

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

佳作

030422

翻轉正 n 邊形邊上點的猜想

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者： 國一 許凱宣 國一 徐紹敦	指導老師： 余尚芸 歐志昌
---------------------------------	-----------------------------

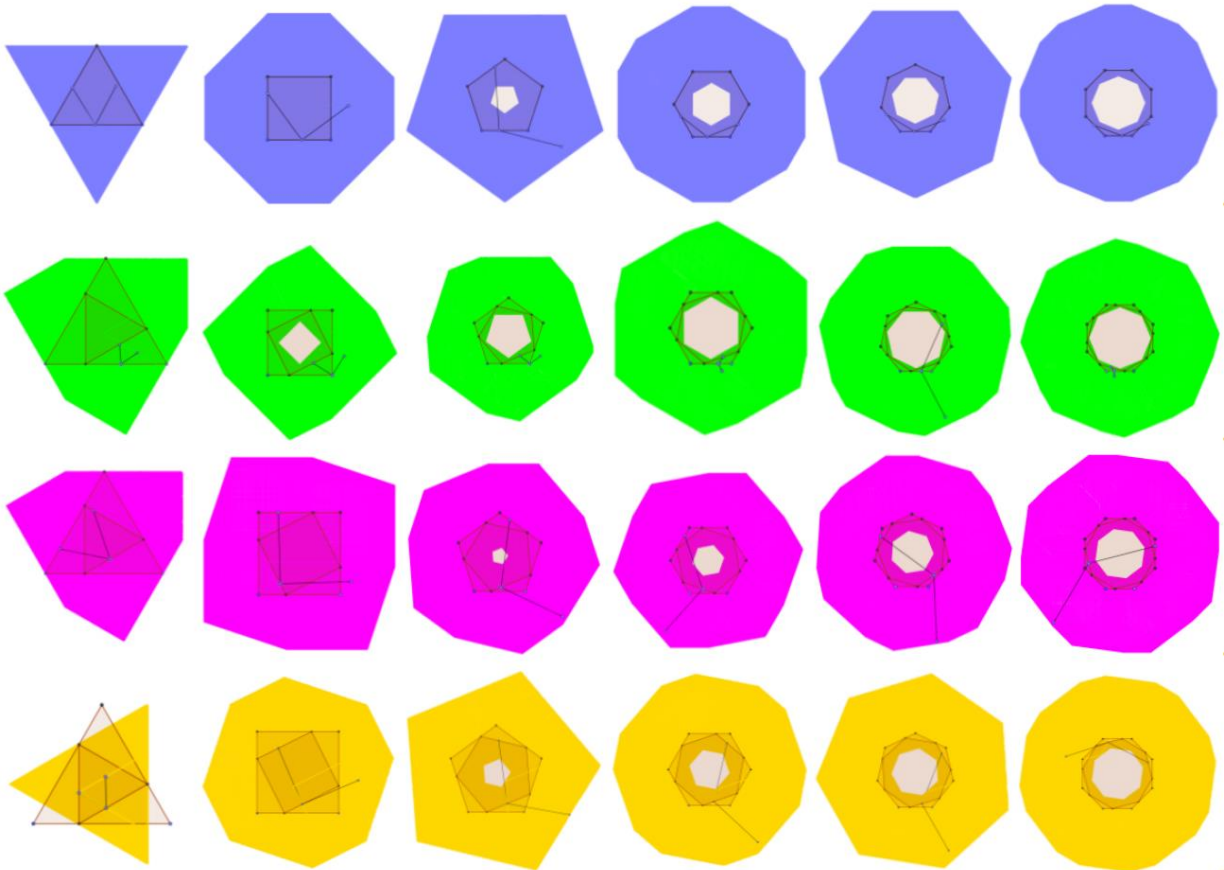
關鍵詞：軌跡、複合正 n 邊形

摘要

本研究先在正 n 邊形邊上取任意點 P 、 Q ，將 Q 以 P 為中心旋轉正 n 邊形內角度數 θ 得到 Q' ， P 、 Q 進行移動，觀察 Q' 變化的關係與規律性；接續，將 P 、 Q 放在「複合正 n 邊形」進行探討。發現：在某一範圍時， P 、 Q 在正 n 邊形上移動時會形成特殊軌跡中空圖形，邊數分別為 n 與 $2n$ 等兩類之多邊形，其邊長比一般化公式為 $l_1 + l_2$ 及 l_1 、 l_2 ；還有許多有趣的關係，像：1.軌跡圖形內角公式；2.當 Q 在頂點 A 上，移動 P 點，形成 Q' 之軌跡在「正 n 邊形外角平分線」上；3. Q 在任意點上，則 Q' 之軌跡與對角線 \overline{BD} 平行且等長...等，並證明之。

最後推出軌跡圖形參數式為
$$\begin{cases} x_{Q'} = x_P + r \cos(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \\ y_{Q'} = y_P + r \sin(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \end{cases}, \text{其中 } \tan \theta_{\text{水平夾角}} =$$

$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ ， $r = \sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}$ ， $P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ 之通式詳見作品，結果可應用在掃地機器人及防盜系統上。



壹、研究動機

上課時，老師教我們使用數學繪圖軟體 Cabri 2P、Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖形，透過實驗與觀察重新驗證一些平面幾何上的結果。在操作的學習裡，發現這個軟體比起一般尺規作圖多了可以「任意動」、而相對應的圖形也會跟著改變的神奇功能，光是一般常見的正多邊形就可以有很多不同的變化；我們嘗試將旋轉中心與另一點均置於正 Δ 邊上，將正 Δ 邊上另一旋轉點以旋轉中心為基準，旋轉固定角度後形成新點，觀察正 Δ 上兩點進行移動時，形成新點，則該點會依不同的移動方式產生不同的漂亮軌跡及形成不同的性質。

經文獻查閱，發現雖然歷年科展探討正多邊形或軌跡圖形的作品很多(王羽安，2007；王亭亭、彭斯婉、陳葦樺、徐聰榛，2009；王郁婷、陳泓志、鄭達駿，2009；王敏齊、詹雨安、鄭丞傑，2012；江翊、江哲宇，2010；李歡蓉，2002；李宇凡、沈威銓，2011；林子亘、林軒民、沈柏璋，2011；徐琬庭、吳千圳、高尉庭、洪研竣，2009；陳聿軒，2012；張詠盛、楊雅涵、陳碩文，2012；薛丞洋、張聿民、陳思罕、劉恩權，2007；孫宏奇、陳家錡，2011；藍崧文、陳宗蔚、吳玟秀，2012；潘世昂，2001；蘇育德、劉子弘、邱建智，2003)，但跟我們目前感興趣的方向不同，因此更確信展開我們的探索之旅。

教材相關性：翰版數學課本第三章三角形及其性質

貳、研究目的

- 一、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律
- 二、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在 $1:k$ 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律

參、研究設備與名詞解釋

一、研究設備：Cabri 2P、Geogebra

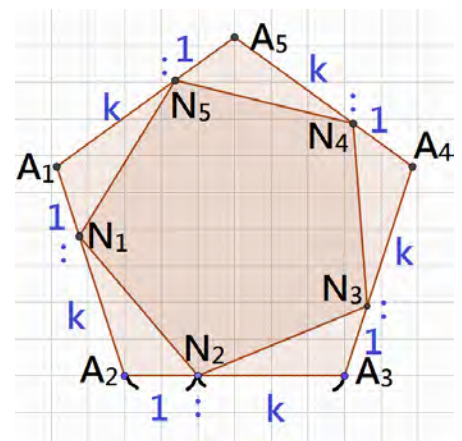
二、名詞解釋：

(一)外正 n 邊形：每邊長皆為1單位之稱之為外正 n 邊形；此正 n 邊形亦為研究目的一指稱之正 n 邊形。

(二)內正 n 邊形：在外正 n 邊形的每一邊上做一點 N_i ，其中 $i=1, 2, \dots, n$ ，而每個點分別將相對應的外正 n 邊形邊長分割為兩線段，線段長比為 $1:k$ ，即 $\overline{A_i N_i} : \overline{N_i A_{i+1}} = 1:k$ ，以外正 n 邊形底邊 $A_2 A_3$ 為例， $\overline{A_2 N_2} : \overline{N_2 A_3} = 1:k$ ；依序連接外正 n 邊形上的每個相鄰的 N_i ，則連線所構成之小正 n 邊形稱之為內正 n 邊形。

(三)複合正 n 邊形：同時具有外正 n 邊形及內正 n 邊形之圖形稱之為複合正 n 邊形；當其邊長分割為 $1:k$ ，稱之為 $1:k$ 複合正 n 邊形。

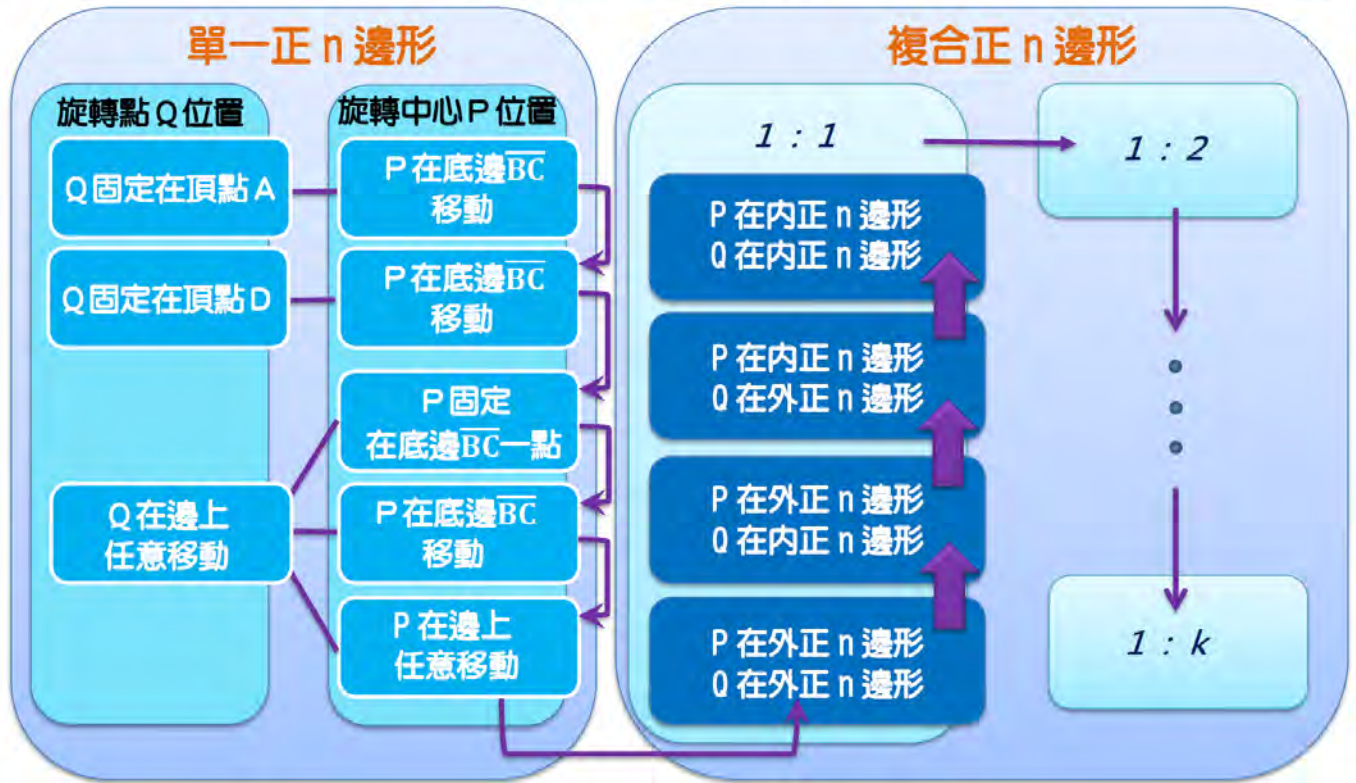
(四)旋轉內角 θ ：本研究指的內角為正 n 邊形內角度數，以 θ 表示



肆、研究架構

首先，做單一正 n 邊形，在正 n 邊形邊上取任意點 P 、 Q ，其中 P 是旋轉中心， Q 是旋轉點；接續將 Q 旋轉正 n 邊形內角度數 θ 後形成 Q' ，移動 P 、 Q ，逐一觀察 Q' 變化的關係與規律性；接續做 $1:k$ 複合正 n 邊形，分別探討 P 、 Q 在不同正 n 邊形時， Q' 變化的關係與規律性，整個研究架構如下：

當 Q 旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且 Q 與中心 P 分別在給定的正 n 邊形邊上移動時，
探討新點 Q' 的軌跡變化與規律



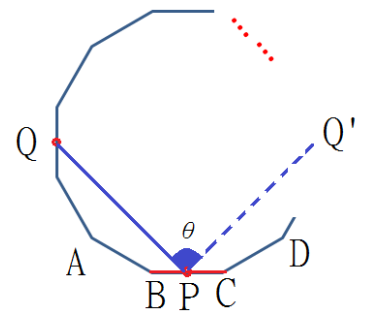
伍、研究過程與結果

一、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律

首先，我們先做正 n 邊形，在正 n 邊形邊上取任意點 P 、 Q ，其中 P 是本研究的旋轉中心， Q 是旋轉點；接續將 Q 旋轉正 n 邊形內角度數 θ ，此為 Q' ，移動 P 、 Q ，觀察 Q' 變化的關係與規律性

為研究方便，我們不失一般性假設正 n 邊形底邊為 \overline{BC} ，如右圖紅色標示處，而正 n 邊形其餘頂點標示則依序為 $ABCDE\dots$ 。

接著，我們逐一探討 Q 點在正 n 邊形邊上不同位置，在上述條件下， Q' 的軌跡變化



(一)當 Q 固定在正 n 邊形的頂點上，P 在正 n 邊形底邊，Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q'，移動點 P，探討 Q' 之軌跡變化與規律

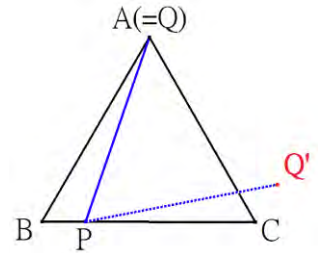
1. 當 Q 與正 n 邊形的頂點 A 重合

以正三角形為例說明進行步驟

做法： 1. 固定 Q 在正 n 邊形頂點 A 上，此時 Q=A

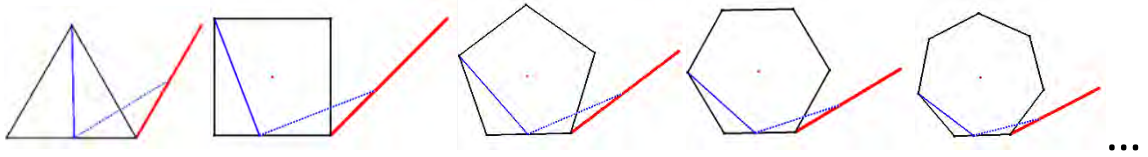
2. 連 \overline{AP} (圖中藍色實線)，以 P 為圓心旋轉 θ (正 \triangle 內角度數=60 度)，得到 $\overline{PQ'}$ (藍色虛線)

3. 在 \overline{BC} 移動 P 點，觀察 Q' 軌跡圖形的變化如下圖。



當 P 移動到 B，與 B 重合	當 P 移動到 \overline{BC} 其中一點	當 P 移動到 C，與 C 重合

發現： 1. 當 Q 點和 A 點重合時，Q' 的變化軌跡為一直線，如圖正 3、4、5、6、7... 邊形中紅色直線。



2. 此直線 CQ' 為正 n 邊形底角 $\angle C$ 的外角平分線。

證明： 設 M 是 BC 延長線上的一點，

$$\angle BAP + \angle ABP + \angle APB = 180^\circ \dots\dots ①$$

$$\angle APQ' = \angle ABP \dots\dots ②$$

$$② \text{ 代入 } ① \rightarrow \angle BAP + \angle APQ' + \angle APB = 180^\circ$$

$$\text{又 } \because \angle Q'PC + \angle APQ' + \angle APB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BAP = \angle Q'PC$$

做 $\overline{AN} = \overline{PC}$ 使 N 在 \overline{AB} 上

$$\because \overline{AN} = \overline{PC}, \quad \overline{AN} = \overline{NQ'}, \quad \angle NAP = \angle CPQ'$$

$$\therefore \triangle ANP \cong \triangle PCQ' \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle ANP = \angle PCQ'$$

$$\because \overline{AB} = \overline{BC} \text{ 且 } \overline{AN} = \overline{PC}$$

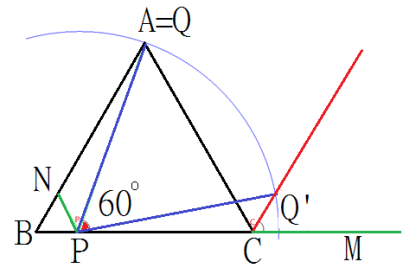
$$\therefore \overline{NB} = \overline{BP}$$

$$\text{又 } \because \angle NBP = (180 - \frac{360}{n})^\circ$$

$$\therefore \angle BPN = \angle BNP = (\frac{180}{n})^\circ$$

$$\therefore \angle ANP = (180 - \frac{180}{n})^\circ$$

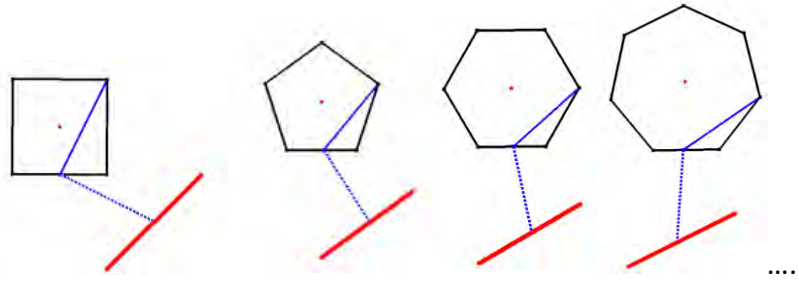
$$\therefore \angle PCQ' = (180 - \frac{180}{n})^\circ \rightarrow \angle Q'CM = (\frac{180}{n})^\circ, \quad \overline{Q'C} \text{ 平分 } \angle DCM \text{ 得證。}$$



2. 當 Q 與正 n 邊形的頂點 D 重合

作法同研究一(一)1, 但 Q 位置換成為正 n 邊形的 D 點(其中正△只有 3 邊, 無 D 點)。

發現: 1. 當 Q 點和 D 點重合時, Q' 的變化軌跡為一直線, 如下圖正 4、5、6、7... 邊形中紅色直線。



2. 連 B、D 做 \overline{BD} , 則 Q' 之軌跡與 \overline{BD} 平行、等長(即 $\overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}$, 且 $\overline{BD} \parallel \overline{Q_1Q_2}$)

證明: 在 $\triangle BCD$ 、 $\triangle Q_2CD$ 中

$$\because \overline{CD} = \overline{CD}, \overline{CB} = \overline{CQ_2}, \angle BCD = \angle Q_2CD$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle Q_2CD \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{Q_2D}$$

$$\text{又} \because \angle Q_2DC = \angle BDC = \angle DBC$$

$$\angle Q_2DC + \angle Q_1BC = \angle Q_1BD = \angle BCD$$

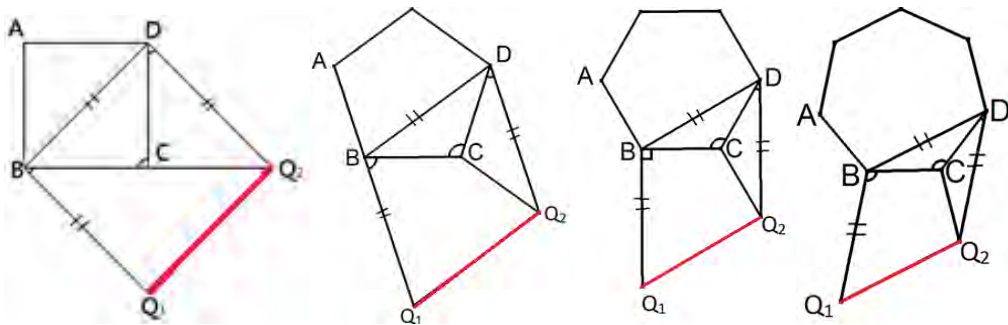
$$\therefore \angle Q_1BD + \angle Q_2BD$$

$$= \angle Q_2DC + \angle Q_1BC + \angle CBD + \angle CDB = 180^\circ$$

$$\therefore \overline{DQ_2} \parallel \overline{BQ_1} \text{ (同側內角互補)}$$

\rightarrow BQ_2Q_1 為平行四邊形

$$\therefore \overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}, \text{ 且 } \overline{BD} \parallel \overline{Q_1Q_2}$$



由上可以推廣到一般化, 得到本研究證明時常用之引理, 見下頁

【引理】 不論 Q 在正 n 邊形邊上任一點，只要翻轉固定角度，則動點 P 在 BC 上移動，形成 Q' 之軌跡圖形，與 BC 之夾角會形成定值。

另外， Q' 軌跡長 $= 2 \sin \frac{\theta}{2}$

說明 1： Q_2 軌跡和 Q_1 軌跡平行等長

不失一般性假設點 Q_1, Q_2 為任意點

令 $Q_1(x_1, y_1), B(0,0), C(1,0)$

令 Q_1, B 翻出點 Q_{B1} ， Q_1, C 翻出 Q_{C1}

$\Rightarrow \overline{Q_{B1}Q_{C1}}$ 為 Q_1 軌跡

令 θ 為翻轉角， $\theta_1 = \angle Q_1BC$ ， $\theta_2 = \angle Q_1CK$

$$\tan \theta_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad \tan \theta_2 = \frac{y_1}{1+x_1}$$

令 $r_1 = \overline{Q_1B}$ ， $r_2 = \overline{Q_1C}$

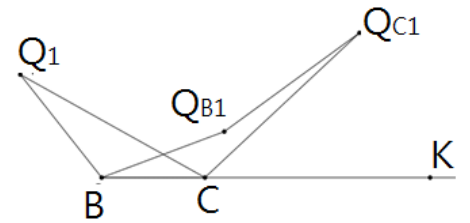
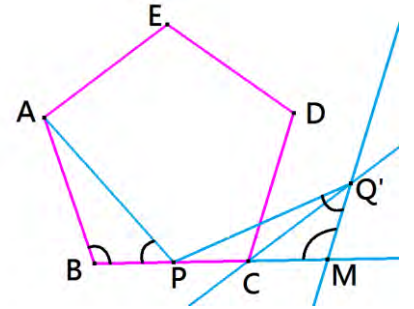
$$Q_{B1} \begin{cases} x = r_1 \cos(\theta_1 - \theta) \\ y = r_1 \sin(\theta_1 - \theta) \end{cases}$$

$$Q_{C1} \begin{cases} x = 1 + r_2 \cos(\theta_2 - \theta) \\ y = r_2 \sin(\theta_2 - \theta) \end{cases}$$

$\Rightarrow \overline{Q_{B1}Q_{C1}}$ 長度 $= \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$ 為定值，

斜率 $= \frac{1}{\csc \theta - \cot \theta}$ 亦為定值，

此時斜率相等，故得 Q_2 軌跡和 Q_1 軌跡平行等長



說明 2： $\overline{BP} = \overline{MQ'}$

做 M 點使 M 在 \overline{BC} 上且 $\angle Q'MC = \angle APQ'$ ，如圖，

$\therefore \angle APB + \angle APQ' + \angle Q'PM = 180^\circ$

$\angle APQ' = \angle ABP$

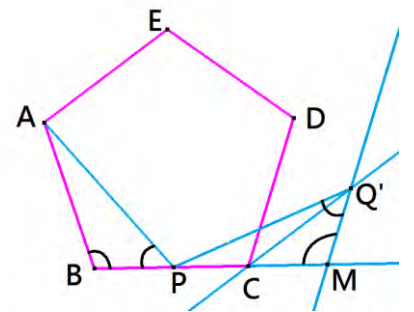
$\angle ABP + \angle APB + \angle Q'PM = 180^\circ$

$\angle BAP = \angle Q'PM$ ， $\angle ABP = \angle Q'MP$

\therefore 如圖，圖中標示相同角皆相等且 $\overline{PQ} = \overline{AP}$

$\rightarrow \triangle ABP \cong \triangle PMQ'$ ，故 $\overline{BP} = \overline{MQ'}$

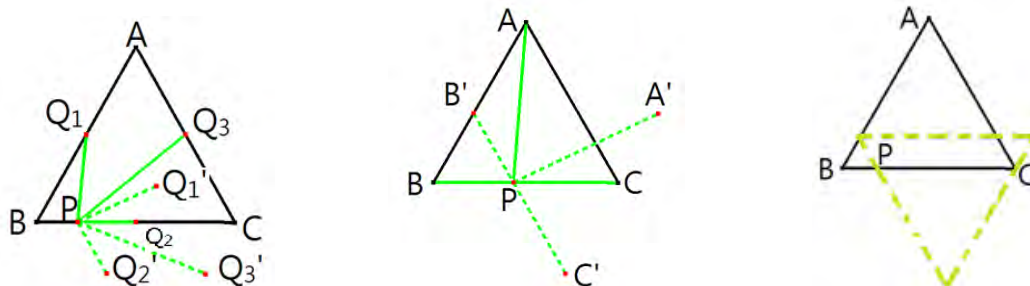
$\therefore Q'$ 之軌跡長 $= P$ 在 C 上時 $\overline{CQ'}$ 之長度 $= 2 \sin \frac{\theta}{2}$



(二) 當 Q 在正 n 邊形的邊上，P 固定在正 n 邊形底邊上一點，Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q'，移動點 Q，探討 Q' 之軌跡變化與規律

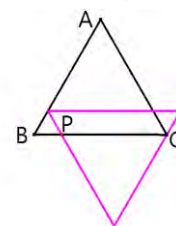
以正 \triangle 為例，先將旋轉中心 P 固定在 \overline{BC} 上移動，此時 Q 為正 $\triangle ABC$ 上任意動點

1. 連 \overline{QP} (圖中綠色實線)，當 Q 正好分別與頂點 A、B、C 重合時，以 P 為圓心旋轉 θ (正 \triangle 內角度數=60 度)，分別得到 $\overline{PA'}$ 、 $\overline{PB'}$ 、 $\overline{PC'}$ (綠色虛線)
2. 當 Q 正好分別與正 $\triangle ABC$ 三邊中點 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 重合時，以 P 為圓心旋轉 θ (正 \triangle 內角度數=60 度)，分別得到 $\overline{PQ_1'}$ 、 $\overline{PQ_2'}$ 、 $\overline{PQ_3'}$ (綠色虛線)，如左下圖。



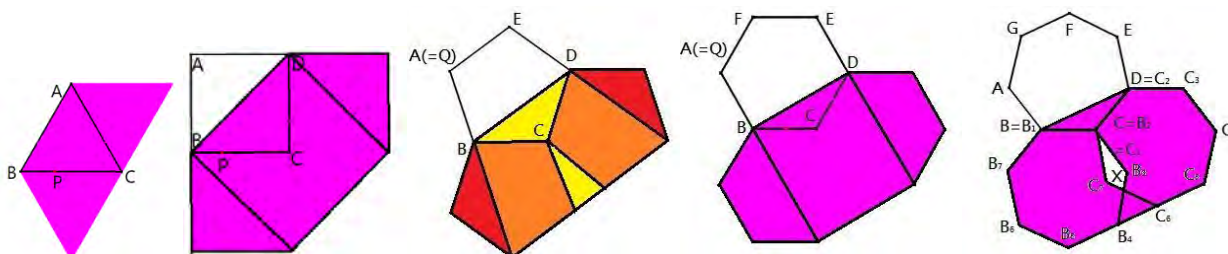
3. 在正 $\triangle ABC$ 移動 Q 點，觀察 Q' 軌跡圖形的變化如右上圖。
4. 再改變 P 的位置(在 \overline{BC} 上移動)，找出對於任意一點 P 的所有 Q' 軌跡，即為所求

發現： 1. 當旋轉中心 P 固定在 \overline{BC} 其中一點，且 Q 點在正 $\triangle ABC$ 任意移動時，Q' 變化軌跡為一倒立正 \triangle ，如圖粉紅封閉圖形。
2. 推廣到一般正 n 邊形，Q' 的變化軌跡亦為一倒立正 n 邊形



(三) 當 Q 在正 n 邊形的邊上，P 在正 n 邊形底邊上移動，Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q'，移動點 Q，探討 Q' 之軌跡變化與規律

做法： 同研究一(二)1，但 Q 點位置換成為正 n 邊形邊上的任意點。

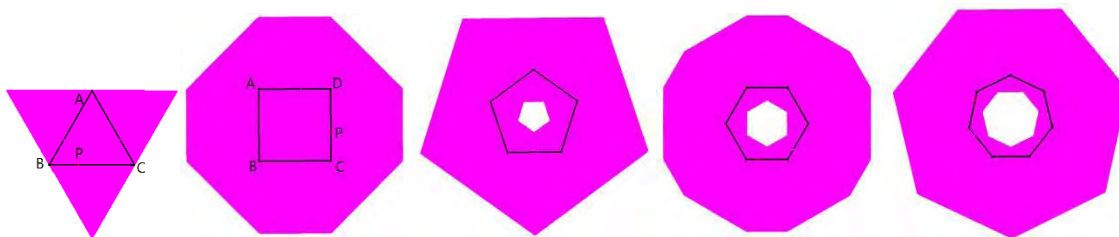


- 發現：**
1. 正 \triangle 中 Q' 的變化軌跡為以 AB 為一底，另一底的中點為 C 且長度為 AB 的 2 倍的梯形
 2. 正方形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉圖形，即以 BD 為一邊，C 為中心點的正方形，再以 BD 的兩個鄰邊為斜邊向外做等腰直角三角形，如上圖
 3. 正五邊形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉圖形，即以 BD 為一底，另一底長度 $\frac{3-\sqrt{5}}{4}BD$ 且兩腰長度 BD 的等腰梯形，再以 BC，CD 為邊分別做正五邊形，如上圖(黃色為梯形、紅色為正 5 邊形、橘色為兩圖形之重疊部分)
 4. 正六邊形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉圖形，即向外做以 BD 為一邊，鄰邊長度為 2AB 的矩形，再以新矩形中垂直 BD 的兩邊為底分別向外做另底、兩腰長皆為 AB 的等腰梯形，如上圖

5. 正七邊形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉圖形，即做正七邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ ，使 $B_1=B$ 且 $B_2=C$ ， $B_3 \neq D$ ，再做正七邊形 $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ ，使 $C_1=C$ 且 $C_2=D$ ， $C_3 \neq E$ ，令 B_3B_4 和 C_6C_7 交於 X 。軌跡即為八邊形 $BDC_3C_4C_5B_5B_6B_7$ ，中間空了箏形 CB_3XC_7 ，如上圖

(四)當 P 、 Q 在正 n 邊形上， Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q' ，移動點 P 、 Q ，探討 Q' 之軌跡變化與規律

做法：同研究一(二)1，但 Q 點位置換成為正 n 邊形邊上的任意點外，同時將 P 點換成正 n 邊形邊上的任意點。



- 發現：**
1. 正 \triangle 中 Q' 的軌跡圖形為粉紅封閉正 \triangle ，即以 A 、 B 、 C 為三邊中點的正 \triangle
 2. 正方形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉 8 邊形，即以原正方形的各邊為一邊，向外作出正方形，再以所有新正方形右邊的邊和右邊的正方形的左邊的邊為兩腰，做等腰直角三角形，
 - ① 該封閉圖形為一對稱 8 邊形。
 - ② 邊長有 2 種，其一為原正方形邊長，二則為原正方形邊長之 $\sqrt{2}$ 倍
 3. 正五邊形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉圖形，即中心點和原五邊形相同的正五邊形環
 - ① 外環正五邊形邊長為原正五邊形邊長之 $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ 倍
 - ② 內外環正五邊形方向與原正五邊形相反，即倒立
 4. 正六邊形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉 12 邊形，即以六邊分別向外做另一邊為 $\sqrt{3}AB$ 的矩形，再將矩形間空位以邊長為 $\sqrt{3}AB$ 的正 \triangle 填滿，中間空了一個頂點正好相對原正六邊形各邊中點，以原中心點為中心的正六邊形
 5. 正七邊形中 Q' 的軌跡圖形為粉紅色封閉圖形，即中心點和原七邊形相同的正五邊形環
 - ① 外環正七邊形邊長為原正七邊形邊長之 $\frac{8 \cos^2(\frac{180^\circ}{7}) + 2 \cos(\frac{180^\circ}{7}) - 2}{2 \cos(\frac{180^\circ}{7}) + 1}$ 倍
 - ② 內外環正七邊形方向與原正七邊形相反，即倒立

結果：1. 正奇數邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形亦為同邊數之正奇邊形環，且圖形方向與原正奇數邊形相反，即倒立；

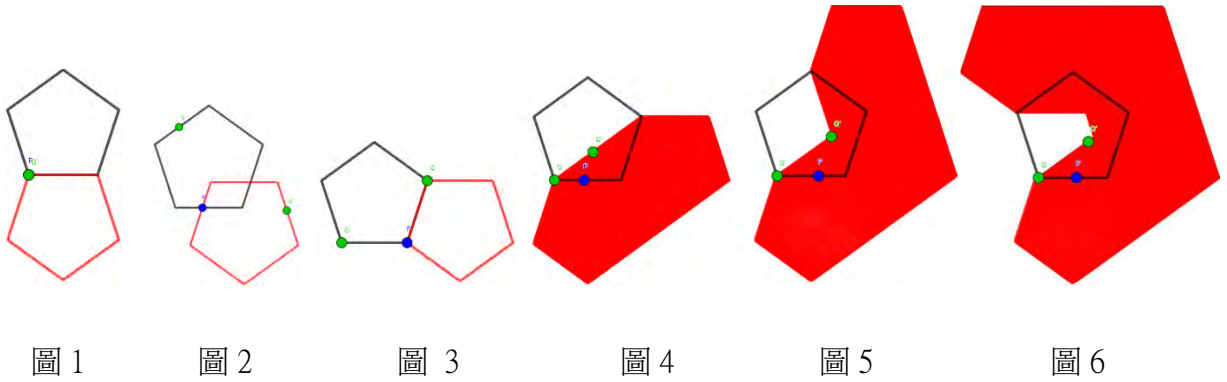
① 正奇邊形內環為對應其邊數的倒立正奇邊形

說明：以下說明內環是倒立正 n 邊形，以正 5 邊形為例

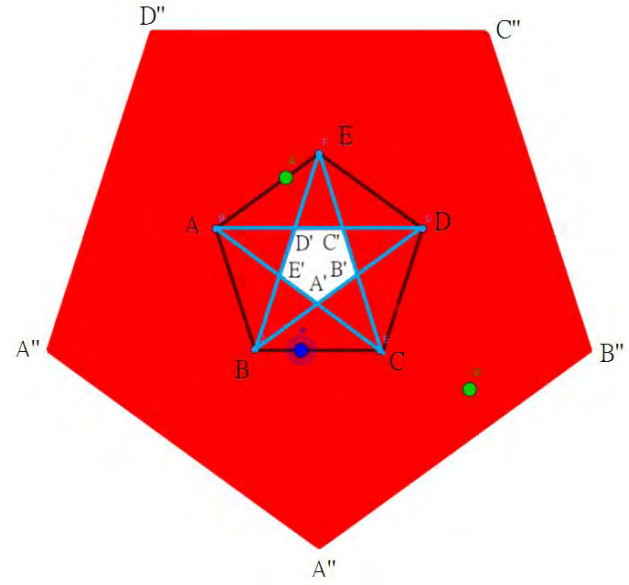
圖 1 紅色部分為 P 點與 B 點重合， Q 點為正 5 邊形任意點的 Q' 軌跡

圖 2 紅色部分是當 P 持續在 BC 上移動時得到 Q' 之軌跡

圖 3 紅色部分為 P 點與 C 點重合， Q 點為正 5 邊形任意點的 Q' 軌跡

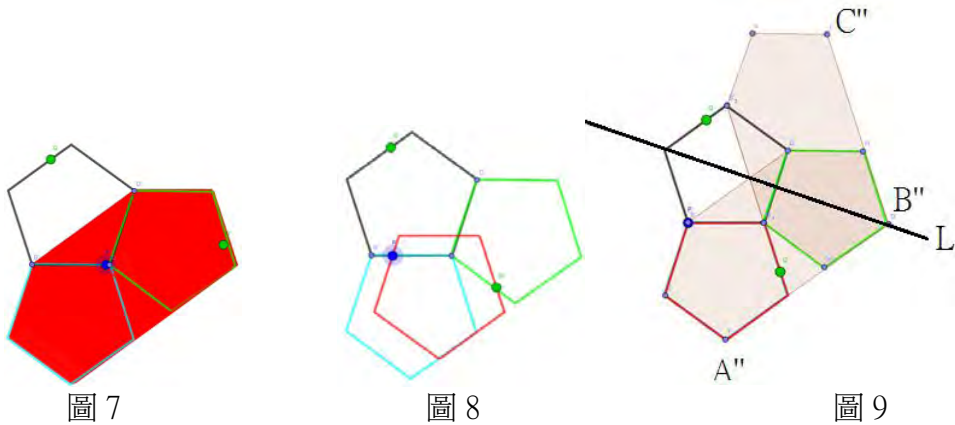


整個P在BC上移動Q' 軌跡為圖4，此時可以發現該圖形軌跡內圍的部分為正5邊形的其中一條對角線
 接著，P持續移動，得到圖5、6，發現該圖形軌跡內圍為正5邊形的其中一條對角線一部分
 最後，可得內環正5邊形A'B'C'D'E'乃正n邊形對角線(淺藍色線)圍成，為一正5邊形。



②正奇邊形外環為對應其邊數的倒立正奇邊形

說明：整個P在BC上移動Q' 軌跡為圖7，此時當P分別與B、C重合時，可以發現該圖形軌跡的起始部分為淺藍色、淺綠色正5邊形

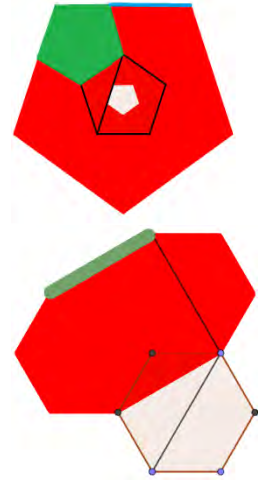


當P在CD上移動時形成的軌跡為圖7圖形對於L對稱之圖形，如圖9
 由上述可知， $\angle A'' = \angle B'' = \angle C'' = 108$ 度，且 $\overline{A''B''} = \overline{B''C''}$ ，同理，故A''B''C''D''E''為一正5邊形

正偶數邊形Q' 形成之軌跡封閉圖形則為該正n邊形邊數2倍之對稱正多邊形；且軌跡圖形之邊長與原正n邊形邊長有特定比例。

- 2. 邊數為奇數時，原正n邊形與正n邊軌跡圖形邊長比為 $(2\sin\frac{\theta}{2} + 1) : 1$ ；
 邊數為偶數時，軌跡圖形邊長有2種分別為1、 $2\sin\frac{\theta}{2}$ 倍

說明：正奇數邊形的邊長求法以正五邊形為例，如圖，
 綠色正五邊形全等於原正五邊形，
 又藍色線段 = $2 \sin \frac{\theta}{2}$ (見引理)
 \therefore 邊長 = $1 + 2 \sin \frac{\theta}{2}$



正偶數邊形邊長的求法，以正六邊形為例
 如圖，紅色線段長 = 橘色線段長且 $\angle 1 + \angle 2 = 180$
 綠線段為 Q 在 B 點，P 在 \overline{EF} 上移動時所形成之軌跡
 \therefore 綠色線段長 = $2 \sin \frac{\theta}{2}$

接續，我們好奇 Q' 之軌跡參數式為何？

(五) 當 P、Q 為在正 n 邊形邊上任意點，點 Q' 之軌跡參數式

令 QP 與水平線的夾角為 θ_1 ，旋轉角為 θ_2

不失一般性假設正 n 邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 之頂點坐標為 $A_i(x_i, y_i)$

定義 $A_{n+1} = A_1$

若 Q 在 $\overline{A_kA_{k+1}}$ 上，則 $Q \begin{cases} x_Q = x_k + t \\ y_Q = y_k + t \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \end{cases}$

同理 P 在 $\overline{A_lA_{l+1}}$ 上，則 $P \begin{cases} x_P = x_l + u \\ y_P = y_l + u \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{l+1} - x_l} \end{cases}$

其中

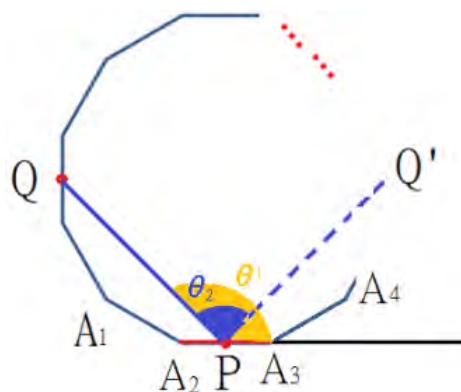
$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)(x_{l+1} - x_l)(y_k - y_l) + t(x_{l+1} - x_l)(y_{k+1} - y_k) + u(x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k)}{(x_k - x_l + t - u)(x_{k+1} - x_k)(x_{l+1} - x_l)}$$

令

$$r = \overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} =$$

$$\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (t - u)^2 + \left[\frac{t(y_{k+1} - y_k)(x_{l+1} - x_l) - u(x_{l+1} - x_l)(y_{k+1} - y_k)}{(x_{l+1} - x_l)(x_{l+1} - x_l)} \right]^2 + 2(x_k - x_l)(t - u) + 2(y_k - y_l) \left[\frac{t(y_{k+1} - y_k)(x_{l+1} - x_l) - u(x_{l+1} - x_l)(y_{k+1} - y_k)}{(x_{l+1} - x_l)(x_{l+1} - x_l)} \right]}$$

$$\Rightarrow Q' \text{ 軌跡參數式為 } \begin{cases} x_{Q'} = x_P + r \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ y_{Q'} = y_P + r \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$



二、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在 1:k 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律

(一)當某一點 Q 對於旋轉中心 P 旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且 P 、 Q 兩點分別在給定的 1:1 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律

此時， P 、 Q 兩點分別在 1:1 複合正 n 邊形邊上有 4 種情況，分別為

情形 1 P 、 Q 皆在外正 n 邊形上

情形 2 P 在外、 Q 在內正 n 邊形上

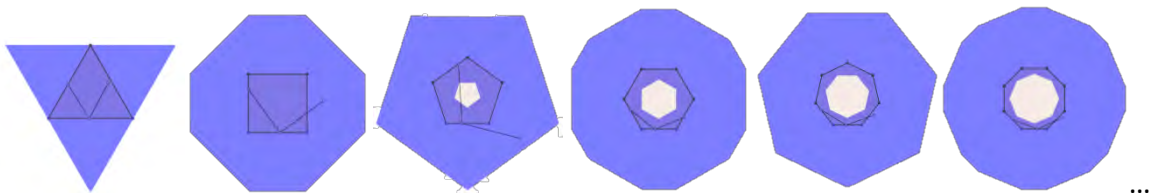
情形 3 P 在內、 Q 在外正 n 邊形上

情形 4 P 、 Q 皆在內正 n 邊形上

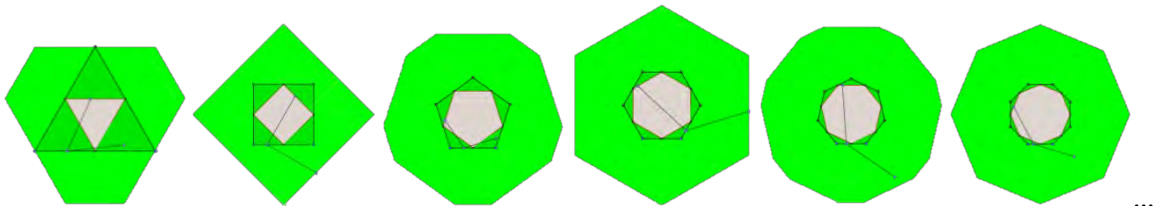
依序繪圖並進行討論

發現：1. Q' 軌跡圖形即研究二 1:k 複合正 n 邊形 P 在外、 Q 在外正 n 邊形之軌跡圖形；而與 1:k 複合正 n 邊形 P 在內、 Q 在內正 n 邊形之軌跡圖形相似；其餘軌跡圖形亦均為多邊形，新點 Q' 的軌跡變化如下：

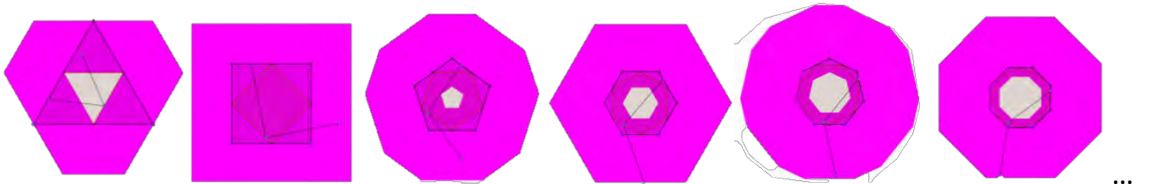
① P 、 Q 皆於外正 n 邊形上



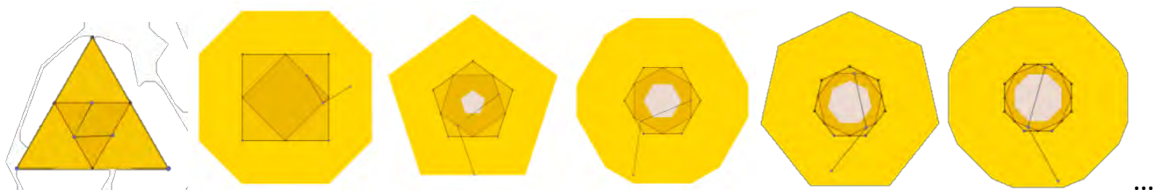
② P 於外正 n 邊形上、 Q 於內正 n 邊形上



③ P 於內正 n 邊形上、 Q 於外正 n 邊形上



④ P 、 Q 皆於內正 n 邊形上



2. 從上面軌跡變化圖形進一步討論，推得①軌跡圖形邊數；②軌跡圖形邊長比；
③軌跡圖形內角角度

①軌跡圖形邊數整理如下

PQ 位置		正 n 邊形邊數						
		3	4	5	6	7	8	...
P 在外	Q 在外	3	8	5	12	7	16	...
	Q 在內	6	4	10	6	14	8	...
P 在內	Q 在外	6	4	10	6	14	8	...
	Q 在內	3	8	5	12	7	16	...

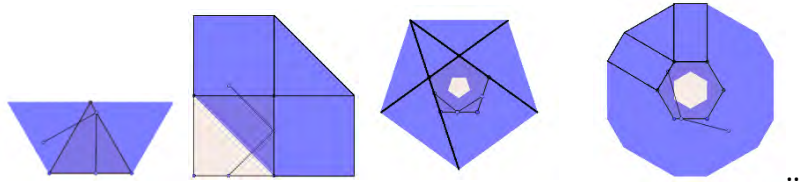
軌跡圖形邊數一般化公式如下

- ① 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，則複合正 2m 邊形邊數為 4m、
複合正 2m+1 邊形邊數為 2m+1
- ② 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，則複合正 2m 邊形邊數為 2m、
複合正 2m+1 邊形邊數為 4m+2
- ③ 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，則複合正 2m 邊形邊數為 2m、
複合正 2m+1 邊形為邊數 4m+2
- ④ 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，則複合正 2m 邊形邊數為 4m、
複合正 2m+1 邊形邊數為 2m+1

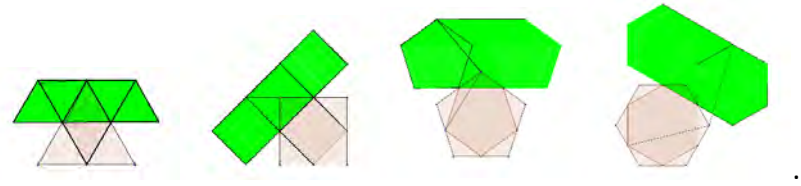
②軌跡圖形邊長比

我們透過觀察部分圖形並計算，

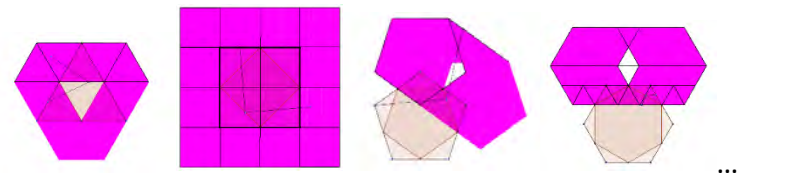
➤ P 在外 Q 在外部分圖



➤ P 在外 Q 在內部分圖



➤ P 在內 Q 在外部分圖



➤ P 在內 Q 在內的情形則依 P 在外 Q 在外相似圖形進行運算
整理軌跡圖形邊長比如下：

邊數		3	4	5	6	7	8	...
P 在 外	Q 在外	2	$1, \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$1, \sqrt{3}$	$1+2 \sin 64\frac{2}{7}^\circ$	$1, 2 \sin 135^\circ$...
	Q 在內	$1, 2$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2 \sin 54^\circ, 4 \sin 54^\circ$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2 \sin 64\frac{2}{7}^\circ, 4 \sin 64\frac{2}{7}^\circ$	$3 \sin 67.5^\circ$...
P 在 內	Q 在外	$1, 2$	2	$1, 2 \sin 54^\circ$	$\frac{5}{2}$	$1, 2 \sin 64\frac{2}{7}^\circ$	$1 + (\sin 67.5^\circ)^2$...
	Q 在內	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1+\cos 128\frac{4}{7}^\circ}{2}} \times (1+2\sin 64\frac{2}{7}^\circ)$	$\sin 67.5^\circ, 2 \sin 135^\circ \sin 67.5^\circ$...

軌跡圖形邊長比一般化公式如下

- ① 當 P 在外正 n 邊形、Q 在外正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形邊長比為 $1 + 2 \sin \theta$ ，複合正 2m+1 邊形邊長比為 $1 + 2 \sin \frac{\theta}{2}$
- ② 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形邊長比為 $3 \sin \frac{\theta}{2}$ ，複合正 2m+1 邊形邊長比為 $2 \sin \frac{\theta}{2}$ 、 $4 \sin \frac{\theta}{2}$
- ③ 當 P 在內正 n 邊形、Q 在外正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形邊長比為 $1 + \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2$ ，複合正 2m+1 邊形邊長比為 $1 + 2 \sin \frac{\theta}{2}$
- ④ 當 P 在內正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，則複合正 2m 邊形邊長比為

$$\sin \frac{\theta}{2} \cdot 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \text{ 複合正 } 2m+1 \text{ 邊形邊長比 } (2 \sin \frac{\theta}{2} + 1) \frac{\sqrt{2-2 \cos \theta}}{2}$$

上述公式推導舉例如下

以 P 在外、Q 在外複合正 2m 邊形的邊長有 2 種，如圖為複合正六邊形

紅色線段長 = 橘色線段長且 $\angle 1 + \angle 2 = 180$

$$\text{紅色線段} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\angle 2 = 180 - \theta$$

$$\therefore \text{邊長比} = 2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} = 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \sin \theta$$

以 P 在外、Q 在內複合正 2m+1 邊形的邊長有 2 種，如圖為複合正五邊形

粉紅邊五邊形 \cong 內正五邊形 \Rightarrow

$$\text{其中一邊為 } 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

紫色線段=P 在某邊上移動所形成之軌跡

$$\Rightarrow \text{另一邊為 } 4 \sin \frac{\theta}{2}$$

以 P 在內、Q 在外複合正 2m+1 邊形的邊長有 2 種，

如圖為複合正五邊形

深綠色八邊形 \cong 原正八邊形

且淺綠色線段=P 在正八邊形的某一邊上移動所形成之軌跡

$$\therefore \text{一邊為 } 1, \text{ 另一邊為 } 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

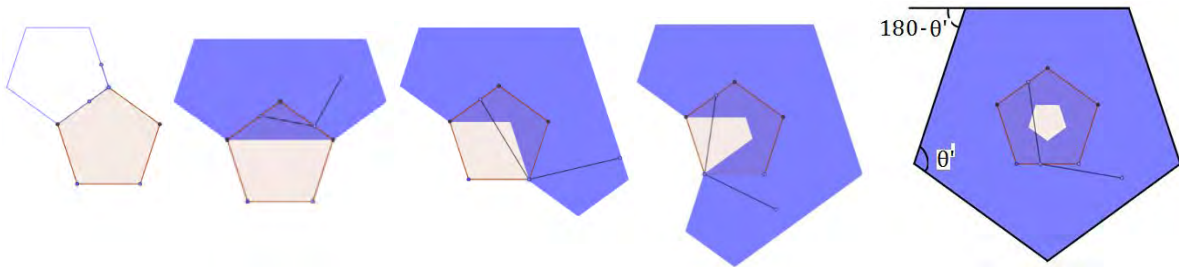
③ 軌跡圖形內角角度如下

P、Q 位置		正 n 邊形邊數						
		3	4	5	6	7	8	...
P 在外	Q 在外	60°	135°	108°	150°	$128\frac{4}{7}^\circ$	157.5°	...
	Q 在內	120°	90°	144°	120°	$154\frac{2}{7}^\circ$	135°	...
P 在內	Q 在外	120°	90°	144°	120°	$154\frac{2}{7}^\circ$	135°	...
	Q 在內	60°	135°	108°	150°	$128\frac{4}{7}^\circ$	157.5°	...

軌跡圖形內角一般化公式如下

- ① 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形內角度數為 θ 、複合正 2m+1 邊形內角度數為 $\frac{\theta+180}{2}^\circ$ 。
- ② 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形內角度數為 $\frac{\theta+180}{2}^\circ$ 、複合正 2m+1 邊形內角度數為 θ 。
- ③ 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形內角度數為 $\frac{\theta+180}{2}^\circ$ 、複合正 2m+1 邊形內角度數為 θ 。
- ④ 當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，
則複合正 2m 邊形內角度數為 θ 、複合正 2m+1 邊形內角度數為 $\frac{\theta+180}{2}^\circ$ 。

上述公式推導舉例如下，以 P 外 Q 外的正五邊形為例



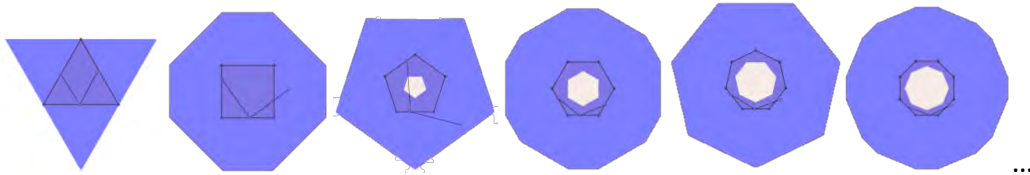
經操作後所得 Q' 軌跡為對稱圖形，由此可得 Q' 軌跡圖形內角度數皆相等，利用外角和=360°，設 Q' 軌跡圖形內角度數為 θ' ，Q' 軌跡圖形內角數量= n' ，則 $\theta' = 180^\circ - 360^\circ/n'$

(二)當某一點 Q 對於旋轉中心 P 旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且 P 、 Q 兩點分別在給定的 $1:2$ 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律

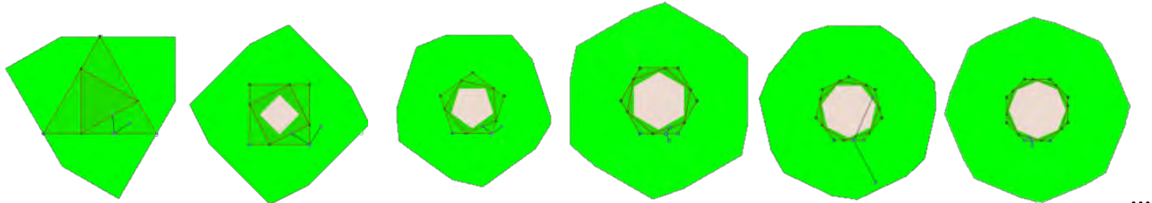
同研究二(一)4 種情況，依序繪圖並進行討論

發現：1. 新點 Q' 的軌跡變化如下

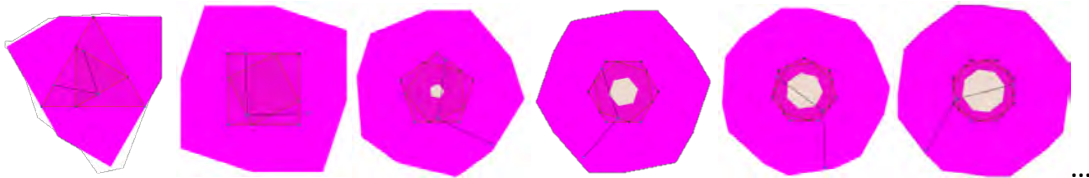
① P 、 Q 皆於外正 n 邊形上



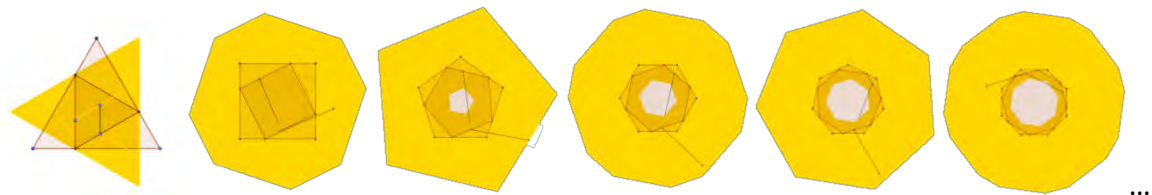
② P 於外正 n 邊形上、 Q 於內正 n 邊形上



③ P 於內正 n 邊形上、 Q 於外正 n 邊形上



④ P 、 Q 皆於內正 n 邊形上



2. 從上面軌跡變化圖形進一步討論，推得①軌跡圖形邊數；②軌跡圖形邊長比；
③軌跡圖形內角角度

①軌跡圖形邊數整理如下

PQ 位置 \ 正 n 邊形邊數		3	4	5	6	7	8	...
		P 在外	Q 在外	3	8	5	12	7
	Q 在內	6	8	10	12	14	16	...
P 在內	Q 在外	6	8	10	12	14	16	...
	Q 在內	3	8	5	12	7	16	...

軌跡圖形邊數一般化公式如下

- ① 當 P 在外正 n 邊形、 Q 在內正 n 邊形，則複合正 $2m$ 邊形邊數為 $4m$ 、複合正 $2m+1$ 邊形邊數為 $2m+1$
- ② 當 P 在外正 n 邊形、 Q 在內正 n 邊形，則複合正 $2m$ 邊形邊數為 $4m$ 、複合正 $2m+1$ 邊形邊數為 $4m+2$
- ③ 當 P 在內正 n 邊形、 Q 在外正 n 邊形，則複合正 $2m$ 邊形邊數為 $4m$ 、複合正 $2m+1$ 邊形為邊數 $4m+2$
- ④ 當 P 在內正 n 邊形、 Q 在內正 n 邊形，則複合正 $2m$ 邊形邊數為 $4m$ 、複合正 $2m+1$ 邊形邊數為 $2m+1$

②軌跡圖形邊長比

軌跡圖形邊長比一般化公式如下，推導過程詳見手稿

①當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，

則複合正 2m 邊形邊長比為 $1 + 2 \sin \theta$ ，複合正 2m+1 邊形邊長比為 $1 + 2 \sin \frac{\theta}{2}$

②當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，

則複合正 2m、2m+1 邊形邊長比均為 $2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3}$

③當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，

則複合正 2m、2m+1 邊形邊長比均為 $1 + \frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} \times 2 \sin \theta$

④當 P 在外正 n 邊形、Q 在內正 n 邊形，

則複合正 2m 邊形邊長比為 $\frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3}$ 、 $\frac{2\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} \sin \frac{\theta}{2}$ ，

複合正 2m+1 邊形邊長比為 $\frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} (2 \sin \theta + 1)$

③軌跡圖形內角角度如下

∴此處內角角度較前述內容更複雜，嘗試逐一求出

①P 外 Q 內 之正三角形

首先，P 點移動至頂點 A，並將 Q 移動至 B_1 。

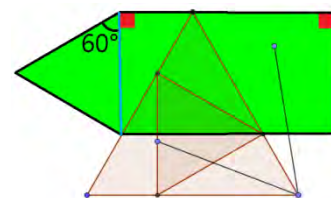
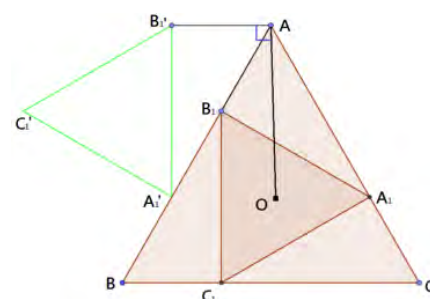
則 $\overline{PQ} \perp \overline{AO}$ 。(如右上圖)

而 $\triangle A_1'B_1'C_1'$ 為以 P 為圓心，由 $\triangle A_1B_1C_1$ 旋轉 60° 所形成。

故 $\angle C_1'B_1'A_1' = 60^\circ$ ，則 $\angle A B_1'A_1' = 90^\circ$

再由引理得到右圖中的兩條藍直線會互相平行等長，則紅色夾角為 90° 。

得，P 外 Q 內之三角形 Q' 軌跡圖形兩種內角為 150° 、 90°



②P 外 Q 內 之正方形

當 $P=D$ 、 $Q=D_1$ 時

$$\overline{AQ'} = \overline{CQ}, \overline{Q'P} = \overline{QP}$$

$$\text{則 } \overline{AQ'} : \overline{Q'P} = 1:2$$

當 $P=A$ 、 $Q=A_1$ 時

$$\overline{BQ'} = \overline{DQ}, \overline{Q'P} = \overline{QP}$$

$$\text{則 } \overline{BQ'} : \overline{Q'P} = 1:2$$

將 B_1' 、 C_1' 及 A_1' 、 D_1' 分別連線

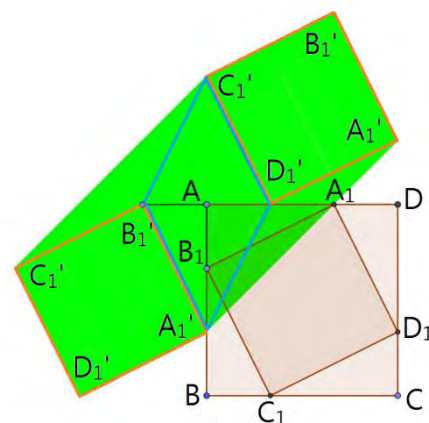
根據引理得 $\overline{B_1'C_1'}$ 、 $\overline{A_1'D_1'}$ 平行等長

而 $\overline{AQ'} : \overline{AD}$ 為 1:3， $\overline{Q'P} : \overline{BP}$ 為 2:3

$$\Rightarrow \overline{AQ'} : \overline{Q'P} = 1:2$$

再透過畢氏定理得 $\overline{B_1'C_1'} = \overline{A_1'D_1'} = \sqrt{5}$

$$\text{則 } \angle B_1'C_1'Q' = 2 \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$$



③ P 外 Q 內 之正五邊形

以圖中每種顏色皆代表相互平行的線段、射線

其中 $\overline{C_1'B_1'} // \overline{C_1D_1}$ ，再由 D_1 向右做一條平行

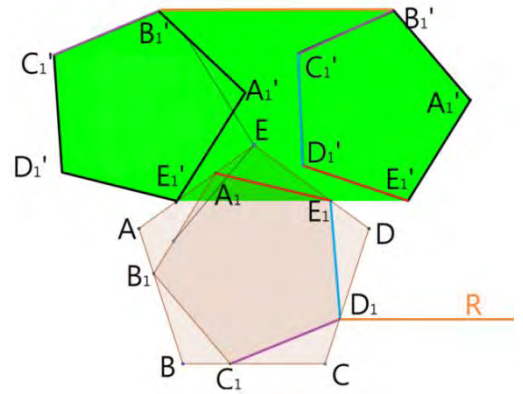
於 B_1' 移動軌跡之射線 R (橘色)

則 $\overline{C_1D_1}$ 與射線 R 所構成的夾角

會等於 $\overline{C_1'B_1'}$ 與 B_1' 移動軌跡之夾角

又等於 $180^\circ - \angle D_1'C_1'C$

$$\angle D_1'C_1'C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{54-14\sqrt{5}}}$$



④ P 外 Q 內 之正六邊形

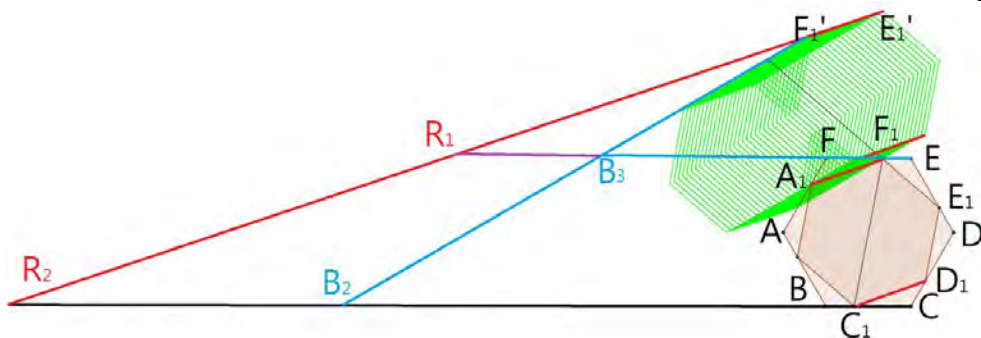
如圖紅色線段皆相互平行，又圖中 $\overline{C_1'B_3}$ 和 $\overline{FB_3}$ 之夾角為 $\frac{180-120}{2} = 30^\circ$ (見引理)

設 $\angle D_1C_1C = x$ ，則由正弦定理得 $2 = \frac{\sin(60-x)}{\sin x}$

又 $\overline{R_2C} // \overline{R_1B_3}$ ， $\therefore \angle C_1'R_1B_3 = \angle D_1'C_1'C = x$

由外角定理知 $\angle R_1C_1'B_3 = 30-x$

$\therefore Q'$ 圖形其中一內角 = $180 - \angle R_1C_1'B_3 = 150+x$ ，(後求出 $x = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{5}$)



⑤ P 外 Q 內 之正七邊形

以圖中每種顏色皆代表相互平行的線段、射線

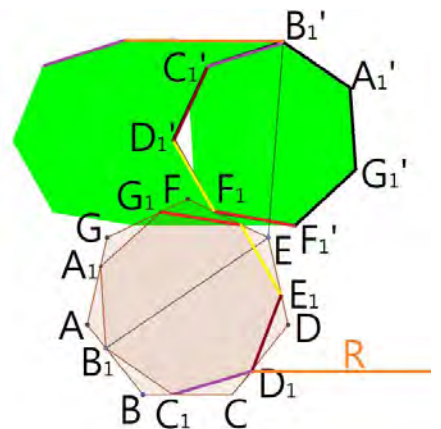
其中 $\overline{C_1'B_1'} // \overline{C_1D_1}$

再由 D_1 向右做一條平行於 B_1' 移動軌跡之射線 R (橘色)

則 $\overline{C_1D_1}$ 與射線 R 所構成的夾角

會等於 $\overline{C_1'B_1'}$ 與 B_1' 移動軌跡之夾角

又等於 $180^\circ - \angle D_1'C_1'C$



⑥ P 外 Q 內 之正八邊形

如圖中紅色線段皆相互平行

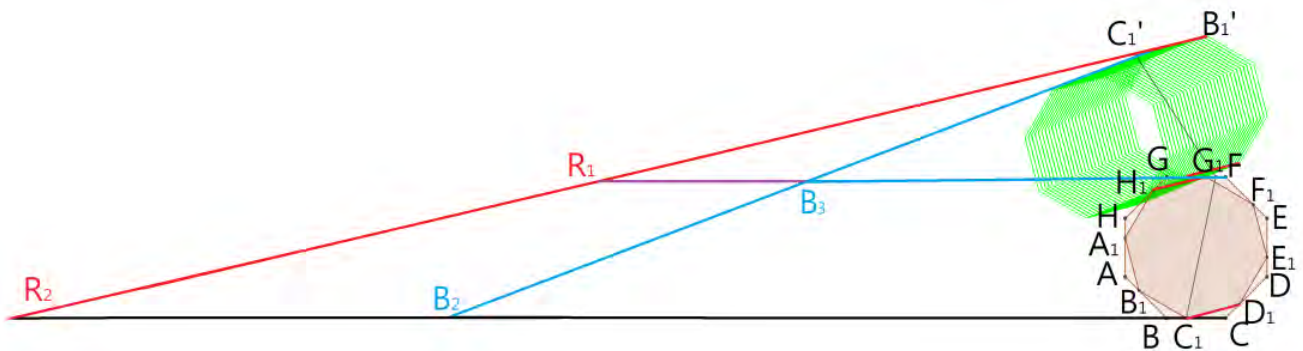
又圖中 $\overline{C_1'B_3}$ 和 $\overline{GB_3}$ 之夾角為 $\frac{180-135}{2} = 22.5^\circ$ (見引理)

設 $\angle D_1C_1C = x$ ，則由正弦定理得 $2 = \frac{\sin(45-x)}{\sin x}$

又 $\overline{R_2C} // \overline{R_1B_3}$ ， $\therefore \angle C_1'R_1B_3 = \angle D_1'C_1'C = x$

由外角定理知 $\angle R_1C_1'B_3 = 22.5 - x$

$\therefore Q'$ 圖形其中一內角 = $180 - \angle R_1C_1'B_3 = 157.5 + x$ ，(後求出 $x = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$)



以此類推，可以得到 Q' 軌跡圖形內角一般化公式如下表

複合正 n 邊形邊數 P、Q 在複合正 n 邊形位置	2m	2m+1
P 在外，Q 在外	$\frac{\theta + 180}{2}$	θ
P 在外，Q 在內	$x + \frac{\theta + 180}{2}$ 、 $-x + \frac{\theta + 180}{2}$	$180 - x$ 、 $x + \theta$
P 在內，Q 在外	$x + \frac{\theta + 180}{2}$ 、 $-x + \frac{\theta + 180}{2}$	$180 - x$ 、 $x + \theta$
P 在內，Q 在內	$\frac{\theta + 180}{2}$	θ

其中 $x = \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta}$

(三) 當某一點 Q 對於旋轉中心 P 旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且 P 、 Q 兩點分別在給定的 $1:k$ 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律

從上述軌跡變化圖形推廣到一般化，推得①軌跡圖形邊數；②軌跡圖形邊長比；③軌跡圖形內角角度

①軌跡圖形邊數

將 $1:k$ 分為兩類：

1. $k=1$

正 n 邊形邊數		PQ 位置								
		3	4	5	6	7	8	...	$2m$	$2m+1$
P 在外	Q 在外	3	8	5	12	7	16	...	$4m$	$2m+1$
	Q 在內	6	4	10	6	14	8	...	$2m$	$4m+2$
P 在內	Q 在外	6	4	10	6	14	8	...	$2m$	$4m+2$
	Q 在內	3	8	5	12	7	16	...	$4m$	$2m+1$

2. $k \neq 1$

正 n 邊形邊數		PQ 位置								
		3	4	5	6	7	8	...	$2m$	$2m+1$
P 在外	Q 在外	3	8	5	12	7	16	...	$4m$	$2m+1$
	Q 在內	6	8	10	12	14	16	...	$4m$	$4m+2$
P 在內	Q 在外	6	8	10	12	14	16	...	$4m$	$4m+2$
	Q 在內	3	8	5	12	7	16	...	$4m$	$2m+1$

可得複合正 n 邊形形成的軌跡圖形邊數有 2 類，分別為 n 與 $2n$ 。

②軌跡圖形邊長比

軌跡圖形邊長比一般化公式推導如下

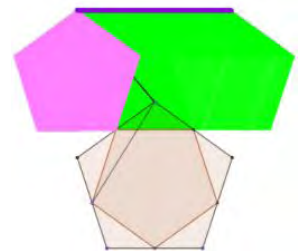
\because 複合正 n 邊形形成的軌跡圖形邊數有 2 類，分別為 n 與 $2n$ ，

而 P 、 Q 兩點在複合正 n 邊形邊上有 4 種情況 P 外 Q 外、 P 外 Q 內、 P 內 Q 外、 P 內 Q 內

首先探討第一類 P 外 Q 內之邊長，

以 $k=1$ 為例，如右圖，可得：

1. 粉紅色五邊形 \cong Q 點移動， P 點固定所形成之正五邊形 \Rightarrow 其中一邊為 l_2
2. 紫色線段 = P 在某邊上移動所形成之軌跡 \Rightarrow 另一邊為 l_1

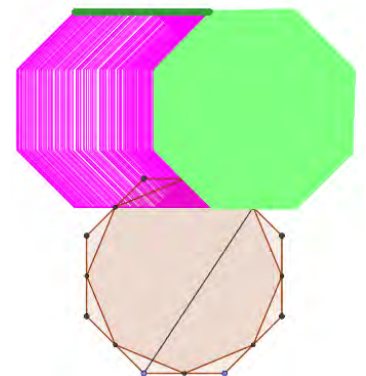


接續探討第二類 P 內 Q 外之邊長，

以 $k=1$ 為例：

如上圖，可得：

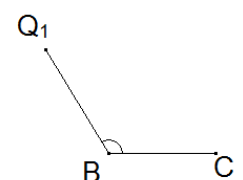
1. 淺綠色八邊形 \cong Q 點移動， P 點固定所形成之正八邊形 \Rightarrow 得 l_2
2. 深綠色線段 = P 在某邊上移動所形成之軌跡 \Rightarrow 得 l_1
3. \therefore 邊長 = $l_1 + l_2$



l_1 之計算過程：

不失一般性假設點 Q_1 、 Q_2 為任意點且邊長為 x

令 $Q_1(x_{Q_1}, y_{Q_1})$, $B(0,0)$, $C(x, 0)$



令 Q_1 、 B 翻出點 Q'_{1B} ， Q_1 、 C 翻出 Q'_{1C}

$\Rightarrow \overline{Q_{B1}Q_{C1}}$ 為 Q'_1 軌跡

令 θ 為翻轉角， $\theta_1 = \angle Q_1BC$ ， $\theta_2 = \angle Q_1CK$

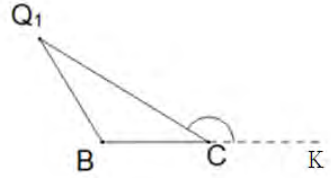
$$\tan \theta_1 = \frac{y_{Q_1}}{x_{Q_1}}, \quad \tan \theta_2 = \frac{y_{Q_1}}{1 + x_{Q_1}}$$

令 $r_1 = \overline{Q_1B}$ ， $r_2 = \overline{Q_1C}$

$$Q'_{1B} \begin{cases} x = r_1 \cos(\theta_1 - \theta) \\ y = r_1 \sin(\theta_1 - \theta) \end{cases}$$

$$Q'_{1C} \begin{cases} x = 1 + r_2 \cos(\theta_2 - \theta) \\ y = r_2 \sin(\theta_2 - \theta) \end{cases}$$

$\Rightarrow \overline{Q_{B1}Q_{C1}}$ 長度 = $\sqrt{2 + 2 \cos \theta}$ 為定值，此時 Q'_2 軌跡和 Q'_1 軌跡等長



l_2 的計算過程:

由旋轉的定義，得：

正 n 邊形旋轉時，正 n 邊形上的任意點會跟著旋轉一樣的角度

\Rightarrow 中心點偏轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度..... ①

同理得：若 Q 為正 n 邊形上的任意點，

則 Q 的旋轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度..... ②

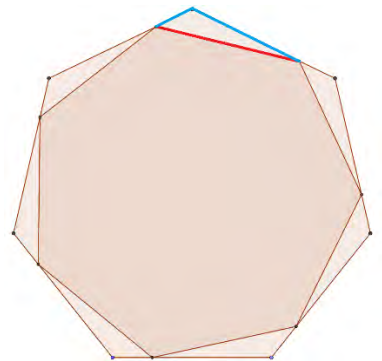
由①②得：中心點偏轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度 = Q 點旋轉角度

內正多邊形邊長的計算過程:

以 $n=7$ ， $k=3$ 的情形為例:

由圖，可得:

1. 藍色線段中，一條為 $\frac{1}{k+1}$ ，另一條為 $\frac{k}{k+1}$
2. 由餘弦定理得: 紅色線段 = $\frac{\sqrt{k^2+1-2k \cos \theta}}{k+1}$



最後依上述推導得到軌跡圖形邊長比一般化公式

① 複合正 n 邊形形成的軌跡圖形的邊長為 $l_1 + l_2$

② 複合正 $2n$ 邊形形成的軌跡圖形的邊長為 $l_1 \cdot l_2$

其中 $l_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot P$ 點所在正 n 邊形的邊長，

$l_2 = Q$ 點所在正 n 邊形的邊長，

P 點所在正 n 邊形的邊長及 Q 點所在正 n 邊形的邊長依 P 、 Q 點所在位置而不同，

如下表：

分類	P 點所在正 n 邊形的邊長	Q 點所在正 n 邊形的邊長
P外Q外	1	1
P外Q內	1	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$
P內Q外	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$	1
P內Q內	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$

接續，我們好奇 Q' 之軌跡參數式為何?

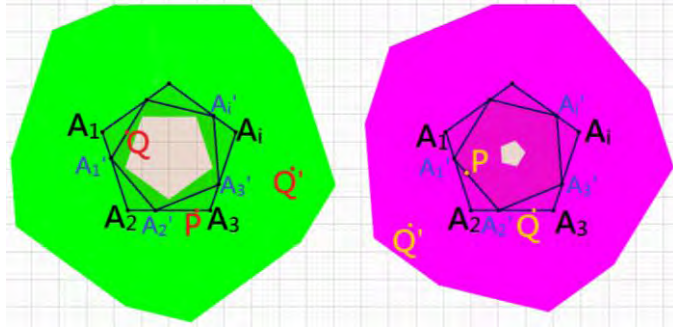
(四) 當 P、Q 為在複合正 n 邊形邊上任意點，點 Q' 之軌跡參數式

複合正 n 邊形中的外正 n 邊形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 中，令 $A_1(0,0)$ 、 $A_2(1,0)$ 、 \dots 、 $A_i(x_{A_i}, y_{A_i})$ ，其中 (x_{A_i}, y_{A_i}) 須符合

$$\tan[(i-1)\theta] = \frac{y_{A_{i+1}} - y_{A_i}}{x_{A_{i+1}} - x_{A_i}} \text{ 且 } (y_{A_{i+1}} - y_{A_i})^2 + (x_{A_{i+1}} - x_{A_i})^2 = 1$$

定義 $A_{n+1} = A_1$

而複合正 n 邊形中的內正 n 邊形 $A'_1A'_2 \cdots A'_n$ 中，令 $A'_1(0,0)$ 、 $A'_2(1,0)$ 、 \dots 、 $A'_i(x_{A'_i}, y_{A'_i})$ ，



$$\text{則 } A'_i = \begin{cases} x_{A'_i} = x_{A_i} + \frac{1}{k+1}(x_{A_{i+1}} - x_{A_i}) \\ y_{A'_i} = y_{A_i} + \frac{1}{k+1}(y_{A_{i+1}} - y_{A_i}) \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} A'_{n+1} = A'_1 \\ k \geq 1 \end{cases}$$

無論上述 P、Q 分別屬於哪一類，由 P 做 \overrightarrow{PM} ($M(x_M, y_M)$) 使 $\overrightarrow{PM} // \overline{A_1A_2}$ ，且 $x_M > x_P$

令 $\theta_{\text{水平夾角}} = \angle QPM$ ，其中 $\tan \theta_{\text{水平夾角}} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ ， $r = \sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}$

Q 以 P 為中心順時針旋轉 θ 得 $Q'(x_{Q'}, y_{Q'})$ ，

$$\text{則 } Q' \text{ 軌跡參數式為 } \begin{cases} x_{Q'} = x_P + r \cos(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \\ y_{Q'} = y_P + r \sin(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \end{cases}$$

而 $P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ 分別為

$$\text{當 } P \text{ 在外，} P \text{ 在 } \overline{A_P A_{P+1}} \text{ 上，} P \begin{cases} x_P = x_{A_P} + t_P(x_{A_{P+1}} - x_{A_P}) \\ y_P = y_{A_P} + t_P(y_{A_{P+1}} - y_{A_P}) \end{cases}, 0 \leq t_P \leq 1$$

$$\text{當 } P \text{ 在內：} P \text{ 在 } \overline{A'_P A'_{P+1}} \text{ 上，} P \begin{cases} x_P = x_{A'_P} + t_P(x_{A'_{P+1}} - x_{A'_P}) \\ y_P = y_{A'_P} + t_P(y_{A'_{P+1}} - y_{A'_P}) \end{cases}, 0 \leq t_P \leq 1$$

$$\text{當 } Q \text{ 在外：} Q \text{ 在 } \overline{A_Q A_{Q+1}} \text{ 上，} Q \begin{cases} x_Q = x_{A_Q} + t_Q(x_{A_{Q+1}} - x_{A_Q}) \\ y_Q = y_{A_Q} + t_Q(y_{A_{Q+1}} - y_{A_Q}) \end{cases}, 0 \leq t_Q \leq 1$$

$$\text{當 } Q \text{ 在內：} Q \text{ 在 } \overline{A'_Q A'_{Q+1}} \text{ 上，} Q \begin{cases} x_Q = x_{A'_Q} + t_Q(x_{A'_{Q+1}} - x_{A'_Q}) \\ y_Q = y_{A'_Q} + t_Q(y_{A'_{Q+1}} - y_{A'_Q}) \end{cases}, 0 \leq t_Q \leq 1$$

陸、討論

一、探討什麼因素及條件下會形成中空軌跡圖形？

我們發現在上面研究過程中，每種軌跡圖形雖有規律，但仍有不同的關係，如：

下圖 6-1 中是 1:1 複合正 n 邊形的 Q' 軌跡，像 P 、 Q 皆於外正 n 邊形上即研究一正 n 邊形的 Q' 軌跡，到正 5 邊形開始有中空軌跡圖形產生，

而圖 6-2 P 在外、 Q 在內則是從正三角形就有中空軌跡圖形產生，而由第三列圖 6-3 (P 在內、 Q 在外)，這 6 個圖形只有正方形是實心，但經我們實際再做，發現旋轉 $1/2\theta$ 在正 8 邊形以後也會產生中空軌跡圖形。

而第四列圖 6-4 (P 在內、 Q 在內)，則是跟 6-1 一樣從正 5 邊形開始有中空軌跡圖形產生。再看看 P 1:2 複合正 n 邊形的 Q' 軌跡的軌跡圖也都有不同的關係

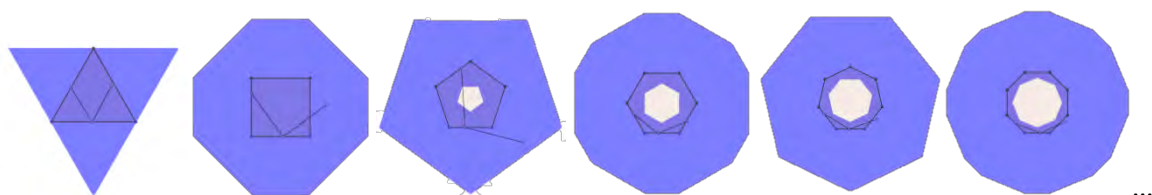


圖 6-1 P 、 Q 皆於 1:1 複合正 n 邊形外正 n 邊形上的 Q' 軌跡

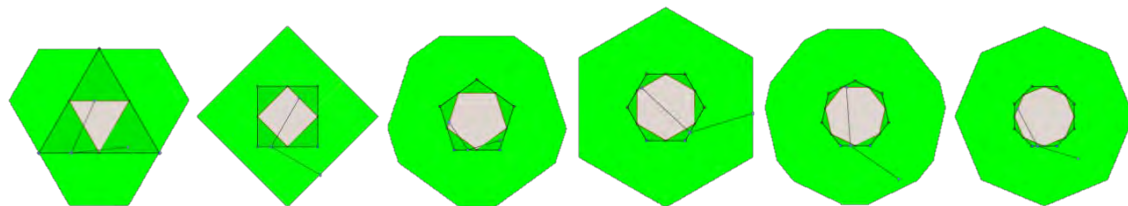


圖 6-2 P 、 Q 分別在皆於 1:1 複合正 n 邊形外正 n 邊形上、 Q 於內正 n 邊形上的 Q' 軌跡

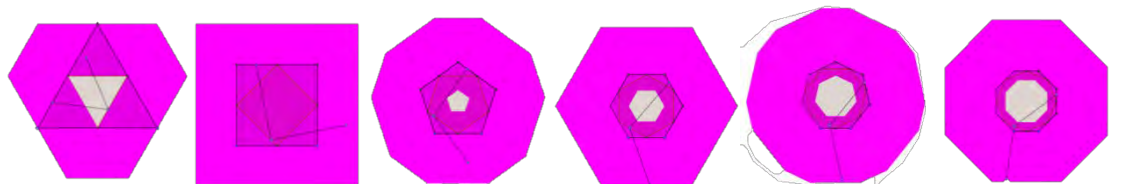


圖 6-3 P 、 Q 分別在皆於 1:1 複合正 n 邊形內正 n 邊形上、 Q 於外正 n 邊形上的 Q' 軌跡



圖 6-4 P 、 Q 皆於 1:1 複合正 n 邊形內正 n 邊形上的 Q' 軌跡

我們好奇，到底是什麼因素及條件下會造成這一中空軌跡圖形？

因此深入探討複合正 n 邊形旋轉不同角度時的結果，如： θ 之補角、 $1/2\theta$ 、 $1/3\theta \dots$ ，再進一步觀察與討論：

首先先觀察 P 、 Q 皆於 1:1 複合正 n 邊形外正 n 邊形上旋轉 θ 之補角、 $1/2\theta$ 、 $1/3\theta \dots$ 的 Q' 軌跡，如下頁圖 6-5、6-6、6-7

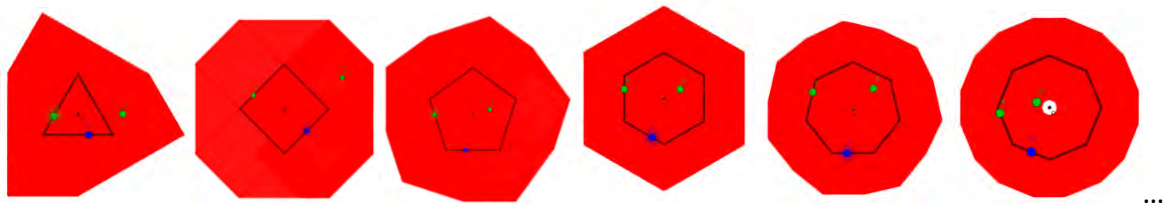


圖 6-5 旋轉正 3、4、5、6、7 邊形補角的 Q'軌跡圖形

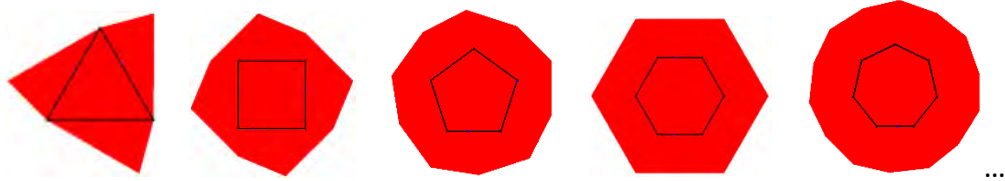


圖 6-6 旋轉正 3、4、5、6、7 邊形 1/2 內角的 Q'軌跡圖形

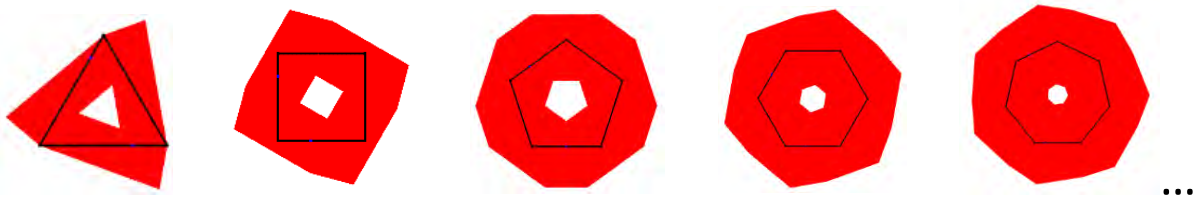


圖 6-7 旋轉正 3、4、5、6、7 邊形 1/3 內角的 Q'軌跡圖形

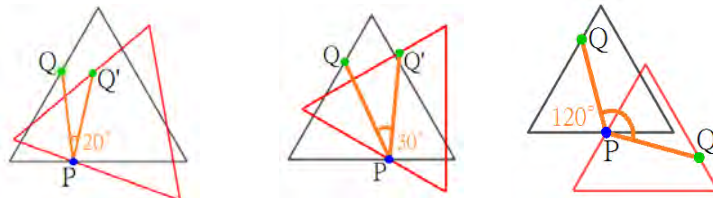
發現： Q 在 n 邊形上任意移動時，Q'所形成之軌跡，會依 $\angle QPQ'$ 之旋轉夾角不同而改變與 n 邊形中心之距離，進而影響 Q、P 任意移動時，所形成之軌跡是否為實心。

接續探討旋轉角度的範圍為何時，Q' 形成軌跡為實心軌跡圖形。

發現： ①若 $\angle QPQ'$ 之角度 $< 180^\circ$

$\angle QPQ'$ 夾角愈小，則 Q' 形成正 n 邊形軌跡(紅色線)距離原正 n 邊形(黑色線)中心愈近

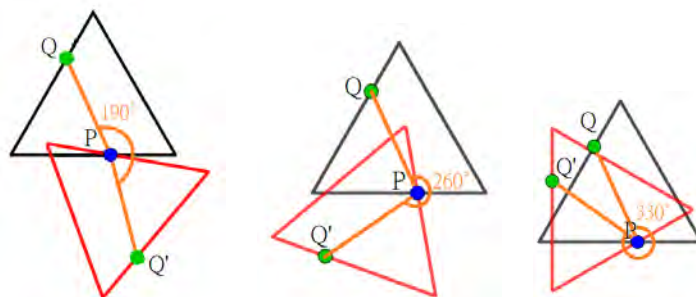
$\angle QPQ'$ 夾角愈大，則 Q' 形成正 n 邊形軌跡(紅色線)距離原正 n 邊形(黑色線)中心愈遠



②反之若 $\angle QPQ'$ 之角度 $> 180^\circ$

$\angle QPQ'$ 夾角愈大，則 Q' 形成正 n 邊形軌跡(紅色線)距離原正 n 邊形(黑色線)中心愈遠

$\angle QPQ'$ 夾角愈小，則 Q' 形成正 n 邊形軌跡(紅色線)距離原正 n 邊形(黑色線)中心愈近



而 $\angle QPQ' = \frac{1}{2}\theta$ (θ 為正 n 邊形內角角度)，且 P 於正 n 邊形頂點上時，Q' 軌跡所形成之正 n 邊形其中一邊會與原圖形頂點、中心之連線部分重疊；

又因 $n < 7$ 時，正 n 邊形邊長 \geq 其頂點、中心之連線，故 Q' 必定行經原圖形中心，則 Q' 軌跡為實心。

當 $\angle QPQ' = \frac{1}{2}\theta$ (θ 為正 n 邊形內角角度)，且 P 於 n 邊形頂點上時，

若正 n 邊形 $n > 7$ ，其正 n 邊形邊長 $<$ 其頂點、中心之連線，故 Q' 無法行經原圖形中心，則 Q' 軌跡為空心。

繼續觀察發現

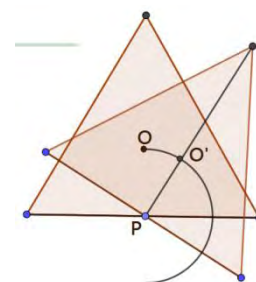
n	3	4	5	6
翻轉實心最小值	$1/2\theta$	$1/2\theta$	$1/2\theta$	$1/2\theta$
翻轉實心最大值	$180-\theta$	$180-\theta$	$180-\theta$	$180-\theta$

如圖，原正 \triangle 的中心在圖中以 P 為中心的黑色半圓形的上端點，且翻轉後的正 \triangle 中心為圖中半圓形上的黑點。

原正 \triangle 的中心、 P 點、和新正 \triangle 的中心夾角為翻轉角度。

\therefore 翻轉角度越大 \Leftrightarrow 圓心角越大 \Leftrightarrow 兩中心之間的距離越大

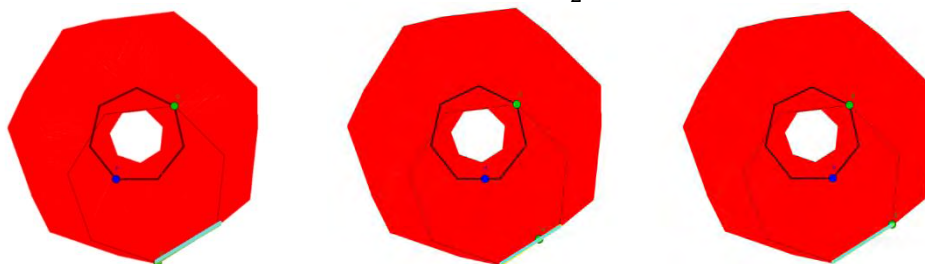
結果： 當 $\angle QPQ' \geq \frac{1}{2}\theta$ (θ 為正 n 邊形內角角度，且 $n < 7$ ，軌跡為實心；若 $\angle QPQ' < \frac{1}{2}\theta$ (θ 為正 n 邊形內角角度)，即便 $n < 7$ ，亦無法構成實心軌跡。



二、探討翻轉角度對邊長比的影響。

不失一般性假設翻轉的角度為 θ

若 Q' 軌跡的其中一個邊長為 1，則另一個邊長等於 Q 固定在一個頂點上， P 在底邊上移動所形成之軌跡（如下圖中藍線） $= 2 \sin \frac{\theta}{2}$ （根據研究一引理）



正 n 邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形為只有 2 種邊長、2 種內角度數的 $2n$ 邊形，邊長比為 $1 : 2 \sin \frac{\theta}{2}$

三、探討旋轉角度對軌跡圖形偏轉角度之影響。

由旋轉的定義，得：

正 n 邊形旋轉時，正 n 邊形上的任意點會跟著旋轉一樣的角度

\Rightarrow 中心點偏轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度.....①

同理得：若 Q 為正 n 邊形上的任意點，

則 Q 的旋轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度.....②

由①②得：中心點偏轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度 = Q 點旋轉角度

柒、結論

一、針對研究一，當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且兩點分別在正 n 邊形邊上移動時，發現

(一) Q' 軌跡圖形即研究二 $1:k$ 複合正 n 邊形 P 在外、 Q 在外正 n 邊形之軌跡圖形；而與 $1:k$ 複合正 n 邊形 P 在內、 Q 在內正 n 邊形之軌跡圖形相似。

① 正奇數邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形亦為同邊數之倒立正奇邊形環，原正 n 邊形與軌跡圖形邊長比為 $(2\sin\frac{\theta}{2} + 1) : 1$ 。

② 正偶數邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形之邊數為 $2n$ ；2 種邊長之邊長比為 $1 : 2\sin\theta/2$

(二) 當 P 於正 n 邊形底邊，以 P 為圓心，旋轉正 n 邊形內角度數 θ 做 Q' ，移動點 P ，

① 當 Q 在正 n 邊形頂點 A 上，移動 P 點，形成 Q' 之軌跡在「正 n 邊形外角平分線」上。

② Q 在正 n 邊形頂點 D 上，則 Q' 之軌跡與對角線 \overline{BD} 平行且等長(即 $\overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}$, $\overline{BD} // \overline{Q_1Q_2}$)

③ Q 在任意點上，則 Q' 之軌跡與對角線 \overline{BD} 平行且等長(即 $\overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}$ ，且 $\overline{BD} // \overline{Q_1Q_2}$)

二、針對研究二，當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且兩點 P 、 Q 分別在 $1:k$ 複合正 n 邊形邊上移動時，發現

(一) $1:k$ 複合正 n 邊形形成之 Q' 軌跡圖形為多邊形，邊數有 2 類，分別為 n 與 $2n$ ；且邊數依 $1:k$ 之 k 值分成公式如下表

複合正 n 邊形邊數		1:1 軌跡圖形邊數公式		1:k.($k \neq 1$) 軌跡圖形邊數公式	
		2m	2m+1	2m	2m+1
P、Q 在複合正 n 邊形位置					
P 在外	Q 在外	4m	2m+1	4m	2m+1
	Q 在內	2m	4m+2	4m	4m+2
P 在內	Q 在外	2m	4m+2	4m	4m+2
	Q 在內	4m	2m+1	4m	2m+1

(二) Q' 軌跡圖形邊長比一般化公式為

① 複合正 n 邊形形成的軌跡圖形的邊長為 $l_1 + l_2$

② 複合正 $2n$ 邊形形成的軌跡圖形的邊長為 $l_1 \cdot l_2$

其中 $l_1 = 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot P$ 點所在正 n 邊形的邊長， $l_2 = Q$ 點所在正 n 邊形的邊長，

P 點所在正 n 邊形的邊長及 Q 點所在正 n 邊形邊長依 P 、 Q 點所在位置而不同，如下表：

分類	P 點所在正 n 邊形的邊長	Q 點所在正 n 邊形的邊長
P、Q 在複合正 n 邊形位置		
P 在外，Q 在外	1	1
P 在外，Q 在內	1	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$
P 在內，Q 在外	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$	1
P 在內，Q 在內	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k \cos \theta}}{k + 1}$

(三) Q'軌跡圖形內角一般化公式如下表，其中 $x = \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{k - \cos \theta}$

複合正 n 邊形邊數 P、Q 在複合正 n 邊形位置	2m	2m+1
P 在外，Q 在外	$\frac{\theta + 180}{2}$	θ
P 在外，Q 在內	$x + \frac{\theta + 180}{2}, -x + \frac{\theta + 180}{2}$	$180 - x \cdot x + \theta$
P 在內，Q 在外	$x + \frac{\theta + 180}{2}, -x + \frac{\theta + 180}{2}$	$180 - x \cdot x + \theta$
P 在內，Q 在內	$\frac{\theta + 180}{2}$	θ

(四)軌跡圖形形成中空圖形之範圍為：當 $\angle QPQ' \geq \frac{1}{2}\theta$ (θ 為正 n 邊形內角角度)，且 $n < 7$ ，軌跡為實心；若 $\angle QPQ' < \frac{1}{2}\theta$ (θ 為正 n 邊形內角角度)，即便 $n < 7$ ，亦無法構成實心軌跡，此時會形成中空倒立正 n 邊形，邊長為 $= 2 \sin \frac{\theta}{2}$

(五)軌跡圖形之參數式為
$$\begin{cases} x_{Q'} = x_P + r \cos(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \\ y_{Q'} = y_P + r \sin(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \end{cases}$$

其中 $\theta_{\text{水平夾角}} = \angle QPM$ ， $r = \overline{PQ}$ 長度，Q 以 P 為中心順時針旋轉 θ 得 $Q'(x_{Q'}, y_{Q'})$

複合正 n 邊形中的外正 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 中的 $A_i(x_{A_i}, y_{A_i})$ 須符合 $\tan[(i-1)\theta] = \frac{y_{A_{i+1}} - y_{A_i}}{x_{A_{i+1}} - x_{A_i}}$ ，

且 $(y_{A_{i+1}} - y_{A_i})^2 + (x_{A_{i+1}} - x_{A_i})^2 = 1$ ， $A_{n+1} = A_1$

而複合正 n 邊形中的內正 n 邊形 $A'_1 A'_2 \cdots A'_n$ 中的 $A'_i(x_{A'_i}, y_{A'_i})$ ，則

$$A'_i = \begin{cases} x_{A'_i} = x_{A_i} + \frac{1}{k+1}(x_{A_{i+1}} - x_{A_i}) \\ y_{A'_i} = y_{A_i} + \frac{1}{k+1}(y_{A_{i+1}} - y_{A_i}) \end{cases} \text{ 且 } \begin{cases} A'_{n+1} = A'_1 \\ k \geq 1 \end{cases}$$

$$\tan \theta_{\text{水平夾角}} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}, r = \sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}$$

而 $P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ 分別為

- ① 當 P 在外，P 在 $\overline{A_P A_{P+1}}$ 上， $P \begin{cases} x_P = x_{A_P} + t_P(x_{A_{P+1}} - x_{A_P}) \\ y_P = y_{A_P} + t_P(y_{A_{P+1}} - y_{A_P}) \end{cases}$

- ② 當 P 在內，P 在 $\overline{A'_P A'_{P+1}}$ 上， $P \begin{cases} x_P = x_{A'_P} + t_P(x_{A'_{P+1}} - x_{A'_P}) \\ y_P = y_{A'_P} + t_P(y_{A'_{P+1}} - y_{A'_P}) \end{cases}$

- ③ 當 Q 在外，Q 在 $\overline{A_Q A_{Q+1}}$ 上， $Q \begin{cases} x_Q = x_{A_Q} + t_Q(x_{A_{Q+1}} - x_{A_Q}) \\ y_Q = y_{A_Q} + t_Q(y_{A_{Q+1}} - y_{A_Q}) \end{cases}$

- ④ 當 Q 在內，Q 在 $\overline{A'_Q A'_{Q+1}}$ 上， $Q \begin{cases} x_Q = x_{A'_Q} + t_Q(x_{A'_{Q+1}} - x_{A'_Q}) \\ y_Q = y_{A'_Q} + t_Q(y_{A'_{Q+1}} - y_{A'_Q}) \end{cases}$

$$0 \leq t_P \leq 1, 0 \leq t_Q \leq 1$$

捌、應用

根據本研究主要可應用在兩處：

① 防盜系統

在防盜上，將要保護的物體置於 Q' 軌跡圖形之中空處，則其偵測範圍即 Q' 軌跡圖形所覆蓋處。運用本研究結果可讓機械在偵測時內部零件運轉移動的範圍(等同於研究中 P、Q 之移動)減少，並達到最大的偵測範圍。

② 掃地機器人

掃地機器人在清掃時，需掃描附近的障礙物以閃避。在充滿障礙物的空間中，其閃避時所移動的範圍不可過大，否則可能與其它障礙物產生碰撞。此時應用本研究結果，使其旋轉、移動之範圍愈小，偵測障礙物範圍愈大，如此可減少移動時之零件耗損，亦可減少碰撞機率。

玖、參考文獻

- 王羽安(2007)。「圖形板」的圖形軌跡之探討及其延伸。台灣國際科展數學科作品說明書。(未出版)
- 王婷婷、彭斯婉、陳葦樺、徐聰榛(2009)。搞「軌」一有「跡」可循。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 王郁婷、陳泓志、鄭達駿(2009)。聞「數」起舞。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 王敏齊、詹雨安、鄭丞傑(2012)。藏寶「旋」「跡」。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 江翊、江哲宇(2010)。凸多邊形周長的分割與包絡。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 李歡蓉(2002)。圓圓轉轉轉。全國中小學科展國小組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 李宇凡、沈威銓(2011)。點線之間——一個從點掃略到線掃略的問題探討。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 林子亘、林軒民、沈柏瑋(2011)。運用之妙，存乎於「心」。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 徐琬庭、吳千圳、高尉庭、洪研竣(2009)。刻骨銘<心>。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 陳聿軒(2012)。無奇不有的拋物線——頂點移動軌跡的探討。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 張詠盛、楊雅涵、陳碩文(2012)。“軌”謎“心”竅。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 薛丞洋、張聿民、陳思罕、劉恩權(2007)。滾滾紅成。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 孫宏奇、陳家錡(2011)。峰迴路轉——等比繞行的秘密。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 藍崧文、陳宗蔚、吳玟秀(2012)。凡走過必留下痕跡。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 潘世昂(2001)。追!追!追!~多邊形追逐軌跡之探討。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。(未出版)
- 蘇育德、劉子弘、邱建智(2003)。正多邊形滾動路徑面積與邊長相關性的探討。全國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。(未出版)

【評語】 030422

本作品主要研究在正 n 邊形上任取 P 、 Q 兩點，以 P 為中心將 Q 旋轉某個角度，觀察 P 、 Q 兩點進行移動所得的軌跡圖形，得到一些例如邊長比，軌跡圖形內角情形， n 為偶數及奇數時具有不同的規律等性質。此外也將 P 、 Q 兩點推廣到複合正 n 邊形的情形，文章中有各種組合，因此產生豐富的軌跡圖形。但有些現象只有歸納結果，未見數學的論證可以試圖補足。整體來說是不錯的作品，有一定的興趣。

壹、研究動機

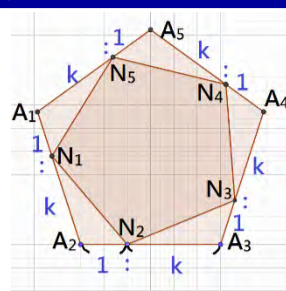
利用動態軟體嘗試將旋轉中心與另一點均置於正 n 邊形邊上，將邊上一點以旋轉中心為基準，旋轉固定角度後形成新點，觀察此兩點移動時，新點會依不同的移動方式產生不同的漂亮軌跡及形成不同的性質。經文獻查閱，發現雖然歷年科展探討正多邊形或軌跡圖形的作品很多，但跟感興趣的方向不同，因此更確信展開探索之旅。

貳、研究目的

- 一、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律
- 二、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在 $1:k$ 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律

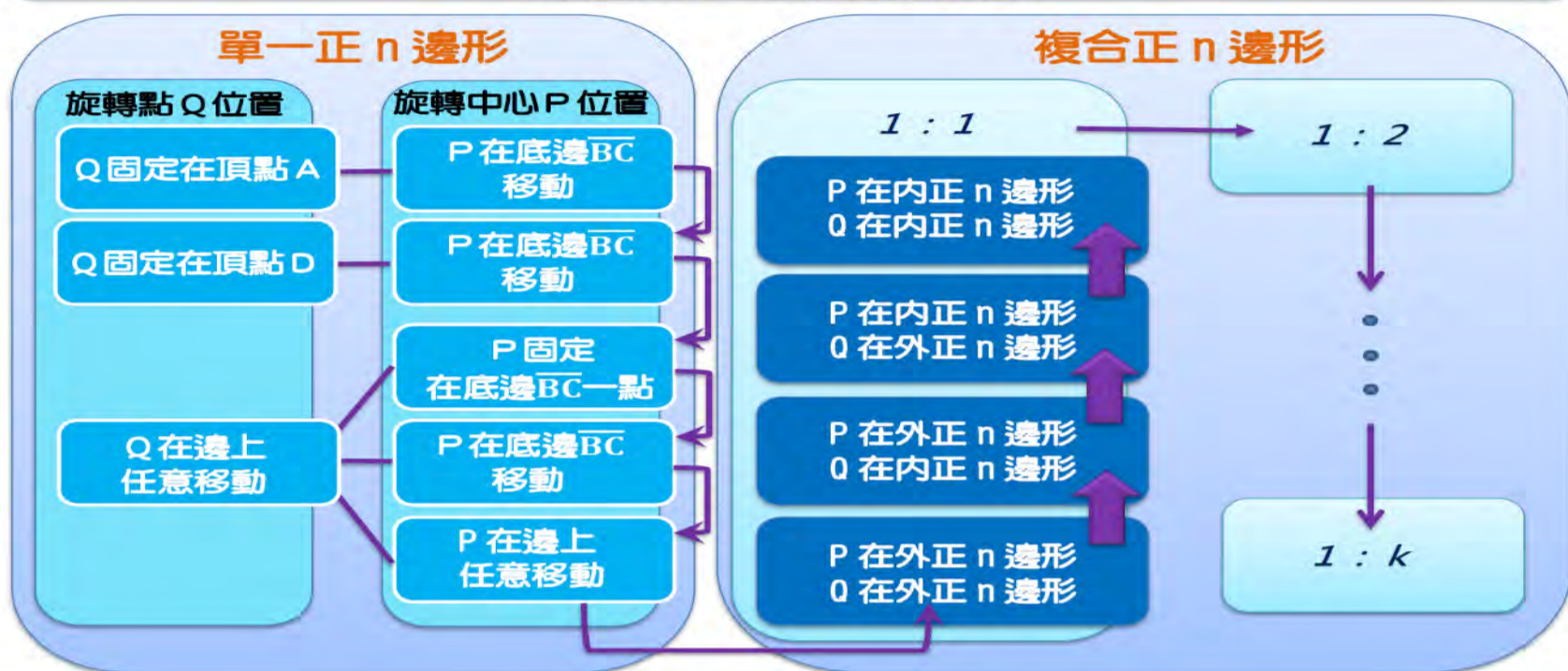
參、名詞解釋

複合正 n 邊形：
同時具有外正 n 邊形及內正 n 邊形之圖形稱之為複合正 n 邊形；當其邊長分割為 $1:k$ ，稱之為 $1:k$ 複合正 n 邊形



研究架構

當 Q 旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且 Q 與中心 P 分別在給定的正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律



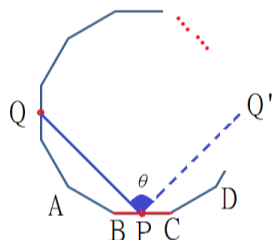
肆、研究過程與結果

一、當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律

【引理】 不論 Q 在正 n 邊形邊上任一點，只要翻轉固定角度，則動點 P 在 BC 上移動，形成 Q' 之軌跡圖形，與 BC 之夾角會形成定值。另外， Q' 軌跡長 $= 2 \sin \frac{\theta}{2}$ 。即

① Q_2 軌跡和 Q_1 軌跡平行等長；② $BP = MQ'$

(一) 當 Q 固定在正 n 邊形的頂點上， P 在正 n 邊形底邊， Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q' ，移動點 P ，探討 Q' 之軌跡變化與規律



1. 當 Q 與正 n 邊形的頂點 A 重合

發現： Q' 的變化軌跡為一直線，此為正 n 邊形底角 $\angle C$ 的外角平分線，如圖中紅線。



證明： 設 M 是 BC 延長線上的一點，

$$\angle BAP + \angle ABP + \angle APB = 180^\circ \dots \text{①}$$

$$\angle APQ' = \angle ABP \dots \text{②}$$

$$\text{②代入①} \rightarrow \angle BAP + \angle APQ' + \angle APB = 180^\circ$$

$$\text{又} \because \angle Q'PC + \angle APQ' + \angle APB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BAP = \angle Q'PC$$

做 $\overline{AN} = \overline{PC}$ 使 N 在 \overline{AB} 上， $\therefore \overline{AN} = \overline{PC}$ ， $\overline{AN} = \overline{NQ'}$ ， $\angle NAP = \angle CPQ'$ ，

$\therefore \triangle ANP \cong \triangle PCQ'$ (SAS)， $\therefore \angle ANP = \angle PCQ'$

$\therefore \overline{AB} = \overline{BC}$ 且 $\overline{AN} = \overline{PC}$ ， $\therefore \overline{NB} = \overline{BP}$

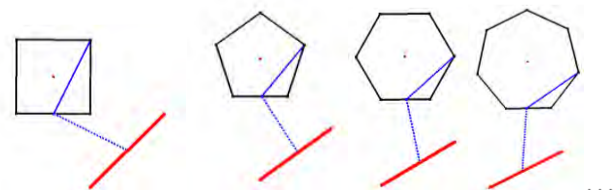
又 $\because \angle NBP = (180 - \frac{360}{n})^\circ$ ， $\therefore \angle BPN = \angle BNP = (\frac{180}{n})^\circ$ ，

$\therefore \angle ANP = (180 - \frac{180}{n})^\circ$ ， $\therefore \angle PCQ' = (180 - \frac{180}{n})^\circ \rightarrow \angle Q'CM = (\frac{180}{n})^\circ$ ，

$\overline{Q'C}$ 平分 $\angle DCM$ 得證。

2. 當 Q 與正 n 邊形的頂點 D 重合

發現： 當 Q 和 D 重合時， Q' 的變化軌跡為一直線，此直線與對角線 BD 平行、等長，如圖中紅線。



證明： 在 $\triangle ABC$ 、 $\triangle Q_2CD$ 中， $\because \overline{CD} = \overline{CD}$ ， $\overline{CB} = \overline{CQ_2}$ ， $\angle BCD = \angle Q_2CD$ ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle Q_2CD$ (SAS)， $\therefore \overline{BD} = \overline{Q_2D}$

又 $\because \angle Q_2DC = \angle BDC = \angle DBC$ ，

$\angle Q_2DC + \angle Q_1BC = \angle Q_1BD = \angle BCD$

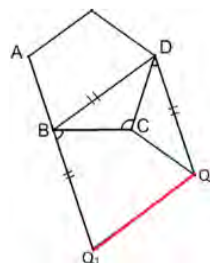
$\therefore \angle Q_1BD + \angle Q_2BD$

$= \angle Q_2DC + \angle Q_1BC + \angle CBD + \angle CDB = 180^\circ$

$\therefore \overline{DQ_2} \parallel \overline{BQ_1}$ (同側內角互補)

$\rightarrow \overline{BDQ_2Q_1}$ 為平行四邊形，

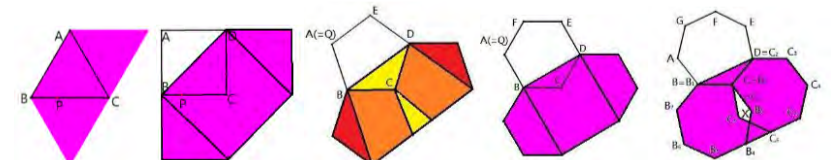
$\therefore \overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}$ ，且 $\overline{BD} \parallel \overline{Q_1Q_2}$



(二) 當 Q 在正 n 邊形的邊上， P 固定在正 n 邊形底邊上一點， Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q' ，移動點 Q ，探討 Q' 之軌跡變化與規律

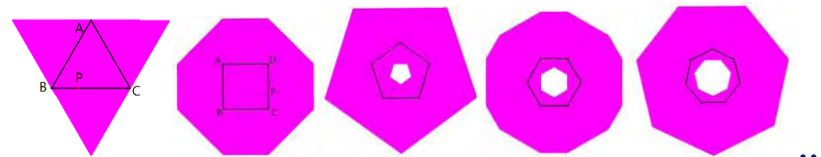
發現： 當旋轉中心 P 固定在 \overline{BC} 其中一點，且 Q 點在正 $\triangle ABC$ 任意移動時， Q' 變化軌跡為一倒立正 \triangle ，如粉紅封閉圖形；推廣到一般正 n 邊形， Q' 的變化軌跡亦為一倒立正 n 邊形

(三) 當 Q 在正 n 邊形的邊上， P 在正 n 邊形底邊上移動， Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q' ，移動點 Q ，探討 Q' 之軌跡變化與規律



發現： 正 \triangle 中 Q' 軌跡為以 AB 為一底，另一底的中點為 C 且長度為 AB 的 2 倍的梯形，正 4、5、6、7 邊形中 Q' 的軌跡圖形如上，其餘發現詳細說明見作品說明書

(四) 當 P 、 Q 在正 n 邊形上， Q 以 P 為旋轉中心，旋轉內角 θ 做 Q' ，移動點 P 、 Q ，探討 Q' 之軌跡變化與規律



發現： 推得點 Q' 之軌跡參數式，詳見作品說明書，性質整理如下

原正 n 邊形邊數	軌跡圖形邊數	邊長	內角角度
n 為奇數	n	$2 \sin \frac{\theta}{2} + 1$	θ
n 為偶數	$2n$	$1 + 2 \sin \frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta + 180}{2}$

二、當某一點對旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點，且兩點分別在 1:k 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點的軌跡變化與規律

(一)當某一點 Q 對於旋轉中心 P 旋轉內角 θ 後形成新點 Q'，且 P、Q 兩點分別在給定的 1:1 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律

發現： 1. 1:1 複合正 n 邊形 P 在外、Q 在外正 n 邊形之軌跡圖形與 P 在內、Q 在內正 n 邊形之軌跡圖形相似；其餘軌跡圖形亦均為多邊形，新點 Q' 的軌跡變化如右：

2. 推得軌跡圖形①邊數；②邊長比；③內角角度一般化公式

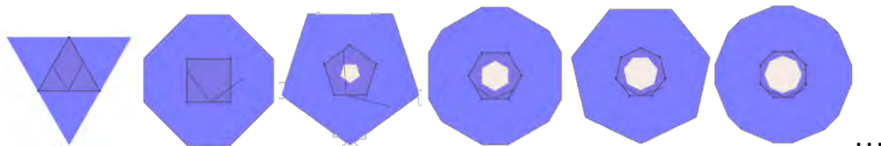
①軌跡圖形邊數整理如下，而一般化公式見結論

正 n 邊形邊數		3	4	5	6	7	8	...
P 在外	Q 在外	3	8	5	12	7	16	...
	Q 在內	6	4	10	6	14	8	...
P 在內	Q 在外	6	4	10	6	14	8	...
	Q 在內	3	8	5	12	7	16	...

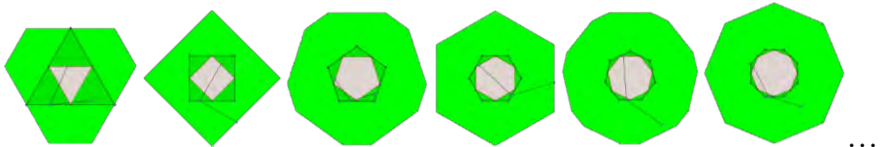
②軌跡圖形邊長比一般化公式如下

複合正多邊形分類 PQ 位置	2m	2m+1
	P 在外 Q 在外	$1 \cdot 2 \sin \theta$
P 在外 Q 在內	$3 \sin \frac{\theta}{2}$	$\sin \frac{\theta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2}$
P 在內 Q 在外	$1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$1 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$
P 在內 Q 在內	$\sin \frac{\theta}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$(2 \sin \frac{\theta}{2} + 1) \frac{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}}{2}$

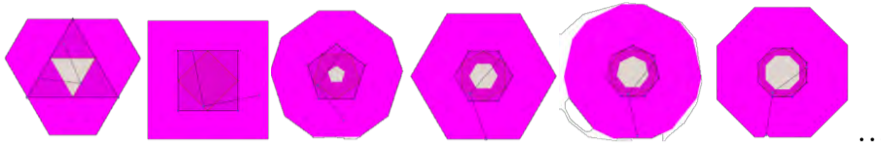
① P、Q 皆於外正 n 邊形上



② P 於外正 n 邊形上、Q 於內正 n 邊形上



③ P 於內正 n 邊形上、Q 於外正 n 邊形上



④ P、Q 皆於內正 n 邊形上



(二)當某一點 Q 對於旋轉中心 P 旋轉內角 θ 後形成新點 Q'，且 P、Q 兩點分別在給定的 1:2 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律

發現： 1. 新點 Q' 的軌跡變化如右

2. 推得軌跡圖形①邊數；②邊長比；③內角角度一般化公式

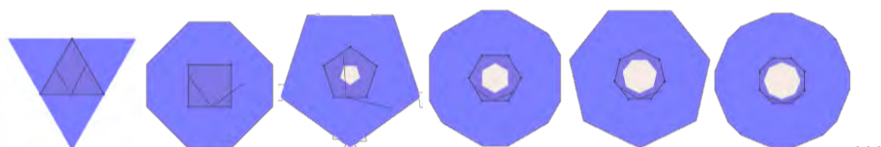
①軌跡圖形邊數一般化公式見結論

正 n 邊形邊數		3	4	5	6	7	8	...
P 在外	Q 在外	3	8	5	12	7	16	...
	Q 在內	6	8	10	12	14	16	...
P 在內	Q 在外	6	8	10	12	14	16	...
	Q 在內	3	8	5	12	7	16	...

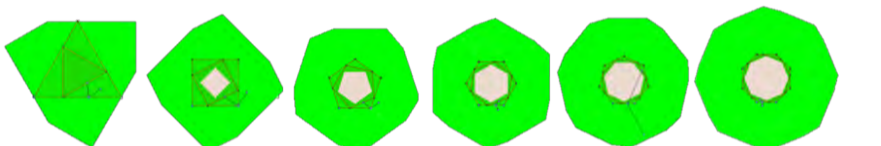
②軌跡圖形邊長比一般化公式如下，推導過程詳見手稿

複合正多邊形分類 PQ 位置	2m	2m+1
	P 外 Q 外	$1 \cdot 2 \sin \theta$
P 外 Q 內	$2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3}$	$2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3}$
P 內 Q 外	$1 \cdot \frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} \times 2 \sin \theta$	$1 \cdot \frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} \times 2 \sin \theta$
P 內 Q 內	$\frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} \sin \frac{\theta}{2}$	$\frac{\sqrt{5-4 \cos \theta}}{3} (2 \sin \theta + 1)$

① P、Q 皆於外正 n 邊形上



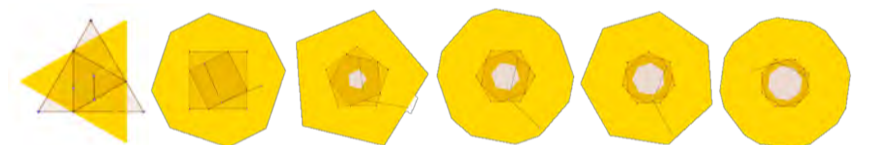
② P 於外正 n 邊形上、Q 於內正 n 邊形上



③ P 於內正 n 邊形上、Q 於外正 n 邊形上



④ P、Q 皆於內正 n 邊形上



P、Q 兩點分別在給定的 1:k 複合正 n 邊形邊上移動時，探討新點 Q' 的軌跡變化與規律，推得①軌跡圖形邊數；②軌跡圖形邊長比；③軌跡圖形內角角度④軌跡參數式過程詳見作品說明書

伍、討論

一、探討什麼因素及條件下會形成實心軌跡圖形？

發現過程中每種軌跡圖形雖有規律，但仍有不同關係，

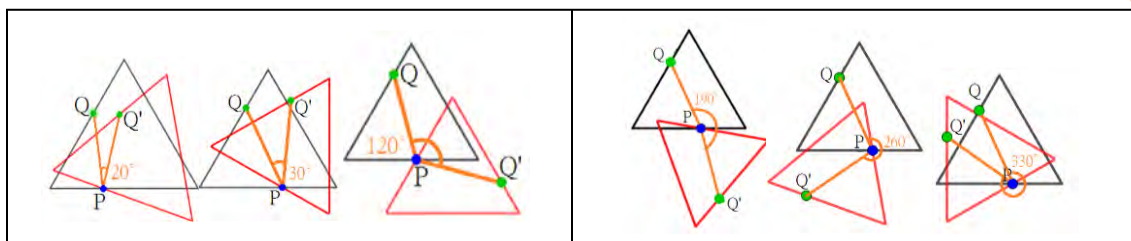
到底是什麼條件下會造成一實心圖形的狀況？

深入探討複合正 n 邊形旋轉不同角度時的結果，如： θ 之補角、 $1/20$ 、 $1/30$...，再進一步觀察右圖並討論：

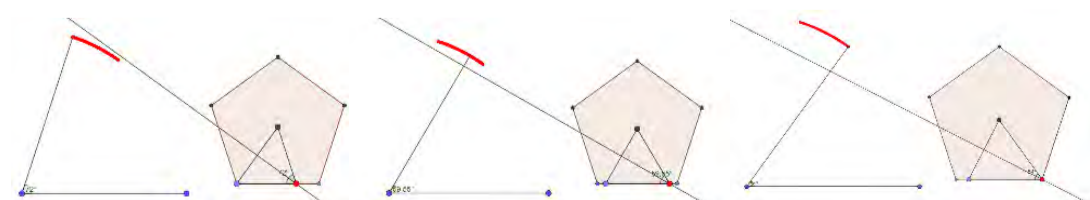
先觀察 P、Q 皆於 1:1 複合正 n 邊形外正 n 邊形上旋轉 θ 之補角、 $1/20$ 、 $1/30$... 的 Q' 軌跡，如圖 6-1、6-2、6-3

發現： Q 在正 n 邊形上任意移動時，Q' 所形成之軌跡，會依 $\angle QPQ'$ 之旋轉夾角不同而改變與 n 邊形中心之距離，而影響 Q、P 任意移動時，所形成軌跡是否為實心。

「若 $\angle QPQ'$ 之角度 < 180 度， $\angle QPQ'$ 愈小，則 Q' 軌跡(紅線)距離原圖(黑線)中心愈近； $\angle QPQ'$ 愈大，則 Q' 軌跡(紅線)距離原圖(黑線)中心愈遠



接續探討旋轉角度的範圍為何時，Q' 形成軌跡為實心軌跡圖形。



發現： 範圍的最大值是當 Q 於頂點上時所求角度；而最小值是當 P 於頂點上時所求角度。

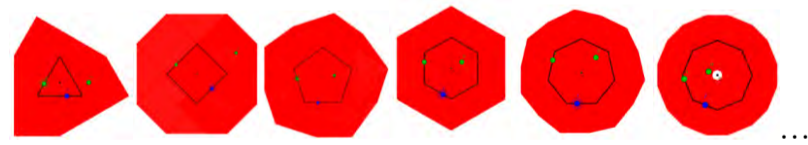


圖 6-1 旋轉正 3、4、5、6、7 邊形補角的 Q' 軌跡圖

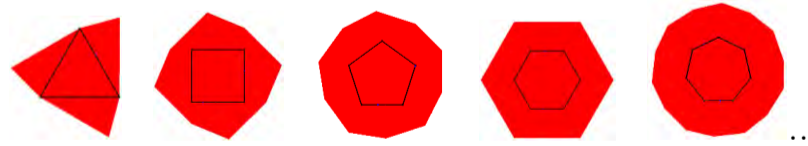


圖 6-2 旋轉正 3、4、5、6、7 邊形 1/2 內角的 Q' 軌跡圖

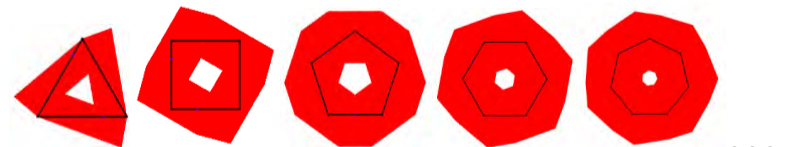
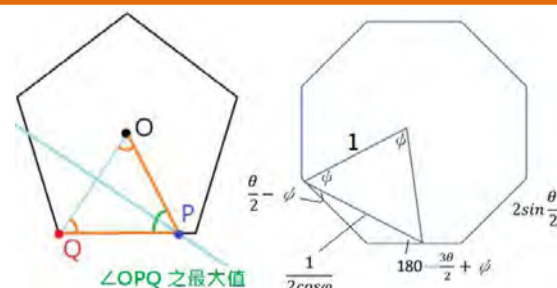


圖 6-3 旋轉正 3、4、5、6、7 邊形 1/3 內角的 Q' 軌跡圖



進一步求範圍最大值(以八邊形為例說明)：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \sin(\frac{3\theta}{2} - \varphi) \\ & \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \varphi} (\sin \frac{3\theta}{2} \cos \varphi - \cos \frac{3\theta}{2} \sin \varphi) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ & \sin \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \tan \varphi = 4 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ & \therefore \tan \varphi = \frac{\sin \frac{3\theta}{2} - 4 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta}{\cos \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

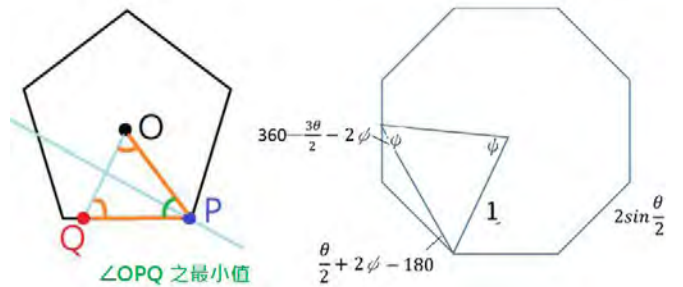
求範圍最小值：

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{-\sin(\frac{3\theta}{2}+\varphi)}, \sin(\frac{3\theta}{2}+\varphi) = -2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,$$

$$\therefore 2\varphi = \sin^{-1}(-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta) - \frac{3}{2}\theta$$

結果：在八邊形時當 $\angle QPQ'$ 滿足範圍時產生實心軌跡圖形：

$$180 + \frac{3}{2}\theta - \sin^{-1}(-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta) < \angle QPQ' < 180 - 2\tan^{-1}\frac{\sin\frac{3}{2}\theta - 4\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$



二、探討旋轉角度對邊長比的影響

設旋轉角度為 θ ，若 Q' 軌跡的其中一個邊長為 1，則另一個邊長等於 Q 固定在一頂點上， P 在底邊上移動，根據[引理]，所形成軌跡圖形其中一邊邊長（如圖藍綠線）= $2\sin\frac{\theta}{2}$

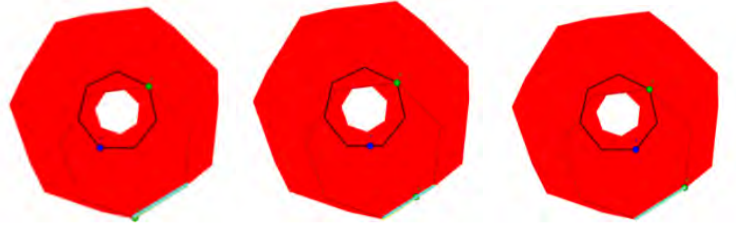
結果：正 n 邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形為只有 2 種邊長、2 種內角度數的 $2n$ 邊形，邊長比為 $1 : 1 : 2\sin\frac{\theta}{2}$

三、探討旋轉角度對軌跡圖形偏轉角度之影響。

正 n 邊形旋轉時，其邊上任意點會跟著旋轉同角度 \Rightarrow 中心點偏轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度.....①

同理得：若 Q 為正 n 邊形上的任意點，則 Q 的旋轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度.....②

結果：中心點偏轉角度 = 新正 n 邊形偏轉角度 = Q 點旋轉角度



陸、結論

一、針對研究一，當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且兩點分別在正 n 邊形邊上移動時，發現

(一) Q' 軌跡圖形即研究二 $1:k$ 複合正 n 邊形 P 在外、 Q 在外正 n 邊形之軌跡圖形；而與 $1:k$ 複合正 n 邊形 P 在內、 Q 在內正 n 邊形之軌跡圖形相似。

① 正奇數邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形亦為同邊數之倒立正奇邊形，原正 n 邊形與軌跡圖形邊長比為 $(2\sin\frac{\theta}{2} + 1) : 1$ 。

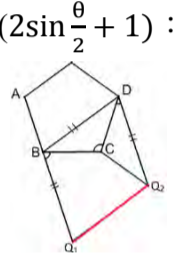
② 正偶數邊形 Q' 形成之軌跡封閉圖形之邊數為 $2n$ ；2 種邊長之邊長比為 $1 : 2\sin\frac{\theta}{2}$

(二) 當 P 於正 n 邊形底邊，以 P 為圓心，旋轉正 n 邊形內角度數 θ 做 Q' ，移動點 P ，

① 當 Q 在正 n 邊形頂點 A 上，移動 P 點，形成 Q' 之軌跡在「正 n 邊形外角平分線」上。

② Q 在正 n 邊形頂點 D 上，則 Q' 之軌跡與對角線 BD 平行且等長(即 $\overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}$ ， $\overline{BD} // \overline{Q_1Q_2}$)

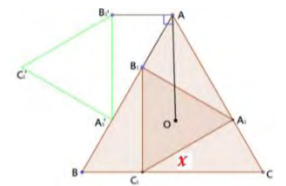
③ Q 在任意點上，則 Q' 之軌跡與對角線 BD 平行且等長(即 $\overline{BD} = \overline{Q_1Q_2}$ ，且 $\overline{BD} // \overline{Q_1Q_2}$)



二、針對研究二，當某一點對於旋轉中心旋轉內角 θ 後形成新點 Q' ，且 P 、 Q 分別在 $1:k$ 複合正 n 邊形邊上移動時，發現

(一) $1:k$ 複合正 n 邊形形成之 Q' 軌跡圖形為多邊形，邊數有 2 類，分別為 n 與 $2n$ ；且邊數公式(依 $1:k$ 之 k 值分)如下表

複合正 n 邊形邊數		1:1 軌跡圖形邊數公式		1:k.(k≠1) 軌跡圖形邊數公式	
P、Q 在複合正 n 邊形位置		2m	2m+1	2m	2m+1
P 在外/內	Q 在外/內	4m	2m+1	4m	2m+1
P 在內/外	Q 在外/內	2m	4m+2	4m	4m+2



(二) Q' 軌跡邊長比一般化公式為

① 複合正 n 邊形形成的軌跡圖形邊長為 $l_1 + l_2$ ；

② 複合正 $2n$ 邊形形成的軌跡圖形邊長為 l_1 、 l_2 ，

其中 $l_1 = 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot P$ 點所在正 n 邊形的邊長，

$l_2 = Q$ 點所在正 n 邊形的邊長，

而 P 點所在正 n 邊形的邊長及 Q 點所在正 n 邊形邊長依 P 、 Q 點所在位置而不同，如下：

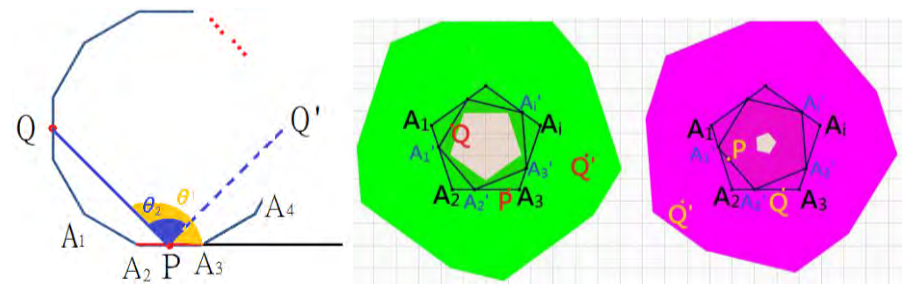
分類	P 點所在正 n 邊形邊長	Q 點所在正 n 邊形邊長
PQ 在複合正 n 邊形位置		
P 在外，Q 在外	1	1
P 在外，Q 在內	1	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k\cos\theta}}{k + 1}$
P 在內，Q 在外	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k\cos\theta}}{k + 1}$	1
P 在內，Q 在內	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k\cos\theta}}{k + 1}$	$\frac{\sqrt{k^2 + 1 - 2k\cos\theta}}{k + 1}$

(三) Q' 軌跡內角度數一般化公式如下，其中 $x = \tan^{-1}\frac{\sin\theta}{k - \cos\theta}$

複合正 n 邊形邊數	2m	2m+1
P、Q 在複合正 n 邊形位置		
P 在外，Q 在外	$\frac{\theta + 180}{2}$	θ
P 在外，Q 在內	$x + \frac{\theta + 180}{2}$ 、 $-x + \frac{\theta + 180}{2}$	$180 - x \cdot x + \theta$
P 在內，Q 在外	$x + \frac{\theta + 180}{2}$ 、 $-x + \frac{\theta + 180}{2}$	$180 - x \cdot x + \theta$
P 在內，Q 在內	$\frac{\theta + 180}{2}$	θ

(四) 軌跡圖形形成實心圖形之範圍為：

$$180 + \frac{3}{2}\theta - \sin^{-1}(-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta) < \angle QPQ' < 180 - 2\tan^{-1}\frac{\sin\frac{3}{2}\theta - 4\sin\frac{1}{2}\theta\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}$$



(五) 軌跡圖形之參數式為
$$\begin{cases} x_{Q'} = x_P + r \cos(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \\ y_{Q'} = y_P + r \sin(\theta_{\text{水平夾角}} - \theta) \end{cases}$$

其中 $\theta_{\text{水平夾角}} = \angle QPM = \tan^{-1}\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ ， $r = \overline{PQ}$ 長度 = $\sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}$ ， Q 以 P 為中心順時針旋轉 θ 得 $Q'(x_{Q'}, y_{Q'})$

複合正 n 邊形的外正 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 的 $A_i(x_{A_i}, y_{A_i})$ 須符合 $\tan[(i-1)\theta] = \frac{y_{A_{i+1}} - y_{A_i}}{x_{A_{i+1}} - x_{A_i}}$ ，且 $(y_{A_{i+1}} - y_{A_i})^2 + (x_{A_{i+1}} - x_{A_i})^2 = 1$ ， $A_{n+1} = A_1$

而複合正 n 邊形中的內正 n 邊形 $A'_1A'_2 \dots A'_n$ 中的 $A'_i(x_{A'_i}, y_{A'_i})$ ，則 $A'_i = \begin{cases} x_{A'_i} = x_{A_i} + \frac{1}{k+1}(x_{A_{i+1}} - x_{A_i}) \\ y_{A'_i} = y_{A_i} + \frac{1}{k+1}(y_{A_{i+1}} - y_{A_i}) \end{cases}$ 且 $\begin{cases} A'_{n+1} = A'_1 \\ k \geq 1 \end{cases}$ ；

$P(x_P, y_P)$ 、 $Q(x_Q, y_Q)$ 為 ① 當 P 在外， P 在 $\overline{A_pA_{p+1}}$ 上， $P \begin{cases} x_P = x_{A_p} + t_p(x_{A_{p+1}} - x_{A_p}) \\ y_P = y_{A_p} + t_p(y_{A_{p+1}} - y_{A_p}) \end{cases}$ ；其餘 ②③④ 情況詳見作品說明書

柒、應用

防盜系統：在防盜上，將要保護的物體置於 Q' 軌跡圖形之中空處，則其偵測範圍即 Q' 軌跡圖形所覆蓋處。運用本研究結果可讓機械在偵測時內部零件運轉移動的範圍(等同於研究中 P 、 Q 之移動)減少，並達到最大的偵測範圍。

掃地機器人：掃地機器人在清掃時，需掃描附近的障礙物以閃避，但閃避時所移動範圍不可過大，否則可能與其他障礙物產生碰撞。應用研究結果，使其旋轉、移動之範圍愈小，偵測障礙物範圍愈大，可減少移動時之零件耗損，亦可減少碰撞機率。

捌、參考文獻

- 王羽安(2007)。「圓形板」的圓形軌跡之探討及其延伸。台灣國際科展數學科作品說明書。(未出版)
- 王亭婷、彭斯婉、陳葦樺、徐聰棟(2009)。搞「軌」一有「跡」可循。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 王郁婷、陳泓志、鄭達駿(2009)。聞「數」起舞。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 王敏齊、詹雨安、鄭丞傑(2012)。藏寶「旋」「跡」。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 江翔、江哲宇(2010)。凸多邊形周長的分割與包絡。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 李敬蓉(2002)。圓圓轉轉轉。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 李宇凡、沈威銓(2011)。點線之間——一個從點掃掃到線掃掃的問題探討。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 林子巨、林軒民、沈柏璋(2011)。運用之妙，存乎於「心」。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 徐婉庭、吳千圳、高尉庭、洪研媛(2009)。刻骨銘<心>。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 陳華軒(2012)。無奇不有的拋物線——頂點移動軌跡的探討。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 張詠盛、楊雅涵、陳碩文(2012)。「軌」謎「心」竅。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 薛丞洋、張華民、陳思罕、劉恩權(2007)。滾滾紅成。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 孫宏奇、陳家鎬(2011)。輪迴路轉——等比繞行的秘密。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 藍淑文、陳宗蔚、吳玟秀(2012)。凡走過必留下痕跡。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 潘世郎(2001)。追!追!追!——多邊形追逐軌跡之探討。全國中小學科展中組數學科展作品說明書。(未出版)
- 蘇育德、劉子弘、邱建智(2003)。正多邊形滾動路徑面積與邊長相關性的探討。全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。(未出版)