中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第一名

030421

圖形中的數獨

學校名稱：新北市立鷺江國民中學

作者：	指導老師：
國二 鄭宇翔	連琨銘 劉繕榜

關鍵詞：數獨(Sudoku)、*k-labeled*、超圖(Hypergraph)

得獎感言

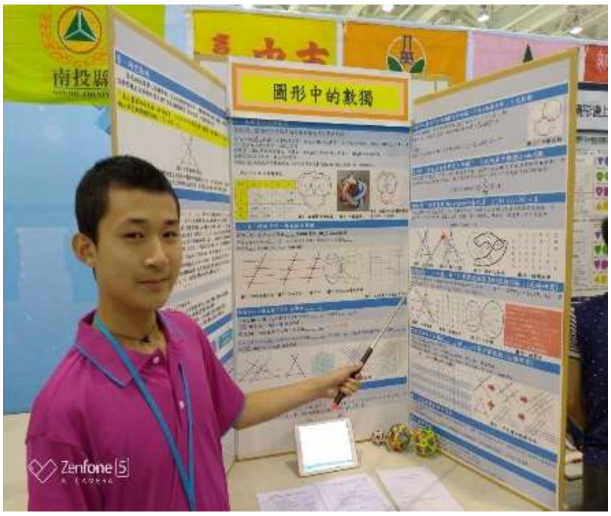
在科展背後大家的努力

在全國科展開始前，我並沒有偷懶，經常和老師一起討論，並且一有空就練習口說，這一切都是為科展做準備，終於在全國科展脫穎而出，拿到數學科國中組第一名，以下是我的得獎感言。

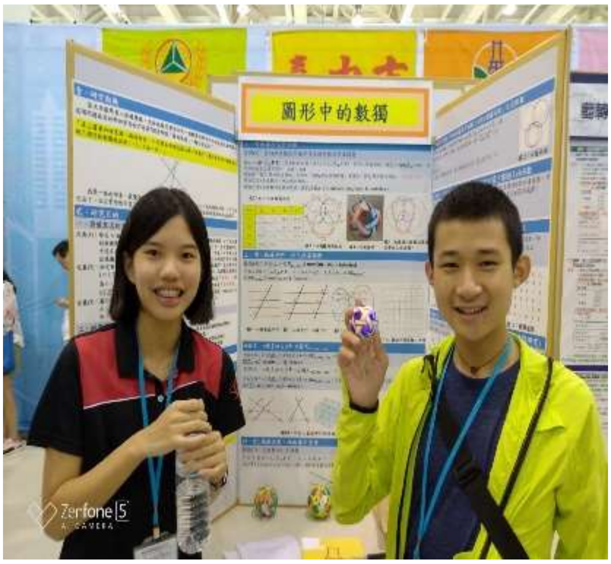
為了全國科展，經過幾個月的努力，終於來到高雄的全國科展之旅，在這五天四夜的旅程中發生了許多事情，其中有幾件事最讓我印象深刻。在比賽的前一天我很緊張，心中一直浮現一些小劇場，例如:擔心評審聽不下去，直接叫我閉嘴。比賽當天抱著緊張的心情進入會場，發現評審並沒有想像得如此恐怖，反到每一位都非常和藹可親，還給了我許多寶貴的意見，甚至給了我參考文獻，讓我受用無窮。最後一天頒獎典禮，在大布幕的頒獎名單看到自己時，十分感動，沒想到我竟然有拿下第一名的一天。

在拿下全國科展第一名前，我只是一個數學偏強的毛小子，完全沒想到現在竟然得到如此大的成就，但這都要感謝大家的幫忙和努力，要是如果沒有社備組長推薦、沒有老師的指導、沒有評審的肯定，根本就不會有今天的我，也因為有了大家的，才能知道世界如此的大，面對那麼多人的幫助，我能回報的只有努力向前走，不要辜負大家對我的期望。

對於如何進行科展研究，我個人認為只要抱著熱血的心盡力去做、去努力，就不用害怕自己做的不好，如果你都對自己沒信心了，就更不用說要成功。另外在建議方面，建議在練習口說時，要盡量讓評審聽得懂，且要抱著迫不及待要分享的語氣，不然評審感受不到你的熱忱又覺得你對自己的研究不熟的話，你的作品再好，都不會得獎。至於名次並不用太在意，因為真正重要的是你努力的過程，所有的名利都是過眼雲煙，但途中學到的經驗是一輩子都不會離開你的，因此這些經驗都將成為你生命中成長的養分。



我正在練習口說。



介紹作品給另一個選手。


研究圖論問題。

摘要

本文一開始以直線數奇偶性來探討「在平面上給定n條直線，任三條線不共點，任兩條線不平行，讓沿著任何一條直線上的$n-1$個交點，都剛好出現$1, 2, 3, \cdots, n-1$各一次」，求解的存在性。研究結果顯示直線數是偶數時有解，而直線數是奇數時無解。接著用圖論中「點著色」及「邊著色」的觀點來思考同一問題，突顯出該問題背後的數學結構。最後進一步探討「將直線替換成圓」，「有m條直線平行，任三條不共點」以及「有p條直線共點，任兩條不平行」的情況。其中最後一部分「有p條直線共點，任兩條不平行」的情況，從超圖(Hypergraph)和關聯矩陣(Incident Matrix)的觀點，得到一些有趣的結論。

壹、 研究動機

某次的數學輔導課，老師丟給我一道有關在直線交點上填數字的問題，這道問題出自科學研習月刊57卷第5期第58頁「標好標滿」[2]。題目敘述如下：

「桌上畫著四條直線，兩兩相交。小志想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現$1, 2, 3$各一次。」

題目中的小志，假如能讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現$1, 2, 3$各一次，這樣的情況我們就稱為「標好標滿」。我第一眼的印象，感覺這題目很像是一種特別的數獨(Sudoku)，只是把常見數獨中9×9的格子，轉換成相交直線上的交點。我直接動手做，一下子就完成了。但在實際動手畫五條直線求解時卻遇到困難，怎麼試都無法成功，我覺得是無解，但要如何證明呢？我自己畫了好幾張紙嘗試填數字失敗後，居然在眼中慢慢浮現兩條線一組的畫面。

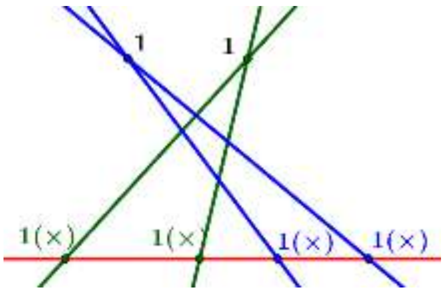


圖1：五條直線兩兩相交情形

如圖1，兩條綠色的線和兩條藍色的線在紅色的線上共有4個交點，當在兩條綠色線交點處標1，也在兩條藍色線交點處標1，則在紅色線上的4個交點都無法再標上1了。得到這個結

論後我非常興奮向老師分享。我對這個問題非常有興趣，想要往直線數n來延伸嘗試尋求規律。我請教老師要從什麼地方下手，老師建議我先上網查數獨[5]、拉丁方陣和圖論的相關知識[4]，並且帶著我一起討論文獻中的內容，慢慢地我從參考文獻得到許多看問題的觀點。

貳、 研究目的與問題

我們將原題目敘述中的直線數改寫為 n，得到以下問題描述：

「在平面上給定兩兩相交的 n 條直線，任三線不共點。然後再將每條直線與其他直線相交的$n-1$個交點上，標上$1, 2, 3, \cdots, n-1$的數字，使得同一條直線上點的標號，都剛好出現$1, 2, 3, \cdots, n-1$數字各一次」

此時，我們突發奇想，假如在平面上給定的n條直線有三線共點或者有平行的情況發生，是否能「標好標滿」？或者我們將平面上的n條直線改成n個圓，那麼標號的情況為何？研究過程中，根據我們的問題情境，我們參考了文獻[3,4]相關的圖論知識，做出以下的名詞解釋。

一、 名詞解釋與符號定義

(一) 圖論知識[4]

以下為在本研究將會用到的圖論知識。

1. 圖(graph)：圖 G 是由一些頂點(vertex)與邊(edge)所組合而成的結構。設圖 G 所有的頂點所成集合為$V(G)$，且圖 G 所有的邊所成集合為$E(G)$。圖 G 中的每一條邊都是連接$V(G)$中的兩個不同的頂點。也就是說，對於兩個不同的頂點$u, v \in V(G)$，若存在一條邊連結頂u, v，我們可以將此邊記為uv，即$uv \in E(G)$。
2. 簡單圖(simple graph)：若圖 G 中，任意兩頂點之間最多只有一條邊相連，而且不會有一條邊連接相同一點，則稱 G 為簡單圖。
3. 子圖(subgraph)：圖 H 及圖 G 滿足$V(H) \subseteq V(G)$且$E(H) \subseteq E(G)$，我們稱 H 為 G 的子圖。
4. n-完全圖(n-complete graph)：圖 G 中有n個頂點且任兩點都有邊相連，我們就稱圖 G 為n-完全圖，以K_n表示。
5. 獨立點集(independent set)：若圖 G 中有一點集 $X \subseteq V(G)$，且X中任意相異兩個頂點沒有邊連結，我們稱X為一獨立點集。

6.二分圖(bipartite graph)：指圖 G 的點集 $V(G)$ 可以表示成兩個互斥獨立點集 X 和 Y 的聯集，也就是 $V(G)=X\cup Y$ 且 $X\cap Y=\phi$，且 $E(G)$ 裡面邊僅能連接 X 和 Y 之間的點。若 $|X|=m$ 且 $|Y|=n$ 且對任意兩個頂點 $v_1\in X$ 和 $v_2\in Y$，$v_1v_2\in E(G)$，則圖 G 為完全二分圖(complete bipartite graph)記為 $K_{m,n}$。

7.k−分圖(k-partite graph)：若圖 G 的點集 $V(G)=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k$ 且所有的 X_i 均為獨立點集且 $X_i\cap X_j=\phi,\ i\neq j$，$E(G)$ 裡面邊僅能連接相異獨立點集之間的點，則圖 G 稱為 k−分圖。若對所有 $i=1,2,\cdots,k$，$|X_i|=n_i$ 且對所有 $v_i\in X_i$ 和 $v_j\in X_j$，$v_iv_j\in E(G)$，則圖 G 為完全 k−分圖(complete k−partite graph)記為 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$。

(二) 符號及名詞定義

對於本研究所要探討的問題，我們做以下定義：

定義 1：給定 n 個圖形的序列 $\{C_i\}_{i=1}^{n}=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，其中 C_i 為直線或曲線。在平面上圖形與圖形的交點所成集合為 V。若 V 中有兩個交點 u, v 在某個 C_i 中，且沿著圖形 C_i 中沒有其他交點介於 u, v 之間，那麼我們稱 u，v 相鄰且 uv 為一個邊。E 表示由這樣圖形序列 $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ 所形成的邊之集合。特別以 $\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$ 表示本研究所探討的圖。

定義 2：給定圖 $\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，若存在 $k\in\mathbb{N}$，將圖上的點標上數字 $1,2,3,\cdots,k$，使得對所有 i=1, 2, …, n，C_i 上交點的標號，$1,2,3,\cdots,k$ 的數字至多出現一次，我們稱這樣情況為 ***k*−labeled**。

定義 3：圖 G 中一個頂點 v 連接到其他頂點的邊數，我們就稱為是該頂點的度數，以 deg(v)表示。若圖 G 有 n 個頂點 $v_1, v_2, \ldots v_n$，我們定義圖 G 的最大度數為△(G)，即 $\triangle(G)=\max\{\deg(v_i):i=1,2,\cdots,n\}$。

若 $\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{l},V,E\right\rangle$ 為 k−labeled，則它必為(k+1)−labeled。此外，回應一開始「標好標滿」的主題。設 C_i 上有 n_i 個交點，令 $m=\max\{n_i\,|\,i=1,2,\cdots,l\}$，即圖形序列中存在一個

C_i 與其他圖形有最多的交點數 m。若 $\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{l}, V, E \right\rangle$ 為 $m-$labeled ，則我們稱為「**標好**」。若 $\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{l}, V, E \right\rangle$ 為 $m-$labeled 但無法 $(m-1)-$labeled ，則我們稱為「**標好標滿**」。

二、 研究問題

根據研究動機，我們嘗試探討以下四個問題：

(一)探討平面上給定「任三條線不共點，任兩條線不平行」之 n 條直線標好標滿問題。

(二)探討平面上給定「任兩個圓交於兩點」之 n 個圓標好標滿問題。

(三)探討平面上給定「有 m 條線平行，任三條不共點」之 n 條直線標好標滿問題。

(四)探討平面上給定「有 p 條線共點，任兩條不平行」之 n 條直線標好標滿問題。

參、 研究器材與設備

硬體部分：紙、筆、黑板、筆記型電腦、教具用的扣條。

軟體部分：文書處理軟體 Word 2010、計算軟體 Excel 2010 及方程式編輯軟體 Mathtype 6.0、GGB 動態幾何軟體。

肆、 研究過程與方法

一、 任三條線不共點，任兩條線不平行

科教研習月刊中游森棚教授提出的問題為：桌上畫著四條直線，兩兩相交。小志想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現1, 2, 3各一次[2]。我第一眼的印象，感覺這很像是一種特別的數獨(Sudoku)，因此直接動手做，一下子就完成了。但在實際動手畫五條直線求解時卻遇到困難，怎麼試都無法成功，後來我發現，五條直線的情況根本是無解。

(一)實際動手畫圖探討直線數n=4, 5, 7與奇數時的情況

1. 直線數n=4時，圖為3−labeled

平面上四條直線，兩兩相交於一點，直線最多交點數為3。讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現1, 2, 3各一次。結論：3−labeled，但無法2−labeled。

如圖2所示，所以可「標好標滿」。

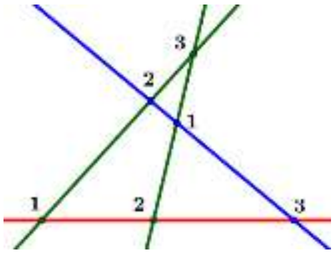


圖2：四條直線兩兩相交的情形

2. 直線數n=5時，圖為5−labeled

平面上五條直線，兩兩相交於一點，直線最多交點數為4。讓沿著任何一條直線上的四個交點都剛好出現1, 2, 3, 4各一次。結論：5−labeled，所以「無法標好標滿」。

[證明]

如圖3−1及圖3−2

(1)根據題意，一定可以找到兩個點，不在同一條線上，標上相同數字。不失一般性的前提下，選擇E、F兩點討論(如圖3-1)，首先E、F不在同一條直線上，因此可以填上相同的數字，為了方便說明，我假設E、F兩點都填數字1。

(2)考慮直線L上的四個點，此時A、B、C、D皆不可以填1，因此五條直線的情況是無法標好標滿(圖3-2為五條直線使用5個標號的情況)。

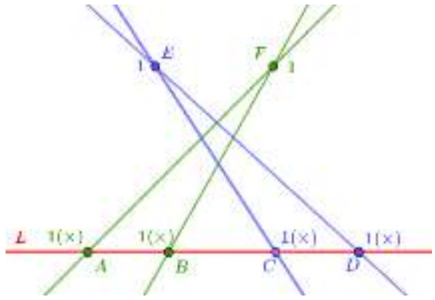


圖3-1：五條直線兩兩相交情形

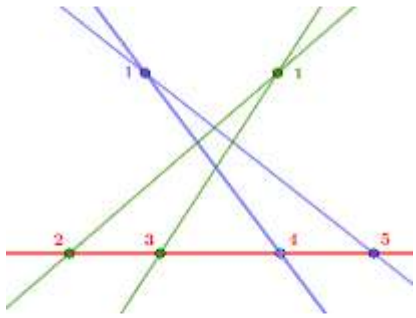


圖3-2：五條直線**5−labeled**

3. 直線數n為奇數時，圖為n−labeled。

定理 1：平面上有n條直線，n為奇數，兩兩相交於一點，直線最多交點數為$n-1$。讓沿著任何一條直線上的n−1個交點剛好出現1, 2, 3, ⋯, $n-1$各一次，則圖為n−labeled，所以「無法標好標滿」。

[證明]

(1)已知n=3, 5時無解。考慮n=2k+1條線時。同樣的在不失一般性的前提下，我考慮某一

條特定的直線L，與其餘的$2k$條直線。直線L上有$2k$個點，此$2k$個點，可以分成k組，每組兩個點。過每一組的點在之直線交於在直線L外的一點，每一組對應一個點，共k個點。我假設不在直線L上的k個點都填上1。

(2) 再考慮直線L上$2k$個點，當不在直線L上的k個點都填上1時，直線上的$2k$個點將全部不能填上1，所以無法標好標滿。

(3) 若將直線L上有$2k$個點分別標上$2\sim 2k+1$。不在直線L上的k個點都填上1。即得圖為n-labeled。

(二) 用表格來重新討論問題

當直線數愈來愈多時，討論交點數令我看得眼花撩亂，後來和老師討論的過程中，想到使用表格來記錄，真的非常方便，還可以透過表格看到數字分佈背後的規律。

1. 用表格討論直線數4的標好標滿問題

平面上有4條直線，兩兩相交於一點，直線最多交點數為3。讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現1, 2, 3各一次。結論：3-labeled，但無法2-labeled，可標好標滿。

構造方法如下：

表1：n=4時

直線	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		1	2	3
L_2	1		3	2
L_3	2	3		1
L_4	3	2	1	

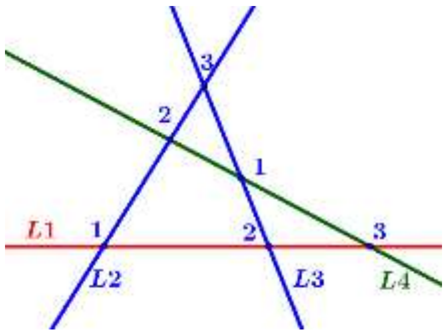


圖4：四條直線兩兩相交的情形

[作法]：

(1) 如表1所示，從左上右下的對角線不填，表格內容有對稱性。

(2) 不失一般性，在第一列由左而右，第一行由上而下，標上$L_1\sim L_4$。

(3) 接著由左上到右下的斜線依序填滿1, 2, 3。

(4) 剩下的空格之答案填法有唯一性。

(5) 表格的方法等於有順序的標示直線與交點上填入的數字。

2. 表格討論直線數k(k為偶數)的標好標滿問題

定理 2：平面上有k條直線k(k為偶數)，兩兩相交於一點，直線最多交點數為$k-1$，讓沿著任何一條直線上的$k-1$個交點都剛好出現$1, 2, 3, \cdots, k-1$各一次，則圖為$(k-1)-\text{labeled}$，可標好標滿。

構造方法如下：

(1)如表2所示，從左下右下的對角線不填數字，表格內容有對稱性。

(2)在不失一般性的前提下，在第一列由左而右，第一行由上而下，標上L_1~L_k。

(3)接著由左上到右下的斜線依序填滿$1, 2, 3, \cdots, k-1$。

(4)剩下的空格之答案填法有唯一性。

(5)表格的方法等於有順序的標示直線與交點上填入的數字

表2：n= k(k為偶數)時

直線	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	…	L_{k-1}	L_k
L_1		1	2	3	4	5	6		k-2	k-1
L_2	1		3	4	5	6		k-2	k-1	2
L_3	2	3		5	6		k-2	k-1	1	4
L_4	3	4	5			k-2	k-1	1	2	⋮
L_5	4	5	6			k-1	1	2	3	k-2
L_6	5	6		k-2	k-1		2	…	…	1
L_7	6		k-2	k-1	1	2		k-6	k-5	3
…		k-2	k-1	1	2	…	k-6		k-4	⋮
L_{k-1}	k-2	k-1	1	2	3	…	k-5	k-4		k-3
L_k	k-1	2	4	…	k-2	1	3	…	k-3	

(三)直線標好標滿問題的所有方法數

當使用表格來討論問題後，很自然的會想到不同標號填入表格的方法數有多少種，我觀察到數字標號不在乎數字本身的「大小」或「順序」，只是表達「不同」，因此互換數字不會改變表格的可行性，意思是說當直線標好標滿問題有解，不會因為互換數字

而變成無解。因此可以得到以下的結論：

推論 1： 平面上有k條直線(k為偶數)兩兩相交於一點，直線最多交點數為$k-1$，讓沿著任何一條直線上的$k-1$個交點都剛好出現$1, 2, 3, \cdots, k-1$各一次，則所有標好標滿的方法數大於等於$(k-1)!$。

[證明]

由於在表格中的標號只是不同交點的代號，所以任兩個號碼互相取代。例如所有的標號1換成標號3，所有的標號3換成標號1，其結果依然成立(可標好標滿)，如表3及表4所示。而且在不失一般性的前題下，本研究的表格討論方式，其方法有唯一性。故所有構造標好標滿的方法數大於等於$(k-1)!$。

表3：k=4時

直線	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		1	2	3
L_2	1		3	2
L_3	2	3		1
L_4	3	2	1	

表4：k=4時，把標號1和標號3調換

直線	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		3	2	1
L_2	3		1	2
L_3	2	1		3
L_4	1	2	3	

(四)從圖論的觀點來思考

數學專題課和老師討論時，老師問我：「假如把點變成線，線變成點，這時的情況為何」？老師引導我從圖論的觀點來討論「標好標滿」問題。我就在紙上把圖案畫下來討論，發現和著色問題有關，於是我們將有關著色問題相關定義羅列如下[4]：

1. 著色問題相關定義

定義 4： 一個圖G上點的**k−著色**(k−coloring)是指一個函數 $f: V(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$，而一個正常$k$−著色(proper k−coloring)是指滿足 $f(x) \neq f(y)$ 對所有 $xy \in E(G)$ 都成立的k−著色。

定義 5： 一個圖G上點的著色數(chromatic number) $\chi(G)$ 是使得G存在正常k−著色的最小非負整數k。如果 $\chi(G) \le k$，也會說G可以被k−著色(k−colorable)。

定義 6： 一個圖G的k−邊著色(k−edge coloring)是指一個函數 $f: E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$。一個正常$k$−邊著色(proper k-edge-coloring)是指滿足 $f(e) \neq f(e')$ 對所有相鄰的邊e和e'都成立

的k−邊著色。

定義 7：一個圖G的邊著色數(chromatic index) $\chi'(G)$是使得G存在正常k−邊著色的最小非負整數k(為了方便，如果G沒有邊，定義$\chi'(G)=0$。

定義 8：一個圖G的線圖(line graph) $L(G)$，它的點集$V(L(G))=E(G)$且$L(G)$的兩個點相鄰若且唯若它們在G中是相鄰的兩條邊。為了方便，我們常將$L(G)$簡記為G'。

由定義 8得知，G的邊著色問題其實就相當於是考慮其線圖的點著色問題。所以$\chi'(G)=\chi(L(G))$(簡記為$\chi'(G)=\chi(G')$)。

2. 完全圖標好標滿問題

由定義 1可得到定理3

定理 3：若圖$G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$且$\chi'(G)=k$，則圖$G$為$k-\text{labeled}$。

(1) 從完全圖K_4來討論$\{L_1,L_2,L_3,L_4\}$的標好標滿問題

以表5和圖5對應，我可以將線集合$\{L_1,L_2,L_3,L_4\}$看成點集合，而將交點用線表示。

我們可以得到$\chi'(K_4)=3$，圖K_4為$3-\text{labeled}$。

表5：n=4時

直線	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		1	2	3
L_2	1		3	2
L_3	2	3		1
L_4	3	2	1	

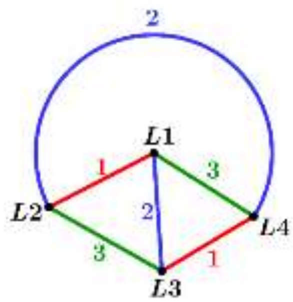


圖5：原n=4圖的線圖

[推論與證明]

(a) 圖5中點代表原本的直線，標上L_1,L_2,L_3,L_4。

(b) 任兩點之間的連線標上1, 2, 3，就是代表原本的點標上1, 2, 3。

(c) 相鄰數字不可重複，可以想像成相鄰的顏色皆相異。

(d) L_1,L_2,L_3,L_4每一個點都和其他三點有線段連接，這是完全圖K_4

(2) 以完全圖K_n來探討標好標滿問題[4]

定理 4：

當n是偶數時，$\chi'(K_n)=n-1$，故K_n可以標好標滿。

當n是奇數時，$\chi'(K_n)=n$，故K_n無法標好標滿。

[證明]

$\boxed{\text{當}n\text{是偶數時}}$：$\{L_i\}_{i=1}^{n}$最多交點數為$n-1$。可以用下面的方式給出$K_n$的正常($n$−1)−邊著色。在平面上取正$n$−1邊形的中心和所有頂點當作$K_n$的點$0,1,2,\cdots,n-1$，把$(0,1),(2,n-1),(3,n-2),\cdots,(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1)$這些邊塗色1，接著，把這組邊旋轉$\frac{360}{n-1}$度，得到另一組邊，塗色2。繼續做旋轉著色的動作，一直到用(n−1種顏色。如此剛好把圖著好顏色，故得$\chi'(K_n)=n-1$。底下以K_6為例，用紅色、藍色、綠色、橘色、紫色代表5種不同號碼標號。

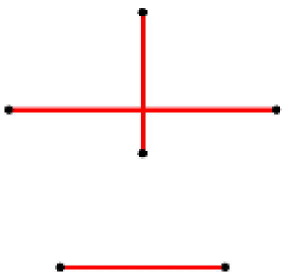


圖6：K_6的第1種顏色(紅色)

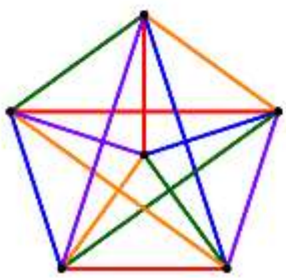


圖7：K_6用5種不同顏色完成塗色

$\boxed{\text{當}n\text{是奇數時}}$：$\{L_i\}_{i=1}^{n}$最多交點數為$n-1$。因為$n\le\chi'(K_n)\le\chi'(K_{n+1})=n$。故$\chi'(K_n)=n$。因此標好標滿的問題當$n$是奇數時，其需要的不同標號為$n$，因此在只有$n-1$個標號的情況無法標好標滿。

二、 當直線變成圓，任一個圓都和其他圓交於 2 點。

在討論完直線的問題後，我試著思考用圓來代替直線結果會是如何。因為兩個圓相交會交於兩點，所以我開始考慮將原問題「平面上四條直線，兩兩相交於一點，任三線不共點，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現1, 2, 3各一次」。改為「平面上四個圓，兩兩相交於兩點，任三圓不共點，讓沿著任何一條圓周上的六個交點都剛好出現1, 2, 3, 4,

5, 6各一次」。由於有前面直線問題成功的經驗，直覺認為是成立的。

(一) 圓個數*n*=4時，標好標滿問題有解

平面上四個圓，兩兩相交於兩點，任三圓不共點，讓沿著任何一條圓周上的六個交點都剛好出現1, 2, 3, 4, 5, 6各一次，即圖$G=\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{4}, V, E \right\rangle$，其中$C_i$代表圓，則圖$G$為$6-\text{labeled}$。

實際動手繪圖後，我發現「圓的標好標滿問題」根本和「直線的標好標滿問題」是等價的，只是從兩直線交於一點，變成兩個圓相交於兩點。以*n*=4為例，只要把直線標號為1, 2, 3的地方同時加3，變成另外一個點，得到圓C_1與圓C_2交於1, 4，圓C_1與圓C_3交於2, 5，圓C_1與圓C_4交於3, 6，圓C_2與圓C_3交於3, 6，圓C_2與圓C_4交於2, 5，圓C_3與圓C_4交於1, 4。如圖8所示。

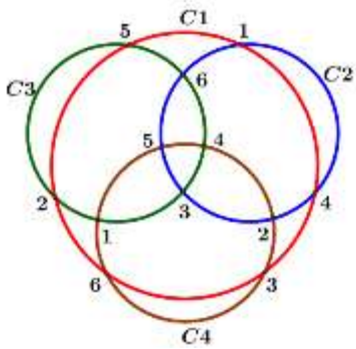


圖8：*n*=4時，圓的標好標滿問題

(二) 圓的標好標滿問題等價直線的標好標滿問題

定理 5-1：圖$G_1=\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{k}, V, E \right\rangle$，其中$C_i$代表圓；圖$G_2=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{k}, V, E \right\rangle$，其中$L_i$代表直線。

結論(1)「圖G_1標好標滿問題」等價於「圖G_2標好標滿問題」。

結論(2)當*k*是奇數時，無法標好標滿。

結論(3)當*k*是偶數時可標好標滿。圖G_1為$2(k-1)-\text{labeled}$，圖G_2為$(k-1)-\text{labeled}$。

表6：k=4時

圖形	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1		(1, 4)	(2, 5)	(3, 6)
C_2	(1, 4)		(3, 6)	(2, 5)
C_3	(2, 5)	(3, 6)		(1, 4)
C_4	(3, 6)	(2, 5)	(1, 4)	

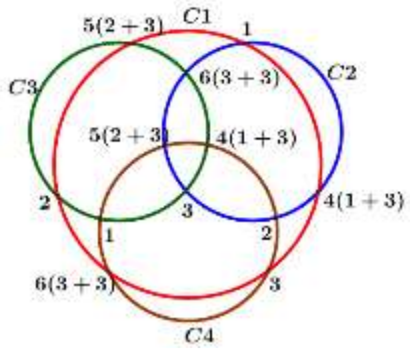


圖9：k =4時，圓的標好標滿問題

[證明]

1. 以k =4的情況來說明。
2. 任兩條直線相交於一點，任兩個圓相交於兩點。
3. 在「圓的標好標滿問題」中，我可以利用「直線的標好標滿問題」之解(標號)，每一個標號加3，得到一組數對。如表6和圖9所示。
4. 每一個「直線的標號標滿問題」的解，都有一個對應的「圓的標好標滿問題」的解。所以兩個問題是等價的。

(三) 藤球交點標號問題等價於圓的標好標滿問題

定理 5-2：圖 $G_1=\left\langle \{B_i\}_{i=1}^{k},V,E\right\rangle$，其中 B_i 代表在三度空間中，藤球上的圓；

圖 $G_2=\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{k},V,E\right\rangle$，其中 C_i 代表在二度空間中，平面上的圓；

結論(1)「圖 G_1 標好標滿問題」等價於「圖 G_2 標好標滿問題」。

結論(2)當k是奇數時，無法標好標滿。

結論(3)當k是偶數時可標好標滿。圖 G_1 為 $2(k-1)-\text{labeled}$ ，圖 G_2 為 $2(k-1)-\text{labeled}$ 。

圖10-1：「6線藤球」，東南亞常見運動比賽，俗稱「腳踢的足球」

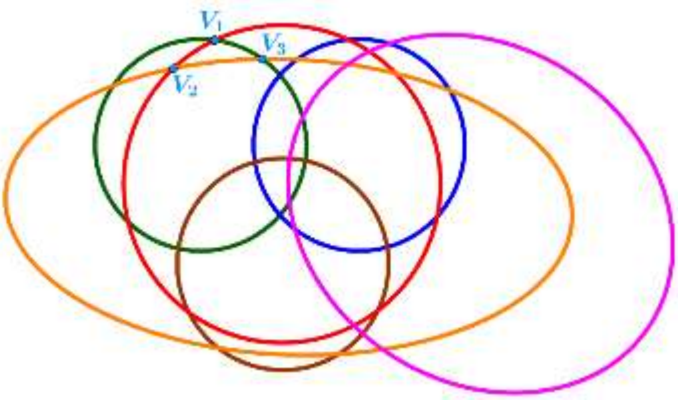


圖10-2：想像將6線藤球壓扁在平面上，任兩圓相交於兩點的示意圖

[證明]

1. 藤球是由數個二度空間圓所組成在三度空間的物件。
2. 任一個組成藤球的圓彼此之間沒有平行，而且任兩圓都相交於兩點。
3. 當我們將三度空間的藤球壓扁在平面上維持任兩圓都相交於兩點，亦即我們可以建立一個圖 $G_1=\left\langle \{B_i\}_{i=1}^{k},V,E \right\rangle$ 與圖 $G_2=\left\langle \{C_i\}_{i=1}^{k},V,E \right\rangle$ 的1-1對應(如圖10-1及圖10-2)。

三、 有 *m* 條線平行，任三條不共點

接著我考慮直線中有平行時的情況，但是有平行的情況時，每一條直線上的交點數量就不一定相同，所以我試著找出在符合標好標滿前題下，用最少的標號標出所有點的數量。

(一) 直線數*n*=5時，有些直線平行的情況

平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{5},V,E \right\rangle$，任三條線不共點，在有些直線平行的情況下，實際用手繪圖探討該圖之標號數。

1. 其中恰有四條直線平行($L_1//L_2//L_3//L_4$)。結論：$4-$labeled (如圖11)。
2. 其中恰有三條直線平行($L_1//L_2//L_3$)。結論：$4-$labeled (如圖12)。
3. 其中三條直線彼此平行，另兩條直線彼此平行($L_1//L_2//L_3$且$L_4//L_5$)。

   結論：$3-$labeled (如圖13)
4. 其中恰有二直線平行($L_1//L_2$)。結論：$5-$labeled (如圖14)。
5. 其中恰有兩組二條直線平行($L_1//L_2$且$L_3//L_4$)。結論：$5-$labeled (如圖15)。

在繪圖的過程，我應用到貪婪演算法(greedy algorithm)的概念，又稱貪心演算法，是一種在每一步選擇中都採取在當前狀態下最好或最佳（即最有利）的選擇，從而希望導致結果是最好或最佳的演算法[4]。

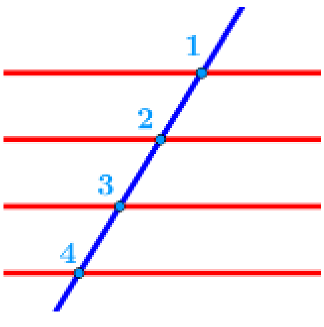


圖11：恰4條直線平行

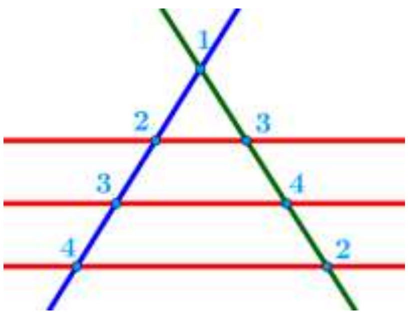


圖12：恰3條直線平行

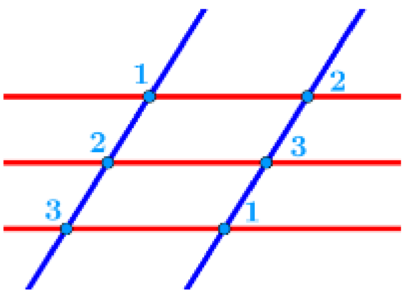


圖13：3條平行、2條平行

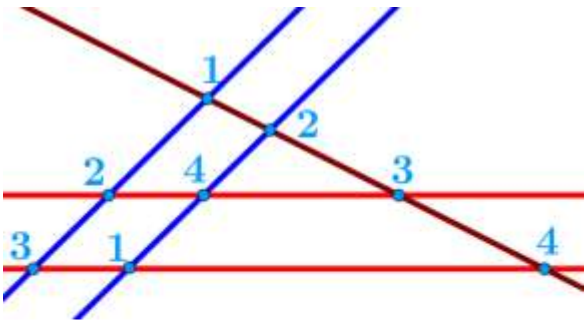


圖14：2條平行、另2條平行

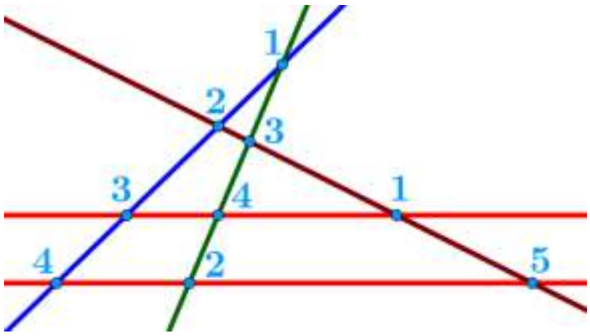


圖15：恰2條直線平行

(二) k−分圖(k−partite graph)為n−labeled

推論 2：平面上圖$G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E \right\rangle$，任三條線不共點，將圖$G$平行的線分成一類，分為$k$個部分，轉換成線圖時，形成**$k$−分圖($k$−partite graph)**，則圖$G$為**$n$−labeled**，顯然成立。

[證明]

由於n條直線的標好標滿問題為n−labeled，而k−分圖(k−partite graph)是原直線標好標滿圖的子圖，所以必為n−labeled。

接下來，引入圖論[4]的想法，把平行的直線分為同一集合，例如有五條直線平行，則把這五條直線視為一集合。假如一條直線沒有其他直線平行，則視為這個集合中只有一個元素。

(三) 完全二分圖 K_{m_1,m_2} 為 $\max\{m_1,m_2\}-$labeled

推論 3：平面上圖$G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E \right\rangle$，任三條線不共點，且為完全二分圖$K_{m_1,m_2}$，則圖$K_{m_1,m_2}$為$\max\{m_1,m_2\}-$labeled。

[證明(1)]

由於二分圖K_{m_1,m_2}中，一條直線最多只有$\max\{m_1,m_2\}$個交點，可想像成$\max\{m_1,m_2\}$個數字排成拉丁方陣，假設$m_1 \ge m_2$，則減掉m_1-m_2列，可完成$m_1 \times m_2$的拉丁矩陣，即可完成所有標號填寫，因此為$\max\{m_1,m_2\}-$labeled。

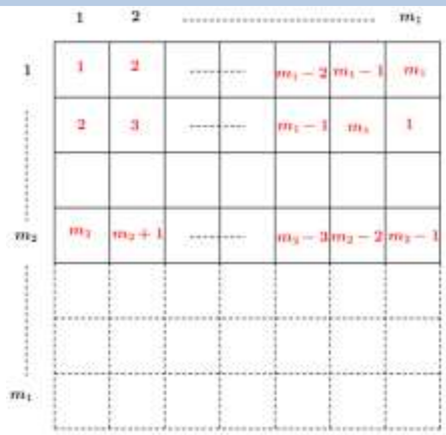


圖16：m_1個數字排成拉丁方陣

[證明(2)]

由定義(8)和引理(1)可以很容易觀察到，平面上完全二分圖 K_{m_1,m_2} 的線圖 $L(K_{m_1,m_2})$ 中頂點(vertices)的最大度數$\triangle\left(K_{m_1,m_2}\right) = max\{m_1, m_2\}$，因此為 $\max\{m_1, m_2\} - \text{labeled}$ 。

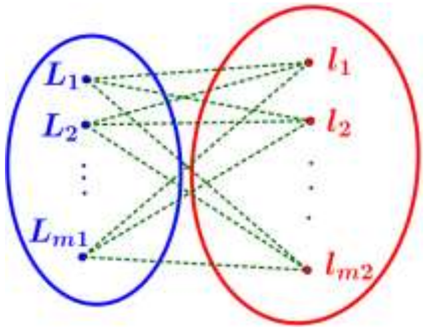


圖17：完全二分圖的線圖

(四) 5條直線完全三分圖 K_{m_1,m_2,m_3} 為 $\max\{m_i + m_j + 1\} - \text{labeled}$

觀察1 ：平面上圖 $G = \left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \right\rangle$ 為完全三分圖 K_{m_1,m_2,m_3} ，則圖 K_{m_1,m_2,m_3} **為** $\max\{m_i + m_j + 1\} - \text{labeled}$ 。其中 $i, j = 1, 2, 3$ 。

[說明]

從圖12、圖14，可以得知上述觀察的結果。

(五) 點著色的上界

引理 1[4]：一個圖G上點的著色數(chromatic number) $\chi(G)$ 永遠小於或等於圖G中頂點的最大度數$\triangle(G)$加1，即$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$。

[證明]用數學歸納法來證明

1. 頂點數 $n = 1$ 時，$G = K_1$ ，$\chi(G) = 1$，$\triangle(G) = 0$，上述結論成立。

2. 假設頂點數為 $n-1$時，上述結論成立。

3. 在有n個頂點的圖G中：

選定圖G中一個頂點v，則圖 $G-v$ 有 $n-1$個頂點，且$\chi(G-v) \leq \triangle(G-v) + 1$，所以圖 $G-v$最多只需要$\triangle(G-v) + 1$種顏色(本研究為標號)

情況1：$\triangle(G) = \triangle(G-v) \Rightarrow \chi(G) \leq \triangle(G-v) + 1 = \triangle(G) + 1$

情況2：$\triangle(G) \neq \triangle(G-v) \Rightarrow \triangle(G-v) \leq \triangle(G) - 1$

因此$\chi(G) \leq \triangle(G-v) + 2 \leq \triangle(G) + 1$，由數學歸納法得知$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$。

(六) *n*條直線完全*k*−分圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 標號數。

推論 4：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$ 為完全*k*−分圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$，則圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 為 $\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\{m_i\}+1\right\}-\text{labeled}$。

[證明]

因為在*k*−分圖中，頂點的最大度數$\triangle(G)=\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\{m_i\}$。所以所需要的標號數

$\chi(G)\le\triangle(G)+1=\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\{m_i\}+1$。

(七) *n*條直線完全*k*−分圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ —高維空間版。

定理 6：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$ 為完全*k*−分圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$，若將 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 放在*k*維度空間，則圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 為 $\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\{m_i\}\right\}-\text{labeled}$。

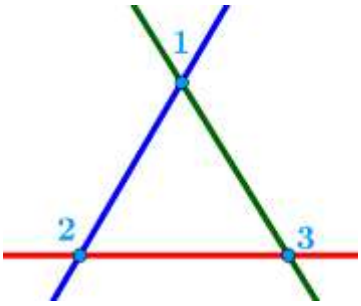


圖18-1：平面上 $K_{1,1,1}$ 為 $3-\text{labeled}$

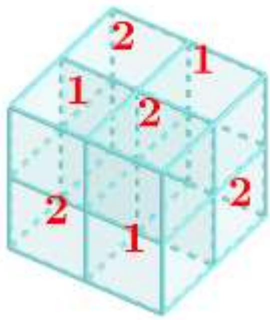


圖18-2：三維空間 $K_{1,1,1}$ 為 $2-\text{labeled}$

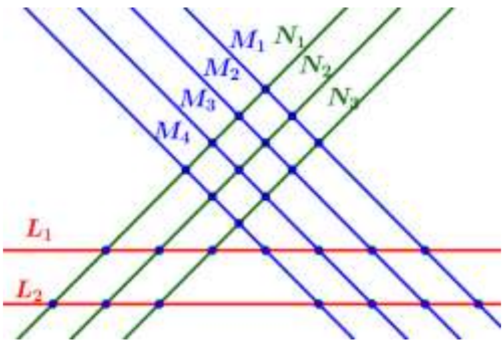


圖19-1：在平面上 $K_{2,3,4}$ 為 $8-\text{labeled}$

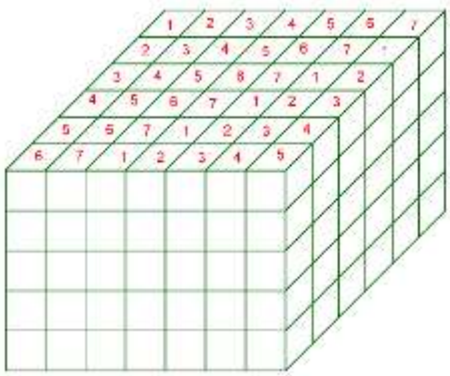


圖19-2：三度空間中 $K_{2,3,4}$ 為 $7-\text{labeled}$

[說明]

由於前述證明有用到平面上拉丁方陣的想法，底下我創新想像，使用高維空間拉丁方陣的想法，來討論最少使用標號：

1.在平面上，$K_{1,1,1}$ 為 $3-\text{labeled}$ ，如圖18-1。

2.但在三度空間中 $K_{1,1,1}$ 為 $2-\text{labeled}$ 。如圖18-2。

3.在平面上，$K_{2,3,4}$ 為 $8-\text{labeled}$ ，如圖19-1。

4.在三度空間中，$K_{2,3,4}$ 為 $7-\text{labeled}$ ，如圖19-2。

(1) $2+3=5,\ 2+4=6, 3+4=7$。想像有一個$5\times6\times7$的長方體，如圖19-2。

(2) 每一個小正方形填入1個標號。

(3) 在最上方6×7的長方形中，我們可用7個標號完成錯位的排列。

(4) 現在6×7的長方形有5層，從第一層開始，下方層的數字是上方層的數字加1。其中$7+1=1$。

(5) 由於我們有7種標號，但只有5層，所以一定可以完成所有錯位的標號。

5. k為有限的前提下，若 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 放在k維度空間，則圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 為

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\left\{m_i\right\}\right\}-\text{labeled}$$ 。

四、 平面上有 *n* 條直線，任兩條不平行，有 *p* 條直線共點。

接續主題三：「有m條線平行，任三條不共點」的反向思維，我考慮「所有直線都不平行，但是有p條直線共點」的情況，同樣的此時每一條線上的交點數量就不一定相同，所以我試著找出在符合標好標滿的前題下，用最少的標號標出所有點的數量。

(一) 直線數n=5時，有直線共點的情況

平面上圖 $G=\left\langle \left\{L_i\right\}_{i=1}^{5}, V, E\right\rangle$，任二條線不平行，在有3條以上直線共點的前題下，實際動手繪圖，探討最少使用幾種不同的標號，讓沿著任何一條直線上的交點填入的標號都不同？

1.五條直線共點。結論：$1-$labeled (如圖20)。

2.五條直線中有四條直線共點。結論：$5-$labeled (如圖21)。

3.五條直線中有三條直線共點。結論：$4-$labeled (如圖22)。

4.五條直線中有兩組三條直線共點。結論：$3-$labeled (如圖23)。

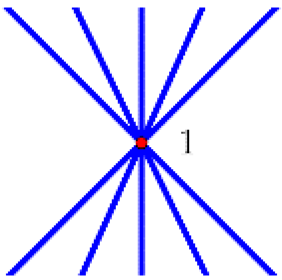


圖20：五條直線交於1點

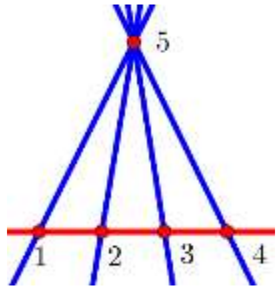


圖21：四條直線交於1點

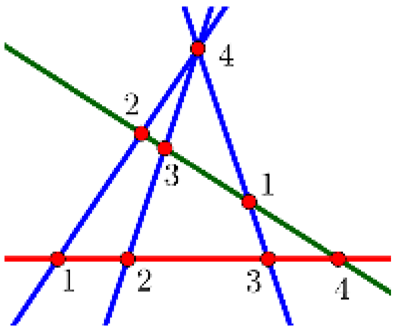


圖22：三條直線交於1點

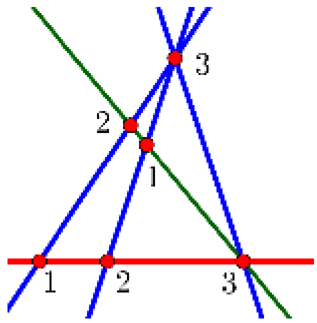


圖23：三條直線交1點*2

(二) *p*條直線共點時，使用標號小於或等於*n*

推論 5：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \right\rangle$，任二條線不平行，有 $p\,(2\le p\le n)$ 條直線共點，則圖 G 為 ***n*−labeled**。

[證明]

1.仔細觀察圖22和圖23，圖23可以視為將圖22綠色線上標1、4兩點，移動重合於紅色線上標3的點，形成同一點。這個動作造成了三條直線(紅、綠、藍)的交點數下降。

2.由於在定理(1)、(2)、(3)中，已經證明任何一個圖在直線標好標滿問題中為***n*−labele**(偶數條直線標號數= $n-1$；奇數條直線標號數= n)。在有直線共點的情況下，某些直線交點數下降，每一條直線的交點≤$n-1$。因此，圖 G 為 $n-$labeled 。

(三) 交點數的計算

推論 6：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，任二條線不平行，其中有 $p(2\le p\le n)$ 條直線共點，則所有直線交點數為 $C_2^n-\left(C_2^p-1\right)$。

[證明]

1. 平面上有 n 條直線，任二條線不平行，任三條不共點的情況下，共產生 C_2^n 個交點。

2. 當 $p(2\le p\le n)$ 條條直線共點，代表 C_2^p 個交點聚集形成1點

(四) 交點數的計算推廣

推論 7：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，任兩條線不平行，$p_i(3\le p_i\le n,i=1,2,\cdots,k)$ 代表通過點 $v_i\in V$ 的直線數，則所有直線交點數為 $C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$。

[證明]

1. 平面上有 n 條直線，任二條線不平行，任三條不共點的情況下，共產生 C_2^n 個交點。

2. $p_i(3\le p_i\le n,i=1,2,\cdots,k)$ 代表通過該點的直線數，則 $C_2^{p_i}$ 個交點聚集形成1點

[說明]

以圖24平面上有7條直線為例，$p_1=3$，$p_2=4$，$p_3=3$，$p_4=3$，則 $C_2^7-\sum_{i=1}^{4}\left(C_2^{p_i}-1\right)=10$。

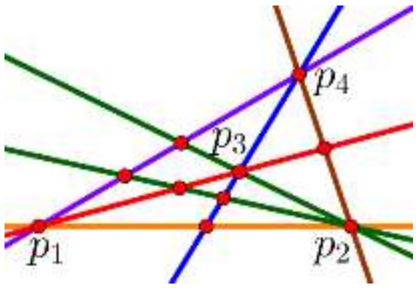


圖24：4處有共點

(五) p 條直線共點時，$\chi(G)\le\triangle(G)+1$ 成立

推論 8：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，任二條線不平行，$p_i(3\le p_i\le n,i=1,2,\cdots,k)$ 代表通過點 $v_i\in V$ 的直線數，則，$\chi(G)\le\triangle(G)+1$。

[證明]

有直線共點依然是平面上的簡單圖(simple graph)，因此由引理 1得 $\chi(G)\le\triangle(G)+1$。

(六) 有直線共點情況下的圖G，其點的最小著色數

定理 7：平面上圖$G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E \right\rangle$，任二條線不平行，$p_i(3\le p_i\le n, i=1,2,\cdots,k)$代表通過點$v_i\in V$的直線數，則我們可以得到一個上、下界來表示$\chi(G)$的範圍：

$$\triangle(G')\le\chi(G)\le C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$$

[證明]

1. 由推論 7可知，在有直線共點的情況下，總交點數為$C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$。
2. $\triangle(G')$代表一條直線上最多的交點數。
3. 因此我們得到圖G的最小著色數範圍$\triangle(G')\le\chi(G)\le C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$。

(七) 探討「任兩個圓交於兩點，但有p個圓共點」之交點數

推論 9：「平面上n個圓，兩兩相交於兩點，$p_i(3\le p_i\le n, i=1,2,\cdots,k)$個圓共1點，但不可共2點，則交點數為$2C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$。

[證明]

1. 平面上k個圓，兩兩相交於兩點，任三個圓不共點，共可產生$2C_2^n$個交點。
2. 但現在通過點$v_i\in V$有p_i個圓共點，減去原來p_i個圓共點情形，再加上點v_i，所以交點數為$2C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$(圖25)。

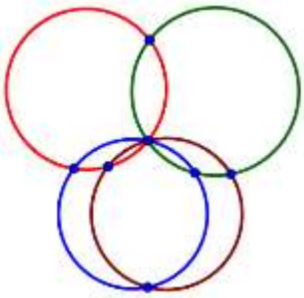


圖25：四圓共1點

在主題二中，將直線推廣到圓，使得任兩個圓有兩個交點，任一個圓上有六個交點，此時的「圓」可視為是一種「特別的直線」，這種直線之間的交點不是1點，而是2點。這是超圖(hypergraph)的概念，我們參考文獻[6]，嘗試用超圖的概念來看待接下來的問題。

(八) 超圖(Hypergraph)和關聯矩陣(Incidence Matrix)

定義 9：超圖H是一個集合組(V, E)，其中V是有限集合，該集合的元素被稱為頂點(或節點)，E是V非空子集的集合，被稱為超邊(或超連接)。

定義 10：若$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$且$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，則超圖$H$=$(V, E)$存在一個關聯矩陣$(a_{ij})$，其中$a_{ij}=\begin{cases}1 & if\ v_i \sim e_j\\ 0 & otherwise\end{cases}$，$v_i \sim e_j$表頂點$v_i$和邊$e_j$相連

推論 10：平面上圖$G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E\right\rangle$，任兩條線不平行，$p_i(3 \le p_i \le n, i=1, 2, \cdots, k)$代表通過點$v_i \in V$的直線數，把「圖$G$的線圖」轉換成「超圖$H$」，則$\chi(H) \le \triangle(H)+1$成立。

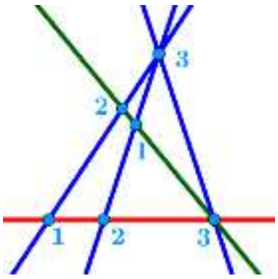


圖26-1：共點情形(1)

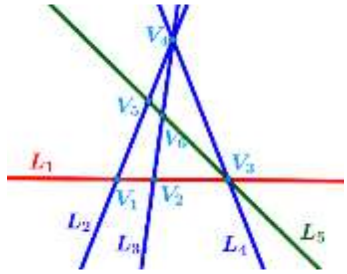


圖26-2：共點情形(2)

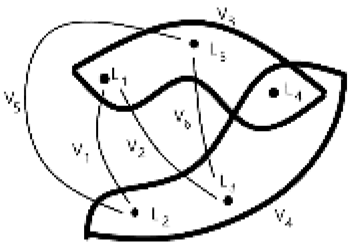


圖26-3：超圖(hypergraph)

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
L_1	1	1	1	0	0	0
L_2	1	0	0	1	1	0
L_3	0	1	0	1	0	1
L_4	0	0	1	1	0	0
L_5	0	0	1	0	1	1

圖26-4：關聯矩陣(Incident Matrix)

[證明]

已知p條直線共點時，$\chi(G) \le \triangle(G)+1$成立。[推論 8]。當把「圖$G$的線圖」轉換成「超圖$H$」或「關聯矩陣」，在結構上是1-1對應的等價結構。因此則$\chi(H) \le \triangle(H)+1$是成立的。

[說明]

1. 圖26-3是將圖26-2的線圖(Line graph)以超圖的方式呈現。圖26-4是圖26-3的關聯矩陣。
2. 從圖26-4可以很清楚的觀察到，L_1、L_2、L_3、L_4、L_5轉換成點，而且這5個點的最大度數為3(一條直線上最多只有3個點)，所以需要的標號小於或等於$3+1=4$。

(九)「二分圖的應用」與「計算標號演算法01版」

推論 11：在圖G(或超圖H)的點(Vertex)和邊(Edge)所形成的二分圖中，若

$N(V_i)=\{L_j:V_i\sim L_j\}$且$N(V_i)\cap N(V_j)=\phi$，則$V_i$和$V_j$可以標上同一個數字。

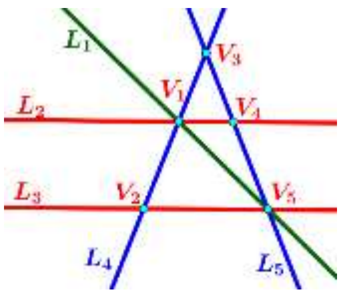


圖27-1：共點及共線情形

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
L_1	1	0	0	0	1
L_2	1	0	0	1	0
L_3	0	1	0	0	1
L_4	1	1	1	0	0
L_5	0	0	1	1	1

圖27-2：關聯矩陣

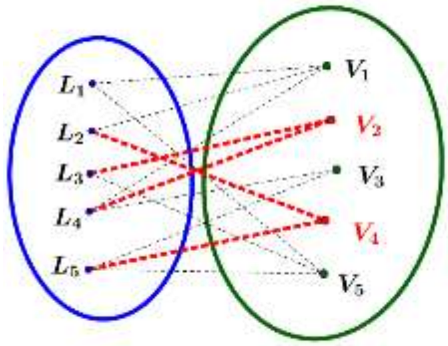


圖27-3：二分圖

[證明]

若$N(V_i)\cap N(V_j)=\phi$，代表V_i和V_j不在同一條線上，所以可以標上相同的數字。

[說明]

我們在討論圖G(或超圖H)的關聯矩陣時，我們發現用二分圖的方式將圖G(或超圖H)中的點和邊分成兩個集合。舉例來說，觀察圖27-1、圖27-2、圖27-3。$N(V_2)=\{L_3,L_4\}$；$N(V_4)=\{L_2,L_5\}$。故V_2和V_4不在同一條直線上，因此可以標上相同的數字。

有了上述的二分圖，我們便可利用演算法的觀念，幫助我們決定圖G(或超圖H)之標號數為k−**labeled**。

[計算標號演算法01

```
count  =  0
    for i in range(1, m+1):
        for j in range(i+1, m+1):
            if N(Vi ) ∩ N(Vj)  ! =  ∅:
                count = count + 1
```

(十) 分析「貪婪演算法」與「計算標號演算法01」

推論 12：

1. 「貪婪演算法」與「計算標號演算法 01 版」所得到的標號數不一定是最少標號數 $\chi(G)$。
2. 「計算標號演算法 01 版」隨著交點數增加，重複計算的次數增加，估計最少標號數的效果大符降低。

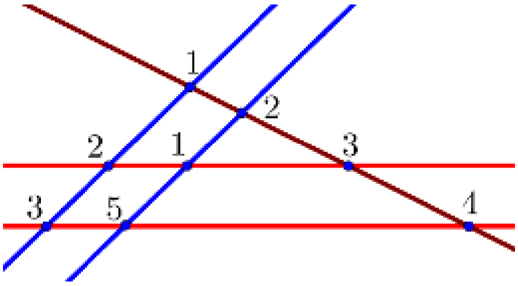


圖 28-1：利用貪婪演算法得 **5−labeled**

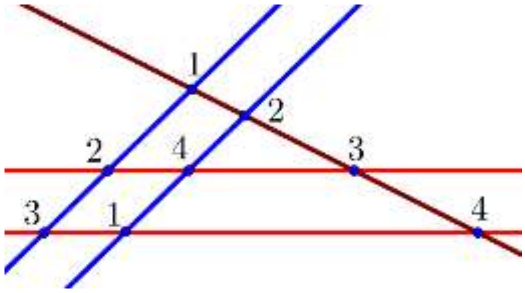


圖 28-2：適當的安排標號得 **4−labeled**

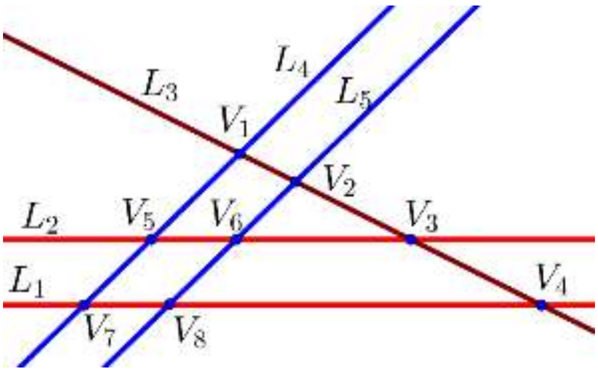


圖 29-1：將點和線依序標上代號

$N(V_1)=\{L_3,L_4\}$，$N(V_2)=\{L_3,L_5\}$

$N(V_3)=\{L_2,L_3\}$，$N(V_4)=\{L_1,L_3\}$

$N(V_5)=\{L_2,L_4\}$，$N(V_6)=\{L_2,L_5\}$

$N(V_7)=\{L_1,L_4\}$，$N(V_8)=\{L_1,L_5\}$

圖 29-2：列出圖 29-1 的$N(V_i)$

[證明]

1.在圖29-1中，我們先在最多交點的咖啡色直線上，標上1、2、3、4。

2.接著利用貪婪演算法的原則，可能得出圖29-1中的情形，即**5−labeled**。

3.但假如我們適當的安排標號，同樣的圖只需要**4−labeled**。

4.從圖29-2中，經由「計算標號演算法01版」得到標號數為28，遠遠大於5。

[說明]

「計算標號演算法 01 版」隨著交點數增加，重複計算的次數增加，估計最少標號數的效果大符降低。因此我們想到結合兩者得到下列「計算標號演算法 02 版」

(十一)「計算標號演算法02版」

推論 13：「計算標號演算法 02 版」

步驟一：先利用「貪婪演算法」填入標號。

步驟二：再利用 $N(V_i)\cap N(V_j)=\phi$，則 V_i 和 V_j 可以標上同一個數字，測試所有可能的結果，則必可得到其中一組結果為最少標號數。

[說明]

1. 參考圖28-1，圖28-2，圖29-1
2. 我們先利用貪婪演算法，填入一組標號，如圖28-1。
3. 接著在 $N(V_i)\cap N(V_j)=\phi$ 處開始測試。例如圖29-1的V_6，開始測試1~4所有可能情況。
4. 如此我們可以在貪婪演算法的幫助下，快速的測試出所有的可能結果，並得到最少標號數的結果。

雖然「計算標號演算法 02 版」藉由「貪婪演算法」改進「01 版」的效能與結果，但畢竟不算數學證明，因此我們嘗試從較容易處理的問題出發來求得精確的最少標號數。

(十二)正*k*−分圖 $K_{m,m,\cdots,m}$ $(K_{n\times m})$ 的最少標號數

定義 14：平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，任三條線不共點，將圖 G 中平行的線分成一類，分為 k 個部分，且每一部分恰有 m 條平行線，形成 k−分圖，則稱圖 G 為**正 *k*−分圖**。記為 $K_{m,m,\cdots,m}$。若$k=n$，我們記為 $K_{n\times m}$。

表 7：正 k−分圖 $K_{n\times m}$ 的最少標號數

n \ m	1	2	3	4	5	6	7
2	1	2	3	4	5	6	7
3	3	4	7	8	11	12	15
4	3	6	9	12	15	18	21
5	5	8	13	16	21	24	29
6	5	10	15	20	25	30	35
7	7	12	19	24	31	36	43

定理 8：正 k−分圖 $K_{n\times m}$ 的最少標號數：

$\boxed{\text{當 } n \text{ 或 } m \text{ 為偶數時}}$：正 k−分圖 $K_{n\times m}$ 為 $\big((n-1)\times m\big)-\text{labeled}$ 。

$\boxed{\text{當 } n \text{ 且 } m \text{ 為奇數時}}$：正 k−分圖 $K_{n\times m}$ 為 $\big((n-1)\times(m-1)+n\big)-\text{labeled}$ 。

[數學歸納法證明]

1. 當 m=1 時

由定理 1、定理 2、定理 3、定理 4 得下面敘述成立：

當 n 為偶數時，正 k−分圖 $K_{n\times 1}$ 為 $(n-1)-\text{labeled}$ ；且當 n 為奇數時，正 k−分圖 $K_{n\times 1}$ 為 $(n-1)-\text{labeled}$ 。

2. 假設當 $m\geq 1$ 時，下面敘述成立：

當 n 或 m 為偶數時，正 k−分圖 $K_{n\times m}$ 為 $\big((n-1)\times m\big)-\text{labeled}$ ；當 n 且 m 為奇數時，正 k−分圖 $K_{n\times m}$ 為 $\big((n-1)\times(m-1)+n\big)-\text{labeled}$ 。

3. 討論 m+1 的情況：

(1) $\boxed{\text{當 } n \text{ 為偶數時}}$：$K_{n\times(m+1)}$圖形等於$K_{n\times m}$圖形再平行疊加 1 個$\boldsymbol{K_{n\times 1}}$的圖形，故最少標號數為$\big((\boldsymbol{n-1})\times \boldsymbol{m}+(\boldsymbol{n-1})\big)$，**即**$((\boldsymbol{n-1})\times(\boldsymbol{m+1}))-\textbf{labeled}$。

(2) $\boxed{\text{當 } n \text{ 為奇數且} m+1 \text{為奇數時}}$：$K_{n\times(m+1)}$圖形等於$K_{n\times m}$圖形再平行疊加 1 個$\boldsymbol{K_{n\times 1}}$的圖形，故最少標號數為$(\boldsymbol{n-1})\times \boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$。

(3) $\boxed{\text{當 } n \text{ 為奇數且} m+1 \text{為偶數時}}$：$K_{n\times(m+1)}$圖形等於$K_{n\times(m-1)}$圖形再平行疊加 1 個$\boldsymbol{K_{n\times 2}}$的圖形，故最少標號數為$\big((\boldsymbol{n-1})\times(\boldsymbol{m-1})+(\boldsymbol{n-1})\times \boldsymbol{2}\big)$，**即**$((\boldsymbol{n-1})\times(\boldsymbol{m+1}))-\textbf{labeled}$。

底下介紹平行疊加的數學方法。

1. $\boxed{\text{局部是}(2k)^2\text{個點。}k=1,2,3\ldots}$

(1) 參考圖 30-1：從局部的圖形來看，兩條線交於 1 個點，平行疊加另外兩條線形成 4 個點，最少必須多使用一種標號。

(2) 重點不是 1 和 2 這兩個數字，而是必須多使用一個標號，才能維持不衝突。

(3) 圖 30-2 所要表示的是將 4 個點視為一個小單位，將此小單位再平行疊加擴充成 4 個中單位形成 16 個點，而且每一個小、中單位都維持對面的標號相等，但上下左右會對調。

(4) 圖 30-3 是舉例$K_{4\times1}$平行疊加$K_{4\times1}$得$K_{4\times2}$最少標號數為$(\mathbf{4-1})\times\mathbf{1}+\mathbf{3}=\mathbf{6}$。用以說明 n 是偶數時的平行疊加$\boldsymbol{K_{n\times1}}$情形。

(5) 圖 30-4 是舉例$K_{3\times1}$旋轉$120°$後再平行疊加$K_{3\times1}$得$K_{3\times2}$。標號數為$(\mathbf{3-1})\times\mathbf{2}=\mathbf{4}$。用以說明 n 是奇數時平行疊加$\boldsymbol{K_{n\times1}}$情形。

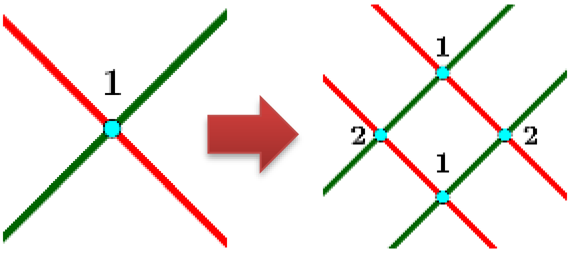


圖30-1：探討1個點平行疊加後情況

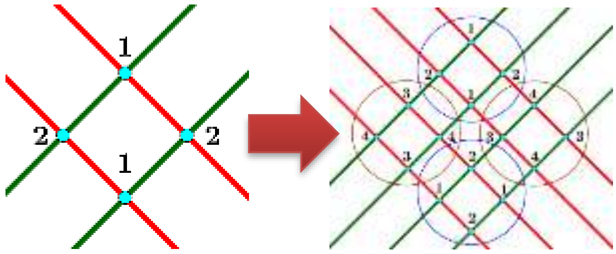


圖30-2：探討4個點平行疊加後情況

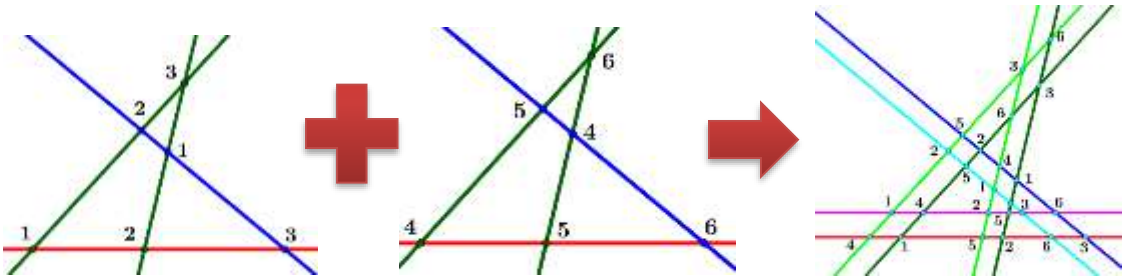


圖30-3：$K_{4\times1}$平行疊加$K_{4\times1}$得$K_{4\times2}$最少標號數為$(\mathbf{4-1})\times\mathbf{1}+\mathbf{3}=\mathbf{6}$。

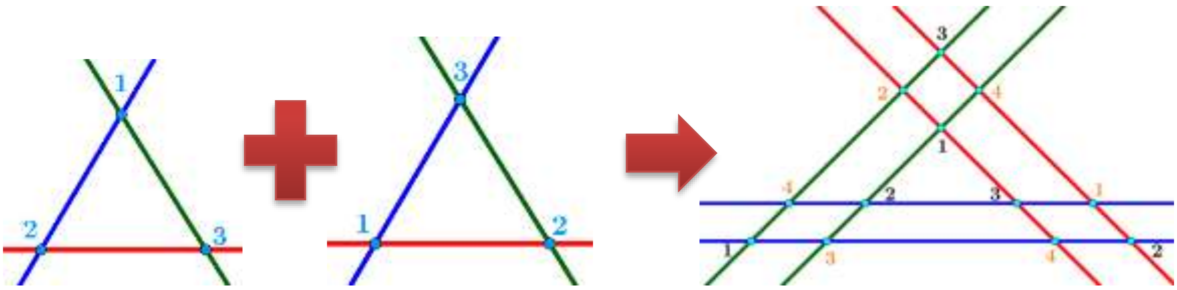


圖30-4：$K_{3\times1}$旋轉$120°$後再平行疊加$K_{3\times1}$得$K_{3\times2}$。

2. $\boxed{\text{局部是}(2k+1)^2\text{個點。}k=1,2,3,\dots}$

(1) 當n是偶數時，必為$\triangle(\boldsymbol{G})-\textbf{labeled}$。[定理 2]

(2) 圖31-1是舉例$K_{3\times1}$平行疊加$K_{3\times2}$形成$K_{3\times3}$為$\mathbf{3}+(\mathbf{3-1})\times\mathbf{2}-\textbf{labeled}$，即$\mathbf{7}-\textbf{labeled}$。用以說明n是奇數平行疊加$\boldsymbol{K_{n\times2}}$情形。

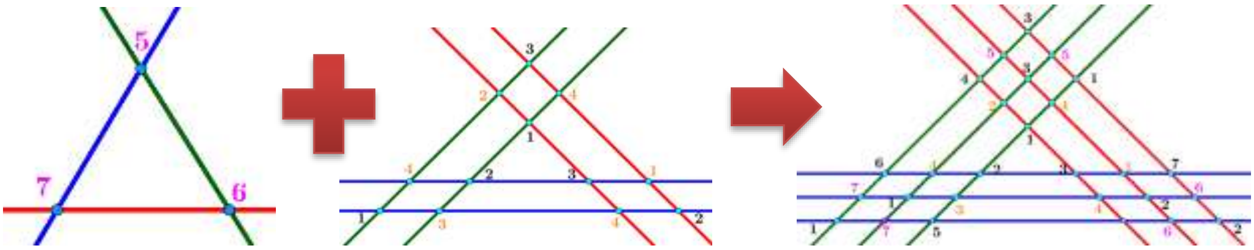


圖31-1：$K_{3\times1}$平行疊加$K_{3\times2}$形成$K_{3\times3}$為$\mathbf{3+(3-1)\times2-labeled}$，即$\mathbf{7-labeled}$。

伍、 研究結果與討論

研究結果

一、 探討「任三條線不共點，任兩條線不平行」直線的標好標滿問題

(一) 當直線數 n 是偶數時，圖為 $(n-1)-\text{labeled}$，可標好標滿，且我們找到一種用表格構造解法的方式。[定理 2、定理 3、定理 4]

(二) 當直線數 n 是奇數時，圖為 $n-\text{labeled}$，無法標好標滿。[定理 1、定理 3、定理 4]

(三) 當直線數 n 是偶數時，圖為 $(n-1)-\text{labeled}$，可標好標滿，其標好標滿的方法數大於等於 $(n-1)!$。[推論 1]

二、 探討「任兩個圓交於兩點」圓的標好標滿問題

(一) 圓的標好標滿問題與直線的標好標滿問題是等價的。[定理 5-1]

(二) 藤球交點標號問題與圓的標好標滿問題是等價的。[定理 5-2]

三、 探討平面上 n 條直線，「有 m 條線平行，任三條不共點」直線的標好標滿問題

(一) 在平面上 n 條直線，我們依平行與否來對直線作分類，形成完全 k-分圖。

(二) 平面上圖 $G=\left\langle\{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，任三條線不共點，則圖$G$為$\mathbf{n-labeled}$。[推論 2]

(三) 平面上圖 $G=\left\langle\{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\right\rangle$，任三條線不共點，且為完全二分圖$K_{m_1,m_2}$，則圖 K_{m_1,m_2} 為 $\max\{m_1,m_2\}-\text{labeled}$ [推論 3]

(四) 平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \right\rangle$，任三條線不共點，且為完全$k$-分圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$，則圖

$K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 為 $\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\{m_i\}+1\right\}-\text{labeled}$ 。[推論 4]

(五) 平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \right\rangle$ 為完全 k−分圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$，若將 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 放在 ***k* 維度空間**，則圖 $K_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 為 $\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-\min\{m_i\}\right\}-\text{labeled}$ 。[定理 6]

四、 探討「有 *p* 條線共點，任兩條不平行」的直線標好標滿問題

(一) 平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \right\rangle$，任兩條線不平行， $p_i(3\le p_i \le n, i=1,2,\cdots,k)$ 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，則所有直線交點數為 $C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$[推論 7]。而且我們可以得到一個上、下界來表示$\chi(G)$的範圍：$\triangle(G') \le \chi(G) \le C_2^n-\sum_{i=1}^{k}\left(C_2^{p_i}-1\right)$[定理 7]。

(二) 平面上圖 $G=\left\langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \right\rangle$，任兩條線不平行， $p_i(3\le p_i \le n, i=1,2,\cdots,k)$ 表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，「超圖H」為「圖G的線圖」，則$\chi(H) \le \triangle(H)+1$成立。[推論 10]

(三) 在圖G(或超圖H)的點(Vertex)和邊(Edge)所形成的二分圖中，若 $N(V_i)=\left\{L_j : V_i \sim L_j\right\}$ 且 $N(V_i)\cap N(V_j)=\phi$，則 V_i 和 V_j 可以標上同一個數字。[推論11]

(四) 「貪婪演算法」與「計算標號演算法01版」所得到的標號數不一定是最少標號數 $\chi(G)$。且「計算標號演算法01版」隨著交點數增加，重複計算的次數增加，估計最少標號數的效果大符降低。[推論12]

(五) 結合「貪婪演算法」與「計算標號演算法01版」的想法，得到「計算標號演算法02版」。[推論13)]

(六) 正k−分圖 $K_{n\times m}$ 的最少標號數[定理 8]。

$\boxed{\text{當}n\text{或}m\text{為偶數時}}$：正$k$−分圖 $K_{n\times m}$ 為 $\left((n-1)\times m\right)-\text{labeled}$ 。

$\boxed{\text{當}n\text{且}m\text{為奇數時}}$：正$k$−分圖 $K_{n\times m}$ 為 $\left((n-1)\times(m-1)+n\right)-\text{labeled}$ 。

綜合討論

一、 表格下的總方法數

在推論 1 中，當直線數 n 是偶數時，用 $n-1$ 個標號完成直線的標好標滿問題，其方法數大於等於 $(n-1)!$。目前我還不知有什麼證明的方法，但我合理猜想方法數為 $(n-1)!$。

二、 超圖與多維度空間

由於平面上直線的特性，當兩直線有兩點共點時，兩條直線重合，所以五條直線，任兩條線不平行的前題下，不存在每一個交點都恰有三條直線通過。甚至假設有任意多條直線，任兩條線不平行，我也找不到哪一種方法可以畫出每一個交點都恰有三條直線通過。除非不限制在平面上，而是在三維立體空間中的角錐，但用超圖和關聯矩陣可以輕易表達任意條件，超圖和多維度的空間似乎存在很好的等價關聯。

陸、 相關應用與未來展望

本研究未來將朝多重空間與超圖的連結來探討，是在研究過程中遇到無法完成的繪圖問題時得到的想法，相信是本研究用不同分析觀點探討問題的創見。另一方面，本研究和圖論與超圖息息相關，而圖論與超圖在現今數位時代的應用非常廣泛，除了應用在圖形著色的方法數計數之外，也大量應用在描繪人際間關係的社群網路分析。例如社群媒體臉書應用相關概念，建構背後的人際網路架構。本篇研究最後從超圖的觀點來探討問題，其實可以將「點」與「線」視為「資源」與「目標」，希望透過研究點與線的關係，達成我們所希望的「用最少資源完成目標」的普遍理想[6]。本篇研究從四個面向，盡可能完整的探討平面上直線相交情形，及其交點標號的著色問題。其中在計算最少標號數的部分，尚有許多可研究有趣問題，近期完成正 k−分圖分圖 $K_{n\times m}$ 最少標號數的研究，之後將嘗試朝下列方向探討：

1. 如何配合演算法從關聯矩陣和二分圖的模組(model)給出標號問題更好的上、下界？
2. 繼續往 $K_{m,m,\cdots,m,(m-t)}$ 的最少標號數規律探討與證明。

柒、 參考資料

[1] 洪有情(2019)。**國民中學數學課本 2 下**。新北市：康軒文教事業。

[2] 游森棚(2018)。**標好標滿**。科學研習月刊。57 卷第 5 期，p.58。

[3] 傅恆霖(1995)。**圖上的數字**。數學傳播。19 卷第 3 期，p.1-15。

[4] 張鎮華(2017)。**演算法觀點的圖論**。台大出版中心。p195-228。

[5] 蕭文強(2015)。**從「數獨」到「讀數」**。香港數學教育會議。取自 https://hkumath.hku.hk/~mks/Sudoku_MKSiu_Aug2018.pdf。

[6] 蘇怡人、李哲均(2016)。**以超圖進行人際網路分析之研究**。第十五屆離島資訊技術與應用研討會。

[7] Berge. C., (1989). **Hypergraph**. *North-Holland mathematical library*, v. 45. p115-150

【評語】030421

考慮在給定的平面上的一些直線的交點上標上連續整數，在限定同一條直線上的這些點所標的數字均相異的前提下，k 值至少應為多少，才能保證滿足條件的標號是存在的，而在此情況下，又該怎麼標才能滿足要求的問題。針對一些特別的情況作了分析，給出了部分的結果。問題非常的有趣，延伸性夠並有理論的意義與深度發展的可能性。作者聰明的看到了問題的關鍵點，針對任兩線交於一點、任三線不共點的情況給出了完整的解答。在分析更一般化的狀況時，作者注意到這個問題其實等同於在考慮一類特殊圖形的邊著色數，藉助邊著色數的上下界，作者針對直線間可能有一些是平行的，或是有數條直線交於同一點的情況作了討論，給出了答案。想法頗具巧思，值得嘉許。但有部分結果的說明過於簡略，作品中使用許多符號，但這些符號的意義和圖論上的代表意義並不一致，如果能適當的改進, 並讓一些關鍵的想法更被凸顯會更完整。未來可朝一般的理論進行探索。整體來說是相當優秀的作品。

作品海報

壹、研究動機

某次的數學第八節輔導課，我發現賴同學在研究一個數學老師丟給他的直線交點問題，這個問題出自科學研習月刊57卷第5期第58頁「標好標滿」。題目敘述如下：

「桌上畫著四條直線，兩兩相交。小志想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現 1、2、3 各一次。」

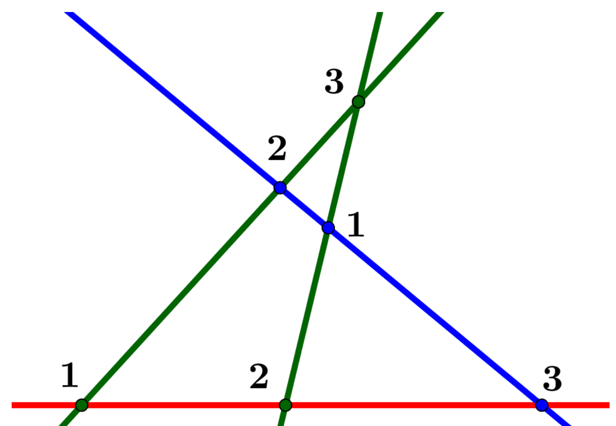


圖1：四條直線標好標滿

我第一眼的印象，感覺這題目很像是一種特別的數獨(Sudoku)。我直接動手做，一下子就完成了。但在實際動手畫五條直線求解時卻遇到困難，我感覺五條直線的情況根本是無解？

貳、研究目的

一、符號及名詞定義

定義(1)：給定 n 個圖形的序列 $\{C_i\}_{i=1}^{n}=\{C_1,C_2,\dots,C_n\}$ ，其中 C_i 為直線或曲線。在平面上圖形與圖形的交點所成集合為 V。若 V 中有兩個交點 u,v 在某個 C_i 中，且沿著圖形 C_i 中沒有其他交點介於 u,v 之間，那麼我們稱 u,v 相鄰且 uv 為一個邊。而 E 表示由這樣圖形序列$\{C_i\}_{i=1}^{n}$ 所形成邊之集合。特別以$\langle\{C_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$表示本研究所探討的圖

定義(2)：給定圖$\langle\{C_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$，若存在$k\in\mathbb{N}$，將圖的點標上$1,2,3,\dots,k$的數字，使得對所有$i=1,2,\dots,n$，$C_i$上交點的標號，$1,2,3,\dots,k$的數字至多出現一次，我們稱這樣情況為$k-labeled$。。

定義(3)：圖G中一個頂點v連接到其他頂點的邊數，我們就稱為是該頂點的度數，以$deg(v)$表示。若圖G有n個頂點$v_1,v_2,\dots v_n$，我們定義圖G的最大度數為$\triangle(G)$，即$\triangle(G)=\max\{deg(V_i):i=1,2,3,\dots,k\}$

定義(4)：若$\langle\{C_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$為$\triangle(G)-labeled$，則我們稱為「標好」。若$\langle\{C_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$為$\triangle(G)-labeled$但無法$(\triangle(G)-1)-labeled$，則我們稱為「標好標滿」

二、研究問題

根據研究動機，我們嘗試探討以下四個問題：

1、探討平面上給定「任三條線不共點，任兩條線不平行」之n條直線能否標好標滿問題。
2、探討平面上給定「任兩個圓交於兩點」之n個圓能否標好標滿問題。
3、探討平面上給定「有m條平行，任三條不共點」之n條直線能否標好標滿問題。
4、探討平面上給定「有p條線共點，任兩條不平行」之n條直線能否標好標滿問題。

參、研究流程

任三條不共點 任兩條不平行 → 任兩個圓交於兩點 → 有m條平行 任三條不共點 → 有p條共點 任兩條不平行

肆、研究結果

一、任三條線不共點，任兩條線不平行

定理(1)：平面上有n條直線，n為奇數，兩兩相交，讓沿著任何一條直線上的$n-1$個交點都剛好出現 1、2、3、4、 ... 、$n-1$ 各一次。答：$n-labeled$，所以「無法標好標滿」

定理(2)：平面上有k條直線(k為偶數)，兩兩相交，讓沿著任何一條直線上的$k-1$個交點都剛好出現 1、2、 ... 、$k-1$ 各一次。答：$(k-1)-labeled$，可標好標滿

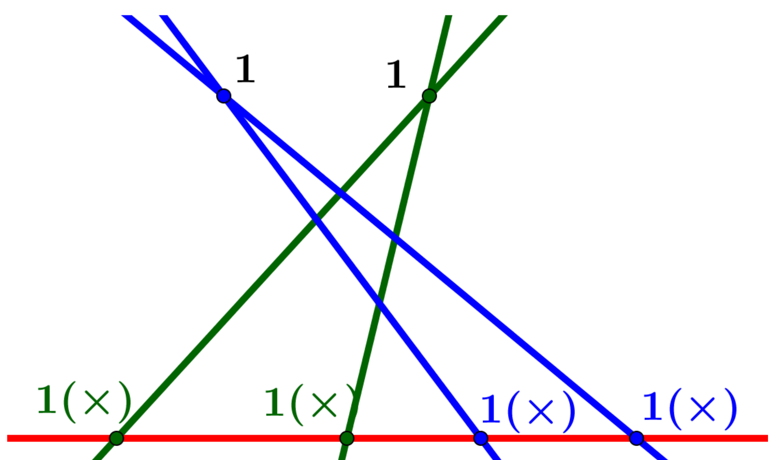


圖2-1：五條直線無法 $4-labeled$

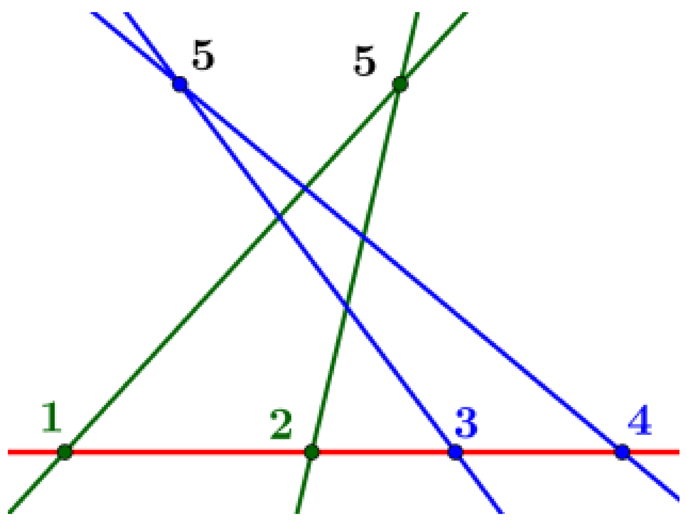


圖2-2：五條直線為 $5-labeled$

奇數推廣

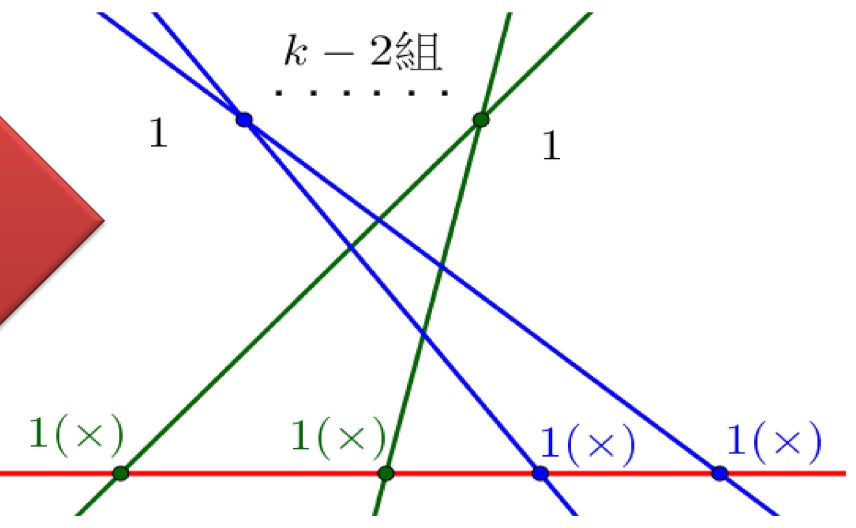


圖2-3：$2k+1$條直線無法$2k-labeled$

表1：$n=k$(k為偶數時)

直線	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	…	L_{k-1}	L_k
L_1		1	2	3	4	5	6		k-2	k-1
L_2	1		3	4	5	6		k-2	k-1	2
L_3	2	3		5	6		k-2	k-1	1	4
L_4	3	4	5			k-2	k-1	1	2	⋮
L_5	4	5	6			k-1	1	2	…	k-2
L_6	5	6		k-2	k-1		2	…	…	1
L_7	6		k-2	k-1	1	2		k-6	k-5	3
…		k-2	k-1	1	2	…	k-6		k-4	⋮
L_{k-1}	k-2	k-1	1	2	…	…	k-5	k-4		k-3
L_k	k-1	2	4	…	k-2	1	3	…	k-3	

二、任兩圓相交於兩點

定理(5)：圓的標好標滿問題等價直線的標好標滿問題

圖$G_1=\langle\{C_i\}_{i=1}^{k},V,E\rangle$，其中$C_i$代表圓；圖$G_2=\langle\{L_i\}_{i=1}^{k},V,E\rangle$，其中$L_i$代表直線；圖$G_3=\langle\{B_i\}_{i=1}^{k},V,E\rangle$，其中$Bi$代表在三度空間中，藤球上的圓

結論(1)「圖G_1標好標滿問題」等價於「圖G_2標好標滿問題」等價於「圖G_3標好標滿問題」。(近期研究)

結論(2)當k是奇數時，無法標好標滿。

結論(3)當k是偶數時可標好標滿。圖G_1為$2(k-1)-labeled$, 圖G_2為$(k-1)-labeled$。

表2：$n=4$, 四個圓相交

圖形	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1		(1, 4)	(2, 5)	(3, 6)
C_2	(1, 4)		(3, 6)	(2, 5)
C_3	(2, 5)	(3, 6)		(1, 4)
C_4	(3, 6)	(2, 5)	(1, 4)	

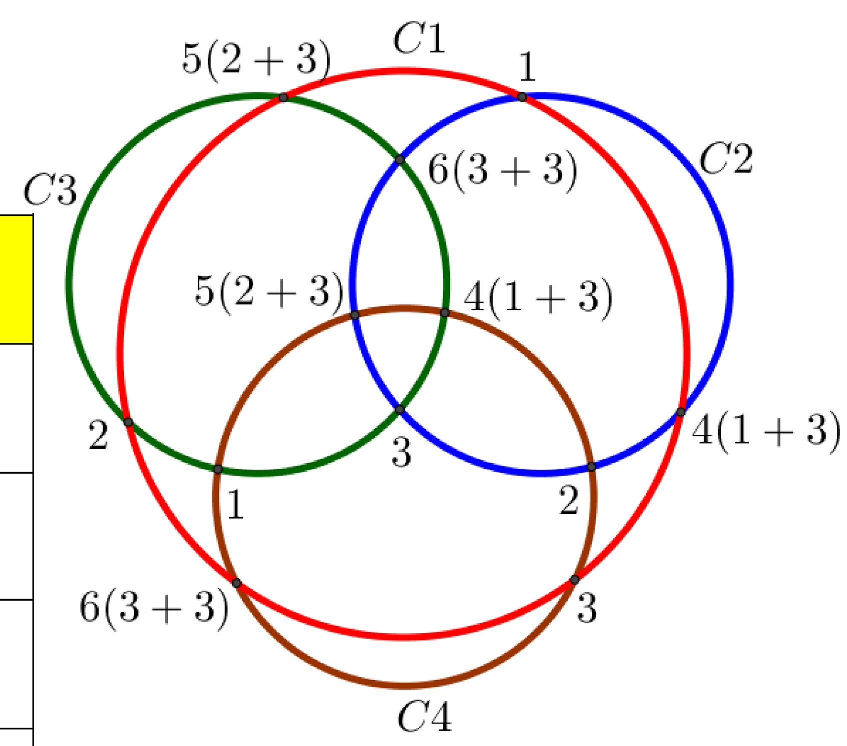


圖3：四個圓兩兩相交

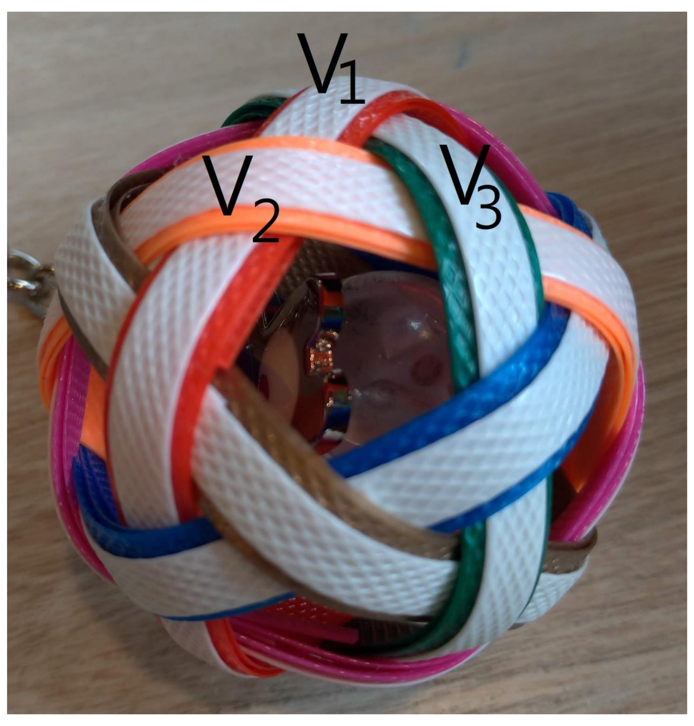


圖4：六線藤球

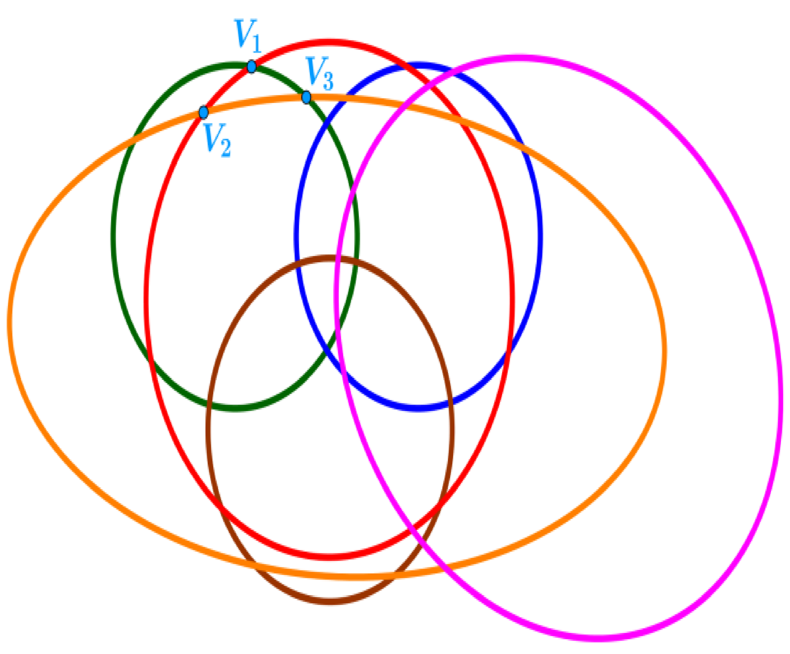


圖5：想像將六線藤球壓扁在平面上示意圖。

三、有m條線平行，任三條不共點

推論(3)：完全二分圖K_{m_1,m_2}為$max\{m_1,m_2\}-labeled$

平面上圖$G=\langle\{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$，任三條線不共點，且為完全二分圖$K_{m_1,m_2}$，則圖$K_{m_1,m_2}$為$max\{m_1,m_2\}-labeled$。

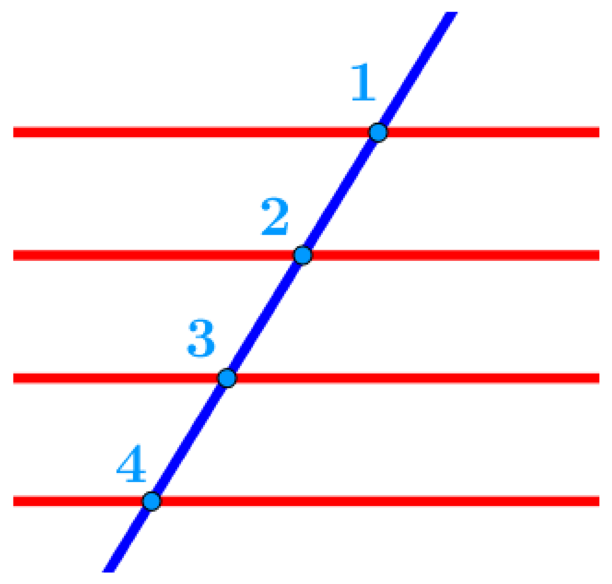


圖6：四條直線平行

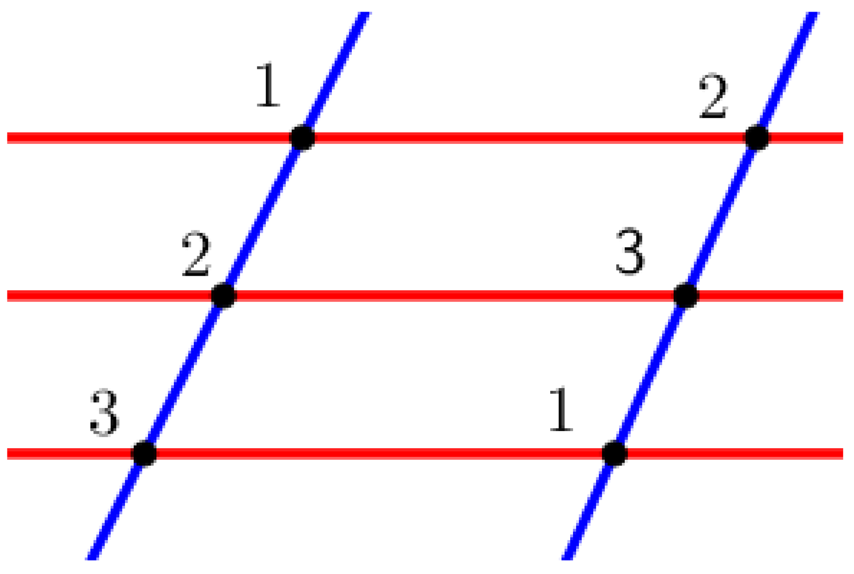


圖7：三條平行、二條平行

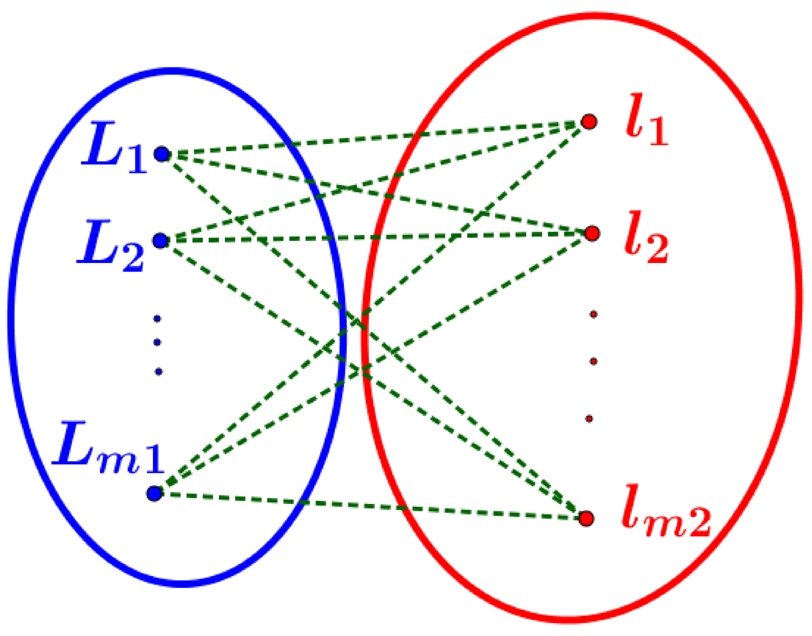


圖8：完全二分圖的線圖

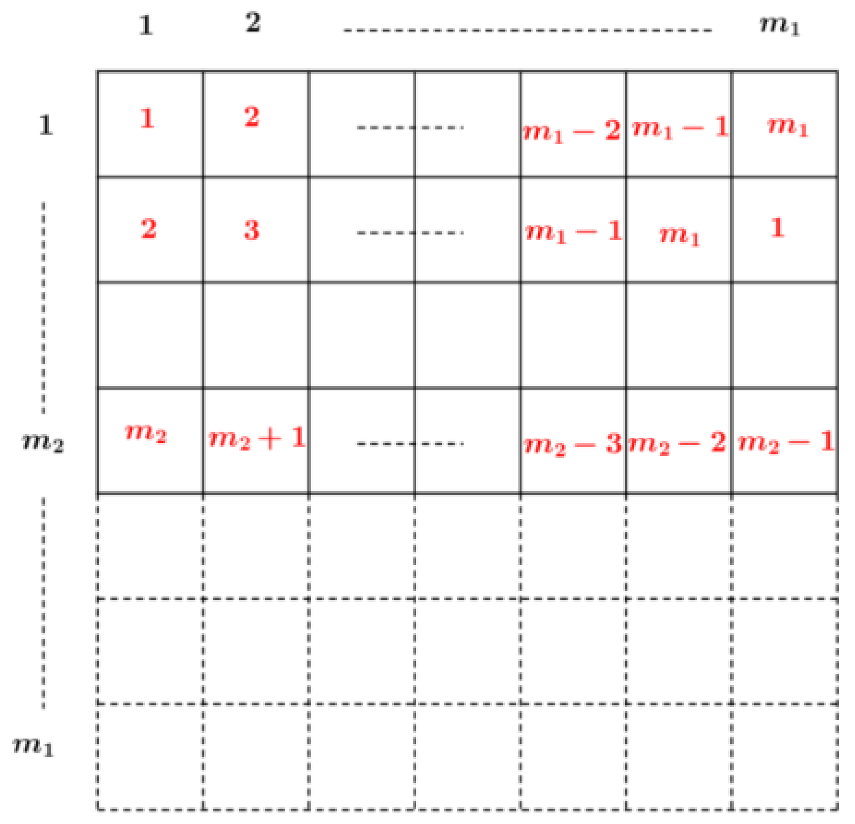


圖9：m_1個數字排成拉丁方陣

推論(4)：n條直線完全k-分圖 $K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$

平面上圖$G=\langle\{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$為完全$k$-分圖$K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$，則圖$K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$為$[(\sum_{i=1}^{k}m_i)-min\{m_i\}+1]-labeled$。

定理(6)：n條直線完全k－分圖$K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$－高維空間版

平面上圖$G=\langle\{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$為完全$k$-分圖$K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$，若將$m_1,m_2,\dots,m_k$放在$k$維度空間，則圖$K_{m_1,m_2,\dots,m_k}$為$[(\sum_{i=1}^{k}m_i)-min\{m_i\}]-labeled$。

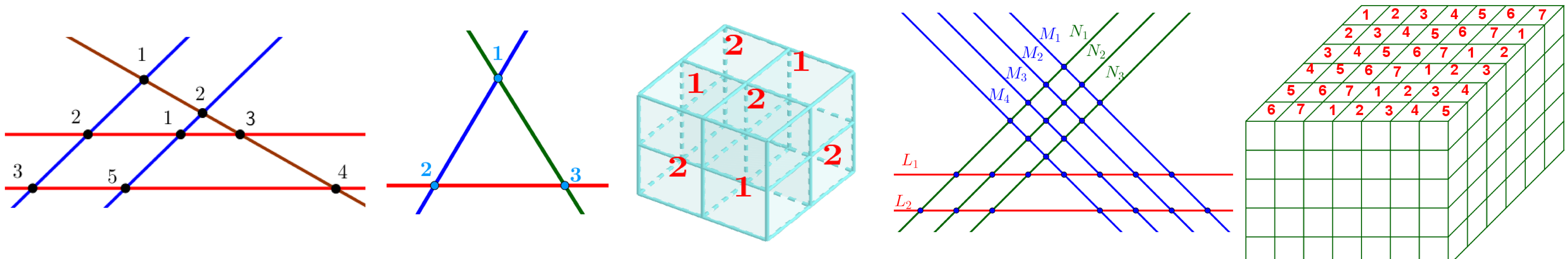


圖10：平面上直線平行的分成同一類，以三分圖來說明

四、有p條線共點，任兩條不平行

推論(7)：交點數的計算推廣

平面上圖$G=\langle\{L_i\}_{i=1}^{n},V,E\rangle$，任二條線不平行，$p_i(3\le p_i\le n)$代表通過該點的直線數，即$\{p_i\in V\mid 3\le p_i\le n,\ i=1,2,\dots,k\}$，則所有直線交點數為：$C_2^n-\sum_{i=1}^{k}(C_2^{p_i}-1)$

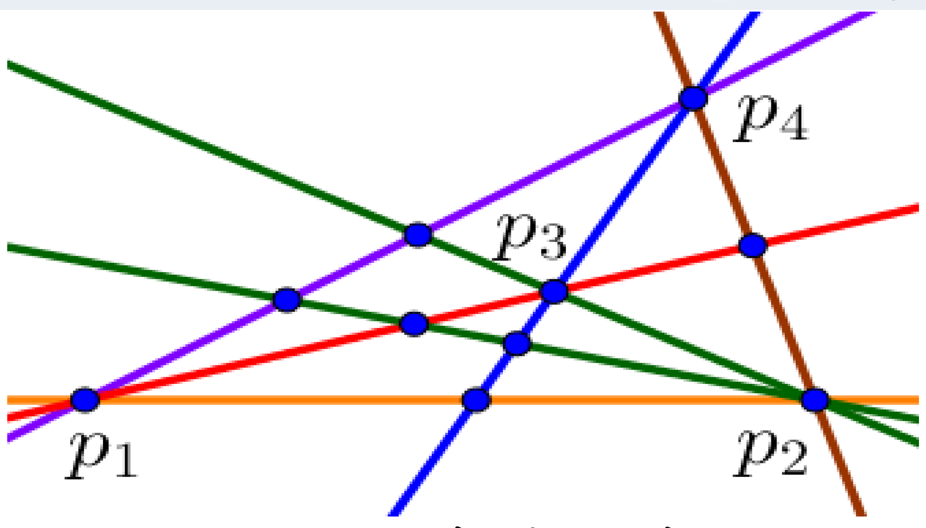


圖11：三線共點有四組

推論(9)：探討「任兩個圓交於兩點，但有p個圓共點」之交點數

「平面上$\boldsymbol{n}$個圓，兩兩相交於兩點，$\boldsymbol{p_i(3 \le p_i \le n,\ i = 1, 2, \dots, k)}$個圓共1點，但不可共2點，則交點數為$\boldsymbol{2 \times C_2^n - \sum_{i=1}^{k}(C_2^{p_i}-1)}$。

[說明]
如圖12，有4個圓共1點，故交點數為$\boldsymbol{2 \times C_2^4 - \sum_{i=1}^{1}(C_2^4-1)} = 7$

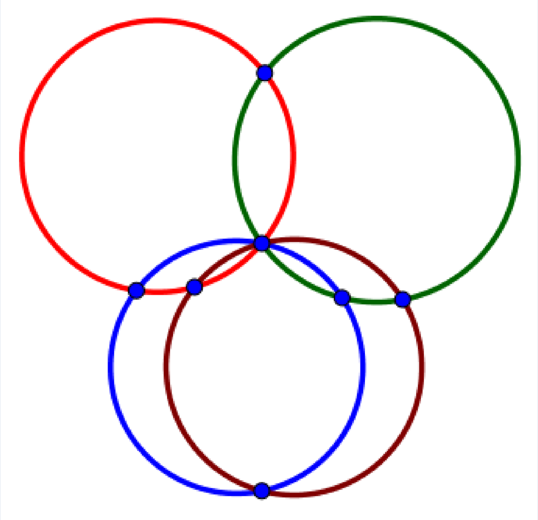


圖12：四圓共點

定理(7)：有直線共點情況下的圖G，其點的最少標號(Label)數

平面上圖$\boldsymbol{G = \langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \rangle}$，任二條線不平行，$\boldsymbol{p_i(3 \le p_i \le n)}$代表通過該點的直線數，即$\boldsymbol{\{p_i \in V \mid 3 \le p_i \le n,\ i = 1, 2, \dots, k\}}$，則我們可以得到一個上、下界來表示$\boldsymbol{\chi(G)}$的範圍：

$$\triangle(\boldsymbol{G'}) \le \boldsymbol{\chi(G)} \le \boldsymbol{C_2^n} - \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{C_2^{p_i}} - \boldsymbol{1})$$

推論(10)：使用超圖(Hypergraph)來表達，$\chi(H) \le \triangle(H) + 1$

平面上圖$\boldsymbol{G = \langle \{L_i\}_{i=1}^{n}, V, E \rangle}$，任二條線不平行，$\boldsymbol{p_i(3 \le p_i \le n)}$代表通過該點的直線數，即$\boldsymbol{\{p_i \in V \mid 3 \le p_i \le n,\ i = 1, 2, \dots, k\}}$，當把「圖$G$的線圖」轉換成「超圖$H$」則下式成立

$$\chi(H) \le \triangle(H) + 1$$

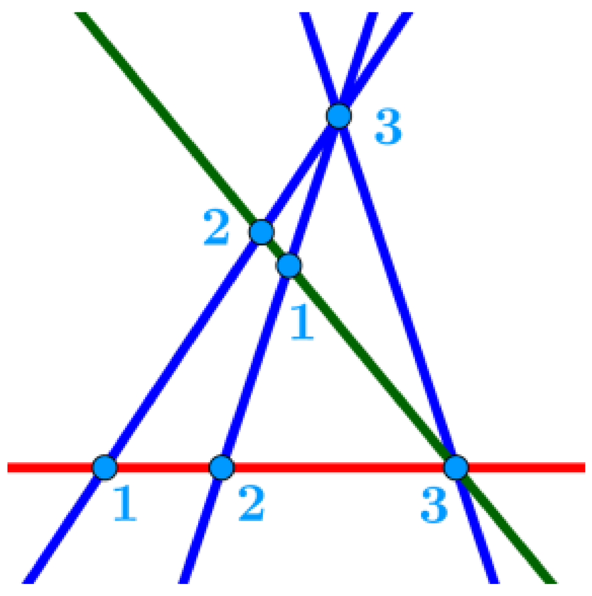


圖13：五條直線

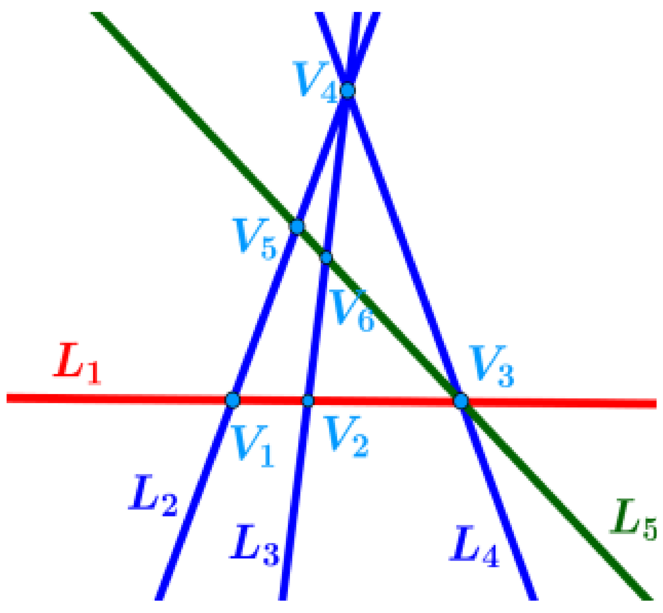


圖14：標上代號

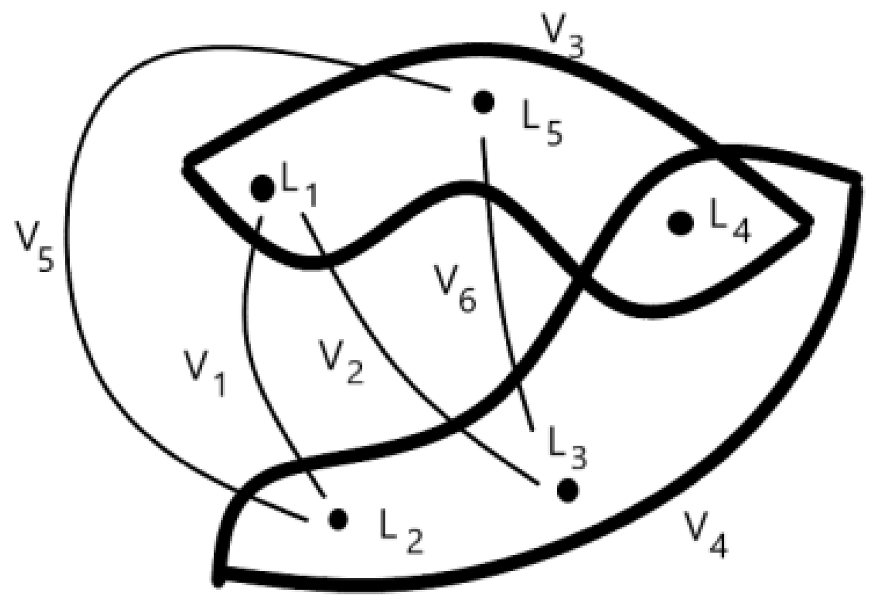


圖15：圖13之超圖

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
L_1	1	1	1	0	0	0
L_2	1	0	0	1	1	0
L_3	0	1	0	1	0	1
L_4	0	0	1	1	0	0
L_5	0	0	1	0	1	1

圖16：關聯矩陣

推論(11)：「二分圖」與「計算標號演算法01版與02版」(近期研究)

在圖$\boldsymbol{G}$(或超圖$\boldsymbol{H}$)的點(Vertex)和邊(Edge)所形成的二分圖中，設$\boldsymbol{N(V_i) = \{L_j \mid V_i \sim L_j\}}$，若$\boldsymbol{N(V_i) \cap N(V_j) = \emptyset}$，則$\boldsymbol{V_i}$和$\boldsymbol{V_j}$可以標上同一個數字。

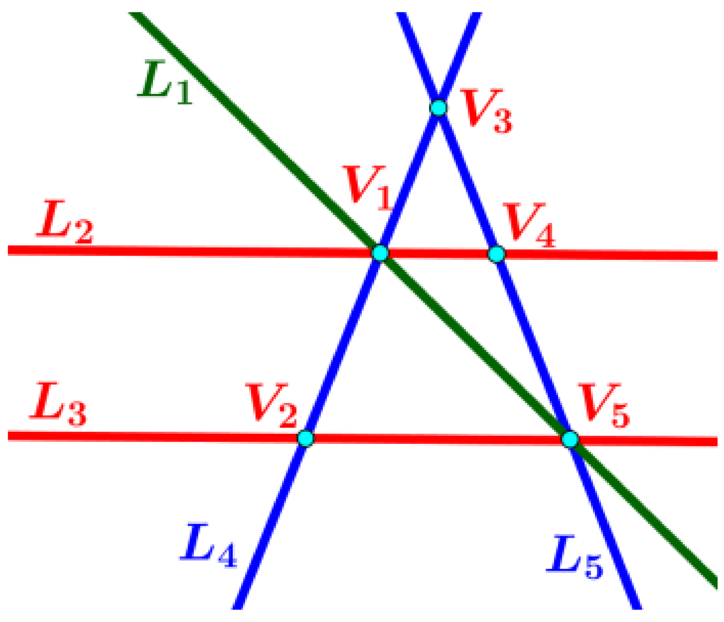


圖17：五條直線

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
L_1	1	0	0	0	1
L_2	1	0	0	1	0
L_3	0	1	0	0	1
L_4	1	1	1	0	0
L_5	0	0	1	1	1

圖18：關聯矩陣

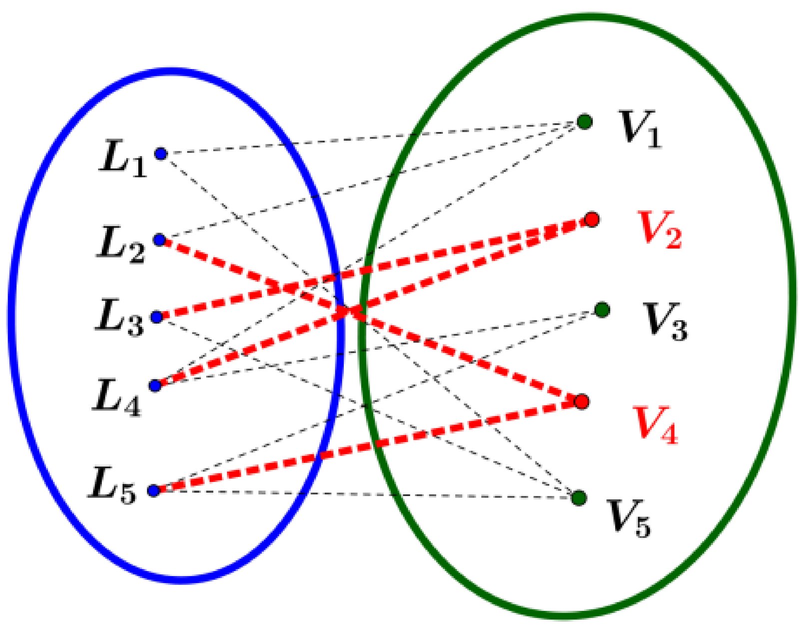


圖19：二分圖

[計算標號演算法01版]
```
count = 0
for i in range(1, m + 1):
  for j in range(i + 1, m + 1):
    if N(V_i) ∩ N(V_j) != ∅:
      count = count + 1
```
[計算標號演算法02版]
貪求演算法＋演算法01版

圖20：演算法

定理(8)正k－分圖$K_{m,m,\dots,m}$ ($K_{n\times m}$)之最少標號數 (近期研究)

正k－分圖$\boldsymbol{K_{n\times m}}$的最少標號數：
當n或m為偶數時：正k－分圖$\boldsymbol{K_{n\times m}}$為$\boldsymbol{(n-1)\times m - labeled}$。
當n且m為奇數時：正k－分圖$\boldsymbol{K_{n\times m}}$為$\boldsymbol{(n-1)\times(m-1)+n-labeled}$。

表3：正k-分圖之最少標號表

n \ m	1	2	3	4	5	6	7
2	1	2	3	4	5	6	7
3	3	4	7	8	11	12	15
4	3	6	9	12	15	18	21
5	5	8	13	16	21	24	29
6	5	10	15	20	25	30	35
7	7	12	19	24	31	36	43

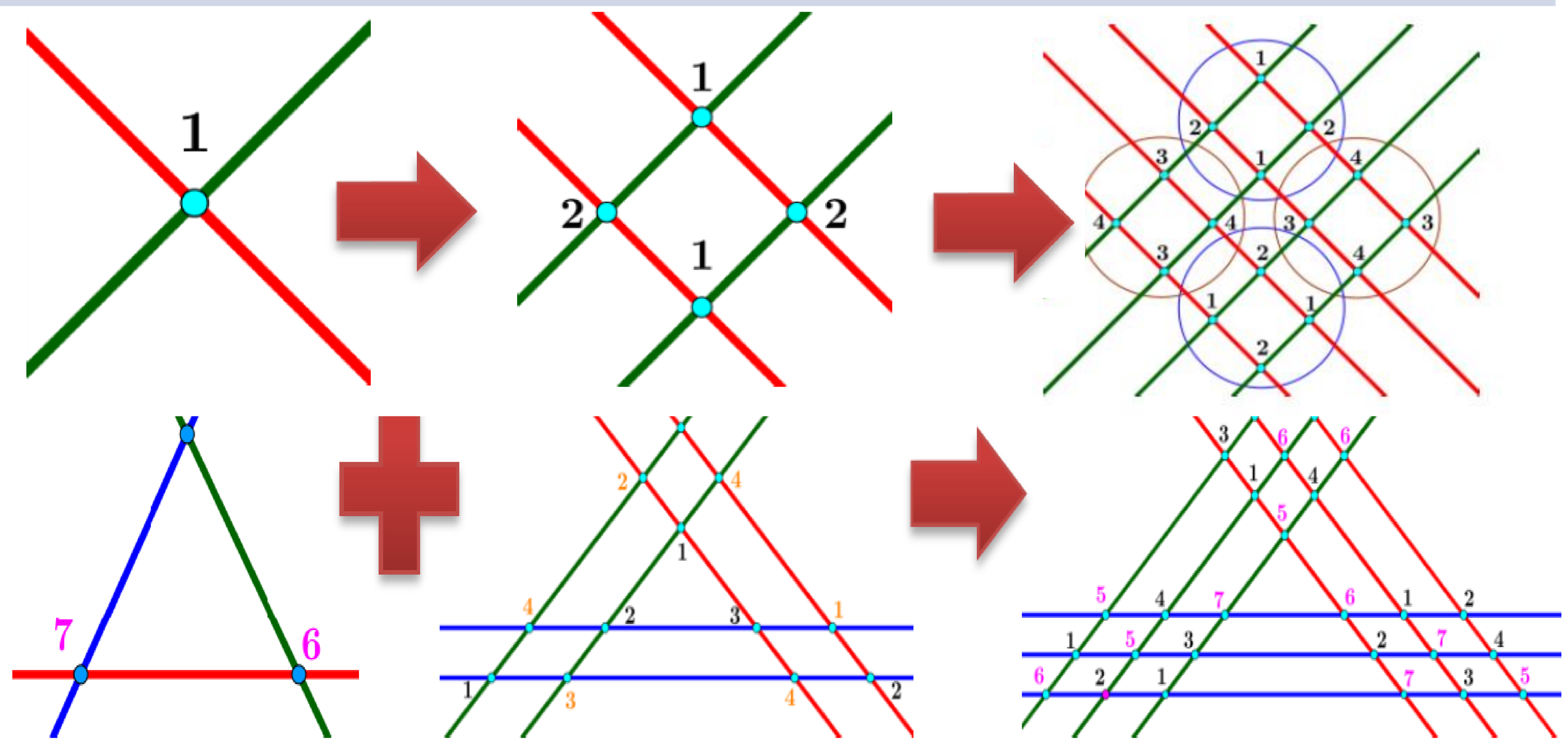


圖21：平行疊加數學方法

伍、未來展望

1、我們在近期利用二分圖的觀點，探討可行的演算法，統整了本研究的四大方向，期許可以再往這個方向做更深入的研究。
2、未來將繼續往$K_{m,m,\dots,m,(m-t)}$的最少標號數規律探討與證明，目前已經有觀察到一些美妙的規律。

陸、參考資料

1、游森棚(2018)。標好標滿。科學研習月刊。57卷第5期，p.58。
2、張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。台大出版中心。p195-228。
3、Berge. C., (1989). Hypergraph. North-Holland mathematical library, v. 45. p115-150。