, 0 \leq j \leq i \in Z$

---

【步驟 3】

決定一個一階點，等同在  $C_n$  選一個數字，作為此點的三軸座標；決定  $m$  個一階點，就是選  $m$  個數字，因此有  $\binom{n}{m}$  種選法。

此時  $C_n$  中剩下  $n - m$  個數字可選擇。

---

【步驟 4】

1. 決定第一個點  $p_1$ ，與  $p_1$  的對稱點集，等同在  $C_n$  中剩下的  $n - m$  個數字中，選擇 3 個數作為三軸座標，有  $\left(\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{3}\right)$  種可能(除以三，因為點  $p_1$  為  $(a, b, c)$  或  $(b, c, a)$  或  $(c, a, b)$ ，對我們來說一樣)。

決定  $p_1$  與其對稱點集後， $C_n$  中剩下  $(n - m) - 3$  個數字可選擇。

2. 決定第四個點  $p_4$ ，有  $\left(\frac{(n-m-3)(n-m-4)(n-m-5)}{3}\right)$  種可能。

決定  $p_4$  與其對稱點集後， $C_n$  中剩下  $n - m - 6$  個數字可選擇。

.....

3. 決定第  $3k + 1$  個點  $p_{3k+1}$ ，有  $\left(\frac{(n-m-3k)(n-m-3k-1)(n-m-3k-2)}{3}\right)$  種選擇。

所有三階點  $p_1 \sim p_n$  的選擇數相乘等於：

$$\prod_{k=0}^{\frac{(n-m)}{3}-1} \left( \frac{(n-m-3k)(n-m-3k-1)(n-m-3k-2)}{3} \right) = \frac{1}{3^{\frac{(n-m)}{3}}} \prod_{k=0}^{(n-m)-1} (n-m-k)$$

$$= \frac{(n-m)!}{3^{\frac{(n-m)}{3}}}$$

但是，這是在考慮「決定的順序」下的選擇數，因此要再除以  $\left(\frac{(n-m)}{3}\right)!$ ，最後再乘上一階點的選擇數  $\binom{n}{m}$ 。

因此，決定具有錯視性質、被  $s_a$  固定的  $m$  個一階點與  $n-m$  個三階點，共有  $\frac{(n-m)!}{3^{\frac{(n-m)}{3}}}$

$$\left(\frac{(n-m)}{3}\right)! \times \binom{n}{m} = \frac{n!}{3^{\frac{(n-m)}{3}} \times \left(\frac{(n-m)}{3}\right)! \times m!} = \frac{(3i+2)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+2)!}} \text{ 種選擇。}$$

### 【步驟 5】

同上，令  $n = 3i + 2$ ，讓一階點的數量跑遍可能的數值，將分別的選擇數相加，可得出：

$$\sum_{j=0}^i \frac{(3i+2)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+2)!}}$$

計算  $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ 、 $n \equiv 1(\text{mod } 3)$  的方式與前述方法相似，只需將一些係數調整，在此省略計算，所得出的結果如下：

$$\text{當 } n \equiv 0(\text{mod } 3), \text{ 被 } s_a \text{ 固定的 } X_n \text{ 數量 } |\mathbb{X}_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j)!}}$$

$$\text{當 } n \equiv 1(\text{mod } 3), \text{ 被 } s_a \text{ 固定的 } X_n \text{ 數量 } |\mathbb{X}_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i+1)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+1)!}}$$

$$\text{當 } n \equiv 2(\text{mod } 3), \text{ 被 } s_a \text{ 固定的 } X_n \text{ 數量 } |\mathbb{X}_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i+2)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+2)!}}$$

□

### 計算 3.2.2 $|\mathbb{X}(n)_{s_a}|$

$$\text{當 } n \equiv 0(\text{mod } 3), \text{ 被 } s_a \text{ 固定的 } X_n \text{ 數量 } |\mathbb{X}_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j)!}}$$

$$\text{當 } n \equiv 1(\text{mod } 3), \text{ 被 } s_a \text{ 固定的 } X_n \text{ 數量 } |\mathbb{X}_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i+1)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+1)!}}$$

$$\text{當 } n \equiv 2(\text{mod } 3), \text{ 被 } s_a \text{ 固定的 } X_n \text{ 數量 } |\mathbb{X}_{n_{s_a}}| = \sum_{j=0}^i \frac{(3i+2)!}{3^{(i-j) \times (i-j)! \times (3j+2)!}}$$

## 策略.

要計算被  $s_b$  固定的  $X_n$  數量，就是為每個  $x$  軸的座標，配對一組  $y$ 、 $z$  軸座標。為  $x$  軸座標數值 "a"，配對  $b, c$  作為  $y, z$  軸座標，等同決定一點  $p_i(a, b, c) \in X_n$ ，且也決定了對稱點集中的另一點  $p_i'(-a, c, b)$ 。可得出兩個事實：

1. 若存在一點  $p_i(a, b, c) \in X_n$ ，由引理 3.1.1，則  $p_i(-a, c, b) \in X_n$   
 $\Rightarrow$  為大於等於零的  $x$  軸座標配對，同時，所有的  $x$  軸座標也都配對好了。
2. 不存在兩點  $p_i(a, b, c), p_j(\alpha, \beta, \gamma) \in X_n, a = \alpha$ ，使得  $b = \pm\beta$  or  $c = \pm\gamma$   
 $\Rightarrow$  決定一點  $p_i(a, b, c) \in X_n$  後，則  $b, c$  兩數，不能再作為  $y, z$  軸座標。
3. 不存在一點  $p_i(0, b, c) \in X_n$ ，使得  $b = c$   
 $\Rightarrow$  任一非零的  $x$  軸座標數值，配對的  $y, z$  座標不可相同。
4. 若  $x$  軸座標數值為零，配對的  $y, z$  座標必須相同。

給定一  $n$  立方格子點後，我們的計算方式，分兩個步驟：

【步驟 1】 若  $n$  為奇數，先為  $x$  軸座標數值 0 配對  $y, z$  軸座標。若  $n$  為偶數，直接進入【步驟 2】。

【步驟 2】 以所有在  $C_n$  中的正數，作未知點的  $x$  軸座標，得出  $p_1(1, y_1, z_1), p_2(2, y_2, z_2), p_3(1, y_3, z_3) \dots$  再配對  $y, z$  軸座標

## 計算.

先計算  $n$  為偶數時  $X_n$  中，被  $s_a$  固定的  $X_n$  數量。

---

### 【步驟 1】

先為  $x$  軸座標數值 0 配對  $y, z$  軸座標，由於  $y, z$  軸座標需要相同，因此在  $C_n$  中選一個數有  $\binom{n}{1}$  個選擇。

$y, z$  軸座標剩  $n - 1$  個數可選。

---

### 【步驟 2】

第一個點  $p_1(1, y_1, z_1)$  的  $y, z$  軸座標，有  $(n - 1)(n - 2)$  個選擇

第二個點  $p_2(2, y_2, z_2)$  的  $y, z$  軸座標，有  $(n - 3)(n - 4)$  個選擇

第三個點  $p_3(3, y_3, z_3)$  的  $y$ 、 $z$  軸座標，有  $(n-5)(n-6)$  個選擇

.....

第  $\frac{n-1}{2}$  個點  $p_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}, y_{\frac{n-1}{2}}, z_{\frac{n-1}{2}}\right)$  的  $y$ 、 $z$  軸座標，有  $2 \times 1$  個選擇

所有的選擇數相乘等於  $(n-1)!$ ，再乘上 Step 1 中的  $\binom{n}{1}$ ，可得出  $n!$ 。

若  $n$  為偶數，只需計算，可得出  $n!$  種可能。

由上，可以得出被  $s_b$  固定的  $X_n$  數量  $|X_{n_{s_b}}| = n!$ 。

□

利用 *Burnside* 定理，以及前述性質，便可得出性質 3.3.1。

### 性質 3.3.1

給定一正整數  $n > 1$ ，「立方體旋轉群」作用在  $\mathbb{X}_n$  上，軌道數

$$N(n) = \begin{cases} n = 3i, i \in \mathbb{Z}^+ & \frac{1}{24} \left( n!^3 + 8 \sum_{j=0}^i \frac{(3i)!}{3^{(i-j)} \times (i-j)! \times (3j)!} + 6n! \right) \\ n = 3i + 1, i \in \mathbb{Z}^+ & \frac{1}{24} \left( n!^3 + 8 \sum_{j=0}^i \frac{(3i)!}{3^{(i-j)} \times (i-j)! \times (3j+1)!} + 6n! \right) \\ n = 3i + 2, i \in \mathbb{Z}^+ & \frac{1}{24} \left( n!^3 + 8 \sum_{j=0}^i \frac{(3i)!}{3^{(i-j)} \times (i-j)! \times (3j+2)!} + 6n! \right) \end{cases}$$

證明.

根據 *Burnside* 定理，以及上述計算中計算出各旋轉變換的固定點集合大小，便可得出軌道數  $N(n)$  的一般式。

## 參、研究結論

- 一、最佳錯視全滿的情況為  $3n$ ，且對所有  $n$ ，都有最佳全滿的情況。
- 二、 $n$  立方格子點集合中，以錯視點集合  $p(n)$  形成的骨架，必能達成錯視全滿。
- 三、我們使用 *Burnside* 定理計算「立方體旋轉群」作用在  $X(n)$  時的軌道數，等同於計算相異解。以 *Burnside* 定理計算後，可得出遞迴式與一般式。
- 四、我們使用 *WolframAlpha* 無法得出本研究中遞迴式的解，但透過本研究的組合解釋，我們直接找出該遞迴式的解。

## 肆、討論與未來展望

- 一、加入鏡射後，相異的錯視解數
- 二、討論  $n$  骨架以外錯視全滿的類型，以及數量，還有考慮旋轉、鏡射下的相異解，並嘗試找出公式。

## 伍、參考資料

- 一、Alan Tucker，*Applied Combinatorics*，1978
- 二、康明昌，*近世代數*，2000

## 陸、附錄

### 一、計算旋轉下錯視點集合數量的偽代碼及計算出的數據

```

令  $S=\{s_j | s_j \text{ 為旋轉與鏡射變換}, j=1\sim 48\}$ 
輸入：正整數  $n$ ，為立方格子點集合的邊長。
輸出：在考慮旋轉與鏡射的情況下，相異的錯視點集合  $N(n)$  共有多少。
set  $N=0$ 
  for  $i=1\sim n^2$ , set  $N_i=0$ 
    for  $j=1\sim 48$ 
      if  $s_j(x_i)=x_i$ ,  $N_i=N_i+1$ 
      else  $N_i=N_i$ 
     $N= N+N_i$ 
  return  $N=N/48$ 
    
```

表 2.1  $N(n)$  與  $X(n)$  比較表

邊長	$N(n)$	$X(n)$
$n = 2$	1	4
$n = 3$	3	36
$n = 4$	21	576
$n = 5$	335	14400
$n = 6$	11043	518400
$n = 7$	530568	25401600

### 二、使用程式計算旋轉下七類錯視點集合數量的數據

表 3.2 不同邊長下  $N_1(n)\sim N_7(n)$  數值表

邊長	$N_1(n)$	$N_2(n)$	$N_3(n)$	$N_4(n)$	$N_5(n)$	$N_6(n)$	$N_7(n)$
$n = 2$	1	0	0	0	0	0	0
$n = 3$	1	0	1	1	0	0	0
$n = 4$	2	9	2	6	2	0	0
$n = 5$	7	148	22	63	38	57	0
$n = 6$	67	4448	388	1200	1156	3456	328
$n = 7$	1269	180632	12075	36300	48020	216120	36152

## 【評語】 030423

本作品研究在一個三維的立方格子點中連接格線，使得從每一面透視時行與列都被格線填滿的現象，題目有一定困難度，文章中使用相當多的集合與邏輯符號，並使用群論中的 Burnside 定理以及旋轉變換，數學具有一定深度，但是一些名詞定義與符號使用須更精準。運用工具相當成熟，對於中學生而言相當難得。遞迴式子的結果相當複雜，若得到的計數結果能找出規律，或是找出更一般的理論，會是更有意思的作品。整體而言是相當優秀的作品。

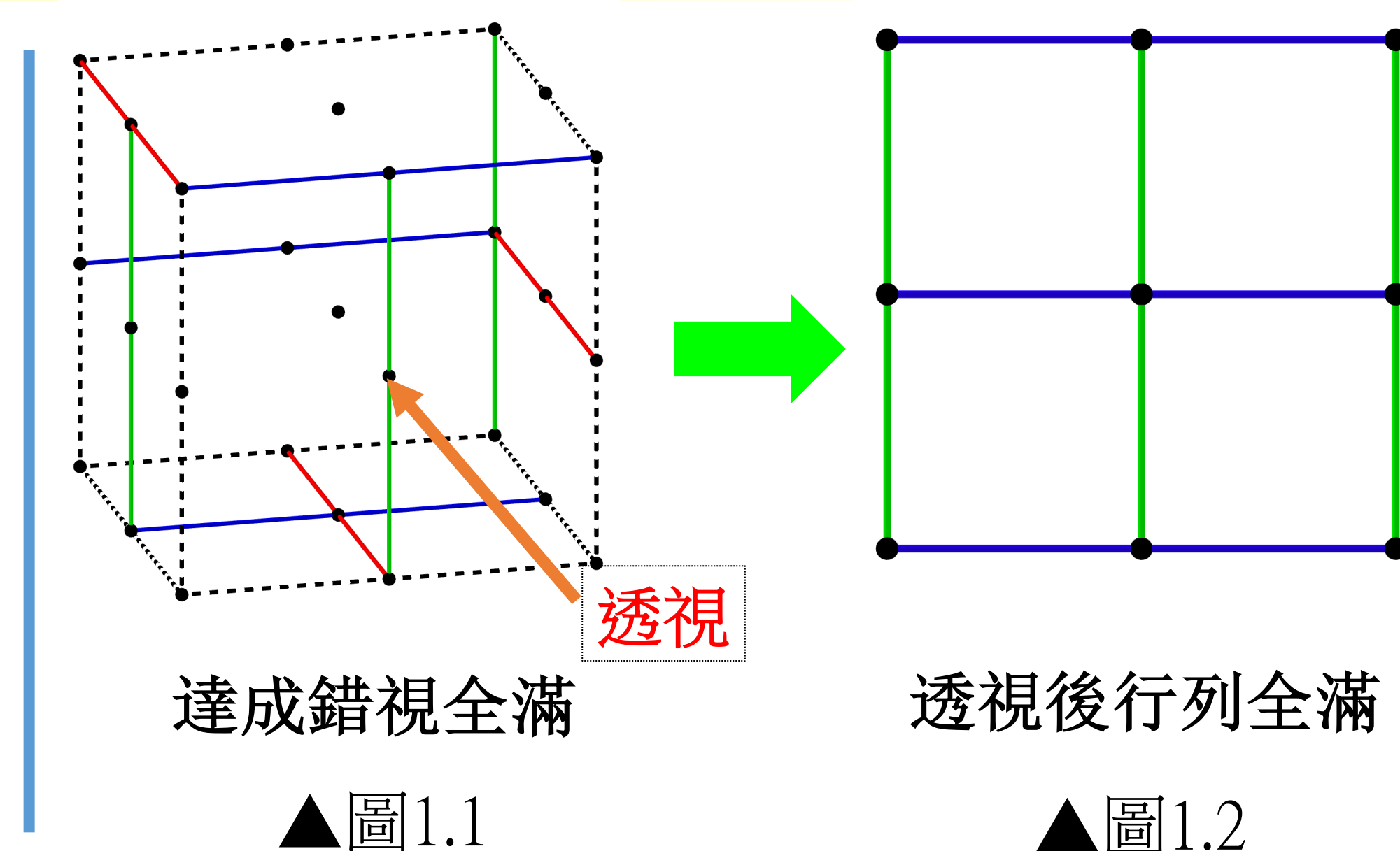


# 壹、前言

## 一、研究摘要

本研究的内容關於：在一個三維的  $n$  立方格子點中連接一些格線（請見名詞定義），使得由每一軸透視，行與列都被填滿格線，如圖1.1，我們稱為錯視全滿。

我們想知道，對於所有的  $n$  立方格子點，要達成錯視全滿，最少需要多少格線？有什麼一般的方法達成最佳錯視全滿？共有多少組格線能達成錯視全滿？考慮旋轉對稱下，還有多少組相異？



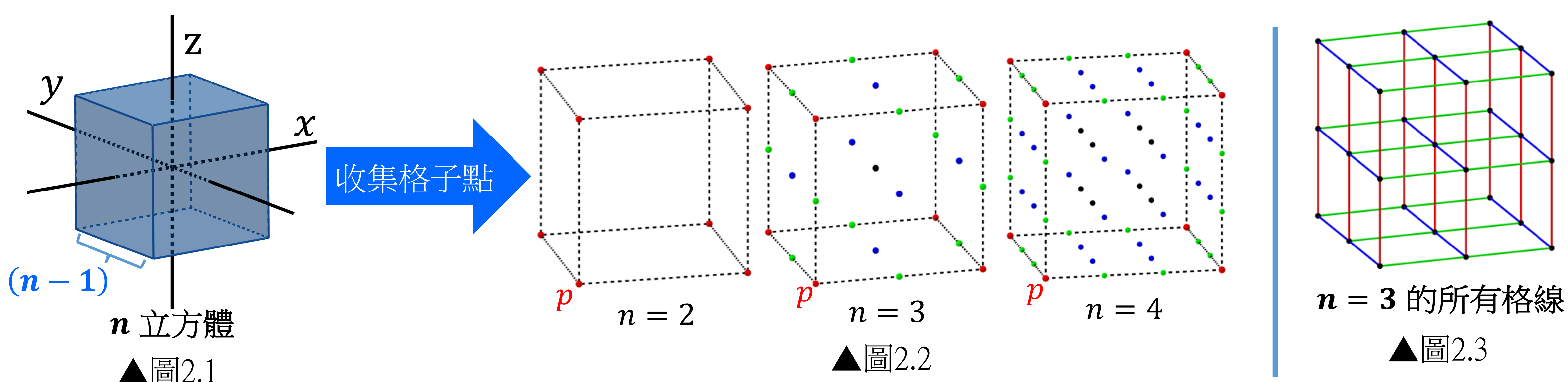
## 二、名詞定義

1.  $n$  立方格子點 ( $\mathbb{C}_n$ )：給定正整數  $n > 1$ ，令點  $p = (-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-1}{2})$ ，定義  $n$  立方格子點

$$\mathbb{C}_n := \{(x, y, z)_p \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ and } 0 \leq x, y, z \leq n-1\}$$

2.  $n$  立方體：邊長為  $n-1$  單位，以原點為中心包含  $n$  立方格子點的立方體，稱為  $n$  立方體。

3. 格線： $n$  立方格子點中任兩點的連線，若平行  $x, y, z$  軸其中之一，並長度  $n-1$  單位，則稱為格線。圖 2.3 為  $n=3$  時所有的格線。



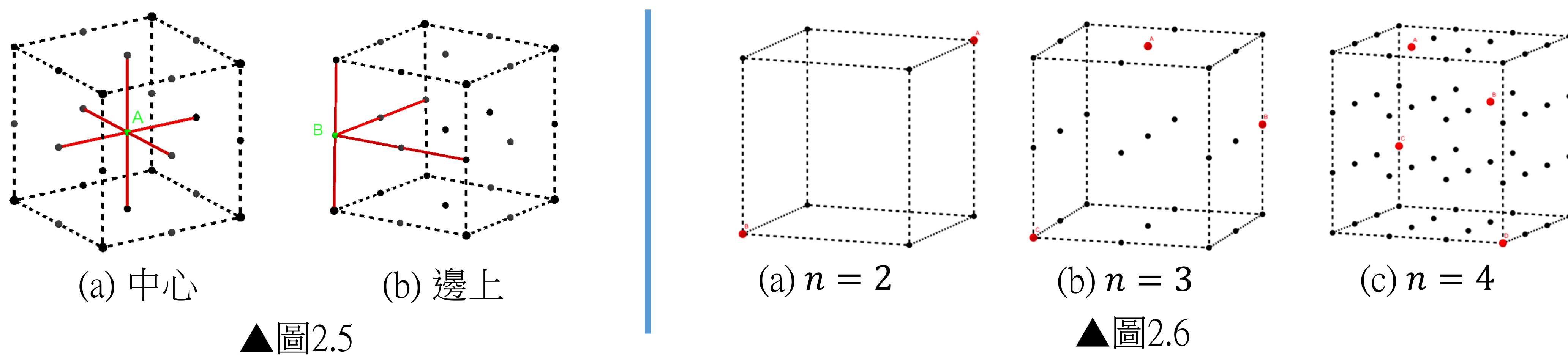
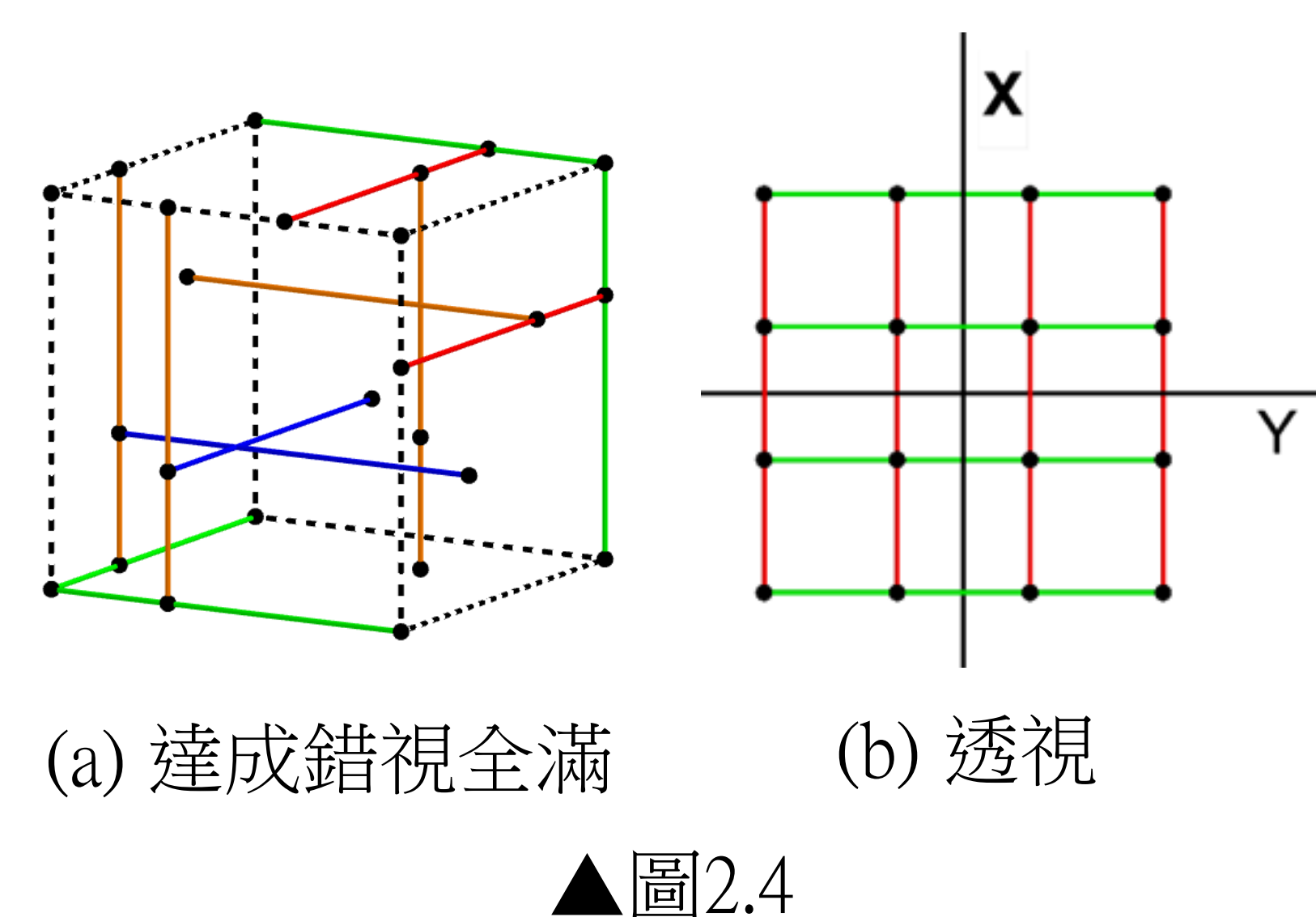
4. 錯視全滿：在一  $n$  立方格子點中連一些格線，若由  $x, y, z$  任一軸的方向透視， $n$  行  $n$  列都連滿格線，如圖 2.4 (a)，則稱為錯視全滿。圖 2.4 (b) 為  $n=4$  時一種錯視全滿情況。

5. 最佳錯視全滿：以最少條格線達成錯視全滿的情況。

6. 骨架： $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$  中，通過任一格子點  $p$  的三條格線，稱為點  $p$  的骨架。如圖 2.5。

7. 錯視點集合  $X(n)$ ：給定正整數  $n$ ，定義  $n$  錯視點集合  $X(n) := \{p \in \mathbb{C}_n \mid \text{給定 } p(x, y, z), q(\alpha, \beta, \gamma) \in X(n), x \neq \alpha, y \neq \beta, z \neq \gamma\}$  稱  $X(n)$  為錯視點集合，或稱  $n$  錯視點集合。如圖 2.6。

8.  $\mathbb{X}(n)$ ：定義集合  $\mathbb{X}(n) := \{X(n) \mid X(n) \subset \mathbb{C}_n\}$ 。



## 四、研究器材

紙、筆、電腦、GeoGebra、C 語言

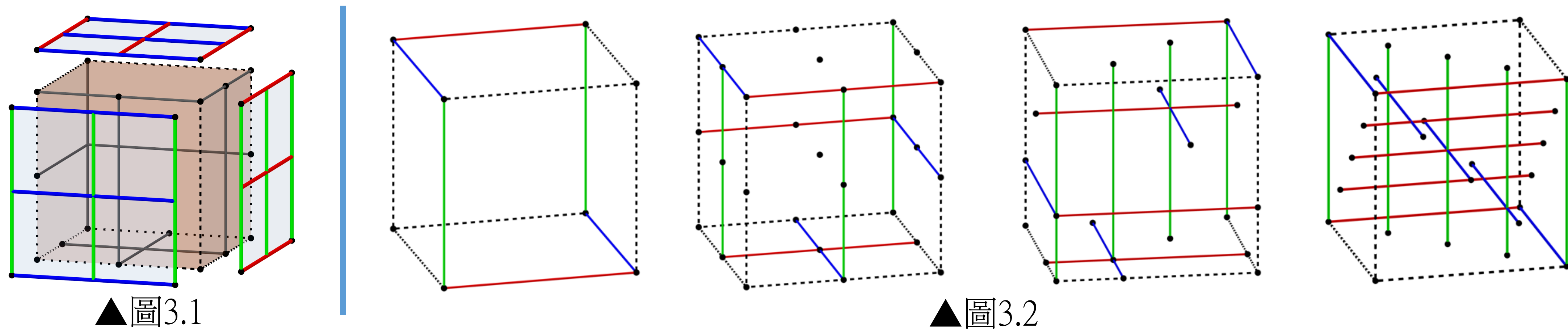
## 貳、研究結果與過程

### 一、達到最佳錯視全滿的基礎方法（錯視解）

#### （一）找到基礎技巧，並計算相異方法數

**性質 1.1** 任一  $n$  立方格子點達成錯視全滿，至少需要  $3n$  條格線。

**範例 1.1**  $n=2, 3, 4, 5$  時，存在  $3n$  條格線達成錯視全滿的情況。如圖 3.2。





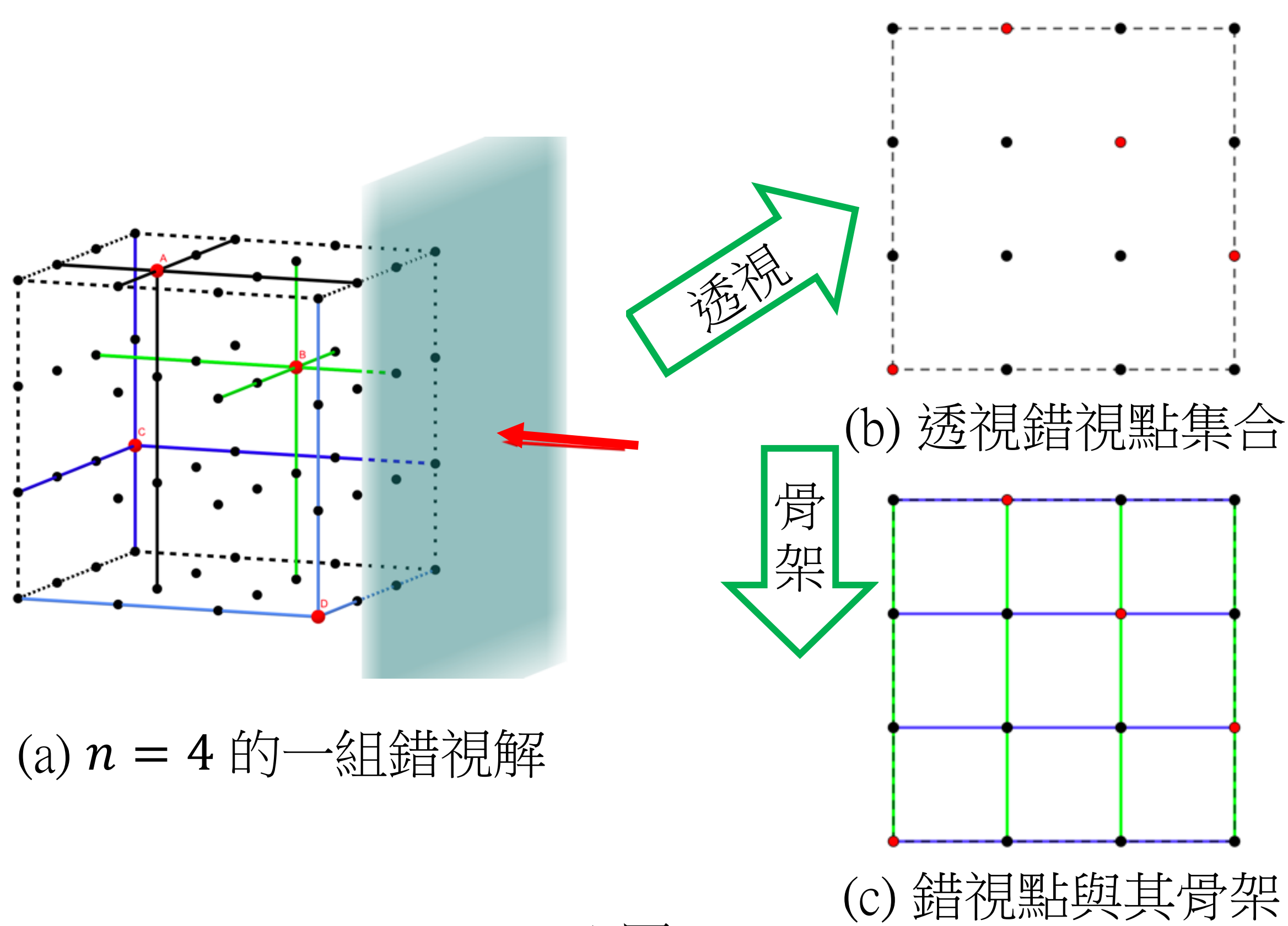
**性質 1.2** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，對於任一  $n$  錯視點集合  $X(n) \subset \mathbb{C}_n$ ，收集  $X(n)$  中所有點的骨架，必達成最佳錯視全滿。

**推導：** 透視錯視點後，每行、列都有錯視點。當錯視點長出骨架後，每一行、列都被填滿  $\Rightarrow$  達成錯視全滿。如圖 3.3。

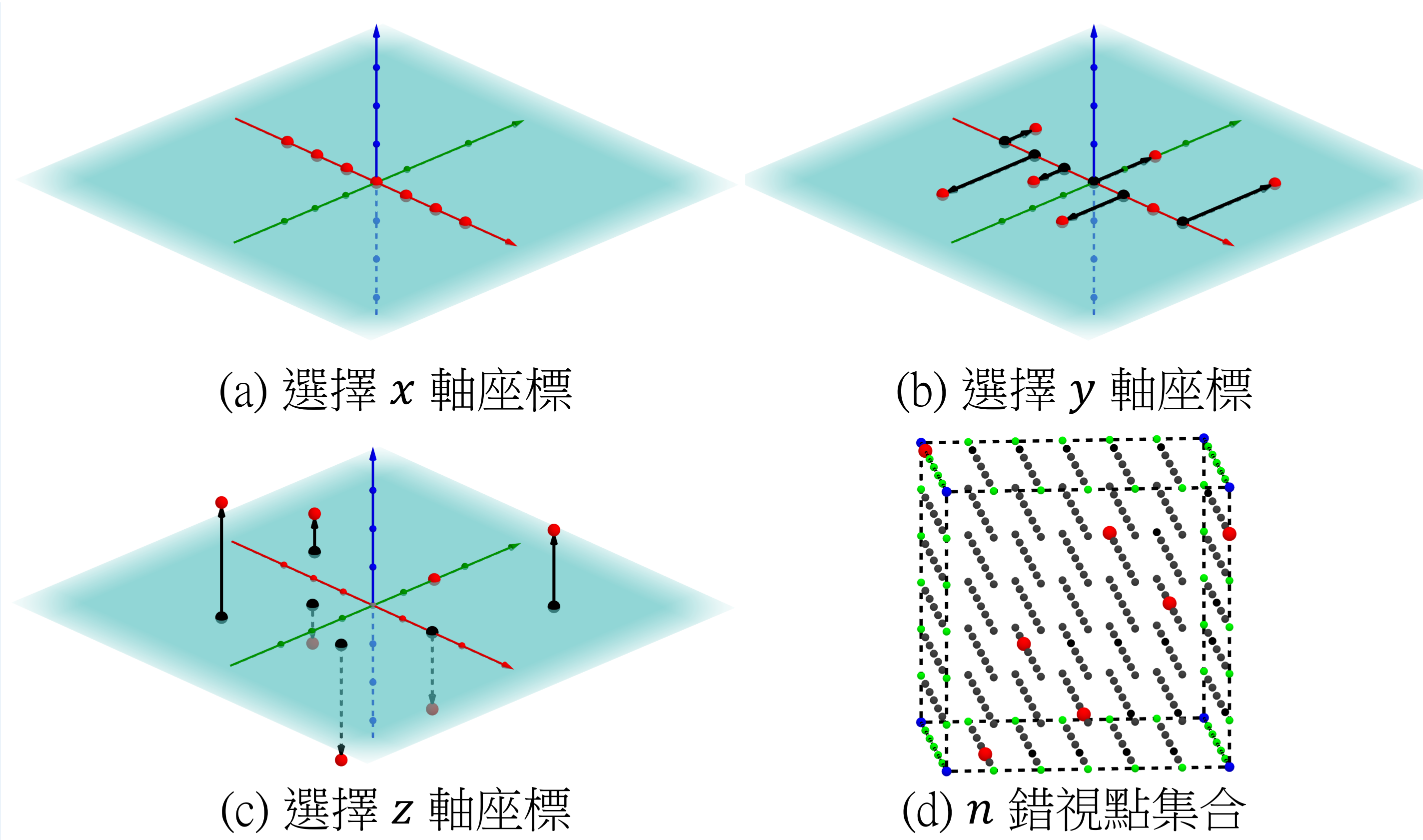
**性質 1.3** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，共有  $n^2$  個相異  $n$  錯視點集合  $X(n) \subset \mathbb{C}_n$ 。

**推導：** 1.  $n$  個點先選  $x$  軸座標， $n!$  種選擇。三軸座標選完，共  $n! \times n! \times n! = (n!)^3$  種選擇。

2. 我們不在乎  $n$  個點選擇的順序，因此要除以  $n!$ ，等於  $(n!)^2$  種選擇。



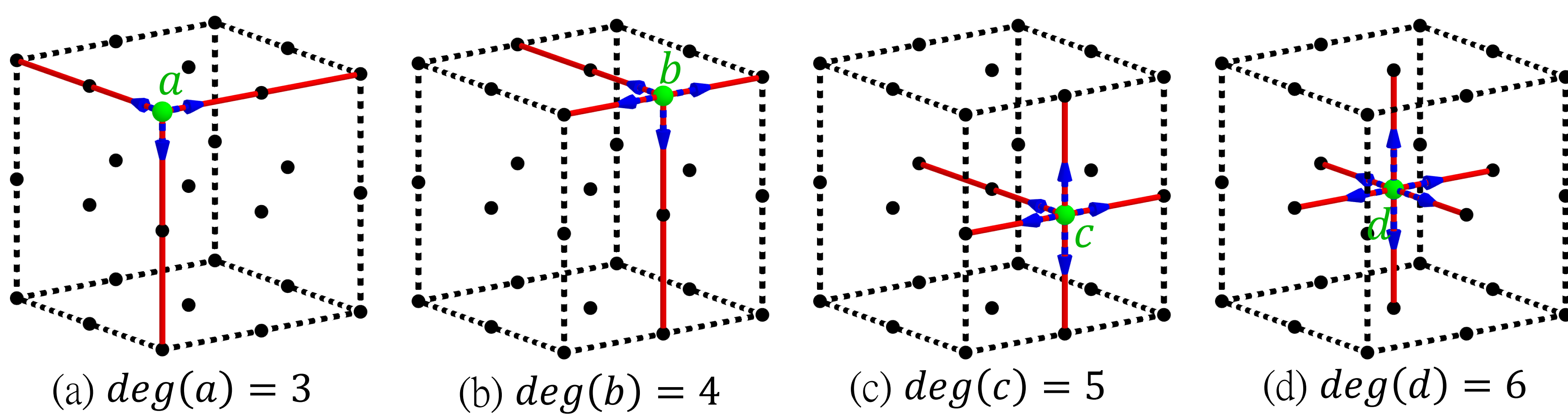
▲圖 3.3



▲圖 3.4

## (二) 錯視點集合的分類

**定義 1.1** 給定點  $p$  屬於  $n$  立方格子點集合，定義  $deg(p)$  為點  $p$  的骨架，由不同方向連出的線段數。



▲圖 3.5

表一 錯視點集合的分類

種類	$deg$			
	3	4	5	6
$X_1(n)$	2	0	0	$n-2$
$X_2(n)$	0	2	2	$n-4$
$X_3(n)$	0	3	0	$n-3$
$X_4(n)$	1	1	1	$n-3$
$X_5(n)$	1	0	3	$n-4$
$X_6(n)$	0	1	4	$n-5$
$X_7(n)$	0	0	6	$n-6$

## 三、考慮旋轉下，計算相異錯視解的數量

立方體旋轉群作用在集合  $X(n)$  時，我們知道，**同軌道的錯視點集合**，

可以經旋轉變成對方，視為同一解，如圖 3.1。因此，目標為算出軌道數。

**定理 2.1** 考慮一個群  $(G, *)$  作用在一個集合  $X$ ，我們介紹幾個名詞：

- 軌道(orbit,  $M(x)$ )：給定  $x \in X$ ， $M(x) := \{g \cdot x | g \in G\}$ 。
- 穩定子群(stabilizer,  $G_x$ )：對於  $x \in X$ ， $G_x := \{g \in G | g \cdot x = x\}$ 。
- 固定點集(fixed point,  $X_g$ )：對於  $g \in G$ ， $X_g := \{x \in X | g \cdot x = x\}$ 。

**定理 2.1 Burnside's Theorem** 令  $N$  為群  $G$  作用  $X$  時的軌道數，則

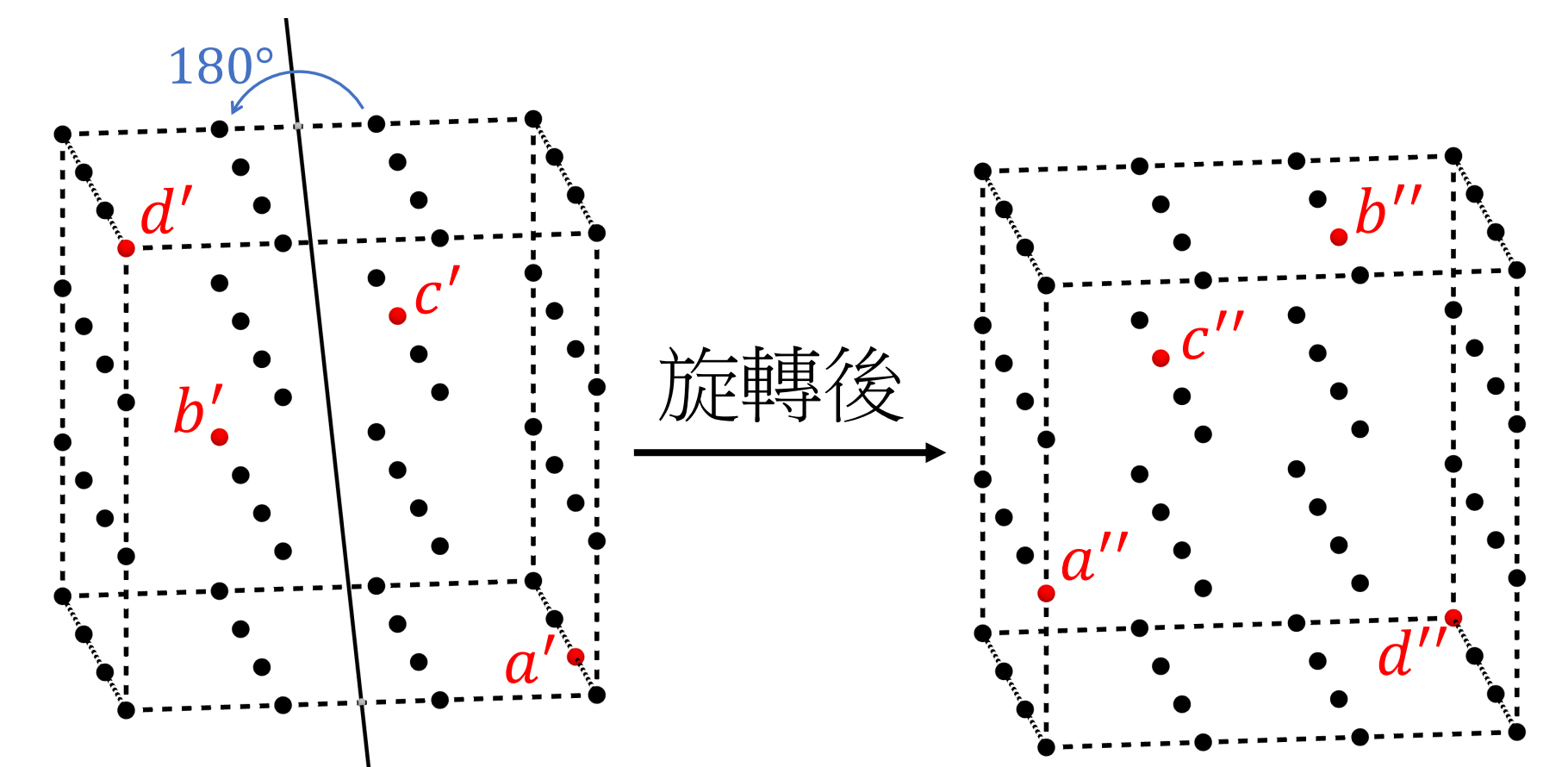
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$$

我們使用公式  $N = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$  計算軌道數，因此，接下來主要在計算

圖 3.2 中三類旋轉的固定點集。我們將三類旋轉，記作  $s_a$ 、 $s_b$ 、 $s_c$ 。

**定義 3.1** 給定一集合  $A \subset \mathbb{C}_n$ ，一立方體的旋轉變換  $s_j$ ，定義一些名詞：

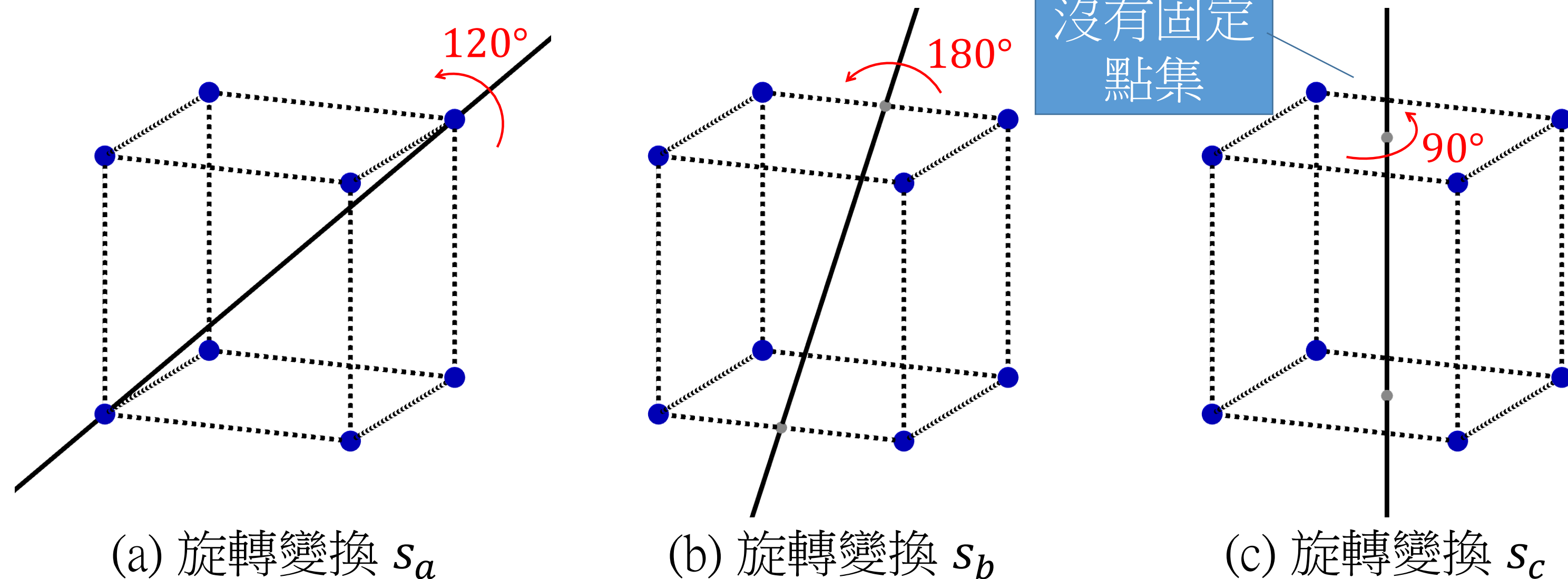
- 集合  $A(s_j) := \{s_j^n(A) | n \in \mathbb{N}\}$ ，稱作「 $A$  對  $s_j$  的對稱點集」。如圖 4.3。
- 若  $s_j \cdot A = A$ ，則稱「 $A$  為  $s_j$  的固定點」或「 $s_j$  固定集合  $A$ 」。如圖 4.3。



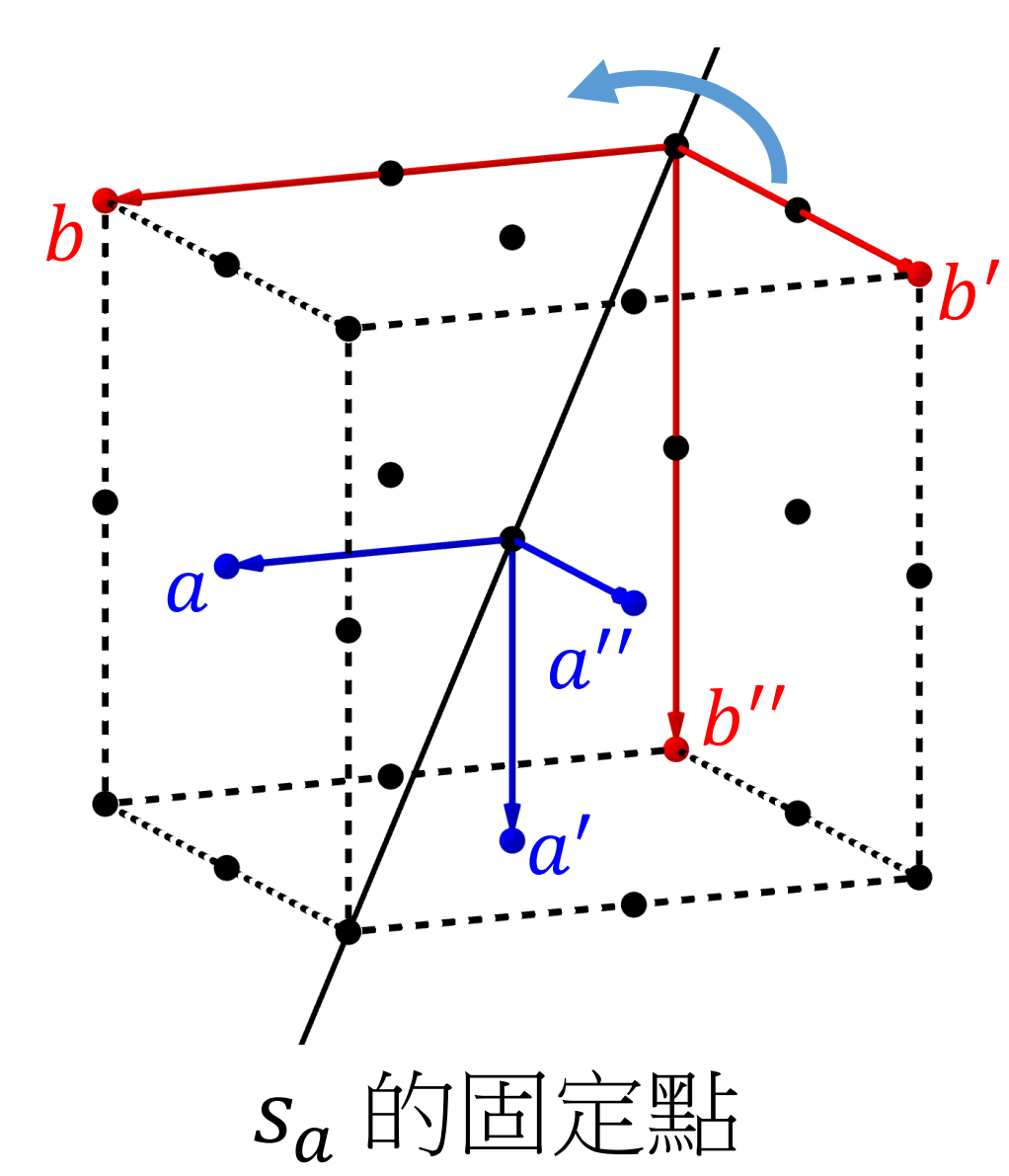
▲圖 4.1

表二 三種標準旋轉變換之性質

旋轉軸類型	標準旋轉	符號	$s_j \cdot p(x, y, z)$
對角連線	(368)(254)	$s_a$	$s_a \cdot p(x, y, z) = p'(y, z, x)$
對邊中點連線	(12)(35)(46)(78)	$s_b$	$s_b \cdot p(x, y, z) = p'(-x, z, y)$
對面重心連線	(1234)(5678)	$s_c$	$s_c \cdot p(x, y, z) = p'(-y, x, z)$



▲圖 4.2



▲圖 4.3



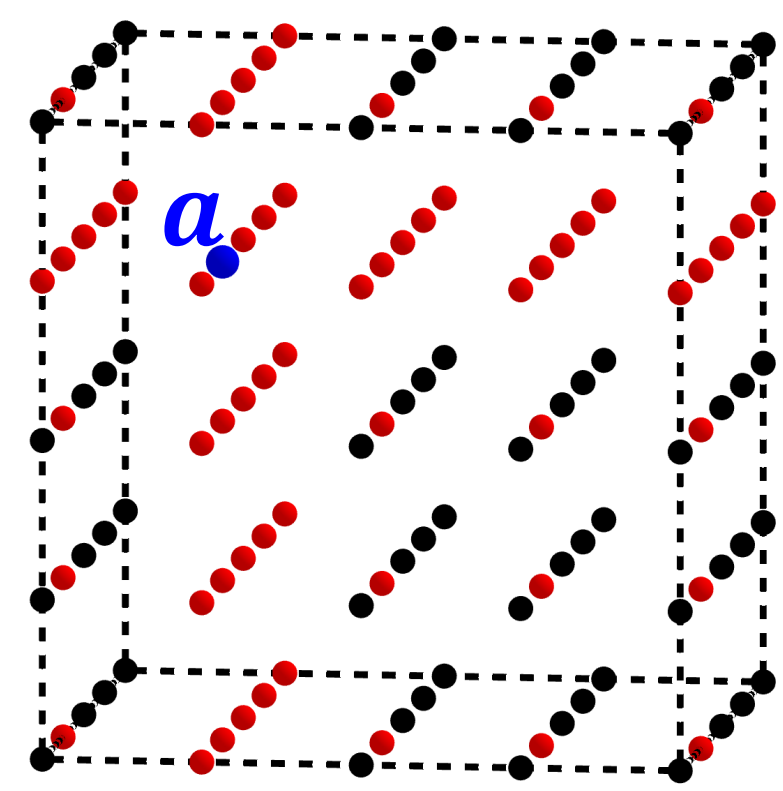
**性質 3.1** 給定一集合  $A \subset \mathbb{C}_n$ ，一立方體旋轉變換  $s_j$ 。我們有以下性質：

1. 若集合  $A$  為  $s_j$  的固定點，則  $\forall p \in A, p(s_j) \subset A$ 。
2. 若  $\forall p \in A, p(s_j) \subset A$ ，則集合  $A$  為  $s_j$  的固定點。

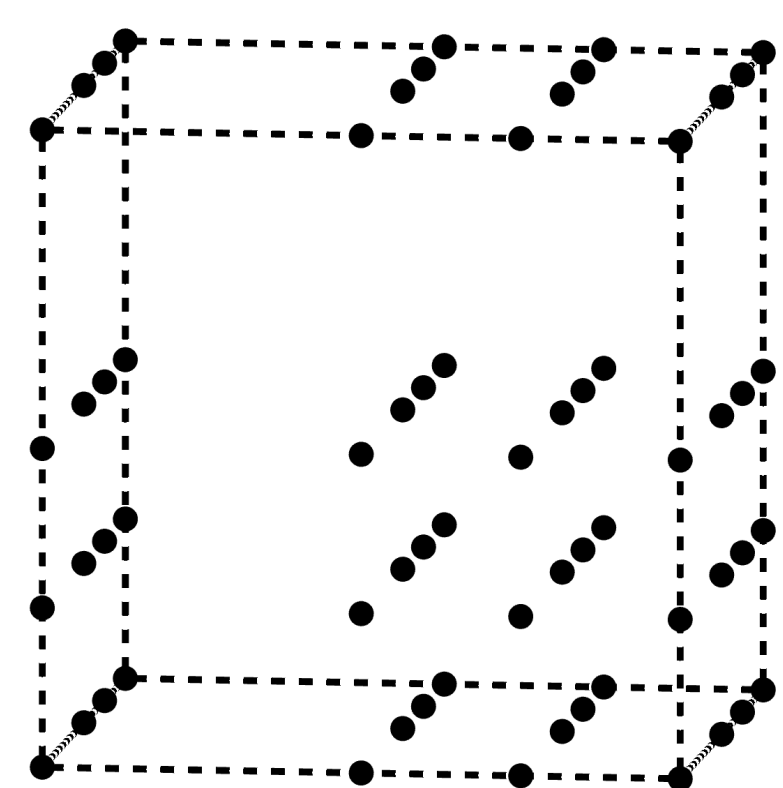
**定義 3.2** 給定  $m$  個點  $k_1, k_2, \dots, k_m$  屬於  $\mathbb{C}_n$ ，並具有錯視性質，定義  $n$  錯視補集  $M \subset \mathbb{C}_n$

$$M := \{p(x, y, z) | p \in \mathbb{C}_n, \exists i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m \text{ s.t. } x \neq x_i \text{ and } y \neq y_i \text{ and } z \neq z_i\}$$

稱  $M$  為點  $k_1, k_2, \dots, k_m$  的  $n$  錯視補集。如圖 4.4。



$\mathbb{C}_7$  中的點  $a$



點  $a$  的錯視補集

▲圖 4.4

**討論：**給定旋轉變換，要計算被固定的錯視點集合數量，只要照以下規則，

計算  $\mathbb{C}_n$  中  $n$  個點的組合數：

1. 被固定  $\Rightarrow$  符合性質 3.1  $\Rightarrow$  選了一點，則對稱點集也要納入  $n$  個點
2. 具備錯視性質  $\Rightarrow$  選第  $k$  個點時，在前面所有  $k - 1$  個點的錯視補集中選

### (一) 產出方式：遞迴式

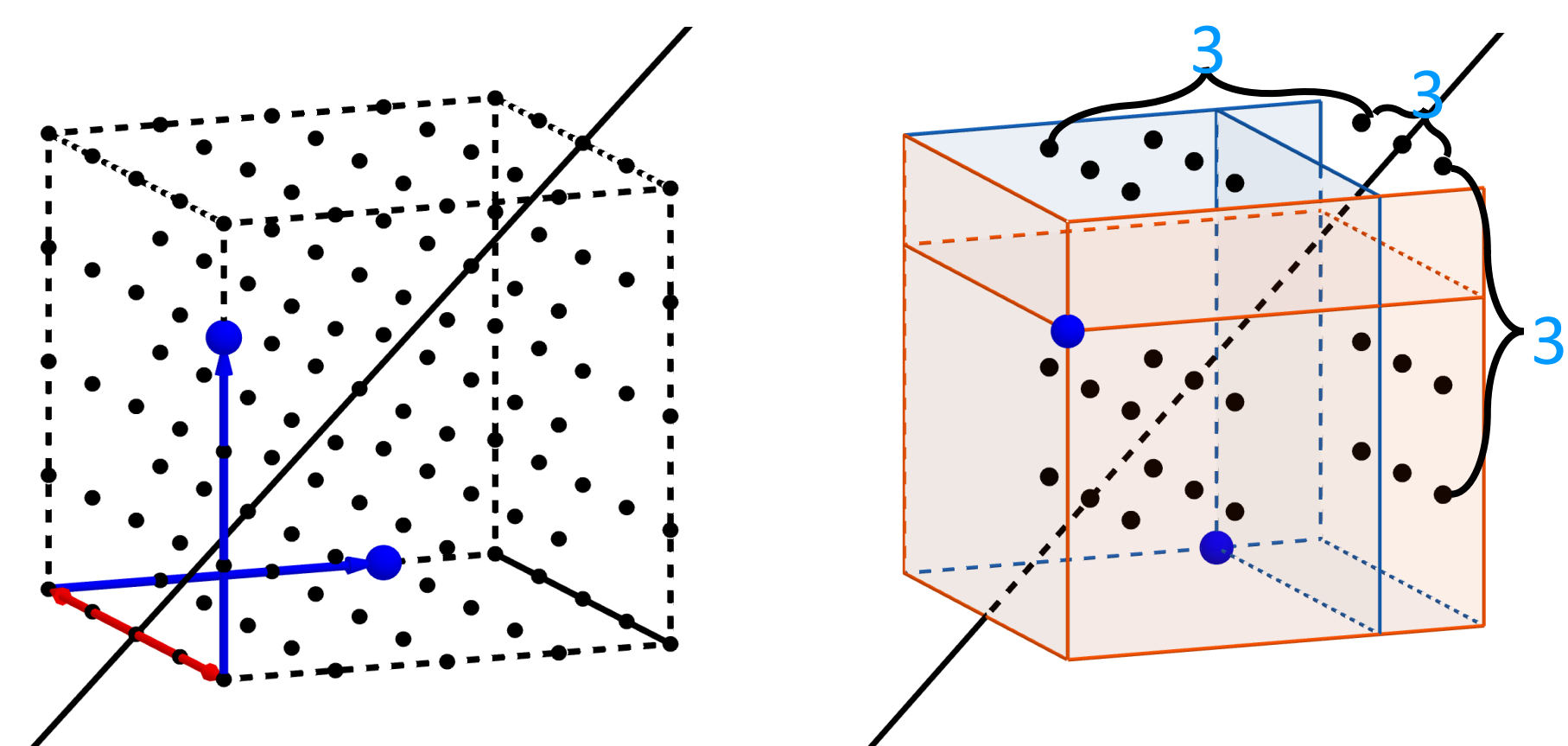
**性質 3.2** 給定一  $n$  立方格子點  $\mathbb{C}_n$ ，給定一點  $p \in \mathbb{C}_n$ ，與一立方體的旋轉變換  $s_j$ ，若  $s_j(p)$  具有錯視性質，則包含  $M$

且對  $s_j$  固定的  $n$  錯視點集合，共有  $|\mathbb{X}(n - |s_j(p)|)_{s_j}|$  個；反之，則有 0 個。

**性質 3.3** 給定一正整數  $n > 1$ ，則

$$|\mathbb{X}(n)_{s_a}| = |\mathbb{X}(n-1)_{s_a}| + (n-1)(n-2)|\mathbb{X}(n-3)_{s_a}| \quad (s_a \text{ 的固定點集大小})$$

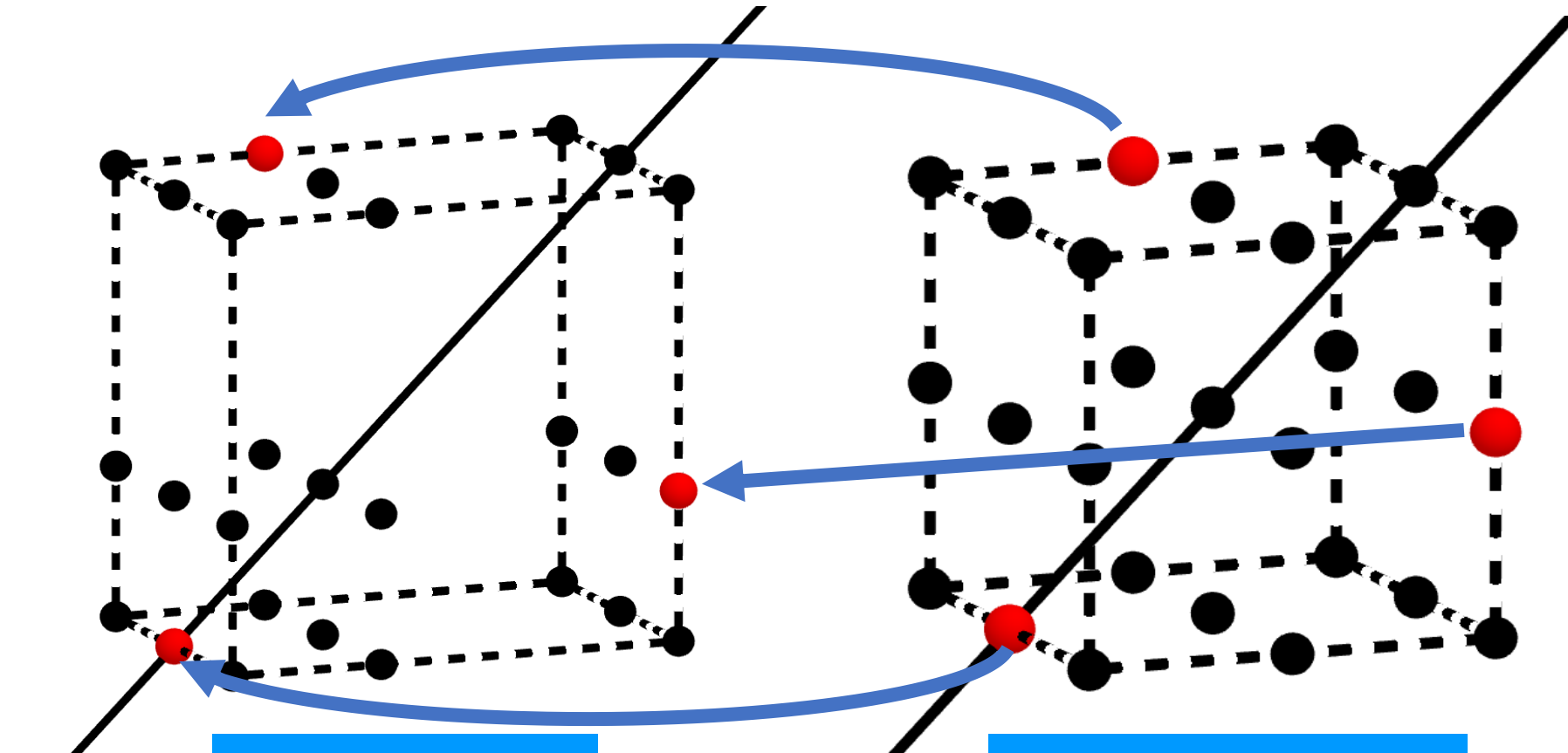
$$|\mathbb{X}(n)_{s_b}| = n(n-1)|\mathbb{X}(n-2)_{s_b}| \quad (s_b \text{ 的固定點集大小})$$



(a) 對稱點集

(b) 錯視補集

▲圖 4.5



錯視補集

立方格子點

▲圖 4.6

得出以上性質後，我們曾經計算出七類錯視點集合中固定點的數量遞迴式。再將七類解合併，得出完整的遞迴式，定義  $N(n)$  為旋轉群作用的相異軌道數。

$$n \text{ 為偶數: } N(n) = \frac{1}{24} \{ 8[|\mathbb{X}(n-2)_{s_a}| + 2(n-2)(n-3)|\mathbb{X}(n-3)_{s_a}| + (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)|\mathbb{X}(n-6)_{s_a}|] + 6[2|\mathbb{X}(n-2)_{s_b}| + 5(n-2)^2(n-3)|\mathbb{X}(n-4)_{s_b}| + (n-2)^2(n-3)(n-4)^2(n-6)|\mathbb{X}(n-6)_{s_b}|] \}$$

$$n \text{ 為奇數: } N(n) = \frac{1}{24} \{ 8[|\mathbb{X}(n-2)_{s_a}| + 2(n-2)(n-3)|\mathbb{X}(n-3)_{s_a}| + (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)|\mathbb{X}(n-6)_{s_a}|] + 6[2|\mathbb{X}(n-2)_{s_b}| + 5(n-2)^2(n-3)|\mathbb{X}(n-4)_{s_b}| + 4(n-2)|\mathbb{X}(n-3)_{s_b}| + 2(n-2)(n-3)^2(n-4)|\mathbb{X}(n-4)_{s_b}| + (n-2)^2(n-3)(n-4)^2(n-6)|\mathbb{X}(n-6)_{s_b}|] \}$$

### (一) 產出方式：一般式

選擇一個旋轉變換後，我們按照前面討論中的兩個原則，進行組合的計算，得出表中的一般式。

我們令  $\alpha_n$  表示旋轉變換  $s_a$  對  $\mathbb{X}_n$  作用的固定點集元素個數； $\beta_n$  表示旋轉變換  $s_b$  對  $\mathbb{X}_n$  作用的固定點集元素個數； $N(n)$  表示軌道個數。

表三  $N(n)$ 、 $|\mathbb{X}(n)|$  比較表

邊長	$N(n)$	$ \mathbb{X}(n) $	$\alpha_n$	$\beta_n$
$n = 3$	3	36	3	6
$n = 4$	21	576	9	24
$n = 5$	335	14400	21	120
$n = 6$	11043	518400	81	720
$n = 7$	530568	25401600	351	5040
一般式	$\frac{1}{24}(8\alpha_n + 6\beta_n + n!^2)$	$n!^2$	見表四	

表四  $\alpha_n$ 、 $\beta_n$  的遞迴式、一般式

邊長	$\alpha_n, n > 2$	$\beta_n$
$n = 3m + 2$	$\sum_{l=0}^m \frac{n!}{3^{(m-l)} \times (3l+2)! (m-l)!}$	$n!$
$n \equiv 3m + 1$	$\sum_{l=0}^m \frac{n!}{3^{(m-l)} \times (3l+1)! (m-l)!}$	
$n \equiv 3m$	$\sum_{l=0}^m \frac{n!}{3^{(m-l)} \times (3l)! (m-l)!}$	
遞迴	$\alpha_n = \alpha_{n-1} + (n-1)(n-2)\alpha_{n-3}$	$\beta_n = n(n-1)\beta_{n-2}$

## 參、結論

- 一、最佳錯視全滿的情況為  $3n$  條格線，且對所有  $n$ ，都有最佳全滿的情況。
- 二、 $n$  立方格子點集合中，以錯視點集合  $\mathbb{X}(n)$  形成的骨架，必能達成錯視全滿。
- 三、我們使用 *Burnside* 定理計算「立方體旋轉群」作用在  $\mathbb{X}(n)$  時的軌道數，等同於計算旋轉對稱下的相異錯視解數量。以 *Burnside* 定理計算後，可得出遞迴式與一般式。
- 四、我們使用 *WolframAlpha* 無法得出本研究中遞迴式的解，但透過本研究的組合解釋，我們直接找出該遞迴式的解。