中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030420

正方形分撕秀

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 李承學	王梵音
國二 林鼎容	陳亮君
國二 陳克秦	

關鍵詞：正方形剪拼、畢氏三元數、階梯狀切割

摘要

此篇研究主要探討正方形可以在單位格線上，透過最少片切割，經平移或旋轉，拼組成兩個較小的正方形。我們界定這三個正方形的三個邊長要符合畢氏定理且互質，將這三個邊長設為 $2mn$、m^2-n^2、m^2+n^2，初始將其分成 A 類（$2mn > m^2-n^2$）和 B 類（$2mn < m^2-n^2$），再對正方形進行階梯狀切割，切成最少片，再透過平移、旋轉，組合成兩個小正方形。本研究成功找到 A 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 四片解的通解（以下定義為 A_1）及 B 類中也找到 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 四片解的通解（以下定義為 B_1）；也針對 A、B 類中找不到四片解的畢氏數，找出最少片解的法則。

壹、研究動機

在國二學到畢氏定理時老師介紹許多古代數學家是利用剪拼的方式得證畢氏定理，舉例來說，三國時代的劉徽提出的「出入相補原理」，他是利用鑲嵌方式將勾方與股方拼在一起，再以弦方疊合在勾方與股方構成的圖形上，最後將多出的部分旋轉平移至空缺處。然而我們對於斜切的剪拼方式還是不滿意，於是朝著「最少片數」及「有規則的切割方式」來討論，給予我們最大的啟發是Dissections : Plane & Fancy這本書。在這本書中有數種畢氏數的階梯狀切割，讓我們十分感興趣，然而文章沒有說明切割方式，因此想自己制訂分類方式，並有系統地找到剪拼的通解，嘗試為它們找出有規則的最少片切割方式。

我們還看到2012年科學研習月刊51卷第1期與第2期「讓幾何有趣些！漫談幾何切割」的「花布拼貼問題」：裁縫師要製作完成一塊25平方單位的正方形桌巾，但是只剩兩種尺寸的布料，一塊為9平方單位的正方形、另一塊為16平方單位的正方形布料，並且限定桌巾拼貼數不可超過四塊。文章中是利用了「重疊鑲嵌」的策略，成功獲得四片的網格剪拼，**也找到了四片解的存在性**，然而這樣的手法僅適用於文章提及的【3,4,5】能成功剪拼，其他畢氏三元數無法使用「重疊鑲嵌」找到四片解，於是我們決定使用Cardano的階梯狀切割來研究。

貳、研究問題

一、探討一個大正方形透過正方形網格剪拼成兩個小正方形的最少片解。

二、探討透過階梯狀剪拼方式，將互質畢氏三元數分成 A、B 兩類，找出切割最少片解法則。

三、探討 A_1、B_1 類的四片解與其通解。

四、探討 A_2、B_2 類的六片解。

参、研究設備及器材

方格紙、筆、電腦以及免費軟體 *Geogebra*。

肆、名詞釋義

一、剪拼：本文討論以一塊正方形經過剪拼成兩塊正方形為主題。

二、正方形網格剪拼：本文研究的剪拼法。每條格線間距 1 單位長，圖形的所有頂點位於格子點上，且所有的邊都位於格線上。

三、互質畢氏三元數：例如：【3,4,5】是互質畢氏三元數；【6,8,10】不是互質畢氏三元數。互質畢氏三元數是符合 $a^2+b^2=c^2$ 的互質正整數解，其一般解為 $a=2mn$、$b=m^2-n^2$、$c=m^2+n^2$，m、n 互質且奇偶性不同。

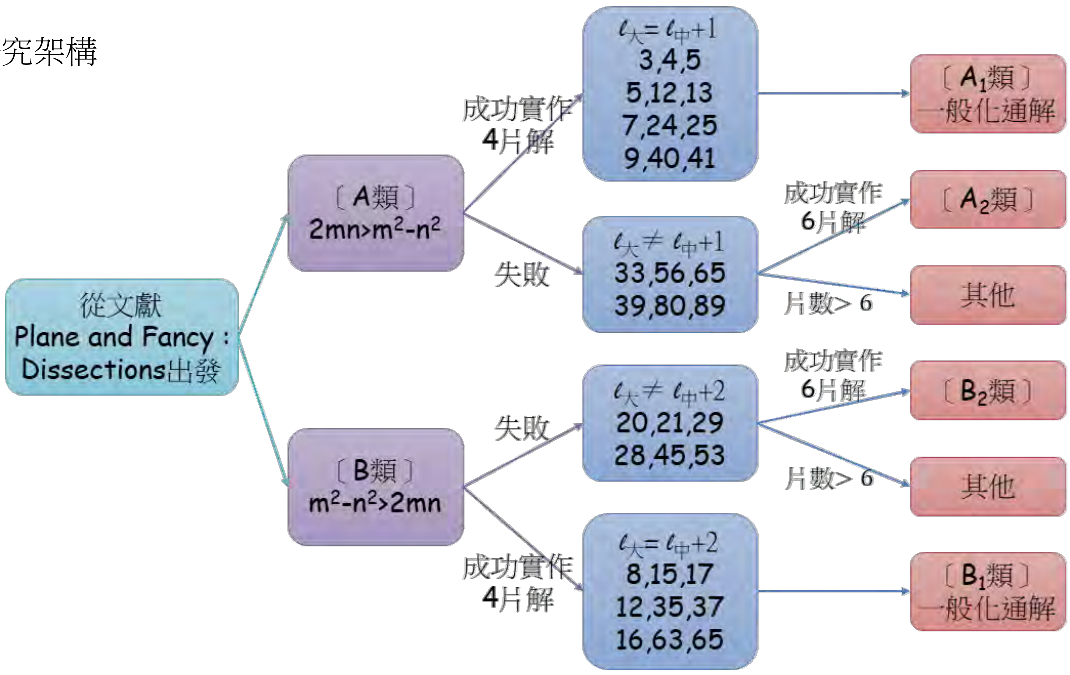
四、$\ell_{大}$、$\ell_{中}$、$\ell_{小}$：分別代表正方形的邊長。$\ell_{大}$代表剪拼前的大正方形邊長，$\ell_{中}$、$\ell_{小}$代表將大正方形剪拼成兩個較小正方形的邊長。其中 $\ell_{大}$必等於 m^2+n^2，而 $\ell_{中}$、$\ell_{小}$分別為 $2mn$、m^2-n^2，兩者會依不同情況改變順序，將於本文中討論。

五、定義分類方式如下

A 類			B 類		
A_1 類	A_2 類	其他	B_1 類	B_2 類	其他
$\ell_{大}=\ell_{中}+1$	$\ell_{大}\neq\ell_{中}+1$		$\ell_{大}=\ell_{中}+2$	$\ell_{大}\neq\ell_{中}+2$	
皆可四片解	可六片解	片數>6	皆可四片解	可六片解	片數>6

伍、研究過程與方法

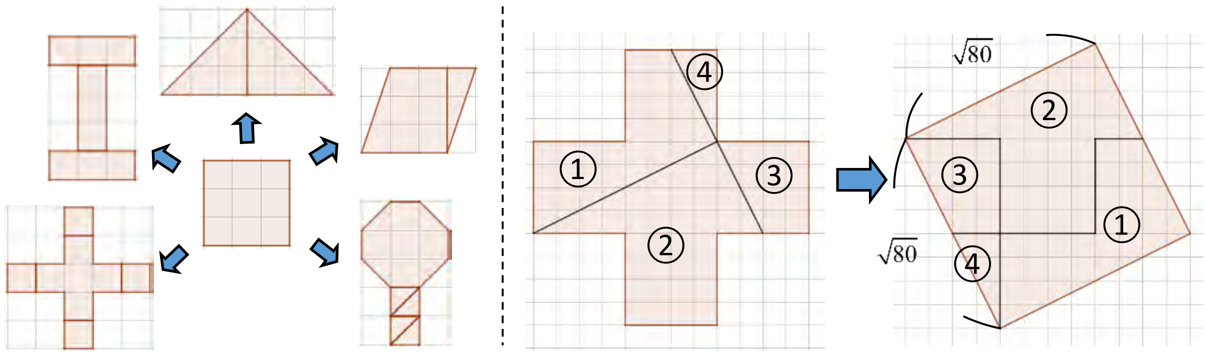
一、研究架構



二、研究方向的決定

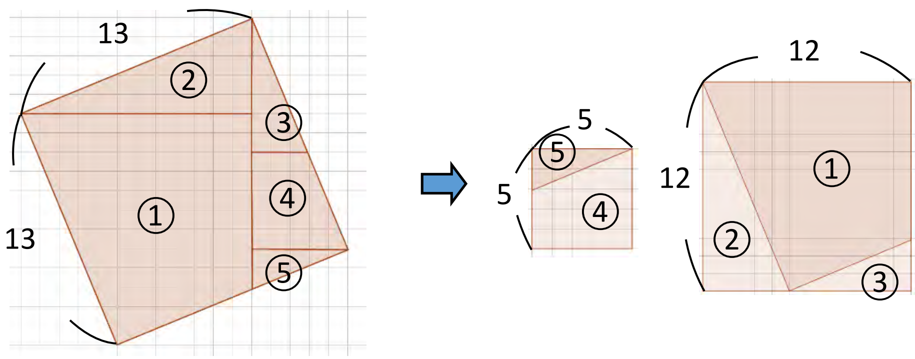
(一) 正方形剪拼與 Bolyai Gerwien 定理：透過 Bolyai Gerwien 定理，我們了解當兩個簡單多邊形面積相等時，那麼其中一個能分割成有限多塊多邊形，而且經過平移和旋轉，就能組合成另一個多邊形的圖形。

1. 研究一：正多邊形可剪拼成許多不同的不規則多邊形。例如：邊長 3 的正方形可透過切割、平移或旋轉，可組合成如下圖(左)5 個面積相同的圖形，當然可剪拼成的圖形不只這些。透過此定理讓我們知道只要面積相等，便可以互相剪拼成另一個圖形。



2. 研究二：非正多邊形亦可剪拼回正多邊形。例如：由上圖(右)的十字架圖形透過切割，再平移和旋轉，可剪拼成一個邊長是 $\sqrt{80}$ 的正四邊形。

3. 研究三：一個正方形邊長為 13，透過切割、平移或旋轉後，就能剪拼成兩個邊長分別為 5 和 12 的正方形。

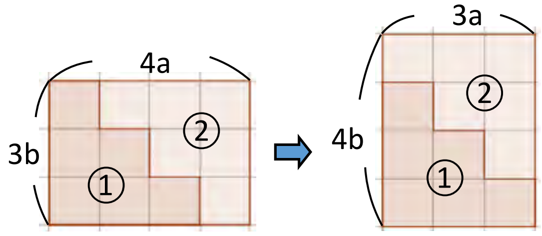


在方格紙上透過切割各種圖形的操作過程，我們對於正方形的切割非常感興趣，尤其是將一個大正方形透過剪拼後，可變成兩個較小的正方形。

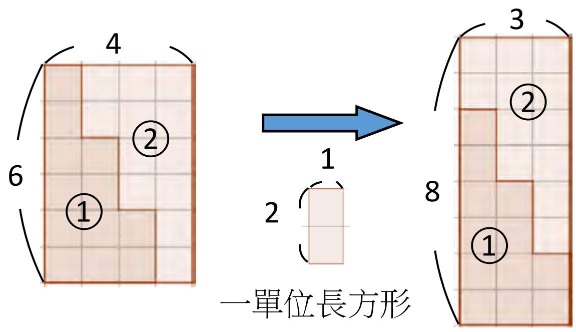
(二) 階梯狀切割

Cardano(1663)發現了一個切割的技術，因為外觀很像階梯，所以稱為階梯狀切割。

這是一個簡單切割方式，切割線必須在網格上，透過橫線和縱線組成階梯狀，切割完會將此長方形切成兩部分，將切片②向左上方推移一層階梯，可形成另一個不同的長方形，從橫 4a 縱 3b 剪拼成橫 3a 縱 4b。

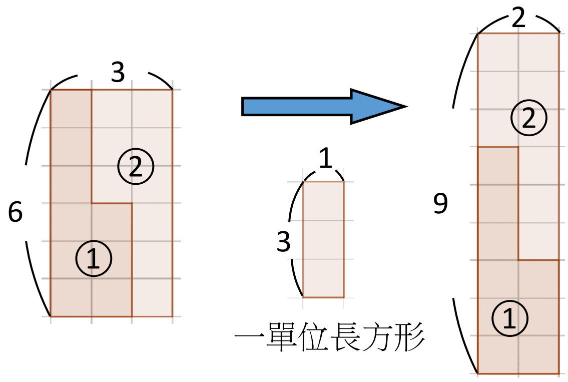


1. 研究一：為了將橫 4 縱 6 的長方形變成橫 3 縱 8 的長方形，我們採用橫 1 縱 2 的單位長方形做階梯狀切割，將切片②向左上方推移一層階梯，如下圖。



深入探究：為何階梯狀切割，要用橫 1 縱 2 為一單位長方形呢？我們發現橫向邊長分別為 4 和 3，取兩者的最大公因數 gcd(4,3)＝1；前後兩長方形縱向邊長分別為 6 和 8，取兩者的最大公因數 gcd(6,8)＝2，剛好符合階梯狀切割的方式，所以用橫 1 縱 2 做為一單位長方形做階梯狀切割。

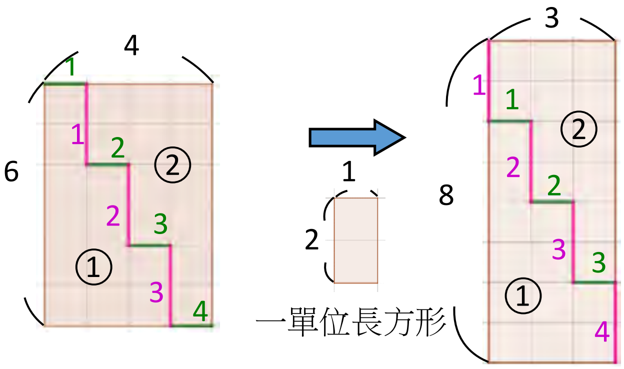
2. 研究二：為了將橫 3 縱 6 的長方形變成橫 2 縱 9 的長方形，我們採用一單位長方形為橫 1 縱 3 做階梯狀切割，將切片②向左上方推移一層階梯，如下圖。



深入探究：我們發現上圖的橫向邊長分別為 3 和 2，取兩者的最大公因數 gcd(3,2)=1；縱向邊長分別為 6 和 9，取兩者的最大公因數 gcd(6,9)=3，所以階梯狀切割用橫 1 縱 3 做為切割單位長方形。

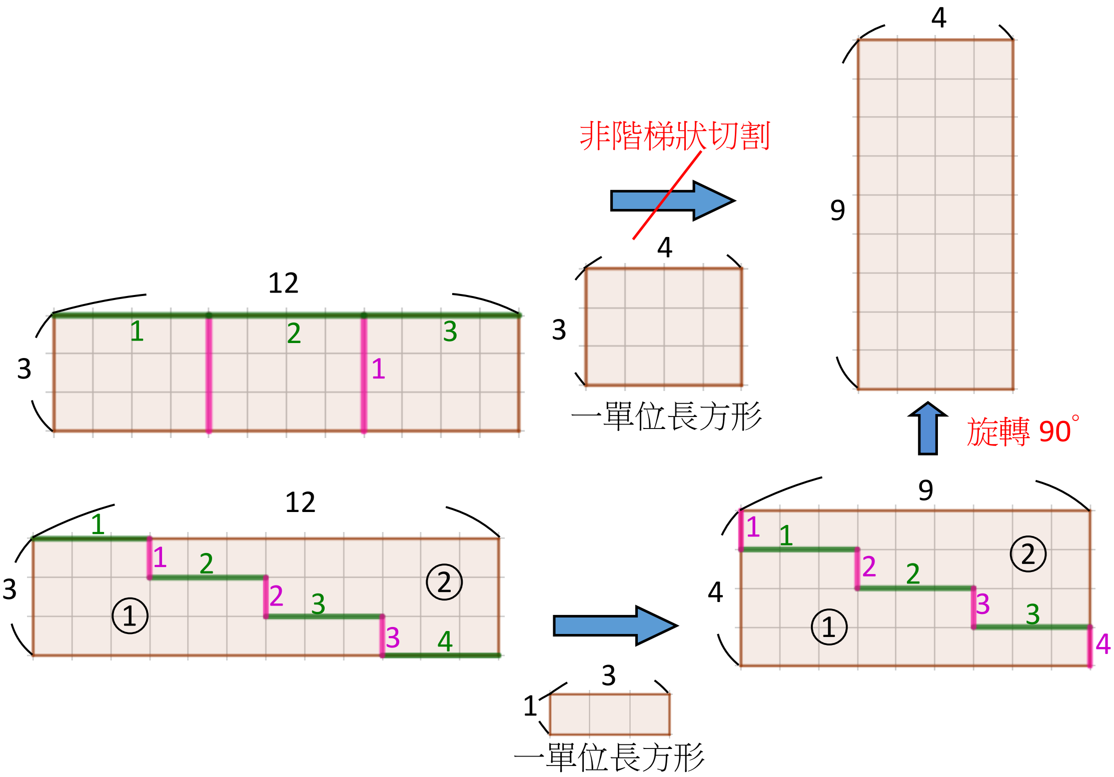
3. 階梯狀切割的必要條件：

(1) 條件一：觀察下圖，橫 4 縱 6 的長方形要剪拼成橫 3 縱 8 的長方形，由 gcd(4,3)=1，gcd(6,8)=2，因此單位長方形為橫 1 縱 2 的長方形，故採用橫 1 縱 2 為一單位的階梯狀切割，橫向會有 4 個單位長方形，縱向會有 3 個單位長方形，橫向縱向兩者的單位長方形個數相差 1，滿足階梯狀切割之必要條件。並將所得的切片②向左上方推移一層階梯，橫向會有 3 個單位長方形，縱向會有 4 個單位長方形，橫向縱向兩者的單位長方形個數也相差 1。



(2) 條件二：觀察下圖，橫 12 縱 3 的長方形要剪拼成橫 4 縱 9 的長方形，gcd(12,4)=4，gcd(3,9)=3，因此一單位長方形為橫 4 縱 3 的長方形，橫向會有 3 個單位長方形，縱向會有 1 個單位長方形，橫向縱向兩者的單位長方形個數並非相差 1，不符合上述條件一，故無法透過階梯狀剪拼成功。

特別的是，若橫 12 縱 3 的長方形要剪拼成橫 4 縱 9 的長方形，可以先剪拼成橫 9 縱 4 的長方形，gcd(12,9)=3，gcd(3,4)=1，因此一單位長方形為橫 3 縱 1 的長方形，故採用橫 3 縱 1 為一單位的階梯狀切割，橫向會有 4 個單位長方形，縱向會有 3 個單位長方形，橫向縱向兩者的單位長方形個數相差 1，滿足階梯狀切割之必要條件。將所得的切片②向左上方推移一層階梯，橫向會有 3 個單位長方形，縱向會有 4 個單位長方形。再旋轉 90°，就可以成為橫 4 縱 9 的長方形。但此方法，因為有旋轉，運用在之後的研究，原本會有一片不用移動的，會因此斷開，那麼切割片數會增加一片。

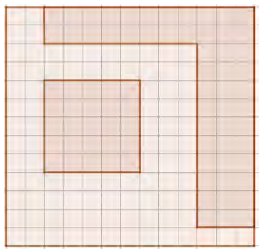


所以，接下來我們鎖定的切割方法須符合**平行**或**垂直**正方形的邊，即在網格上進行切割。

(三) 證明三片解不存在(令 $\ell_{\text{大}}=c$)

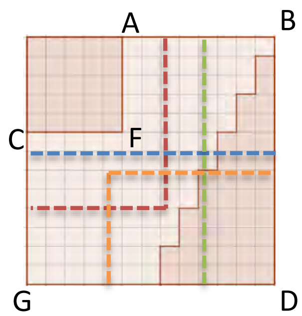
以邊長【a,b,c】為例($a,b<c$)，將邊長 c 的正方形剪拼成邊長 a 和 b 的正方形，不失一般性，第一步截去邊長 a 的正方形為例，分成 Case1 和 Case2 兩種情況討論。

Case1. 完整邊長 a 的正方形在中間



切割後，以空心的正方形來看，目標是要切割成兩片，不論如何切割都至少會保留兩個橫 c 縱 1 的長方形，因 $c>b$，故無法剪拼成邊長 b 的正方形，因此無法完成 3 片解的剪拼。

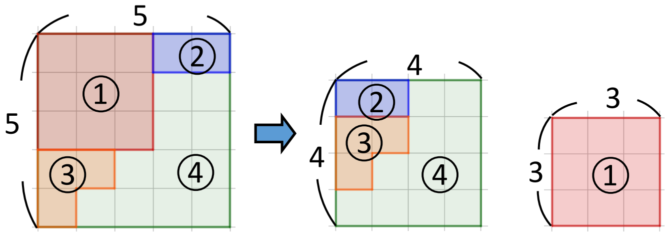
Case2. 完整邊長 a 的正方形在左上角(不失一般性)



切割後，從 L 形來看，目標是要切割成兩片，不論從$\overline{AB}$切入$\overline{CG}$切出(紅線)，$\overline{AB}$切入$\overline{GD}$切出(綠線)，$\overline{BD}$切入$\overline{CG}$切出(藍線)，或$\overline{BD}$切入$\overline{GD}$切出(橘線)，都至少會保留一個長為 c 的邊($\overline{CF}+\overline{AB}=c$)，故無法剪拼成邊長 b 的正方形，因此無法完成 3 片解的剪拼。

(四) 四片解的存在性

我們以【3,4,5】作為例子，我們將邊長為 5 的正方形切割成 4 塊，並重新組合可以形成邊長分別為 3 和 4 的正方形，因此確立了四片解的存在性。



(五) 小結：由以上四點討論，確立本研究的方向是將一塊正方形，遵循 Cardano 階梯狀切割（切割須符合**平行**或**垂直**正方形的邊），經過平移、旋轉、組合成兩個正方形，並以最少片數為目標。接下來我們好奇除了【3,4,5】擁有四片解以外，是否互質畢氏三元數皆可以透過階梯狀切割，找到四片解？以下分成討論Ⅰ、Ⅱ兩部份。

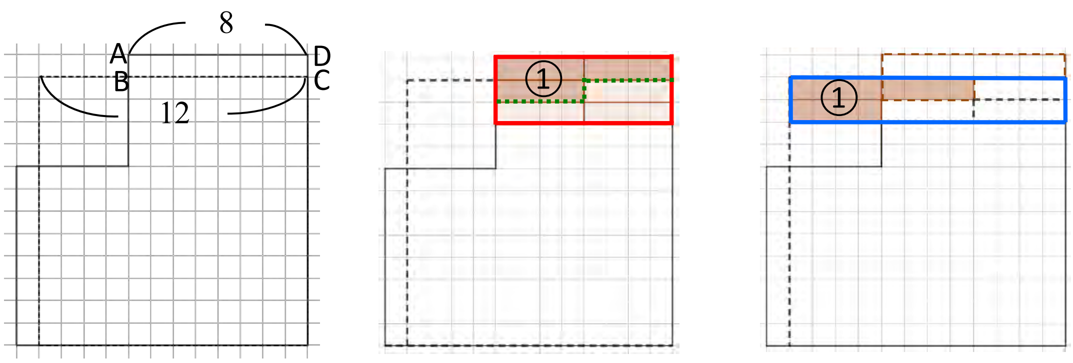
三、以 Cardano 階梯狀切割法討論(Ⅰ)

我們依序對【5,12,13】、【7,24,25】、【8,15,17】、【9,40,41】做四片解的研究。

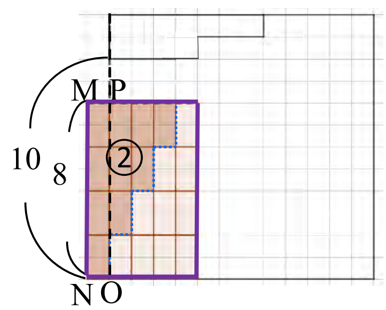
(一) 最先對【5,12,13】做四片解的詳細研究。透過階梯狀切割，嘗試將邊長 13 的正方形剪拼成邊長 5 和 12 的正方形，研究過程如下：

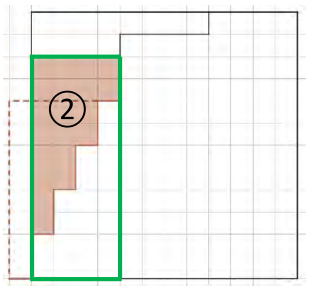
1. 將邊長 13 的正方形的左上角截去邊長 5 的正方形，並且將目標邊長 12 的正方形範圍用虛線標示出來，如下圖(左)。接著分右上、左下論述。

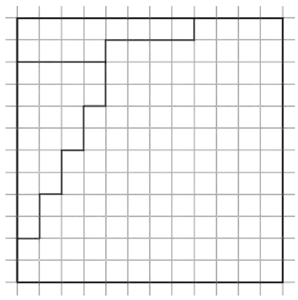
2. 我們先處理右上方的部分。下圖(左)最上端虛線外剩餘的部分為橫 8 縱 1 的長方形 ABCD。我們的目標是將紅色橫 8 縱 3 的長方形剪拼成藍色橫 12 縱 2 的長方形，gcd(8,12)＝4，gcd(3,2)＝1，因此一單位長方形為橫 4 縱 1 的長方形，故採用橫 4 縱 1 為一單位的階梯狀切割，如下圖(中)綠色虛線，再將切片①往左下方移一層階梯，由紅色長方形剪拼成藍色長方形，這樣上部的處理就算完成。



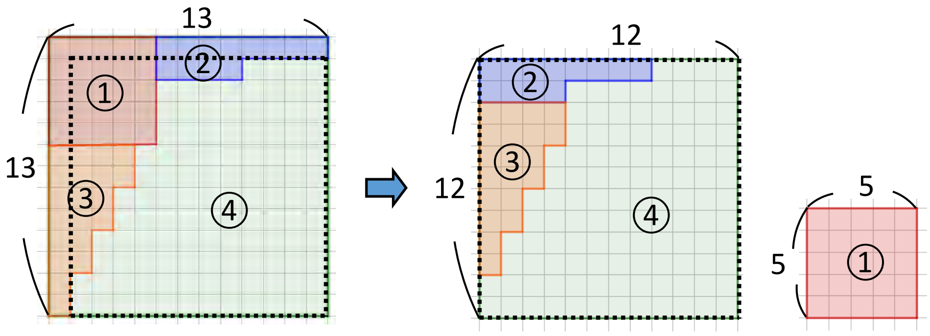
3. 接著處理左下方的部分。下圖(左)左下角虛線外剩餘的部分為橫 1 縱 8 的長方形 MNOP，剛才的剪拼已經佔去縱向 12 格中的 2 格。我們的目標是將紫色橫 5 縱 8 的長方形剪拼成綠色橫 4 縱 10 的長方形，所以取 gcd(5,4)＝1，gcd(8,10)＝2，因此一單位長方形為橫 1 縱 2 的長方形，故採用橫 1 縱 2 為一單位的階梯狀切割，如下圖(中)綠色虛線，再將切片②往右上方移一層階梯，由紫色長方形剪拼成綠色長方形，完成圖如下圖(右)所示。







4. 由上述過程可以發現，利用先切去小正方形，兩次階梯狀切割，就可以使【5,12,13】的剪拼達成四片解，如圖。



(二) 對【7,24,25】做四片解的研究，研究過程如下：

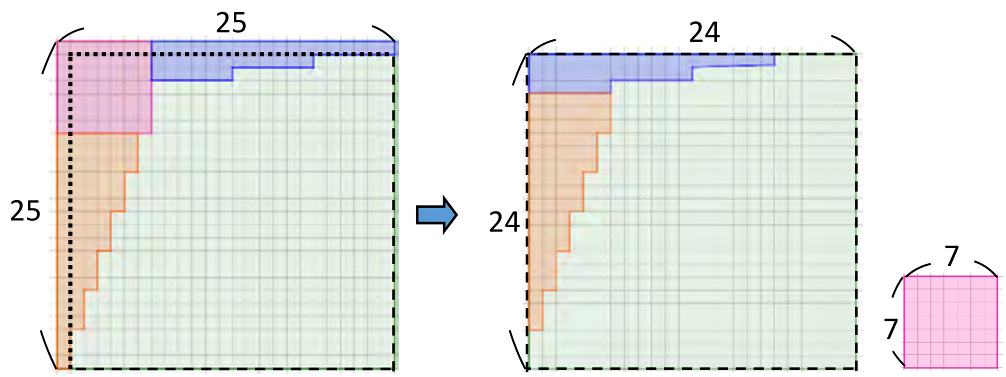
透過階梯狀切割，嘗試將邊長 25 的正方形剪拼成邊長 7 和 24 的正方形。

1. 將邊長 25 的正方形的左上角截去邊長 7 的正方形，並且將目標邊長 24 的正方形範圍用虛線標示出來。

2. 我們先處理右上面的部分。可見邊長 24 和 25 的正方形右上角，由橫 18 縱 4 的長方形變成橫 24 縱 3 的長方形，gcd(18,24)=6，gcd(4,3)=1，因此一單位長方形為橫 6 縱 1 的長方形，故採用橫 6 縱 1 為一單位的階梯狀切割，並將所得的藍色切片向左下方推移一層階梯。

3. 接著處理左下的部分。可見邊長 24 和 25 的正方形左下角，由橫 7 縱 18 的長方

形變成橫 6 縱 21 的長方形，gcd(7,6)=1，gcd(18,21)=3，因此一單位長方形為橫 1 縱 3 的長方形，故採用橫 1 縱 3 為一單位的階梯狀切割，並將所得的橘色切片面積向右上方推移一層階梯，如圖所示。

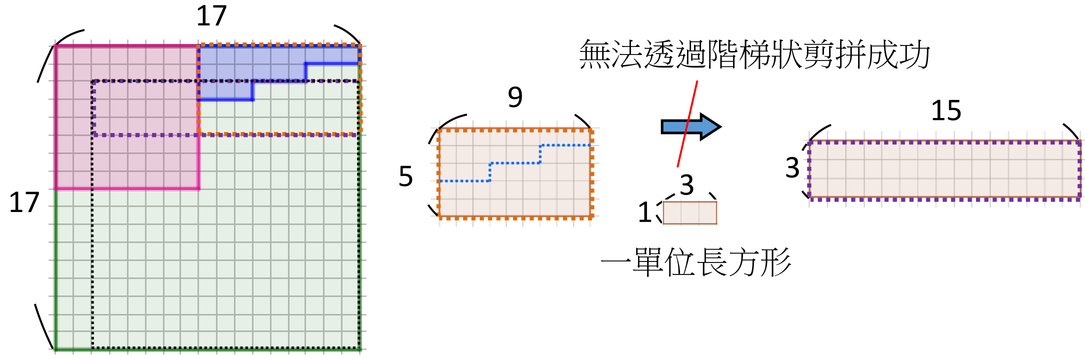


(三) 對【8,15,17】做四片解的研究，研究過程如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 17 的正方形剪拼成邊長 8 和 15 的正方形。

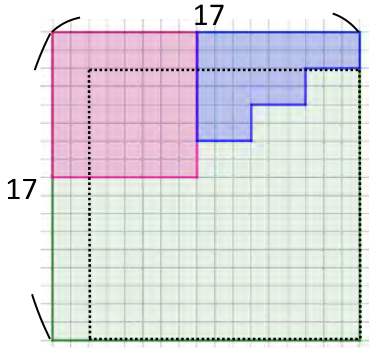
1. 將邊長 17 的正方形的左上角截去邊長 8 的正方形，並且將目標邊長 15 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 此時先處理右上方的部分。可見邊長 15 和 17 的正方形右上角，由橘框橫 9 縱 5 的長方形變成紫框橫 15 縱 3 的長方形，gcd(9,15)=3，gcd(5,3)=1，因此一單位長方形為橫 3 縱 1 的長方形，故採用橫 3 縱 1 為一單位的階梯狀切割，如圖藍色虛線，並將所得面積向左下推移。但很明顯的，不管是移一層階梯，還是兩層階梯，這樣的剪拼法皆無法成功剪拼成橫 15 縱 3 的長方形。

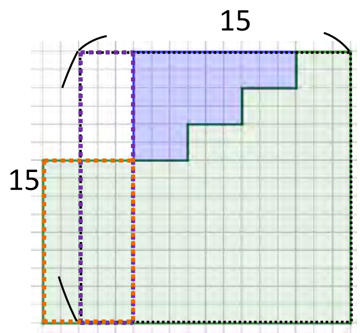
   為何無法成功剪拼呢？因為不符合階梯狀切割的必要條件。一單位長方形為橫 3 縱 1 的長方形，在橫 9 縱 5 的長方形中，9÷3=3，5÷1=5，橫向會有 3 個單位的長方形，縱向會有 5 個單位的長方形，由上述的條件一可知不符合階梯狀切割的必要條件，故無法透過上述階梯狀剪拼法切割成功。



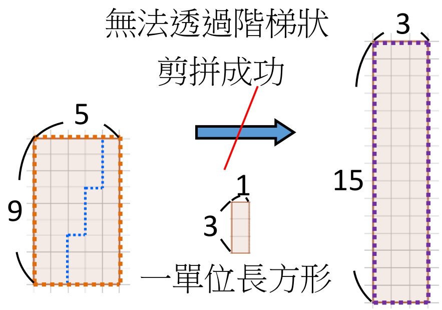
3. 我們再嘗試另一種想法，先讓右上方那片成功，但左下方那片還是沒成功，如下：

(1) 右上方橫 9 縱 2 的長方形，若想移走，就必須採用橫 3 縱 2 為一單位的階梯狀切割。





(2) 接著處理左下方的部分。將上圖左下方單獨來看，如下圖，要從橘框橫 5 縱 9 的長方形剪拼成紫框橫 3 縱 15 的長方形，gcd(5,3)=1，gcd(9,15)=3，因此一單位長方形為橫 1 縱 3 的長方形，故採用如右圖藍色虛線的階梯狀切割，很明顯並無法成功剪拼成橫 3 縱 15 的長方形。且從 5÷1=5，9÷3=3，5 和 3 並非差 1，違反上述的$\boxed{\text{條件一}}$，可得知無法透過階梯狀剪拼成功。



(四) 對【9,40,41】做四片解的研究，研究過程如下：

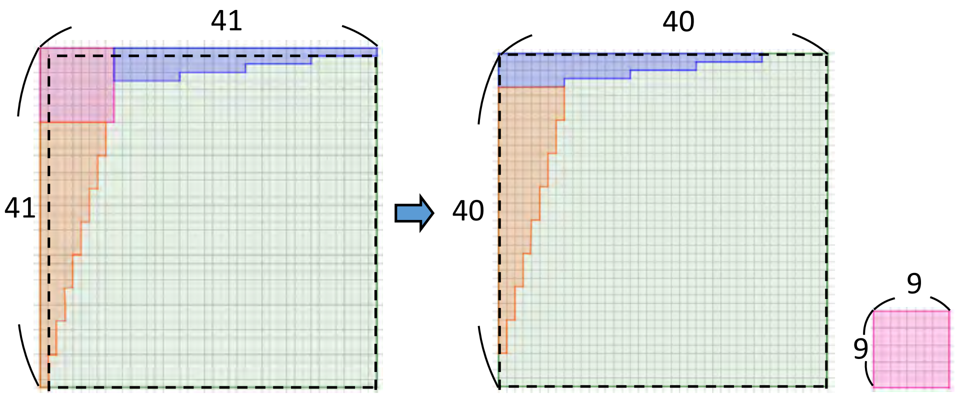
透過階梯狀切割，嘗試將邊長 41 的正方形剪拼成邊長 40 和 9 的正方形。

1. 將邊長 41 的正方形的左上角截去邊長 9 的正方形，並且將目標邊長 40 的正方形範圍用虛線標示出來。

2. 我們先處理右上方的部分。可見邊長 40 和 41 的正方形右上角，由橫 32 縱 5 的長方形變成橫 40 縱 4 的長方形，gcd(32,40)=8，gcd(5,4)=1，因此一單位長方形為橫 8 縱 1 的長方形，故採用橫 8 縱 1 為一單位的階梯狀切割，並將所得的藍色切片向左下方推移一層階梯。

3. 接著處理左下方的部分。可見邊長 40 和 41 的正方形左下角，由橫 9 縱 32 的長方形變成橫 8 縱 36 的長方形，gcd(9,8)=1，gcd(32,36)=4，因此一單位長方形為

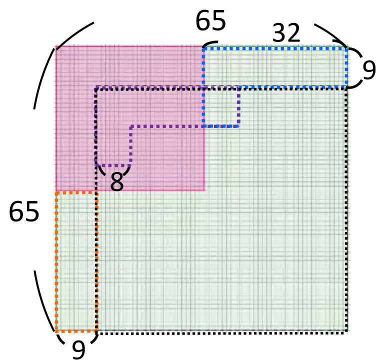
橫 1 縱 4 的長方形，故採用橫 1 縱 4 為一單位的階梯狀切割，並將所得的橘色切片面積向右上方推移一層階梯，如圖所示。



(五) 嘗試將 A_2 類中最小的互質畢氏三元數【33,56,65】來進行階梯狀切割做四片解，研究如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 65 的正方形剪拼成邊長 33 和 56 的正方形。

1. 將邊長 65 的正方形的左上角截去邊長 33 的正方形，並且將目標邊長 56 的正方形範圍用黑色虛線標示出來。
2. 可見邊長 65 的正方形右上角，由橫 32 縱 21 的長方形變成橫 56 縱 12 的長方形，gcd(32,56)=8，gcd(21,12)=3，因此一單位長方形為橫 8 縱 3 的長方形，32÷8=4，21÷3=7，由上述的條件一可知階梯狀剪拼不會成功。
3. 試著採用另一種剪拼法，先處理右上方的部分，將整個橫 32 縱 9 的長方形移開，也就是將藍框區塊往左下方移至紫框區塊。



4. 接著處理左下方橘色框的部分，不難發現根本無法在四片解的限制下成功。

(六) 小結：我們發現上述階梯狀剪拼做四片解的案例【5,12,13】、【7,24,25】、【9,40,41】、【33,56,65】這四組畢氏三元數中的奇偶性與【8,15,17】奇偶性並不相同，然而【33,56,65】卻不能成功切出四片解，發現【5,12,13】、【7,24,25】、【9,40,41】都有 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的關係，所以接下來討論奇偶性和畢氏三元數的關聯，再做細部的分類。

四、互質畢氏三元數的分類

(一) 討論畢氏三元數的表示方式

由定義$c^2 = a^2 + b^2$

整理得 $\frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (\frac{c}{a} + \frac{b}{a})(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}) = 1$，

因互為倒數，可令$\frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{m}{n} \dots ①$，$\frac{c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{n}{m} \dots ②$(設$m, n$屬於互質整數)

由$① + ② \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2+n^2}{mn} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$

$① - ② \Rightarrow \frac{2b}{a} = \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{m^2-n^2}{mn} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{m^2-n^2}{2mn}$

令$a = 2mn$，$b = m^2 - n^2$，$c = m^2 + n^2$（不失一般性，a、b可互換）

(二) 我們將互質畢氏三元數分類成 A、B 類，發現有兩種方法可判別 A 類和 B 類。

1. 按照$\ell_{中}$、$\ell_{小}$的奇偶性來分類

(1) 我們利用以下的方法來找出較小的 11 組互質畢氏三元數：

因 $m>n$、m 和 n 均是正整數，$a=2mn$、$b=m^2-n^2$、$c= m^2+n^2$，若 m 和 n 是互質，而且 m 和 n 為一奇一偶，得出的【a,b,c】就是一組互質畢氏三元數。（註：若 m 和 n 都是奇數，【a,b,c】就會全是偶數，不符合互質）

(2) 我們用 m、n 列出互質畢氏三元數，並加以分類，當$\ell_{小}$是奇數、$\ell_{中}$是偶數時屬於 A 類(紅色)；當$\ell_{小}$是偶數、$\ell_{中}$是奇數時屬於 B 類(藍色)。

n \ m	2	3	4	5	6	7	8
1	**3,4,5**		**8,15,17**		**12,35,37**		**16,63,65**
2		**5,12,13**		**20,21,29**		**28,45,53**	
3			**7,24,25**				**48,55,73**
4				**9,40,41**		**33,56,65**	
5					**11,60,61**		**39,80,89**

註：以上畢氏三元數的排序**並非**按照以【a,b,c】順序排列。

2. 按照 $2mn$ 與 m^2-n^2 的大小來判斷

製作上表時，我們發現 $2mn$ 與 m^2-n^2 的大小也能分辨 A、B 類。

當 $2mn > m^2-n^2$ 時，是 A 類；當 $m^2-n^2>2mn$ 時是 B 類。

(三) 最終，我們用 m 、n 列出較小的 11 組互質畢氏三元數來研究。

A 類：$2mn > m^2-n^2$ 時							B 類：$m^2-n^2 > 2mn$ 時					
m	2	3	4	5	7	8	m	4	5	6	7	8
n	1	2	3	4	4	5	n	1	2	1	2	1
$\ell_{小}=m^2-n^2$	3	5	7	9	33	39	$\ell_{小}=2mn$	8	20	12	28	16
$\ell_{中}=2mn$	4	12	24	40	56	80	$\ell_{中}=m^2-n^2$	15	21	35	45	63
$\ell_{大}=m^2+n^2$	5	13	25	41	65	89	$\ell_{大}=m^2+n^2$	17	29	37	53	65

(四) 小結：我們將互質畢氏三元數做完奇偶性分類後，

A 類是【$\ell_{小},\ell_{中},\ell_{大}$】=【$m^2-n^2,2mn,m^2+n^2$】=【奇,偶,奇】，B 類是【$\ell_{小},\ell_{中},\ell_{大}$】=【$2mn,m^2-n^2,m^2+n^2$】=【偶,奇,奇】。在上述討論當中【3,4,5】、【5,12,13】、【7,24,25】、【9,40,41】屬 A 類中一部分有著 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的特性，我們稱作 A_1 類；接下來探討 A_1 類 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的互質畢氏三元數是否皆可用階梯狀切割做四片解。

五、A_1 類的一般化證明

(一) 我們實作出【3,4,5】、【5,12,13】、【7,24,25】以及【9,40,41】四片解的階梯狀剪拼，想證實是否所有 A_1 類皆可得到四片解，現在嘗試將結果一般化。

由上列成功剪拼的互質畢氏三元數知 $\ell_{大}=m^2+n^2$、$\ell_{中}=2mn$ 和 $\ell_{小}=m^2-n^2$ 開始進行一般化的證明：由 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$

$m^2+n^2=2mn+1 \Rightarrow (m-n)^2=1 \Rightarrow m-n=\pm1$

因 $m>n$，取 $m=n+1$ 代入 $\ell_{大}$、$\ell_{中}$、$\ell_{小}$

$\ell_{大}=m^2+n^2$
$=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1$

$\ell_{中}=2mn$
$=2(n+1)\times n=2n^2+2n$

$\ell_{小}=m^2-n^2$
$=(n+1)^2-n^2=2n+1$

下圖中，右上方藍色部分，單位長方形的

橫向長度為$\gcd(\overline{AB},\overline{CD})=\gcd(2n^2,2n^2+2n)=2n$，

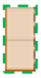
縱向長度為$\gcd(\overline{AG},\overline{NG})=\gcd(n+1,n)=1$，

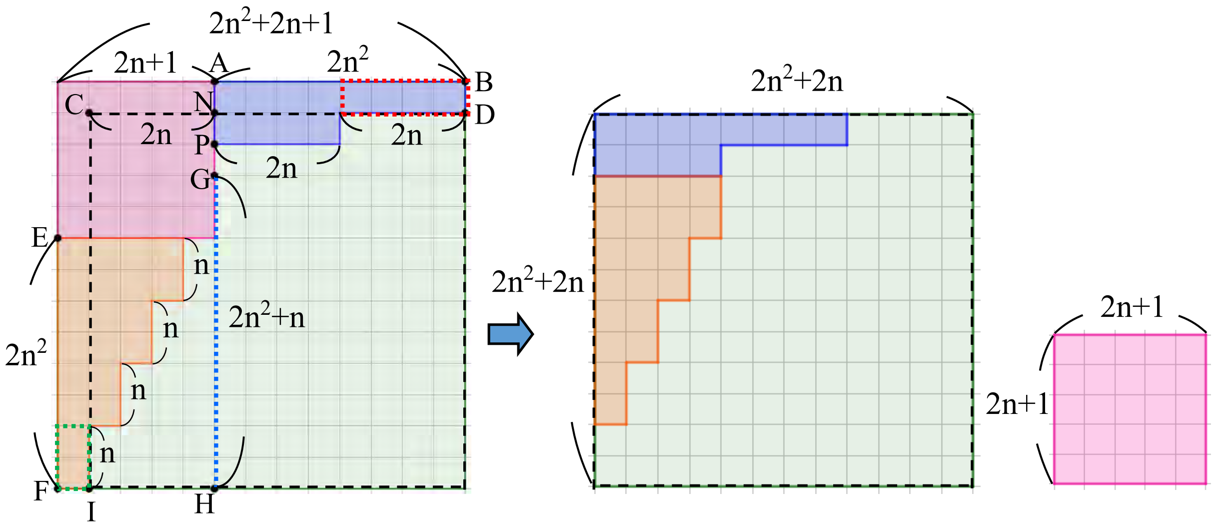
以橫 2n 縱 1  為單位長方形做切割。

左下方橘色部分，單位長方形的

橫向長度為$\gcd(\overline{FH},\overline{CN})=\gcd(2n+1,2n)=1$，

縱向長度為$\gcd(\overline{EF},\overline{GH})=\gcd(2n^2,2n^2+\mathrm{n})=n$，

以橫 1 縱 n 為單位長方形做切割。



(二) 階梯狀切割的描述

1. 先沿著邊長 $2n^2+2n+1$ 的大正方形，左上角切割出 2n+1 的小正方形。
2. 在大正方形右上角 B 點縱向往下 1，從 D 點開始切割。先橫向往左切 2n，之後往下切 1，橫向往左切 2n，一直重複往下切 1 往左切 2n，直到結束。
3. 在大正方形左下角 F 點橫向往右 1，從 I 點開始切割。先縱向往上切 n，之後橫向往右切 1，縱向往上切 n，一直重複往右切 1 往上切 n，直到結束。

(三) 小結：A 類中屬 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 特性者(稱 A_1 類)，經由以上一般化的結果皆可成功切出四片通解。然而由上述討論(I)中【33,56,65】與【5,12,13】、【7,24,25】、【9,40,41】的奇偶性相符，但卻無法成功四片解，我們假設有五片解的存在，接下來進行五片解的推導。

(四) 證明 A 類扣除 A_1 類後不存在五片解

以互質的畢氏三元數【*a*,*b*,*c*】為三正方形的邊長，*c* 為大正方形的邊長，*a* 為小正方形的邊長，進行切割。

1. 將邊長 *c* 的正方形的左上角截去邊長 *a* 的正方形，並且將目標邊長 *b* 的正方形

範圍用虛線標示出來。

2. 劃出藍色$\overline{\mathrm{EF}}$平分正方形ABCD。

3. 取$\overline{\mathrm{GF}}$、$\overline{\mathrm{BF}}$的$gcd(\frac{1}{2}(c-b+a)$，$\frac{1}{2}(-c+b+a))$，試證不等於$c-b$。

   pf:若其值為$c-b$，即$\frac{1}{2}(c-b+a)$為$c-b$的倍數，則 $\frac{a}{2}$ 為$c-b$的倍數，

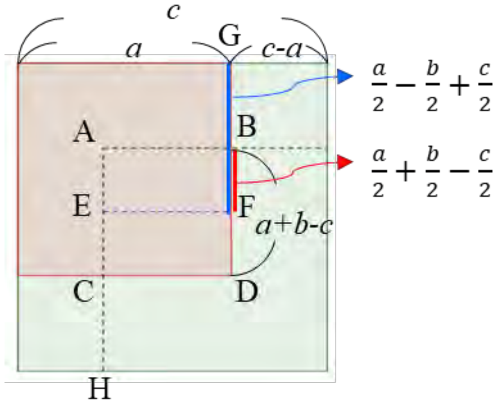
   代入【m^2-n^2,2mn,m^2+n^2】，得矛盾。

4. 取$\overline{\mathrm{EH}}$、$\overline{\mathrm{EC}}$的$gcd(\frac{1}{2}(c-b+a)$，$\frac{1}{2}(-c+b+a))$，試證不等於$c-b$。

   pf:若其值為$c-b$，即$\frac{1}{2}(c-b+a)$為$c-b$的倍數，則 $\frac{a}{2}$ 為$c-b$的倍數，

   代入【m^2-n^2,2mn,m^2+n^2】，得矛盾。

右上、左上的部分，都無法利用階梯狀切割，各使用一片，因此至少各使用二片，原來去掉的一片小正方形、以及右下角不移動的片數，加起來至少有六片，因此五片解不存在，我們將 A 類中最少片數為六片稱為 A_2 類(如上述【33,56,65】)，在之後進行 A_2 類六片解的討論。



(五) 在研究過程中我們還找到第二種 A_1 類的剪拼方法，僅以幾組畢氏三元數來討論。

六、A_1 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的第二種階梯狀剪拼法

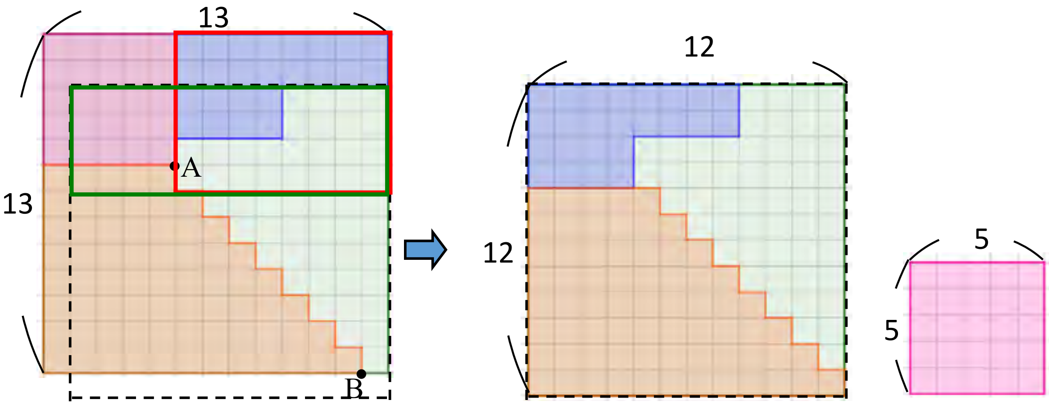
我們依序對 A_1 類【5,12,13】、【7,24,25】做第二種階梯狀剪拼四片解的研究。

(一) 最先對【5,12,13】透過第二種階梯狀剪拼法做四片解的研究，研究過程如下：

1. 將邊長 13 的正方形的左上角截去邊長 5 的正方形，並且將目標邊長 12 的正方形範圍用虛線標示出來。

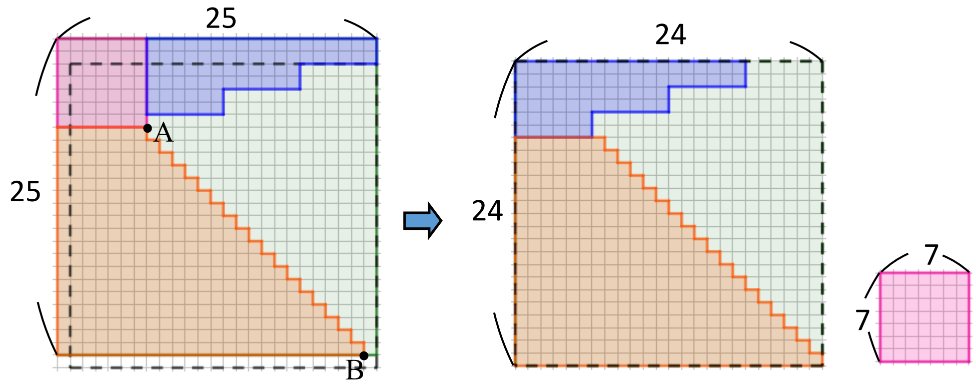
2. 我們先處理左下方的部分。從 A 點向右下方採縱 1 橫 1 為一單位的階梯狀切割至 B 點，再將所得的橘色切片向右下方推移一層階梯。

3. 接著處理右上方的部分。可見邊長 12 和 13 正方形的右上角，由橫 8 縱 6 的紅色框長方形變成橫 12 縱 4 的綠色框長方形，gcd(8,12)=4，gcd(6,4)=2，因此一單位長方形為橫 4 縱 2 的長方形，故採用橫 4 縱 2 為一單位的階梯狀切割，並將所得的藍色切片向左下方推移一層階梯。



(二) 對【7,24,25】透過第二種階梯狀剪拼法做四片解的研究，研究過程如下：

1. 將邊長 25 的正方形的左上角截去邊長 7 的正方形，並且將目標邊長 24 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 我們先處理左下方的部分。從 A 點向右下方採縱 1 橫 1 為一單位的階梯狀切割至 B 點，再將所得的橘色切片向右下方推移一層階梯。
3. 接著處理右上方的部分。可見邊長 24 和 25 正方形的右上角，由橫 18 縱 8 的長方形變成橫 24 縱 6 的長方形，gcd(18,24)=6，gcd(8,6)=2，因此一單位長方形為橫 6 縱 2 的長方形，故採用橫 6 縱 2 為一單位的階梯狀切割，並將所得的藍色切片向左下方推移一層階梯。



(三) **小結**：A_1 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的【5,12,13】、【7,24,25】採用第二種階梯狀剪拼法做四片解，其中最特別的地方是左下方採橫 1 縱 1 為一單位的階梯狀切割。

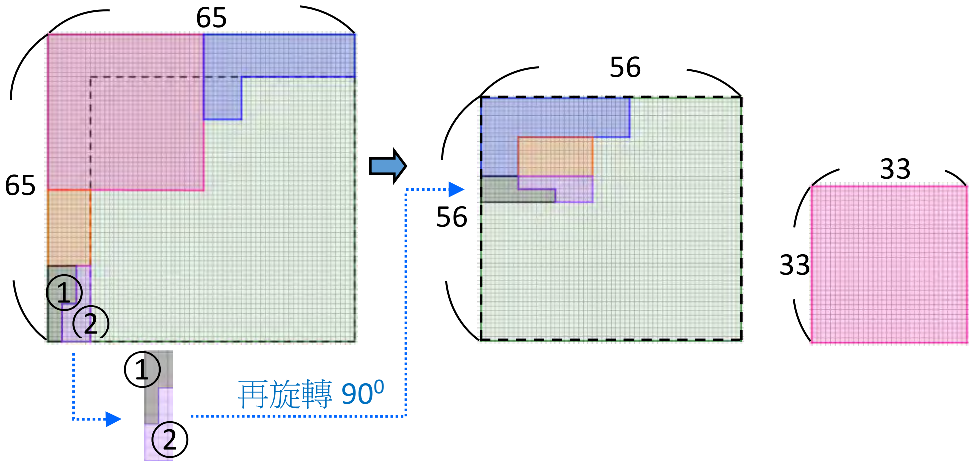
七、A_2 類六片解的成功解法

(一)【33,56,65】進行階梯狀切割做六片解，研究過程如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 65 的正方形剪拼成邊長 33 和 56 的正方形。

1. 將邊長 65 的正方形的左上角截去邊長 33 的正方形，並且將目標邊長 56 的正方形範圍用虛線標示出來。

2. 先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 32 縱 9 的長方形，移至目標邊長 56 的正方形虛線範圍的左上角，右側會超出剪去的部分，凸出橫 8 縱 9 的長方形，所以一起移走，如藍色面積。
3. 接著處理左下方的部分。先切割出橫 9 縱 16 之橘色長方形，並旋轉 90^0 放入藍色切片的下方凹槽。
4. 左下方剩橫 9 縱 16 的長方形，須剪拼成橫 6 縱 24 的長方形，gcd(9,6)=3，gcd(16,24)=8，因此一單位長方形為橫 3 縱 8 的長方形，故採用橫 3 縱 8 為一單位的階梯狀切割，並將所得切片②向左下方推移一層階梯，拼成橫 6 縱 24 的長方形，再旋轉 90^0，變成橫 24 縱 6 的長方形，移至藍色、橘色切片的下方，完成六片解。

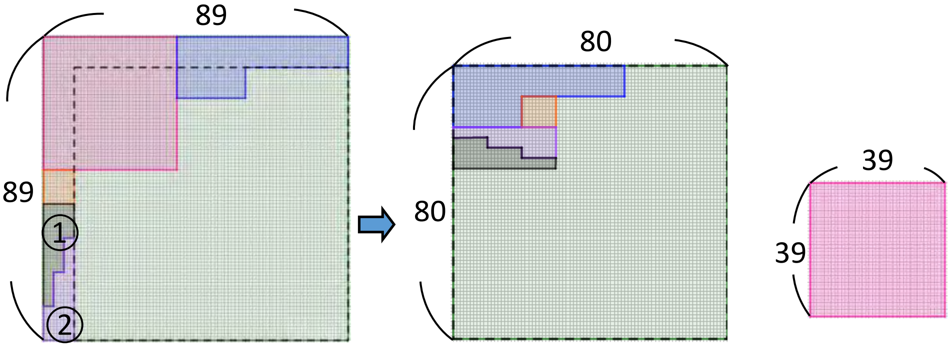


(二) 【39,80,89】進行階梯狀切割做六片解，研究過程如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 89 的正方形剪拼成邊長 39 和 80 的正方形。

1. 將邊長 89 的正方形的左上角截去邊長 39 的正方形，並且將目標邊長 80 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 50 縱 9 的長方形，移至目標邊長 80 的正方形虛線範圍的左上角，右側會超出剪去的部分，凸出橫 20 縱 9 的長方形，所以一起移走，如藍色面積。
3. 接著處理左下方的部分。先切割出橫 9 縱 10 之橘色長方形，並旋轉 90^0 放入藍色切片的下方凹槽。
4. 左下方剩橫 9 縱 40 的長方形，須剪拼成橫 30 縱 12 的長方形，gcd(9,12)=3，gcd(40,30)=10，因此一單位長方形為橫 3 縱 10 的長方形，故採用橫 3 縱 10 為

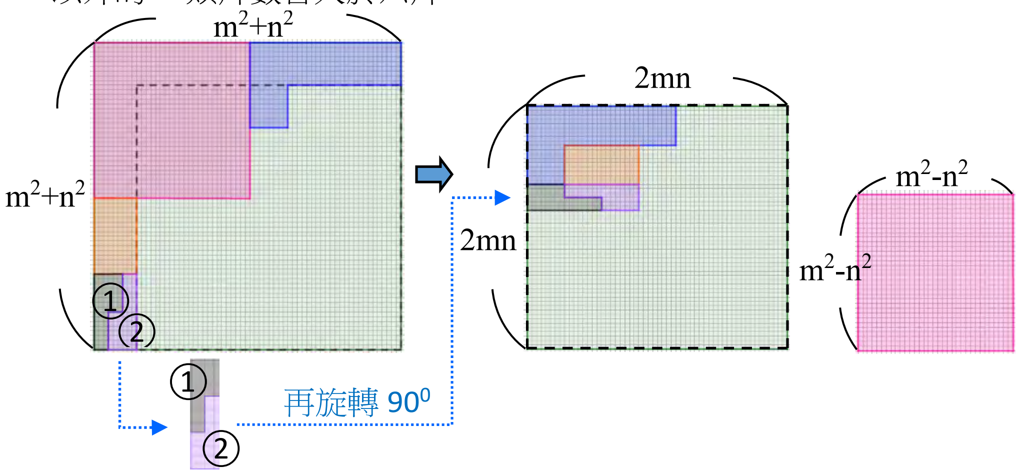
一單位的階梯狀切割，並將所得切片①向左下方推移一層階梯，拼成橫 12 縱 30 的長方形，再旋轉 90^0，變成橫 30 縱 12 的長方形，移至藍色、橘色切片的下方，完成六片解。



(三) **小結**：經過【33,56,65】、【39,80,89】的剪拼，得知 A 類中 $\ell_{大} \neq \ell_{中}+1$ 的互質畢氏三元數用階梯狀剪拼做四片解是不成功的。

(四) 嘗試將 A 類扣除 A_1 類、A_2 類後找到切割最少片解法則

1. 將邊長 m^2+n^2 的正方形的左上角截去邊長 m^2-n^2 的正方形，並且將目標邊長 2mn 的正方形範圍用黑色虛線標示出來。
2. 若邊長 m^2+n^2 的正方形右上角，階梯狀剪拼不會成功。
3. 試著採用另一種剪拼法，先處理右上方的部分，也就是將藍框區塊往左下方移至紫框區塊。
4. 接著處理左下方的部分。先切割出橘色長方形，並旋轉 90^0 放入藍色切片的下方凹槽。
5. 左下方剩橫的長方形，以階梯狀切割並旋轉 90° 剪拼成黑色虛線剩的長方形。
6. 若可以階梯狀切割，也就是完成六片解(歸為 A_2 類)，故得證除了 A_1 類、A_2 類以外的 A 類片數皆大於六片。

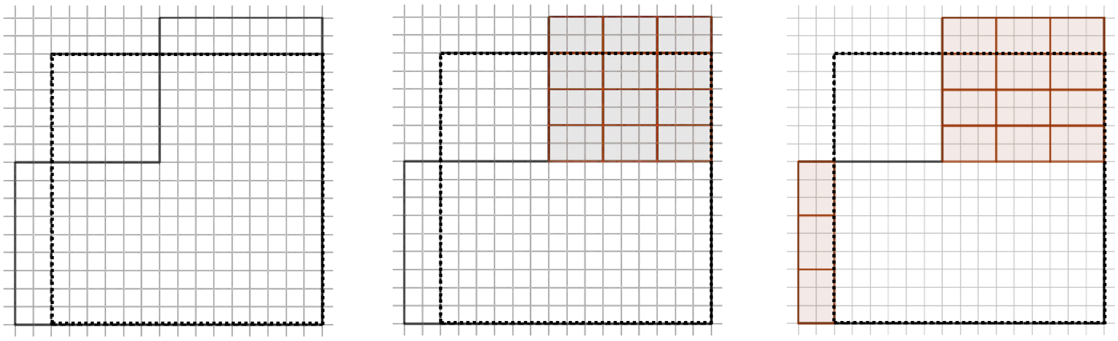


八、以 Cardano 階梯狀切割法討論(Ⅱ)

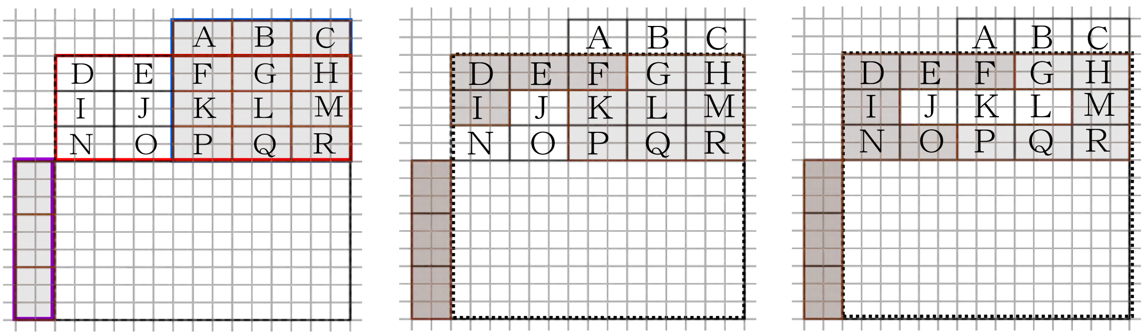
我們依序對【8,15,17】、【12,35,37】、【16,63,65】、【20,21,29】做四片解的研究。

(一) 最先對【8,15,17】做四片解的詳細研究。透過階梯狀切割，嘗試將邊長 17 的正方形剪拼成邊長 8 和 15 的正方形，研究過程如下：

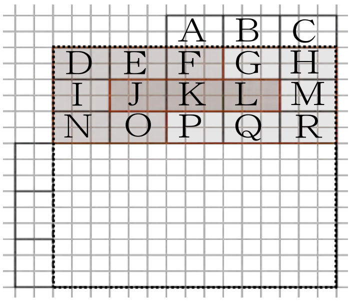
1. 將邊長 17 的正方形的左上角截去邊長 8 的正方形，並且將目標邊長 15 的正方形範圍用虛線標示出來，如下圖(左)。
2. 我們先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 9 縱 2 的長方形，gcd(9,15)＝3，所以用橫 3 縱 2 當作一個單位長方形，如下圖(中)。
3. 接下來我們不急著剪拼，將左下方多出的部分用橫 2 縱 3 當作一個單位長方形。這樣以來，左下的單位長方形與右上的只差在旋轉了 90^0，如圖(右)。



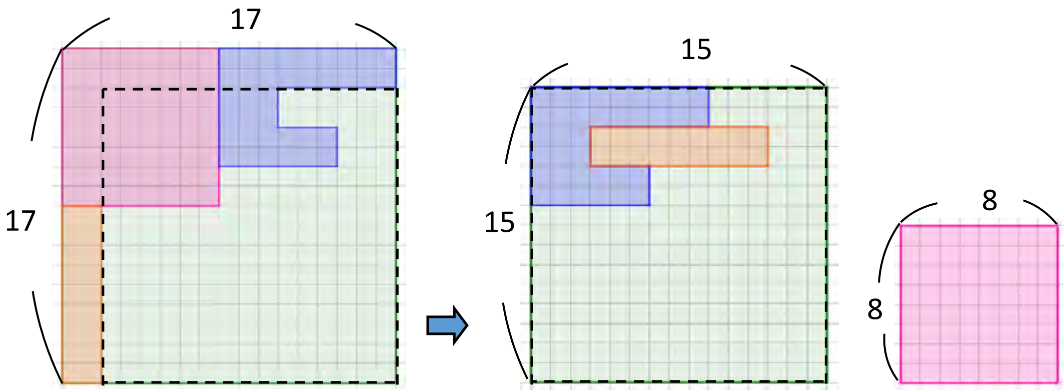
4. 從下圖(左)可知，我們必須將右上方藍色橫 9 縱 8 的長方形(共 12 個單位長方形)與左下方紫色橫 2 縱 9 的長方形(共 3 個單位長方形)剪拼成一個紅色橫 15 縱 6 的長方形(共 15 個單位長方形)。我們將各個單位長方形區塊做編號。
5. 首先，我們希望將 ABC 三塊切離，擺到 DEF 的位置，此時 F 就必須連帶著一起切除，那 ABCF 就會移到 DEFI，會變成下圖(中)的樣子。
6. 接著，我們希望騰出 JKL 三個位置讓左下方的 3 單位長方形旋轉 90^0 後擺入，所以 KL 也必須跟著 ABCF 一起切除。最後所切除的區域就是 ABCFKL 的凹口形，將其擺入 DEFINO 的位置，如下圖(右)。



7. 最後將左下角的 3 單位長方形旋轉 90° 後擺入 JKL，即完成剪拼，如圖。



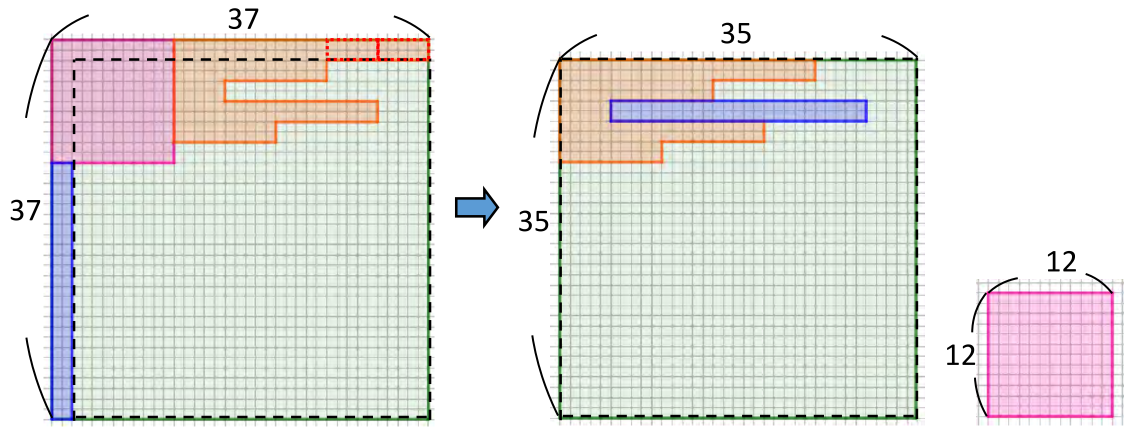
8. 由上述過程可以發現，利用這個原理就可以使【8,15,17】的剪拼達成四片解。



(二) 對【12,35,37】做四片解的研究，研究過程如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 37 的正方形剪拼成邊長 12 和 35 的正方形。

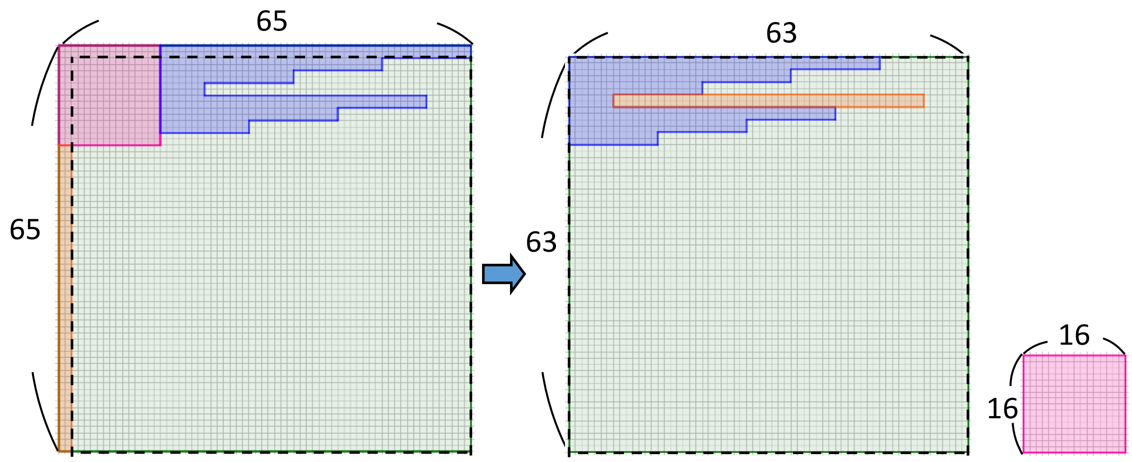
1. 將邊長 37 的正方形的左上角截去邊長 12 的正方形，並且將目標邊長 35 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 25 縱 2 的長方形，gcd(25,35)＝5，所以用橫 5 縱 2 當作一個單位長方形。在大正方形右上角縱向往下 2，開始切割。先橫向往左切 10 (2 倍單位長方形之橫向長度)，縱向往下切 2 (單位長方形之縱向長度)，再橫向往左切 10，縱向往下切 2，完成第一次階梯狀切割。接著橫向往右切至離邊 5(一個單位長方形的長)。開始第二次階梯狀切割，先縱向往下切 2，橫向往左切 10，再縱向往下切 2，橫向往左切 10(剛好切到小正方形的邊，結束)。再將此橘色切片往左下方推移一層階梯，也就是剪拼成目標邊長 35 之正方形的左上端。
3. 接著處理左下方的部分。切割出橫 2 縱 25 之長方形，並旋轉 90°放入右上方兩次階梯狀切割的中間縫隙。



(三) 對【16,63,65】做四片解的研究，研究過程如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 65 的正方形剪拼成邊長 16 和 63 的正方形。

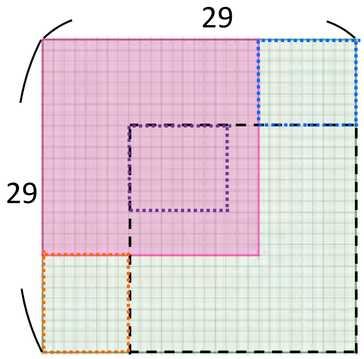
1. 將邊長 65 的正方形的左上角截去邊長 16 的正方形，並且將目標邊長 63 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 49 縱 2 的長方形，gcd(49,63)＝7，所以用橫 7 縱 2 當作一個單位長方形。在大正方形右上角縱向往下 2，開始切割。橫向往左切 14，縱向往下切 2，這樣重複切三次，完成第一次階梯狀切割。接著橫向往右切至離邊 7 單位。開始第二次階梯狀切割，縱向往下切 2，橫向往左切 7，這樣重複切三次。再將此藍色切片往左下方推移一層階梯，也就是剪拼成目標邊長 63 之正方形的左上端。
3. 接著處理左下方的部分。切割出橫 2 縱 49 之長方形，並旋轉 90^0 放入右上方兩次階梯狀切割的中間縫隙。



(四) 對【20,21,29】做四片解的研究，研究過程如下：

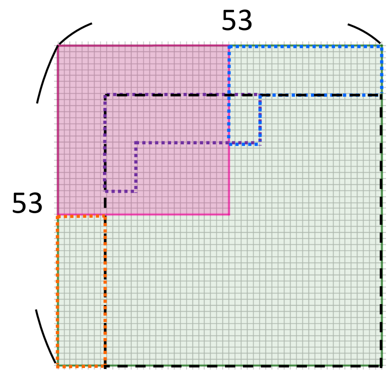
透過階梯狀切割，嘗試將邊長 29 的正方形剪拼成邊長 20 和 21 的正方形。

1. 將邊長 29 的正方形的左上角截去邊長 20 的正方形，並且將目標邊長 21 的正方形範圍用黑虛線標示出來。
2. 我們先處理右上方的部分，將藍框區塊往左下方移至紫框區塊。
3. 接著處理左下方橘色框的部分，不管是用階梯狀切割或是旋轉 90º，都根本無法在四片解的限制下成功。



(五) 對【28,45,53】做四片解的研究，研究過程如下：

1. 將邊長 53 的正方形的左上角截去邊長 28 的正方形，並且將目標邊長 45 的正方形範圍用黑虛線標示出來。
2. 我們先處理右上方的部分，階梯狀切割將藍框區塊往左下方移至紫框區塊。
3. 接著處理左下方橘色框的部分，不管是用階梯狀切割或是旋轉 90º，都根本無法在四片解的限制下成功。



(六) 在上述討論當中【8,15,17】、【12,35,37】、【16,63,65】屬 B 類中一部分有著 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 的特性，我們稱作 B_1 類。接下來探討 B_1 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 的互質畢氏三元數是否皆可用階梯狀切割做四片解。

九、B_1 類的一般化證明

(一) 我們完成【8,15,17】、【12,35,37】、【16,63,65】四片解的階梯狀剪拼，也發現上述成功的各組邊長都有著 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 的特性，現在嘗試將這個結果一般化。

由 $\ell_{大}=\ell_{中}+2 \Rightarrow m^2+n^2=m^2-n^2+2 \Rightarrow 2n^2=2 \Rightarrow n=1$

$\ell_{大}=m^2+n^2=m^2+1$	$\ell_{中}=m^2-n^2=m^2-1$	$\ell_{小}=2mn=2m$

∵$\ell_{大}$、$\ell_{中}$是奇數　∴m 必為偶數

令 m＝2k (k≧2)

$\ell_{大}$=m^2+1

　=(2k)^2+1=4k^2+1

$\ell_{中}$=m^2-1

　=(2k)^2-1=4k^2-1

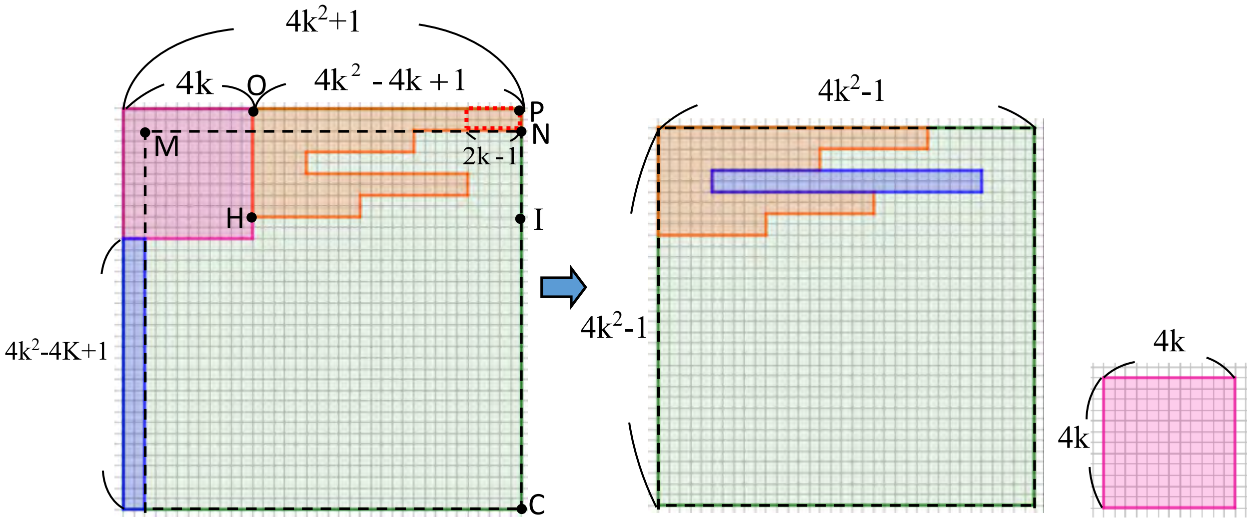
$\ell_{小}$=2m

　=2(2k)=4k

$\overline{MN}$ =$\ell_{大}$-2= 4k^2+1-2= 4k^2-1

$\overline{OP}$ =$\ell_{大}$-$\ell_{小}$=4k^2+1-4k=4k^2-4k+1

右上方橘色部分，單位長方形的橫向長度為 gcd($\overline{MN}$,$\overline{OP}$) = gcd(4k^2-1,4k^2 -4k+1) = 2k-1，縱向長度為 2，以橫 2k-1 縱 2 為單位長方形做切割。



1. 階梯狀切割的描述：

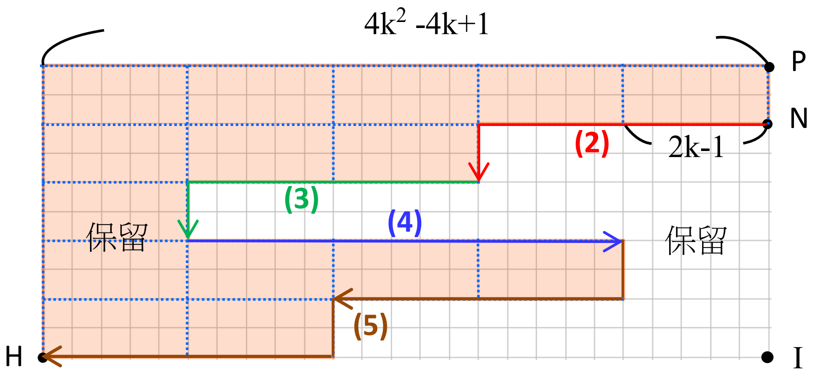
　(1) 先沿著邊長 4k^2+1 的大正方形左上角切割出一邊長 4k 的小正方形，並且將目標邊長 4k^2-1 的正方形範圍用虛線標示出來。

　(2) 將圖(54)中的橘色切片放大成圖(55)來解說。在大正方形右上角 P 點縱向往下 2，從 N 點開始切割。橫向往左切 4k-2**『註一』** (單位長方形之橫向長度的 2 倍)，縱向往下切 2 (單位長方形之縱向長度)。

『註一』：$\ell_{中}$-$\overline{OP}$ =(4k^2-1)-(4k^2-4k+1)=4k-2 就是橫向往左切的長度

而一個單位長方形的橫向長度是 2k-1⇨(4k-2)÷(2k-1)=2

所以橫向往左切 4k-2，也就是切單位長方形之橫向長度的 2 倍



(3) 重複橫向往左、縱向往下切(往左橫向切長度 4k-2，往下縱向切長度 2)，直到縱向往下切第 k-1 次『**註二**』，完成第一次階梯狀切割。

『**註二**』：重複往左往下切，切至距離左邊界 2k-1

$(4k^2-4k+1)-(2k-1)=4k^2-6k+2$

第一次階梯狀切割橫向總長 $4k^2-6k+2$，而每次橫向往左切 4k-2。

$(4k^2-6k+2)\div(4k-2)=k-1$

所以第一次階梯狀切割要橫向左切 k-1 次，縱向下切 k-1 次。

(4) 再往右切 $4k^2-8k+3$『**註三**』(亦即切至距離右邊界 2k-1)。

『**註三**』：左右各保留一個單位長方形之長

$(4k^2-4k+1)-(2k-1)\times2=4k^2-8k+3$

所以橫向往右切 $4k^2-8k+3$

(5) 開始第二次階梯狀切割，再重複往下往左切。(縱向往下切割長度 2，橫向往左切割長度 4k-2，一直切割到 H 點。)

(6) 大正方形右上方會出現兩次階梯狀切割。總計縱向往下切 2k-2 次『**註四**』，橫向往左切 2k-2 次，橫向往右切 1 次。再將此橘色切片往左下方推移一層階梯，剪拼成目標邊長 $4k^2-1$ 之正方形的左上端。

『**註四**』：總共要縱向往下切割的長度是$\overline{NI}$ ∵橘色這片是由 N 點切割到 H 點

∴總共要往下切割的長度是粉紅色小正方形邊長(4K)少上下兩段各 2 的長度

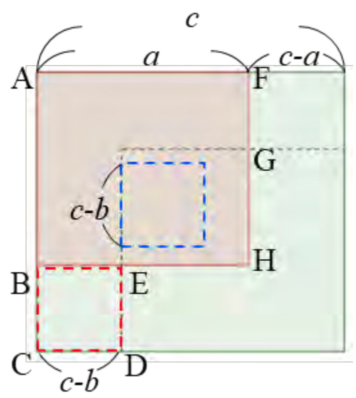
$\overline{NI}$=4K-4　每次下切 2 ⇨ (4K-4)÷2=2k-2

所以縱向往下切 2k-2 次，而橫向往左切也會是 2k-2 次。

(7) 將大正方形左下方切割出橫 2 縱 $4k^2$-4k+1 之長方形，並旋轉 90^0 放入右上方兩次階梯狀切割的中間縫隙。此即完成 B_1 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 用階梯狀剪拼做 4 片解的通解。

(二) **小結**：B 類中屬 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 特性者(稱 B_1 類)，經由以上一般化的結果皆可成功切出四片通解。由上述討論(Ⅱ)中【20,21,29】、【28,45,53】無法成功四片解，我們假設有五片解的存在，接下來進行五片解的推導。

(三) 證明 <u>B 類扣除 B_1 類後</u>不存在五片解



以互質的畢氏三元數【a,b,c】為三正方形的邊長，c 為大正方形的邊長，a 為小正方形的邊長，進行切割。

1. 將邊長 c 的正方形的左上角截去邊長 a 的正方形，並且將目標邊長 b 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 將四邊形 BCDE，旋轉 90°，移放在目標邊長 b 的正方形虛線範圍的左半邊。
3. 若要成功移放入，$\overline{\mathrm{CD}}(=c-b)$必為$\overline{\mathrm{FH}}(=a+b-c)$的因數，也就是 c-b 為 a 的因數，代入【m^2-n^2,$2mn$,m^2+n^2】，得矛盾。。
4. 如果要變成邊長為 b 的正方形，一定要再多二片，因此五片解不成功。

(四) 前面已試著剪拼過 B 類中 $\ell_{大}\neq\ell_{中}+2$ 的互質畢氏三元數【20,21,29】、【28,45,53】，無法在四片解的限制下成功，我們將 B 類中最少片數為六片稱為 B_2 類(如上述【20,21,29】)，在之後進行 B_2 類六片解的討論。

十、B_2 類六片解的成功解法

(一)【20,21,29】進行階梯狀切割做六片解，我們發現有兩種階梯狀剪拼法。

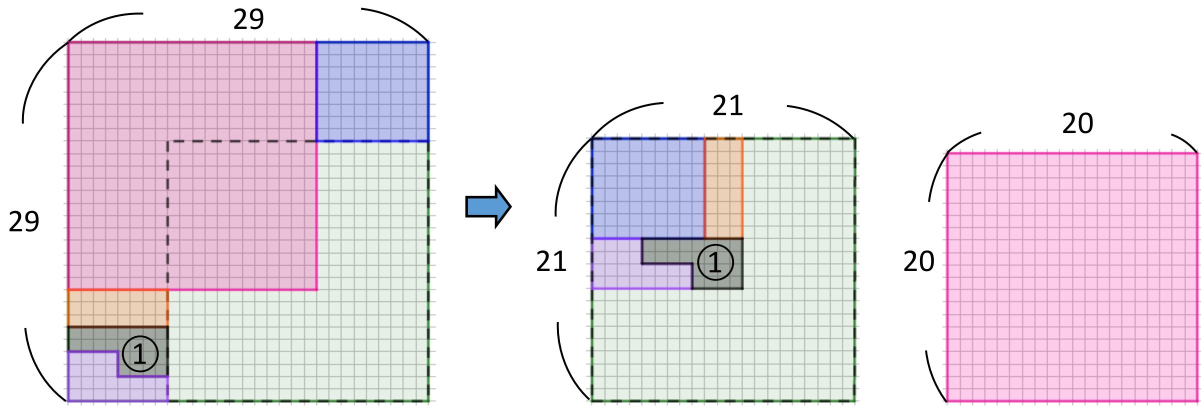
1. 第一種剪拼法。透過階梯狀切割，嘗試將邊長 29 的正方形剪拼成邊長 20 和 21 的正方形，研究過程如下：

(1) 將邊長 29 的正方形的左上角截去邊長 20 的正方形，並且將目標邊長 21 的正方形範圍用虛線標示出來。

(2) 先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 9 縱 8 的藍色長方形，移至目標邊長 21 的正方形虛線範圍的左上角。

(3) 接著處理左下方的部分。切割出橫 2 縱 25 之長方形，並旋轉 90^0 放入橫 9 縱 8 的藍色長方形的右側。

(4) 左下方剩橫 8 縱 6 的長方形，要剪拼成橫 12 縱 4 的長方形，gcd(8,12)=4，gcd(6,4)=2，因此一單位長方形為橫 4 縱 2 的長方形，故採用橫 4 縱 2 為一單位的階梯狀切割，並將所得切片①向右下方推移一層階梯，再移放在藍色、橘色切片的下方。

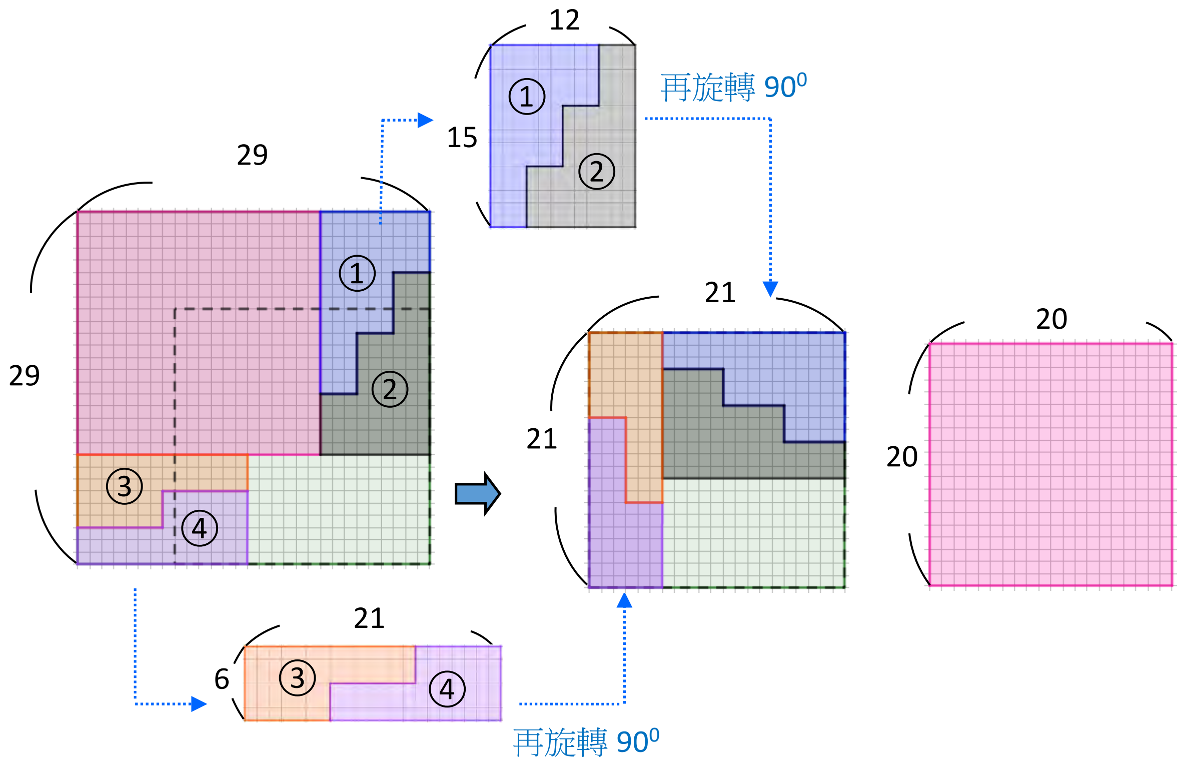


2. 第二種剪拼法。透過階梯狀切割，嘗試將邊長 29 的正方形剪拼成邊長 20 和 21 的正方形，研究過程如下：

(1) 將邊長 29 的正方形的左上角截去邊長 20 的正方形，並且將目標邊長 21 的正方形範圍用虛線標示出來。

(2) 先處理右上方的部分。要將橫 9 縱 20 的長方形剪拼成橫 12 縱 15 的長方形，gcd(9,12)=3，gcd(20,15)=5，因此一單位長方形為橫 3 縱 5 的長方形，故採用橫 3 縱 5 為一單位的階梯狀切割，並將所得的切片①向左下方推移一層階梯，成為橫 12 縱 15 的長方形，再旋轉 90^0，放置於目標邊長 21 的正方形虛線範圍的右上角。

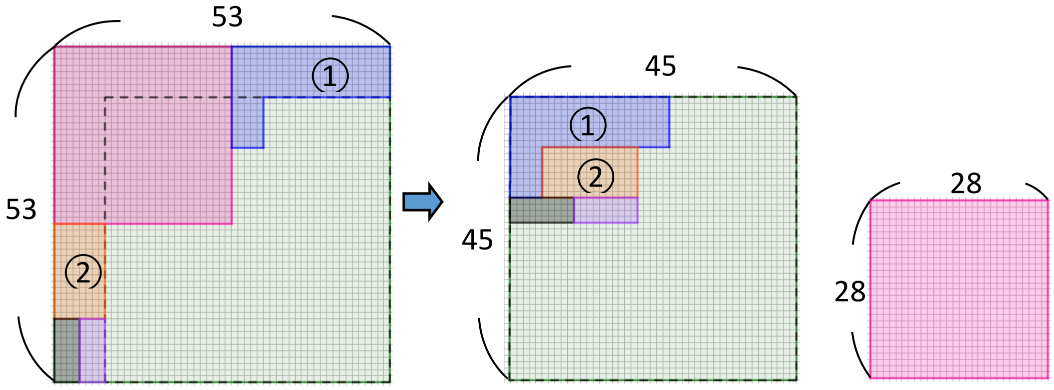
(3) 接著處理左下方的部分。要將橫 14 縱 9 的長方形剪拼成橫 21 縱 6 的長方形，gcd(14,21)=7，gcd(9,6)=3，因此一單位長方形為橫 7 縱 3 的長方形，故採用橫 7 縱 3 為一單位的階梯狀切割，並將所得的切片③向左下方推移一層階梯，成為橫 21 縱 6 的長方形，再旋轉 90^0，移放在目標邊長 21 的正方形虛線範圍的左半邊。



(二)【28,45,53】進行階梯狀切割做六片解，研究過程如下：

透過階梯狀切割，嘗試將邊長 53 的正方形剪拼成邊長 28 和 45 的正方形。

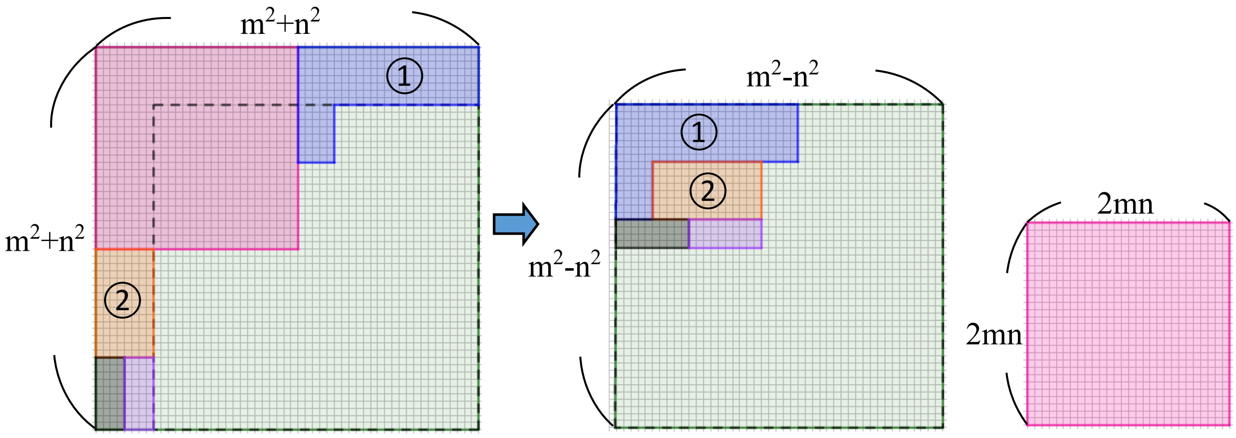
1. 將邊長 53 的正方形的左上角截去邊長 28 的正方形，並且將目標邊長 45 的正方形範圍用虛線標示出來。
2. 先處理右上方的部分。最上端剩餘的部分為橫 25 縱 8 的長方形，移至目標邊長 45 的正方形虛線範圍的左上角，右側會超出粉紅色剪去的部分，凸出橫 5 縱 8 的長方形，所以一起移走(藍色切片①)。
3. 接著處理左下方的部分。先切割出橫 8 縱 15 之橘色長方形②，並旋轉 90^0 放入藍色切片①凹槽。
4. 左下方剩橫 8 縱 10 的長方形，須剪拼成橫 20 縱 4 的長方形，所以直接切割成黑色、紫色兩片橫 4 縱 10 的長方形，再將兩片旋轉 90^0 後，拼成橫 20 縱 4 的長方形，平放在藍色、橘色切片的下方。



(三) **小結**：經過【20,21,29】、【28,45,53】的剪拼，得知 B 類中 $\ell_{大} \neq \ell_{中}+2$ 的互質畢氏三元數用階梯狀切割做四片解是不成功的，我們找到六片解的切法。

(四) 嘗試將 B 類扣除 B_1 類、B_2 類後找到切割最少片解法則

1. 將邊長 m^2+n^2 的正方形的左上角截去邊長 2mn 的正方形，並且將目標邊長 m^2-n^2 的正方形範圍用黑色虛線標示出來。
2. 可見邊長 m^2+n^2 的正方形右上角，階梯狀剪拼不會成功。
3. 試著採用另一種剪拼法，先處理右上方的部分，也就是將藍框區塊往左下方移至紫框區塊。
4. 接著處理左下方的部分。先切割出橘色長方形，並旋轉 90° 放入藍色切片的下方凹槽。
5. 左下方剩橫的長方形，試著用階梯狀切割並旋轉 90° 剪拼成黑色虛線剩的長方形。
6. 若可以階梯狀切割，也就是完成六片解(歸為 B_2 類)，故得證除了 B_1 類、B_2 類以外的 B 類片數皆大於六片 。



陸、研究結論

一、透過推導我們發現一個大正方形，若要在單位格線上做剪拼成兩個小正方形的三片解是不存在的，最少需要做四片解。

二、我們從互質畢氏三元數【3,4,5】,【5,12,13】,【7,24,25】,【8,15,17】開始剪拼，發現不同的奇偶性質有著不同的階梯狀剪拼方式，故將互質畢氏三元數做分類，分成 A、B 類。如下表所示：

A 類			B 類		
$2mn > m^2-n^2$			$m^2-n^2 > 2mn,$		
【$\ell_{小}$、$\ell_{中}$、$\ell_{大}$】=【$m^2-n^2,2mn,m^2+n^2$】=【奇數,偶數,奇數】			【$\ell_{小}$、$\ell_{中}$、$\ell_{大}$】=【$2mn,m^2-n^2,m^2+n^2$】=【偶數,奇數,奇數】		
$\ell_{大}=\ell_{中}+1$	$\ell_{大}\neq\ell_{中}+1$		$\ell_{大}=\ell_{中}+2$	$\ell_{大}\neq\ell_{中}+2$	
皆可四片解	可六片解	片數>6	皆可四片解	可六片解	片數>6
A_1 類	A_2 類	其他	B_1 類	B_2 類	其他

三、本研究證明出 A_1 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的最少片解是四片，並求得其通解，還發現 A_1 有第二種階梯狀剪拼法。階梯狀剪拼法通解敘述如下：將大正方形左上角先切割出小正方形，右上方再以橫 2n 縱 1 為單位長方形做階梯狀切割，左下方以橫 1 縱 n 為單位長方形做階梯狀切割。

四、本研究證明出 B_1 類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 的最少片解是四片，並求得其通解。階梯狀剪拼法敘述如下：將大正方形左上角先切割去小正方形，令 m＝2k，右上方再以橫 2k-1 縱 2 為單位長方形做兩次階梯狀切割。左下方區塊旋轉 90°放入右上方兩次階梯狀切割的中間縫隙。

五、互質畢氏三元數分類表的大發現：透過下頁分類表，具備階梯狀四片通解的互質畢氏三元數邊長有特定的規則，亦即當 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 時(綠色框 斜線)，其可用 A_1 類四片通解完成剪拼；而當 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 的偶數時(紅色框 橫線)，其可用 B_1 類四片通解完成剪拼，且 B_1 類四片通解中的大正方形右上方，共進行兩次階梯狀剪拼，每次的階梯數正好等於 $\frac{m}{2}-1$。

六、本研究可作為在學習畢氏定理前的奠基模組活動，我們已實作出可進行正方形剪拼的教具，期望能把抽象的數學語言，以直觀的拼圖方式跟重要的數學定理結合。

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,4,5		8,15,17		12,35,37		16,63,65		20,99,101
2		5,12,13		20,21,29		28,45,53		36,77,85	
3			7,24,25				48,55,73		60,91,109
4				9,40,41		33,56,65		65,72,97	
5					11,60,61		39,80,89		
6						13,84,85			
7							15,112,113		51,140,149
8								17,144,145	

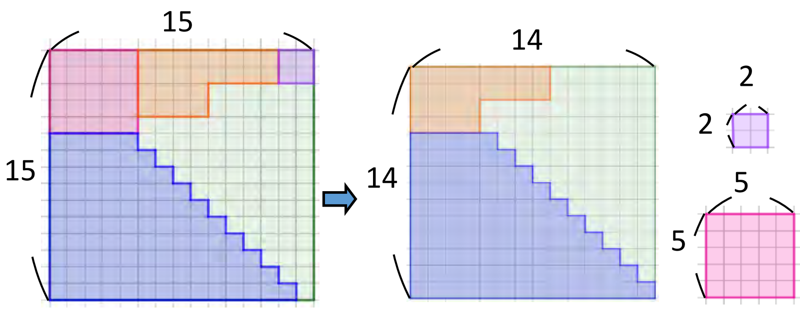
B_1 四片通解

B_2… A_2… 六片解或其他

A_1 四片通解

柒、未來展望

未來可以朝一個大正方形分割成三個小正方形的方向走，找出他們的規律性，再透過一些推導找出通解。例如：邊長為 15 的正方形，切割形成 5 塊，依序排列，形成三個邊長為 2、5 和 14 的正方形。



捌、參考資料

一、Greg Frederickson(1997).*Dissections*:*Plane & Fancy.* Cambridge ; New York, NY, USA :Cambridge University Press.

二、蕭偉智、陳彩鳳(2012)・科學研習月刊 51 卷第 1 期與第 2 期「讓幾何有趣些！漫談幾何切割」

【評語】030420

作者們考慮將一個邊長為整數的大正方形沿單位格線切割成若干個片段，將這些片段經平移或旋轉重組為兩個較小的整數邊長正方形，其中兩個較小正方形面積和等於大正方形面積，因此三個正方形邊長構成畢氏三元數。針對兩個小正方形邊長大小關係將畢氏三元數分成 A,B 兩類、分別討論分割成最少片段數的情形，並得到部分的結果。透過巧妙的分割與拼接方式，作者們針對原始正方形的邊長與切割出的較大的正方形的邊長差為 1(A 類)或 2(B 類)的兩種類型，分別給出了分割成最少片數（四片）的不規則片段再重組為兩個較小正方形一個具體的作法。此外針對上述類別以外的一些特例，也分別給出了分割為六片再重組的作法。分割與拼接的方式極具巧思，值得稱許，惟其中一個小正方形限制在大正方形的左上角。對於非限制在左上角的情形最少分割片數是否就是六片？以及是否可找到六片解的通解？這是有趣而且有一定難度的問題。如果能針對這個部分，給出一些好的結果，會很棒。

作品海報

壹、研究動機

在國二學到畢氏定理時，老師介紹許多古代數學家是利用剪拼的方式得證畢氏定理，如三國時代的劉徽提出的「出入相補原理」。後來在 Dissections : Plane & Fancy 的書中發現有數種畢氏數的階梯狀切割，讓我們十分感興趣，然而文章沒有說明切割方式，因此想自己制訂分類方式，並有系統地找到剪拼的通解，嘗試為它們找出有規則的最少片切割方式。

貳、研究問題

一、探討一個大正方形透過正方形網格剪拼成兩個小正方形的最少片解。
二、探討透過階梯狀剪拼方式，將互質畢氏三元數分成A、B兩類，找出切割最少片解法則。
三、探討A_1、B_1類的四片解與其通解。
四、探討A_2、B_2類的六片解。

參、研究設備及器材

方格紙、筆、電腦以及免費軟體Geogebra。

肆、名詞釋義

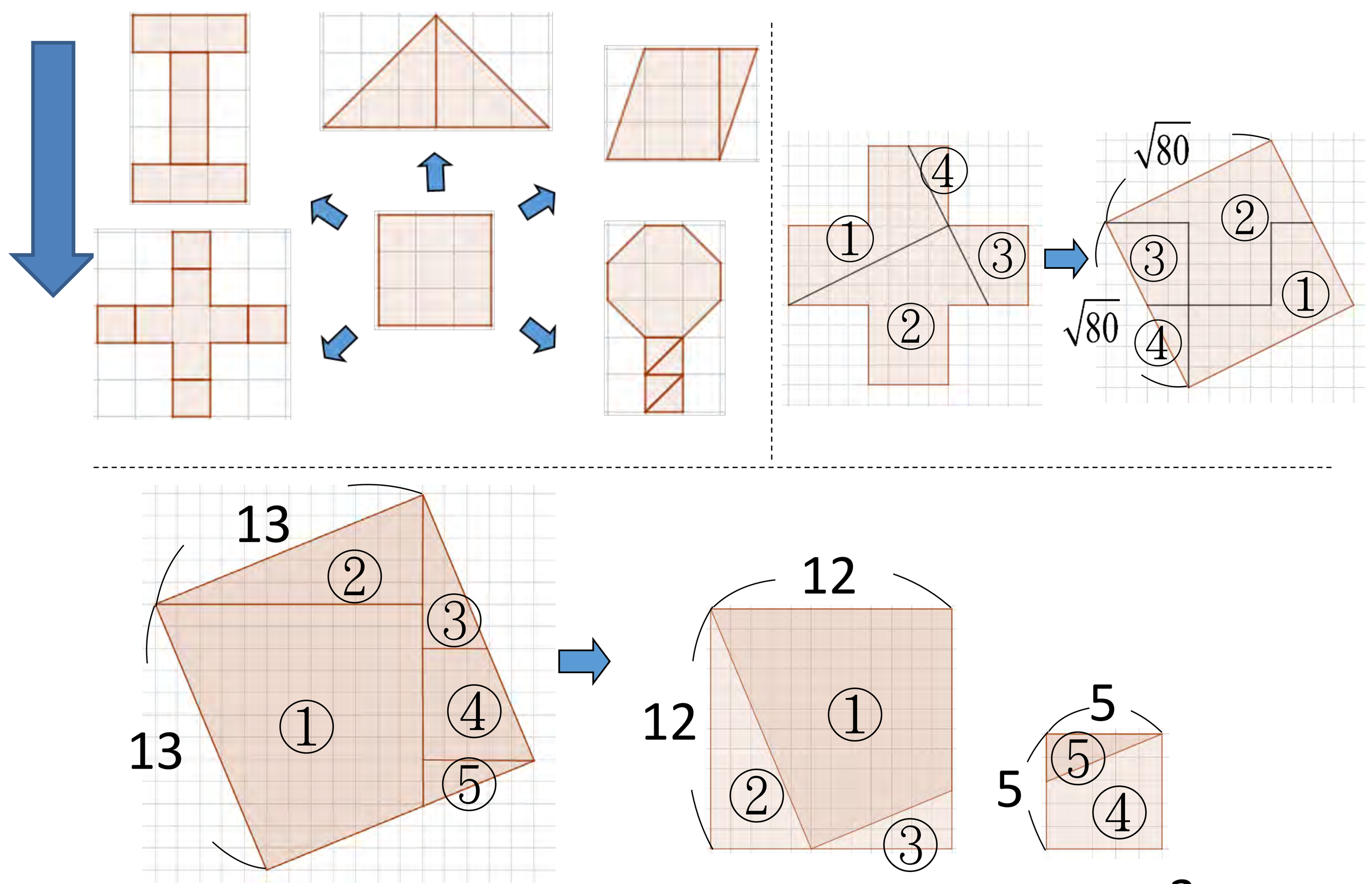
一、剪拼：本文討論的範圍以一塊正方形剪拼成兩塊正方形為主題。
二、正方形網格剪拼：每條格線間距1單位長，圖形的所有頂點位於格子點上，且所有的邊都位於格線上。
三、互質畢氏三元數：例如：【3,4,5】是互質畢氏三元數；【6,8,10】不是互質畢氏三元數。互質畢氏三元數是符合$a^2+b^2=c^2$的互質正整數解，其一般解為$a=2mn$、$b=m^2-n^2$、$c=m^2+n^2$，m、n互質且奇偶性不同。
四、$\ell_大$、$\ell_中$、$\ell_小$：分別代表大、中、小正方形的邊長。
五、定義分類方式如下

A類			B類		
A_1類	A_2類	其他	B_1類	B_2類	其他
$\ell_大=\ell_中+1$	$\ell_大\neq\ell_中+1$		$\ell_大=\ell_中+2$	$\ell_大\neq\ell_中+2$	
皆可四片解	可六片解	片數>6	皆可四片解	可六片解	片數>6

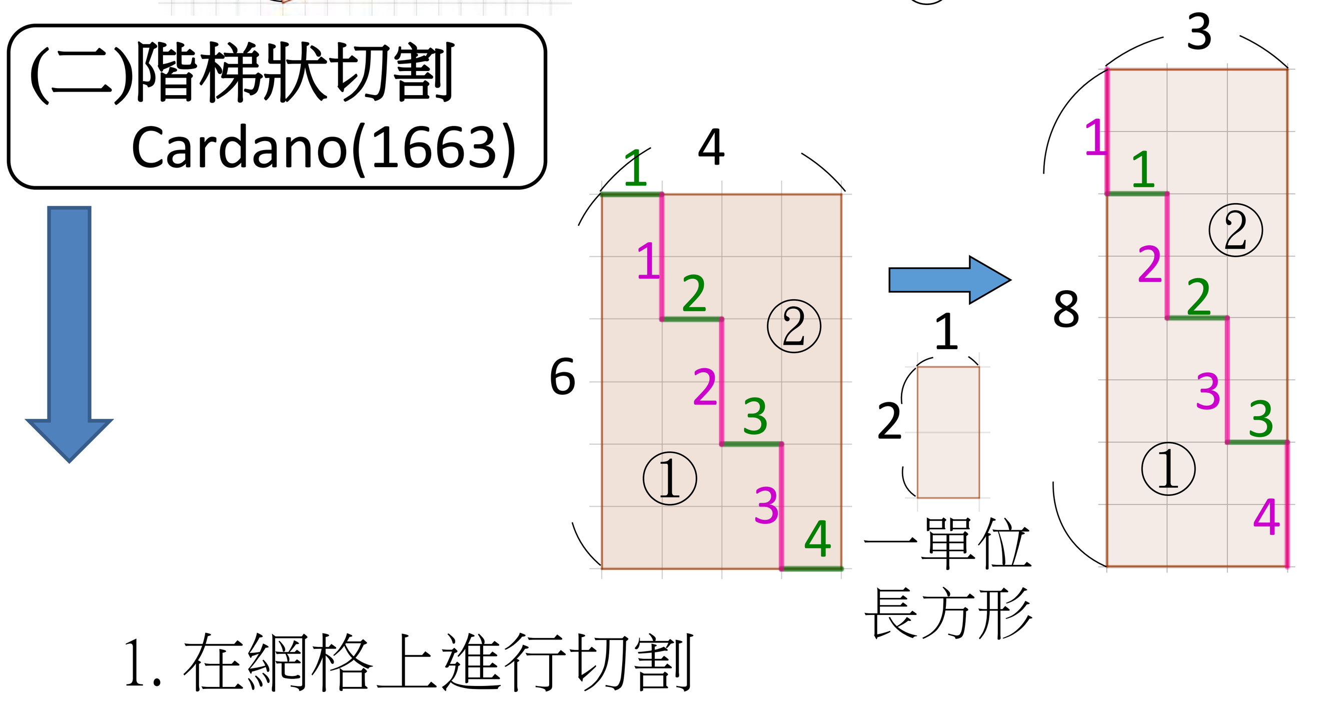
伍、研究過程與方法

一、研究方向的決定

(一)正方形剪拼 Bolyai Gerwien定理

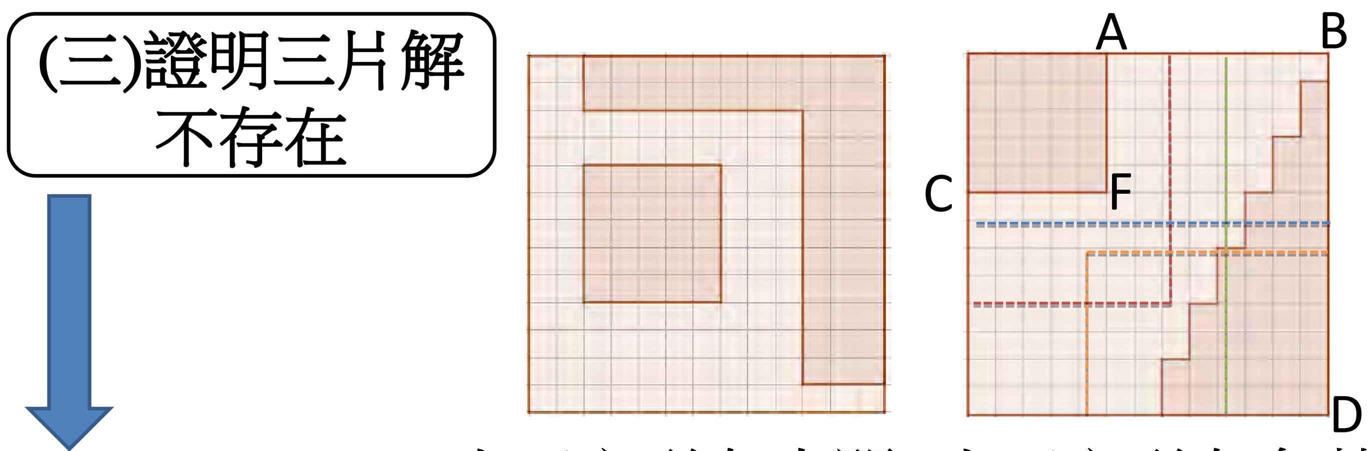


(二)階梯狀切割 Cardano(1663)



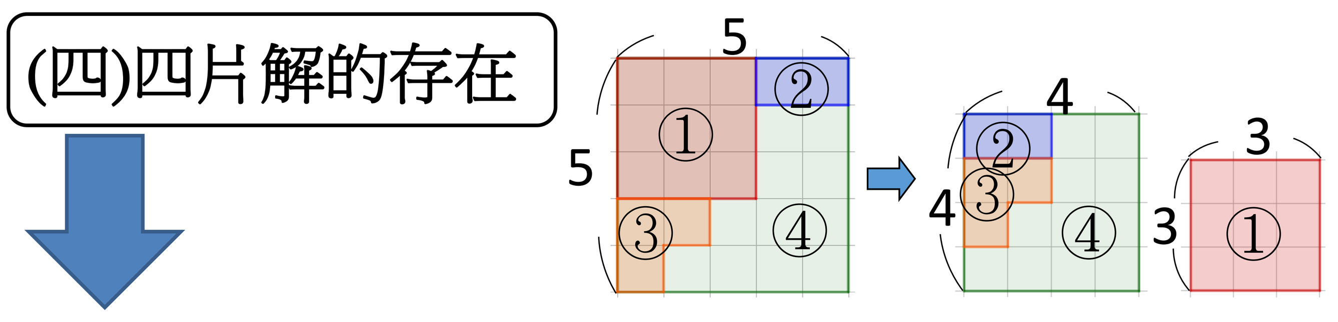
1. 在網格上進行切割
2. 橫向縱向兩者的單位長方形個數必須相差1

(三)證明三片解不存在



小正方形在中間 小正方形在角落

(四)四片解的存在

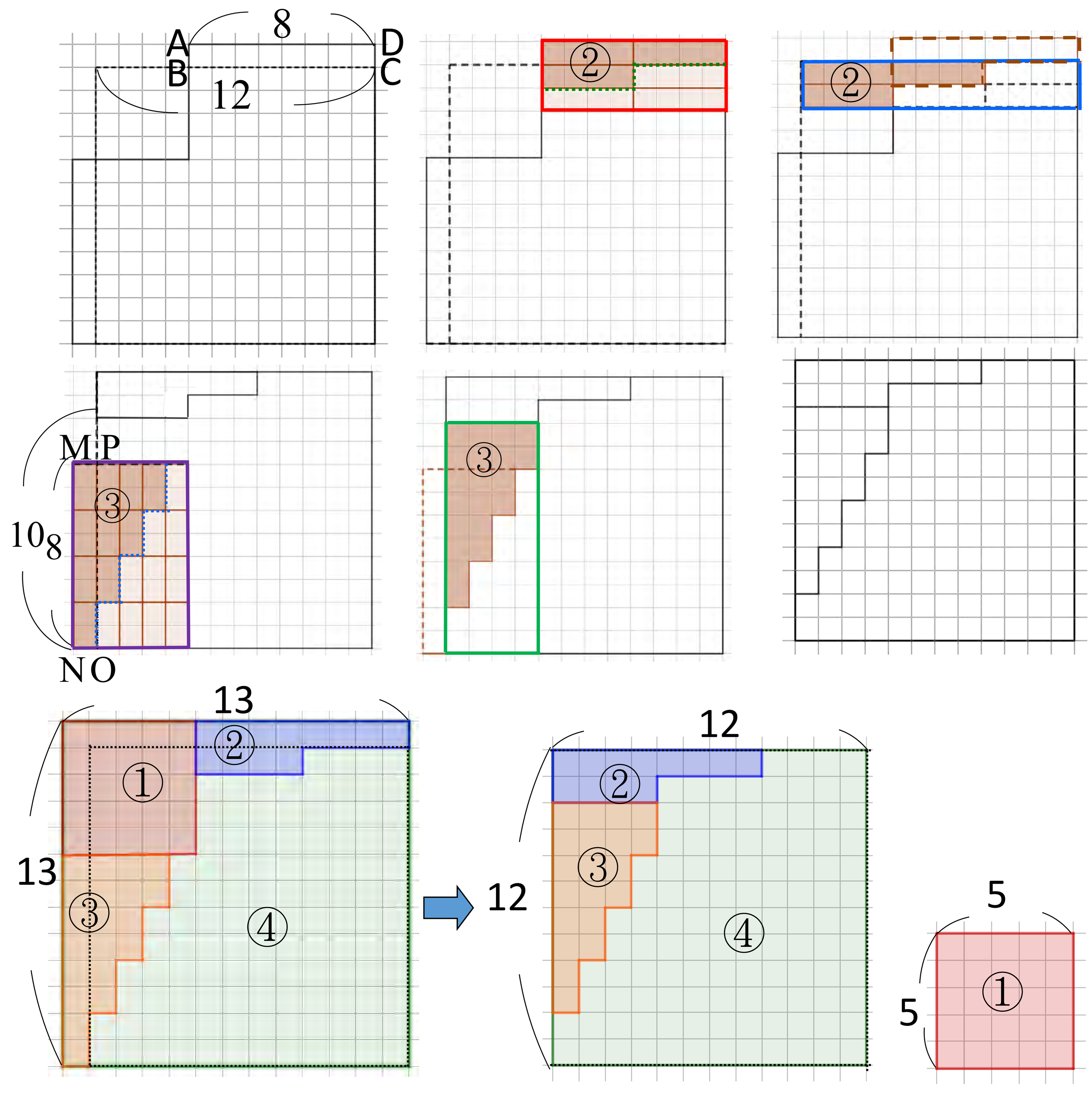


確立本研究的方向：
將一塊大正方形，遵循**Cardano**階梯狀切割（切割須符合平行或垂直正方形的邊），經過平移、旋轉、組合成兩個正方形，並以最少片數為目標。

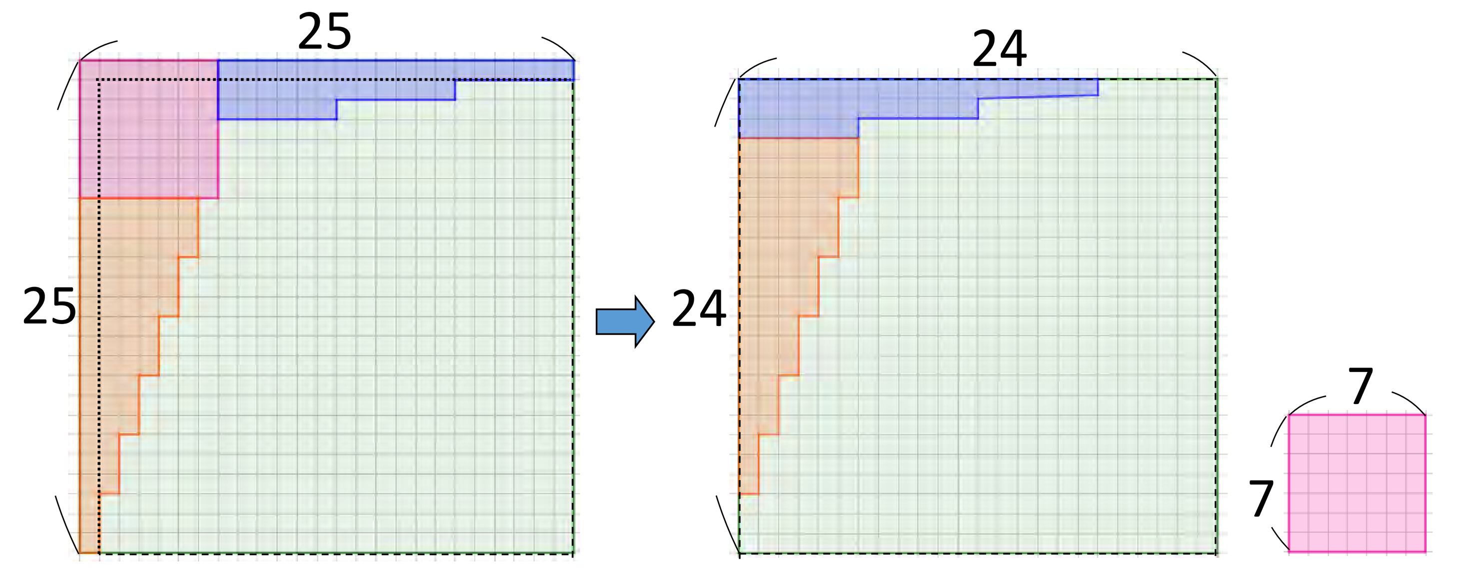
二、以Cardano階梯狀切割法討論(Ⅰ)

依序對【5,12,13】、【7,24,25】、【8,15,17】、【9,40,41】、【33,56,65】做四片解的研究。

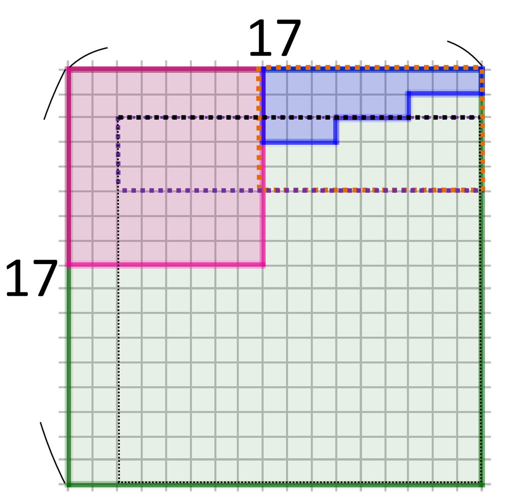
(一)最先對【5,12,13】做四片解的詳細研究



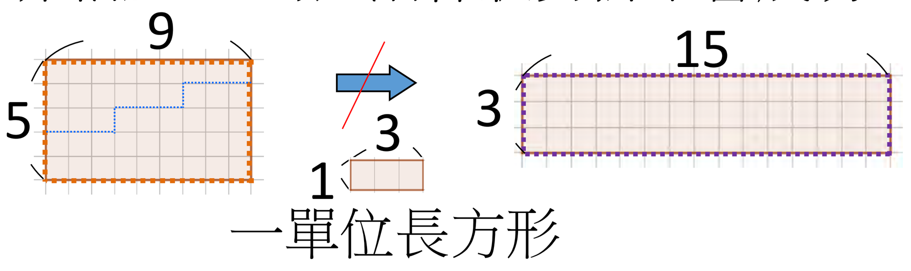
(二)對【7,24,25】做四片解的研究



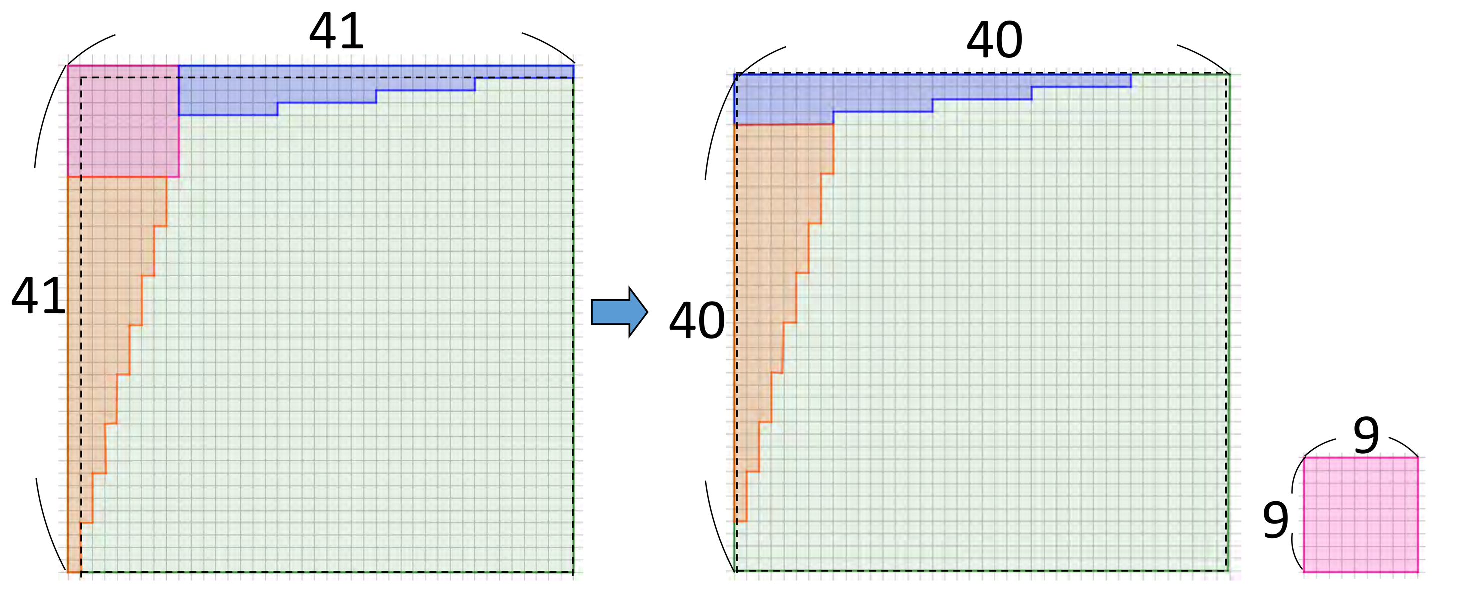
(三)對【8,15,17】做四片解的研究



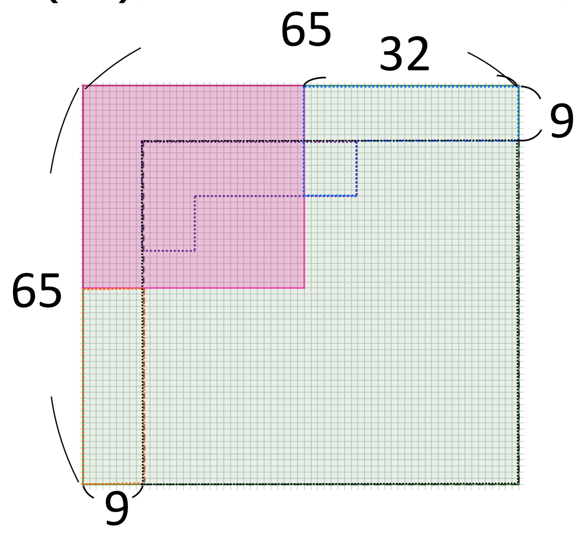
由橫9縱5的長方形變成橫15縱3的長方形，gcd(9,15)=3，gcd(5,3)=1，一單位長方形為橫3縱1，9÷3=3，5÷1=5，並非相差1，可知階梯狀剪拼不會成功。



(四)對【9,40,41】做四片解的研究



(五)對【33,56,65】做四片解的研究



不符合階梯狀剪拼的必要條件，所以四片解不會成功。

四、互質畢氏三元數的分類

用m、n列出較小的11組互質畢氏三元數來做研究。

A類：$2mn > m^2-n^2$時

m	2	3	4	5	7	8	
n	1	2	3	4	4	5	
$\ell_小 = m^2-n^2$	3	5	7	9	33	39	奇
$\ell_中 = 2mn$	4	12	24	40	56	80	偶
$\ell_大 = m^2+n^2$	5	13	25	41	65	89	奇

$\ell_大 = \ell_中 + 1$
A_1類 四片解

B類：$m^2-n^2 > 2mn$時

m	4	5	6	7	8	
n	1	2	1	2	1	
$\ell_小 = 2mn$	8	20	12	28	16	偶
$\ell_中 = m^2-n^2$	15	21	35	45	63	奇
$\ell_大 = m^2+n^2$	17	29	37	53	65	奇

五、 A_1類的一般化證明

成功的4組**邊長都有著$\ell_大 = \ell_中 + 1$的特性**且$\ell_大 = m^2+n^2$、$\ell_中 = 2mn$ 和 $\ell_小 = m^2-n^2$

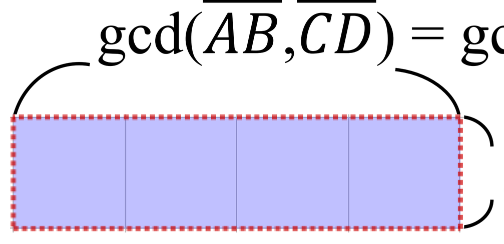
開始進行一般化的證明：

$\ell_大 = \ell_中 + 1$ ⇨ $m^2+n^2 = 2mn+1$ ⇨ $(m-n)^2 = 1$ ⇨ $m-n = \pm 1$

因 $m > n$，取$m=n+1$代入 $\ell_大$、$\ell_中$、$\ell_小$

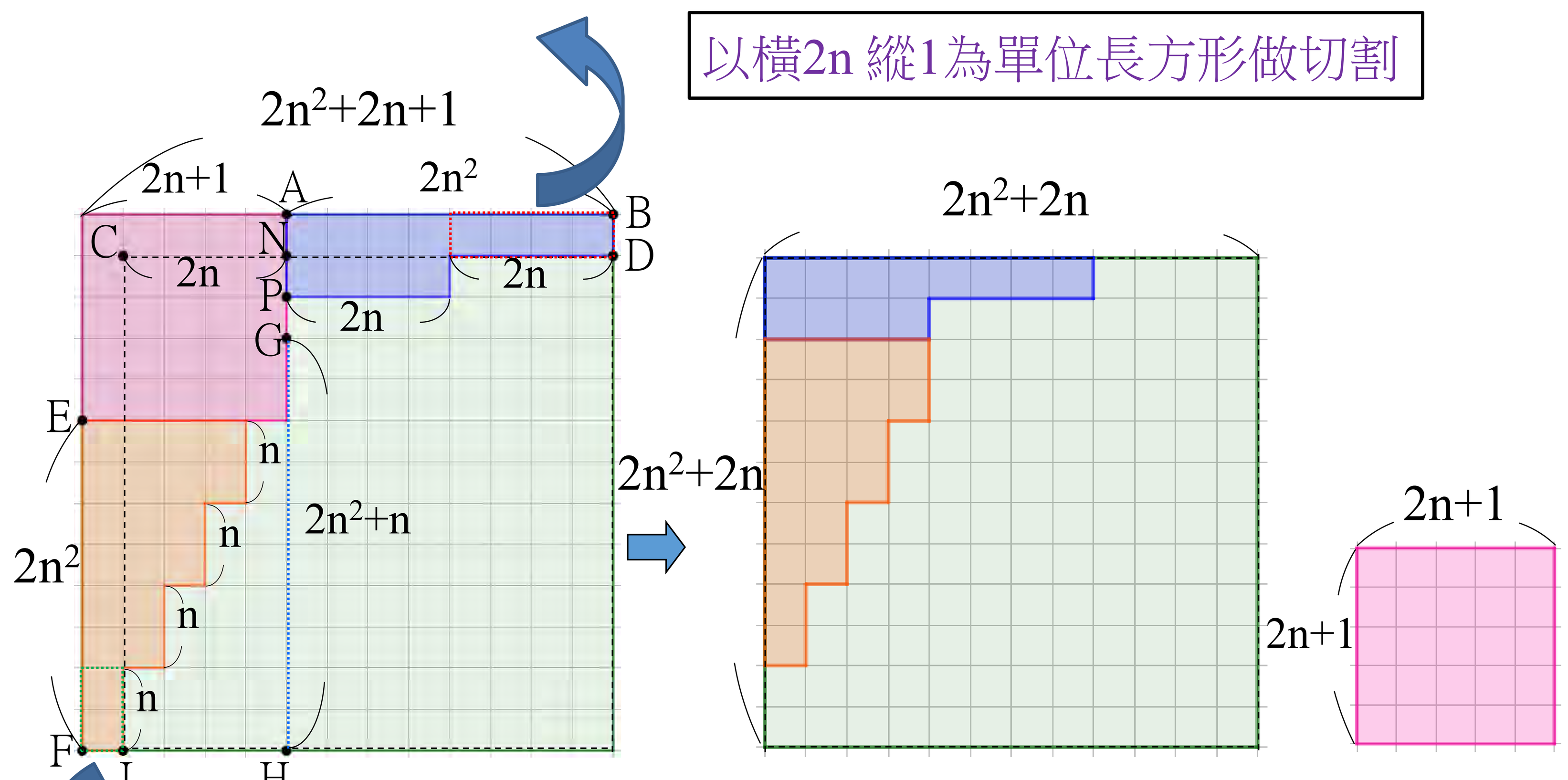
$\ell_大 = m^2+n^2$	$\ell_中 = 2mn$	$\ell_小 = m^2-n^2$
$= (n+1)^2+n^2$	$= 2(n+1) \times n$	$= (n+1)^2-n^2$
$= 2n^2+2n+1$	$= 2n^2+2n$	$= 2n+1$

$\gcd(\overline{AB},\overline{CD}) = \gcd(2n^2, 2n^2+2n) = 2n$

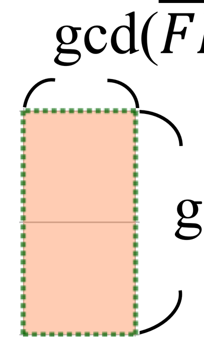


$\gcd(\overline{AG},\overline{NG}) = \gcd(n+1, n) = 1$

以橫2n 縱1為單位長方形做切割



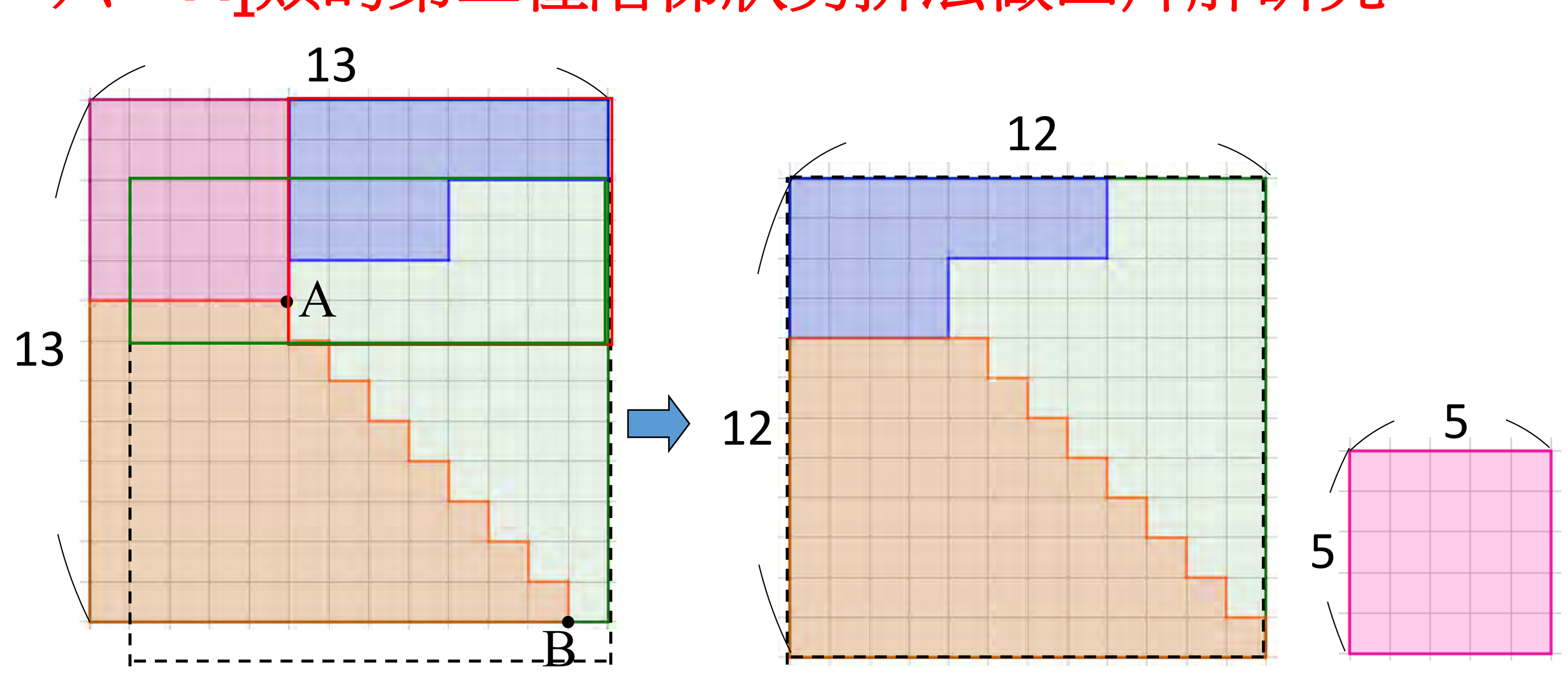
$\gcd(\overline{FH},\overline{CN}) = \gcd(2n+1, 2n) = 1$



$\gcd(\overline{EF},\overline{GH}) = \gcd(2n^2, 2n^2+n) = n$

以橫1 縱n為單位長方形做切割

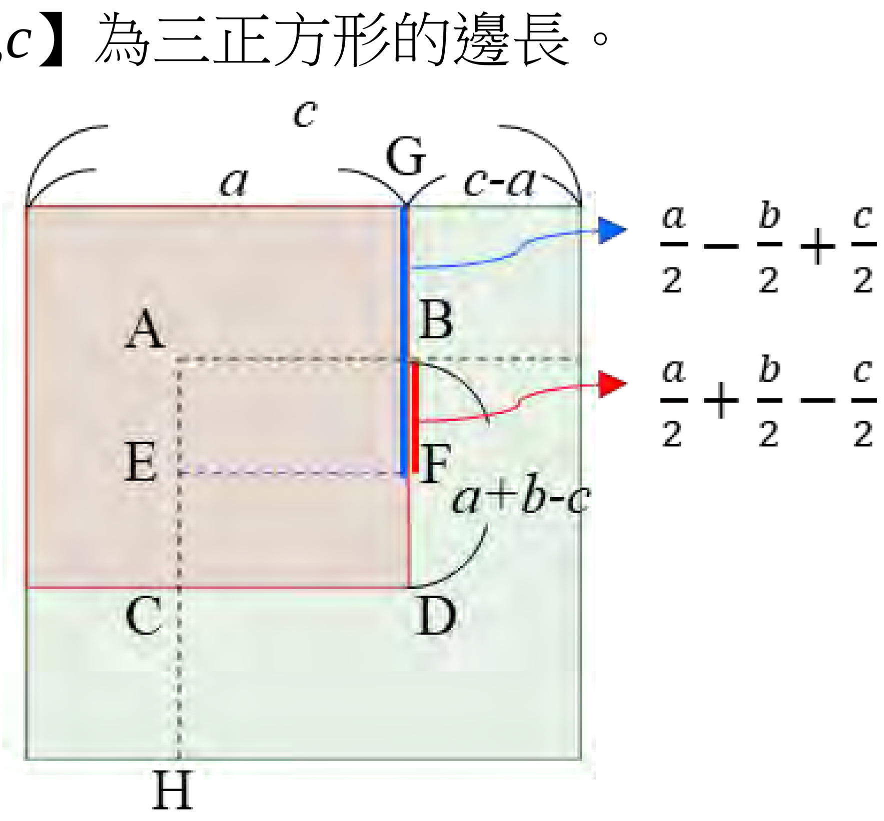
六、A_1類的第二種階梯狀剪拼法做四片解研究



七、證明A類扣除A_1類後不存在五片解

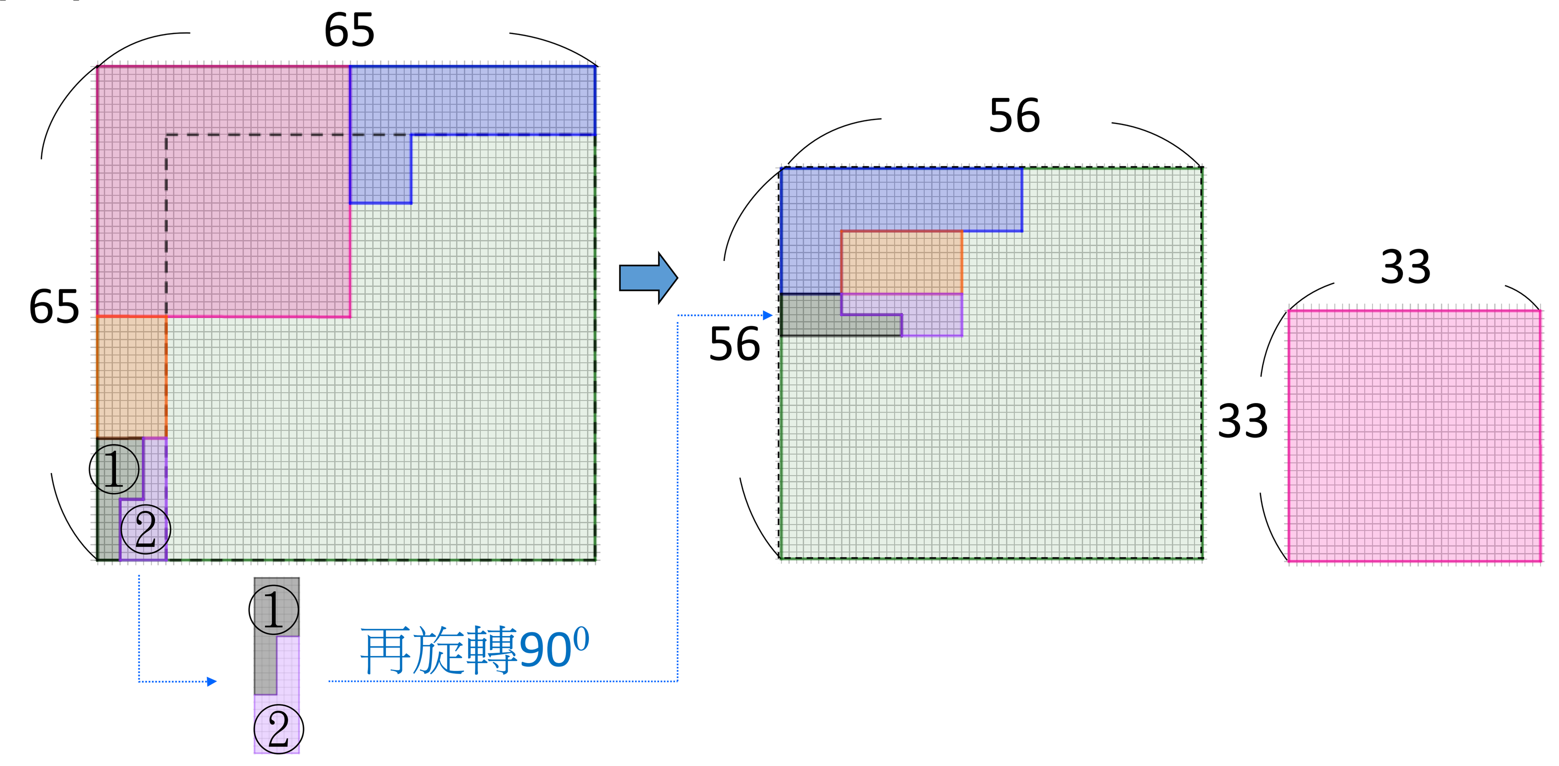
以互質的畢氏三元數【a,b,c】為三正方形的邊長。

右上、左下的部分，都無法利用階梯狀切割，各使用一片，因此至少各使用二片，原來去掉的一片小正方形、以及右下角不移動的片數，加起來至少有六片，因此五片解不存在。我們將A類中最少片數為六片稱為A_2類。

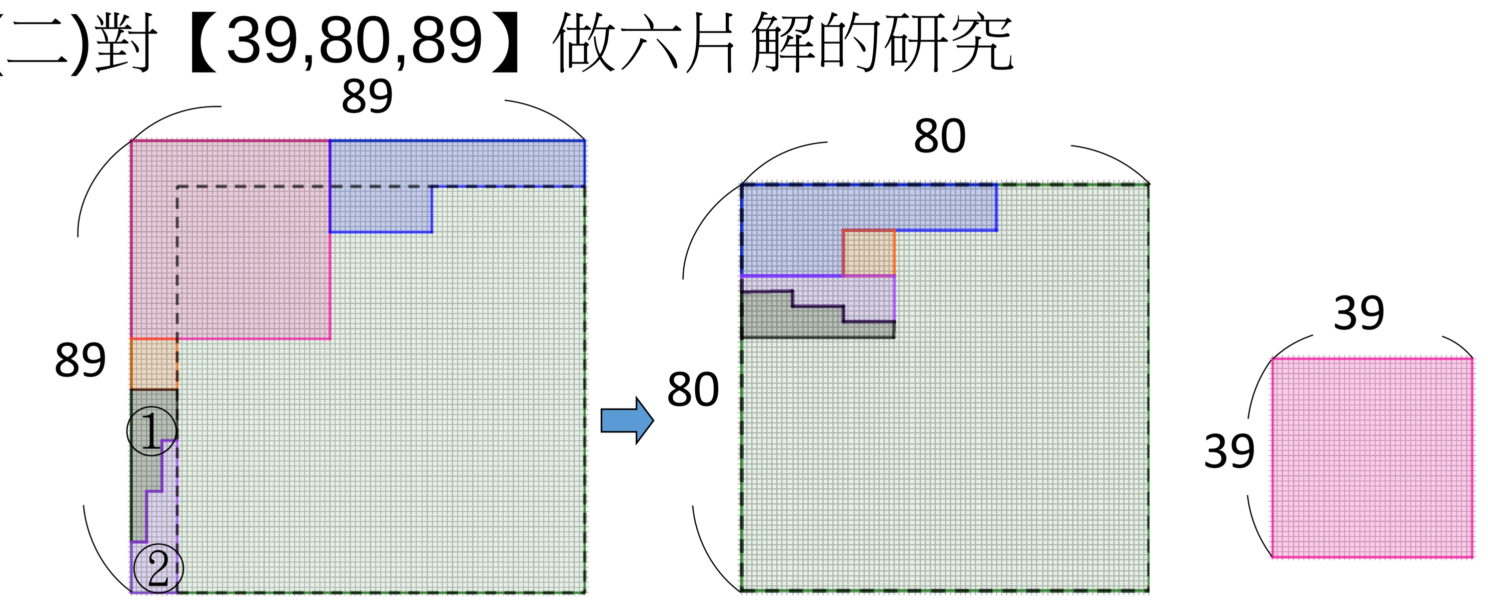


八、A_2類六片解的成功解法

(一)對【33,56,65】做六片解的研究



(二)對【39,80,89】做六片解的研究

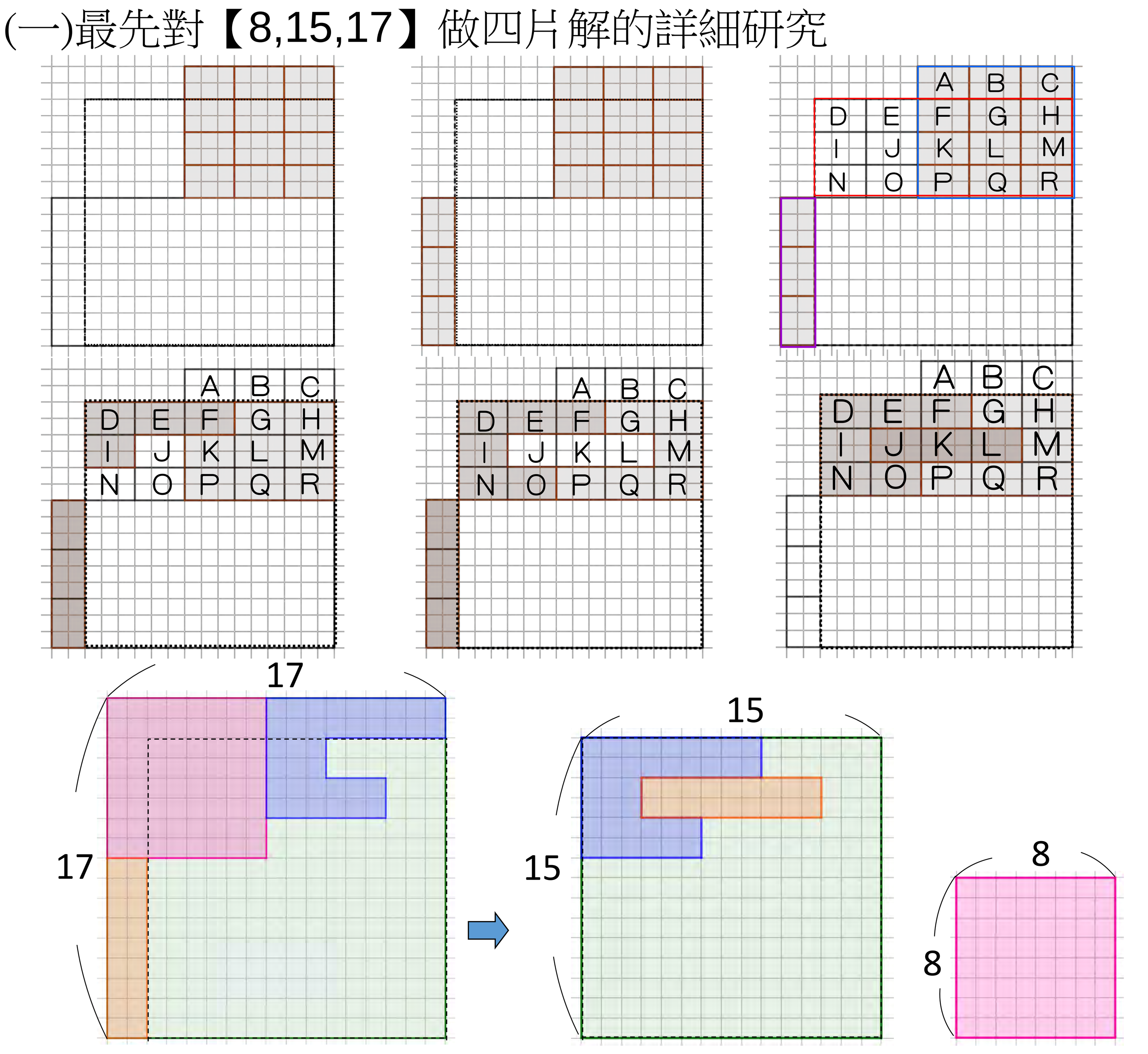


九、嘗試將A類扣除A_1類、A_2類後找到切割最少片解法則 ➡ 大於六片

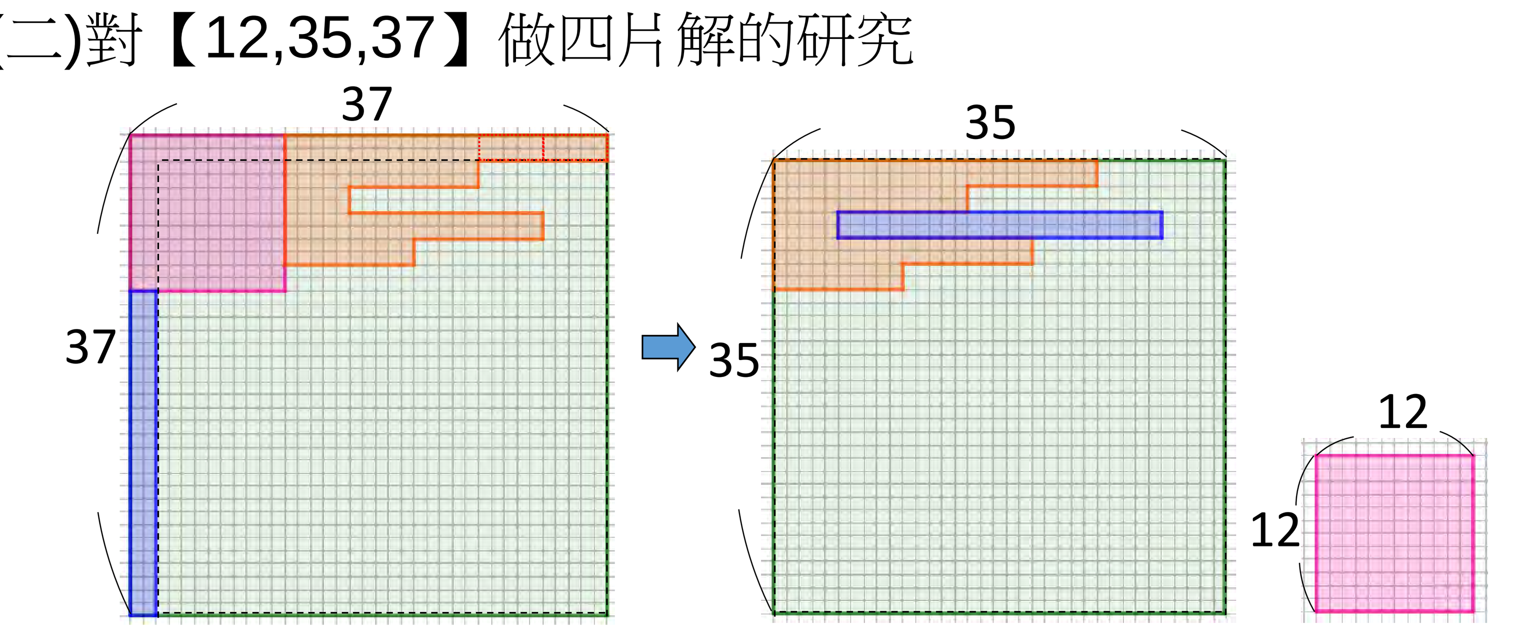
十、以Cardano階梯狀切割法討論(Ⅱ)

採階梯狀剪拼，依序對B類【8,15,17】、【12,35,37】、【16,63,65】、【20,21,29】、【28,45,53】做四片解的研究。

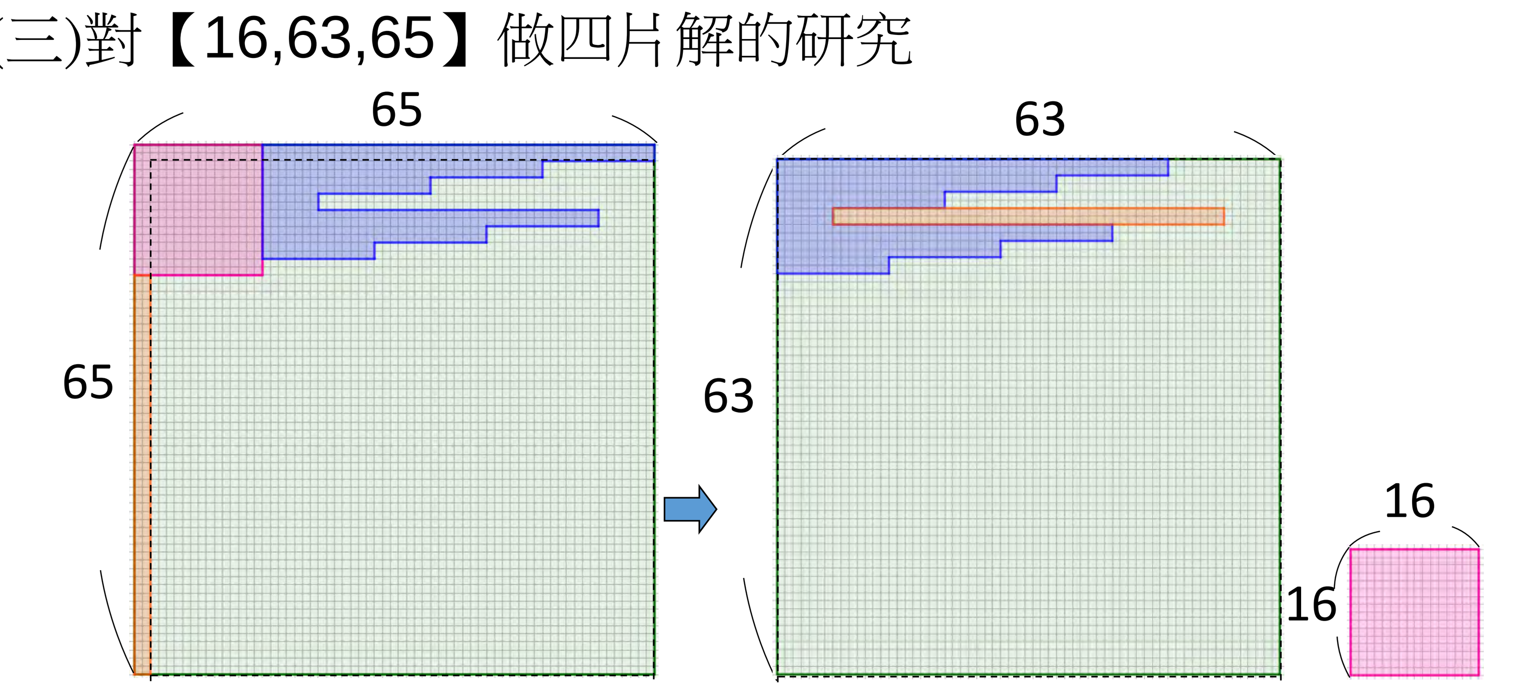
(一)最先對【8,15,17】做四片解的詳細研究



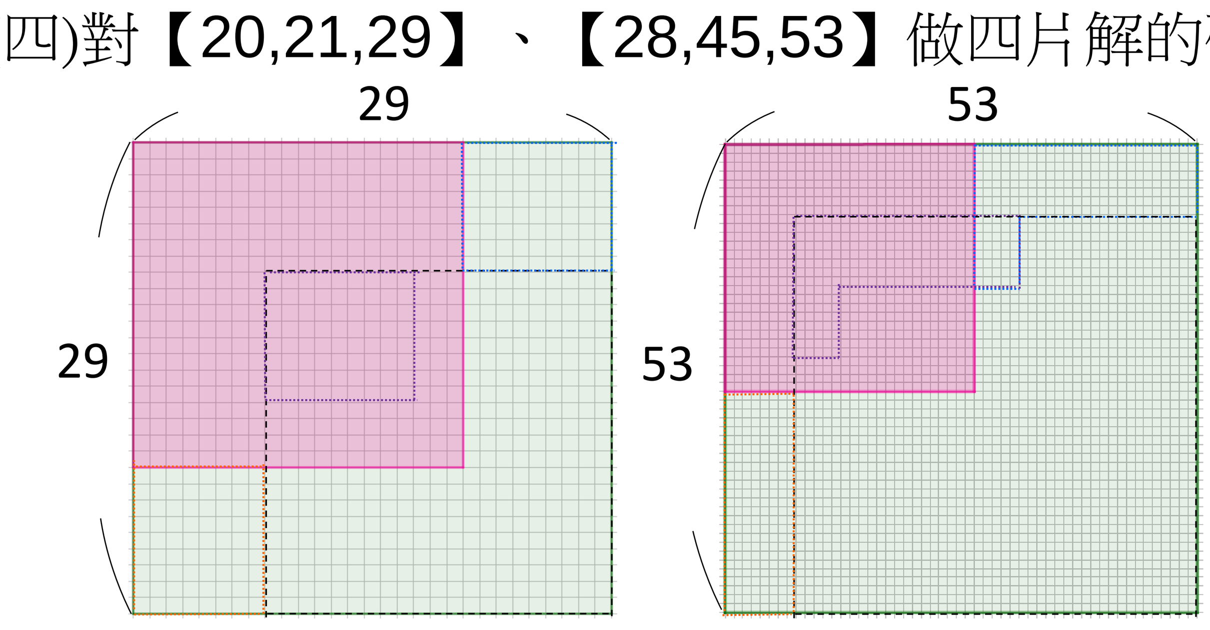
(二)對【12,35,37】做四片解的研究



(三)對【16,63,65】做四片解的研究



(四)對【20,21,29】、【28,45,53】做四片解的研究



無法在四片解的限制下成功。

十一、B_1類的一般化證明

成功的3組邊長都有著$\ell_{大}=\ell_{中}+2$的特性且$\ell_{大}=m^2+n^2$、$\ell_{中}=m^2-n^2$和 $\ell_{小}=2mn$

開始進行一般化的證明：

由$\ell_{大}=\ell_{中}+2$ ⇨ $m^2+n^2=m^2-n^2+2$ ⇨ $2n^2=2$ ⇨ $n=1$

$\ell_{大}=m^2+n^2=m^2+1$　　$\ell_{中}=m^2-n^2=m^2-1$　　$\ell_{小}=2mn=2m$

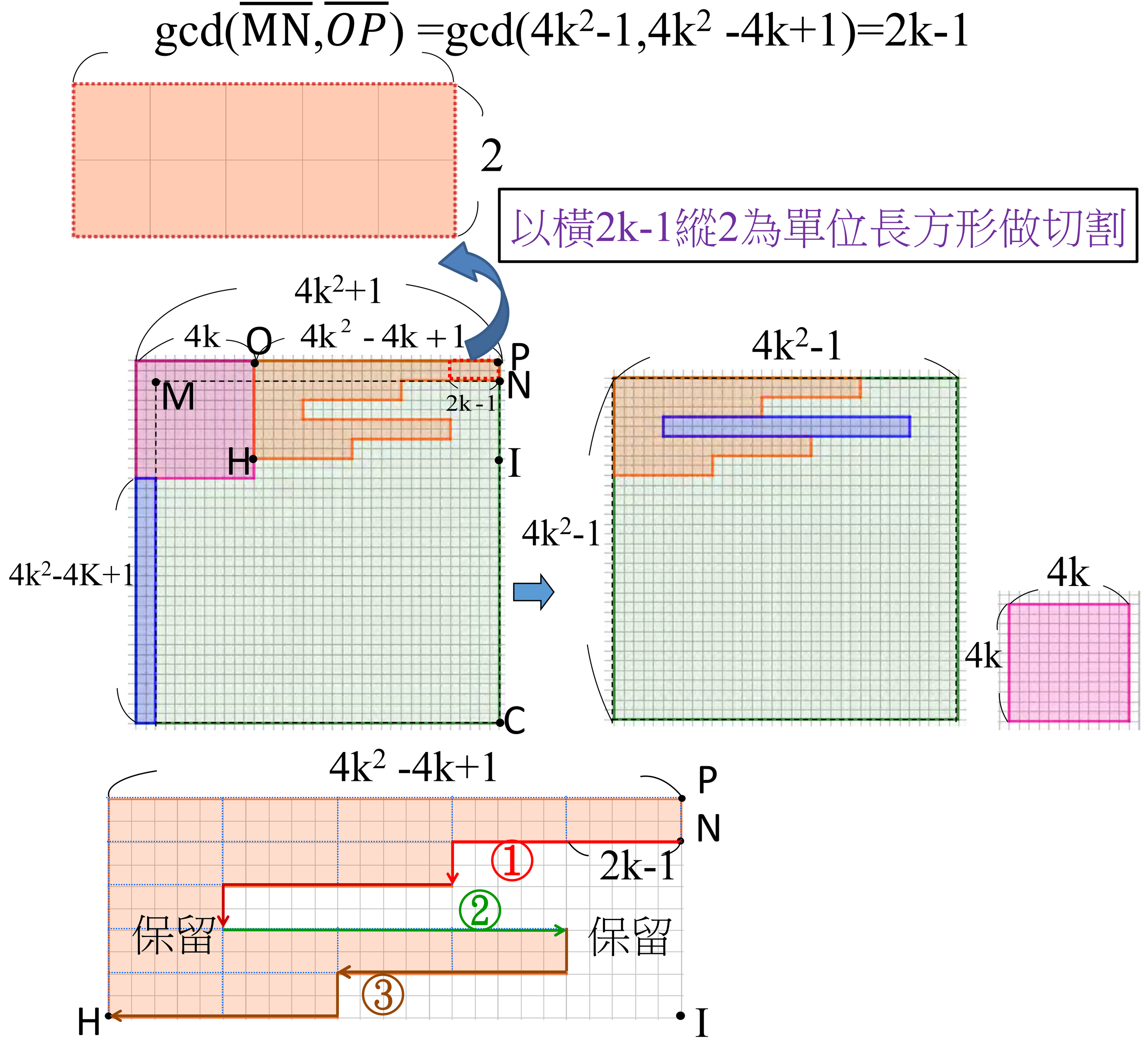
∵$\ell_{大}$、$\ell_{中}$是奇數 ∴m必為偶數　令m＝2k (k≧2)

$\ell_{大}=m^2+1=(2k)^2+1=4k^2+1$　　$\ell_{中}=m^2-1=(2k)^2-1=4k^2-1$　　$\ell_{小}=2m=2(2k)=4k$

$\overline{MN}=\ell_{大}-2=4k^2+1-2=4k^2-1$

$\overline{OP}=\ell_{大}-\ell_{小}=4k^2+1-4k=4k^2-4k+1$

$\gcd(\overline{MN},\overline{OP})=\gcd(4k^2-1,4k^2-4k+1)=2k-1$



第一步①:重複橫向往左、縱向往下切(往左橫向切長度4k-2，往下縱向切長度2)，直到縱向往下切第k-1次，完成第一次階梯狀切割。

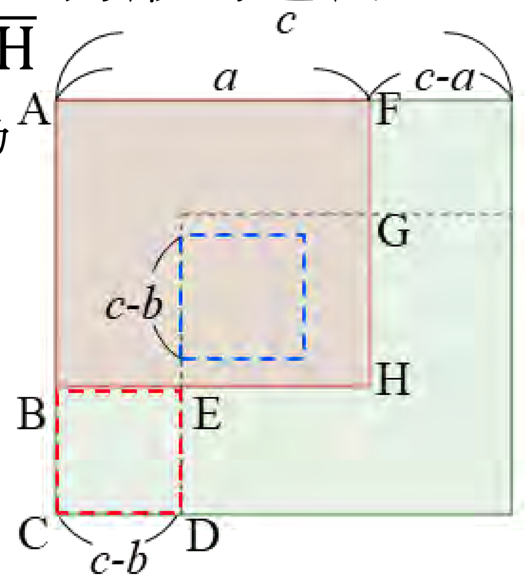
第二步②:再往右切$4k^2-8k+3$(切至距離右邊界2k-1)。

第三步③:接著第二次階梯狀切割，重複往下往左切(縱向往下切割長度2，橫向往左切割長度4k-2，一直切割到H點。)

第四步④:左下方切割出橫2縱$4k^2-4k+1$之長方形，並旋轉90°放入右上方兩次階梯狀切割的中間縫隙。

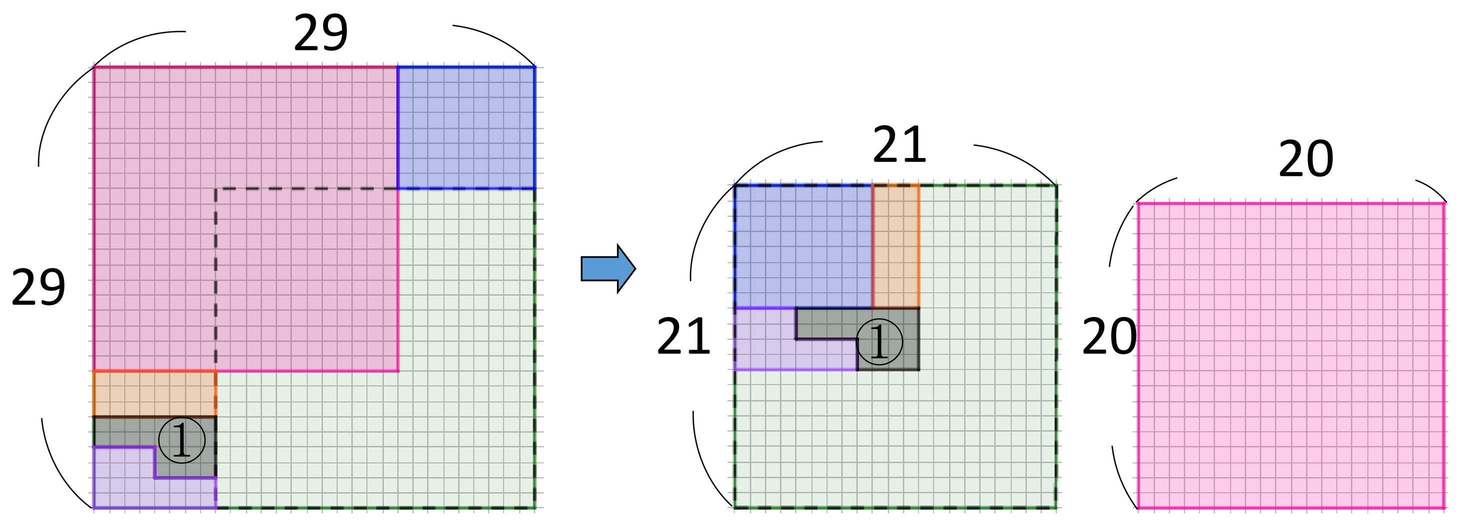
十二、證明B類扣除B_1類後不存在五片解

以互質的畢氏三元數【a,b,c】為三正方形的邊長。若要成功移入，$\overline{CD}(=c-b)$必為$\overline{FH}(=a+b-c)$的因數，也就是c-b為a的因數，代入【m^2-n^2,$2mn$,m^2+n^2】，得矛盾。如果要變成邊長為b的正方形，一定要再多二片，因此五片解不成功。我們將B類中最少片數為六片稱為B_2類。

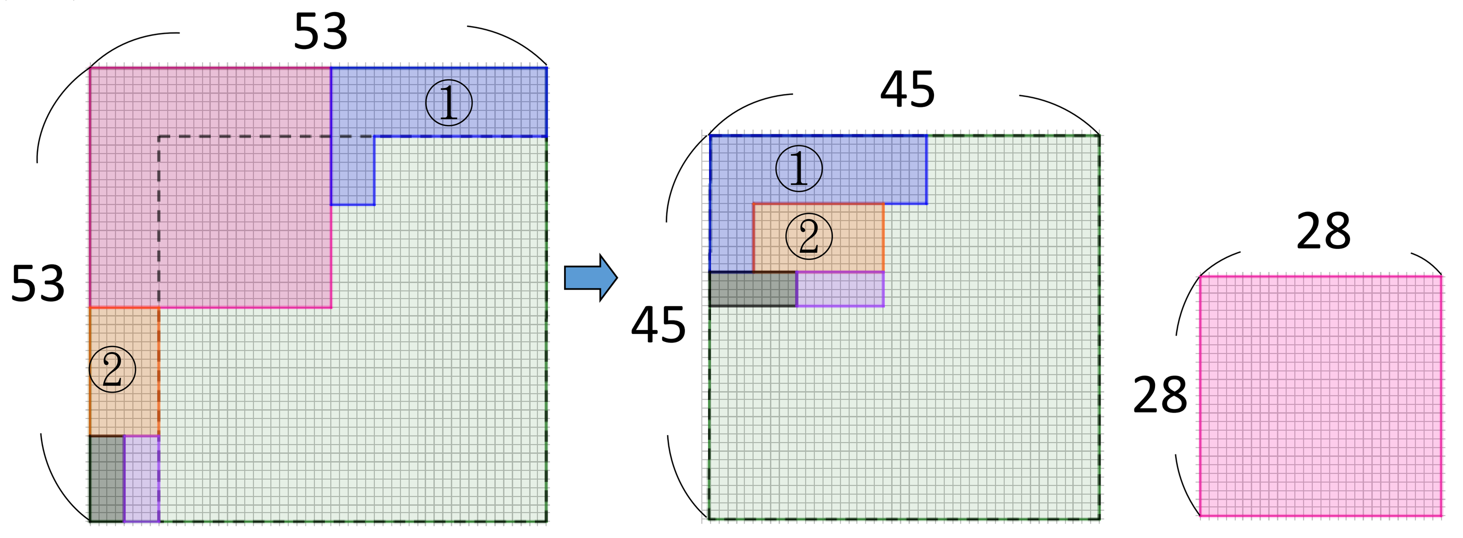


十三、 B_2類六片解的成功解法

(一)對【20,21,29】做六片解的研究



(二)對【28,45,53】做六片解的研究



十四、嘗試將B類扣除B_1類、B_2類後找到切割最少片解法則 ➡大於六片

陸、研究結論

一、一個大正方形，若要在單位格線上做剪拼成兩個小正方形的三片解是不存在的，最少需要做四片解。

二、發現互質畢氏三元數的奇偶性質有著不同的階梯狀剪拼方式，故將互質畢氏三元數做分類，分成A、B 類。如下表所示：

A類			B類		
$2mn > m^2-n^2$			$m^2-n^2 > 2mn$		
【$\ell_{小}$、$\ell_{中}$、$\ell_{大}$】 =【m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2】 =【奇數, 偶數, 奇數】			【$\ell_{小}$、$\ell_{中}$、$\ell_{大}$】 =【$2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2】 =【偶數, 奇數, 奇數】		
$\ell_{大}=\ell_{中}+1$	$\ell_{大}\neq\ell_{中}+1$		$\ell_{大}=\ell_{中}+2$	$\ell_{大}\neq\ell_{中}+2$	
四片解	六片解	片數>6	四片解	六片解	片數>6
A_1類	A_2類	其他	B_1類	B_2類	其他

三、A_1類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+1$ 的最少片解是四片，並求得其通解：將大正方形左上角先切割出小正方形，右上方再以橫2n 縱1為單位長方形做階梯狀切割，左下方以橫1縱n為單位長方形做階梯狀切割。還發現A_1 有第二種階梯狀剪拼法。

四、B_1類中 $\ell_{大}=\ell_{中}+2$ 的最少片解是四片，並求得其通解：將大正方形左上角先切割去小正方形，令 m＝2k，右上方再以橫2k-1縱 2 為單位長方形做兩次階梯狀切割。左下方區塊旋轉 90° 放入右上方兩次階梯狀切割的中間縫隙。

五、互質畢氏三元數分類表的大發現：

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,4,5		8,15,17		12,35,37		16,63,65		20,99,101
2		5,12,13		20,21,29		28,45,53		36,77,85	
3			7,24,25				48,55,73	B_2……	60,91,109
4				9,40,41		33,56,65		65,72,97	
5					11,60,61		39,80,89	A_2……	
6						13,84,85			
7							15,112,113		51,140,149
8								17,144,145	

B_1 四片通解　≥六片解　A_1 四片通解

(一)當$\ell_{大}=\ell_{中}+1$時(綠色框 斜線)，其可用A_1類四片通解完成剪拼。

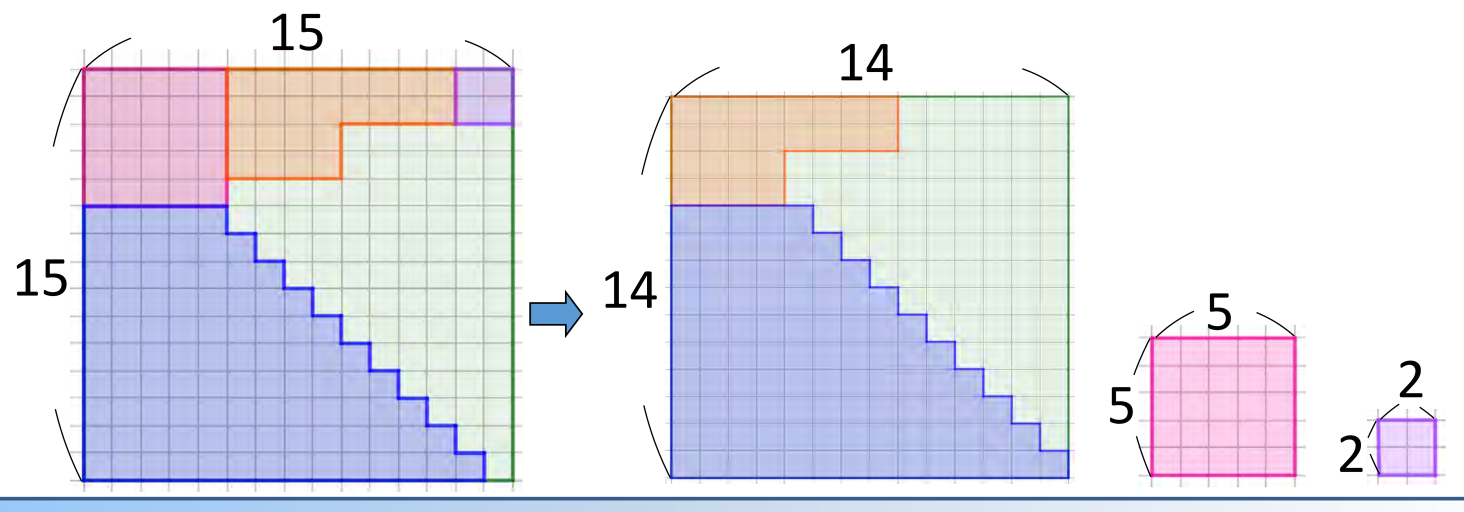
(二)當$\ell_{大}=\ell_{中}+2$時(紅色框 橫線)，其可用B_1類四片通解完成剪拼，且B_1類四片通解中的大正方形右上方，共進行兩次階梯狀剪拼，每次的階梯數正好等於 $\frac{m}{2}-1$。

六、本研究可作為在學習畢氏定理前的奠基模組活動，我們已實作出可進行正方形剪拼的教具，期望能把抽象的數學語言，以直觀的拼圖方式跟重要的數學定理結合。

柒、未來展望

未來可以朝一個大正方形分割成三個小正方形的方向走，找出他們的規律性，再透過一些推導找出通解。

例如：邊長為15的正方形，切割形成5塊，依序排列，形成三個邊長為2、5和14的正方形。



捌、參考資料

Greg Frederickson(1997). *Dissections : Plane & Fancy.* Cambridge ; New York, NY, USA : Cambridge University Press.

蕭偉智、陳彩鳳(2012)·科學研習月刊51卷第1期與第2期「讓幾何有趣些！漫談幾何切割」