中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030419

利用兩圓相切探討三、四、五、六邊形內外循環之規律

學校名稱：彰化縣立彰泰國民中學

作者：	指導老師：
國一 陳名儀	陳曉煒
國二 陳津筑	林育帆
國二 吳宜臻	

關鍵詞：兩圓相切、循環、內切圓退化

摘要

本研究以三、四、五、六邊形為基礎，各多邊形頂點為圓心，按順(逆)時針依序畫圓，利用兩圓內切及外切概念，探討切點在邊及邊的延長線上能否以最少次數產生一循環軌跡，並找出所受的邊長關係限制；最後由內切圓退化方式檢驗結果的正確性。我們發現:

一、邊長關係無限制

三、五邊形偶數個內切與四、六邊形奇數個內切皆可產生一次和二次循環。

二、邊長關係受限制

(一) **四、六邊形偶數個內切**產生循環的充分條件為**奇數邊長和=偶數邊長和**或**兩組鄰邊和相等(2、4、6 內切)**。

(二) **五邊形奇數個內切**產生循環的充分條件為**奇數邊長和=偶數邊長和**或**二鄰邊和等於三鄰邊和(3、5 內切)**。

(一)、(二)循環規則必為一次循環。

壹、研究動機

在暑假資優營的課程中，老師教導我們如何利用 Geogebra 軟體快速、正確地繪製幾何圖形，取代繁瑣的尺規作圖。而在兩圓位置關係單元中，課本一道題目:「在 ΔABC 中，已知圓 A、圓 B、圓 C 兩兩外切，且連心線$\overline{AB} = 15$、$\overline{BC} = 14$、$\overline{AC} = 11$，請問圓 A、B、C 的半徑為何?」(如圖 1-1)。我們很好奇的是，如果給定任意一個三角形是不是皆能夠以三頂點為圓心畫出兩兩外切的圓呢?可以畫出幾組呢?四邊形是否也可以?有趣的是，如果相鄰兩圓彼此外切，則我們可以發現在三角形的邊上以 P 點當起始點，沿著三個圓外切所留下的軌跡(弧)繞行，在繞完三個邊後必能再次回到起始點 P($\widehat{PQ} \rightarrow \widehat{QR} \rightarrow \widehat{RP}$)。在上述的情況，都以外切進行思考方向，但我們知道圓的相切情形包括外切及內切兩種。若加入內切是否也能產生繞回原起始點的結果呢?於是我們就展開了一場圓與簡單幾何圖形的研究之旅。

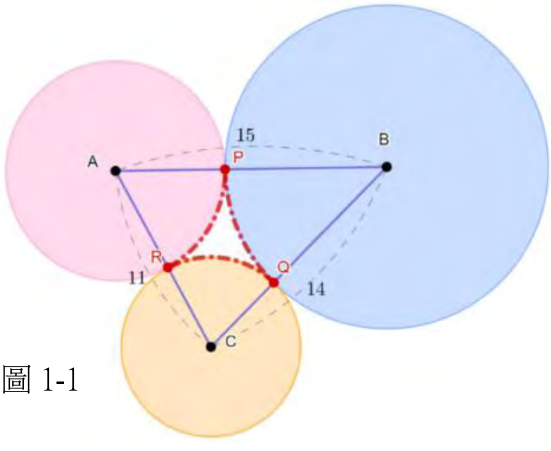


圖 1-1

貳、研究目的

一、利用兩圓相切探討三、四、五、六邊形能否產生循環的**邊長關係限制條件**與**循環規則**。

二、利用兩圓相切探討三、四、五、六邊形產生循環的**起始半徑值**與**範圍**。

三、利用退化內切圓的方式找出三、四、五、六邊形**邊數**與**內切個數**的關連性。

參、研究設備及器材

一、圓規與直尺

透過尺規作圖，畫出以幾何圖形各頂點為圓心，適當長為半徑所形成相鄰兩圓內、外切的情形，觀察其在所取半徑大小不同下，對繞行軌跡所產生的影響。

二、GeoGebra 幾何繪圖軟體

本研究主要藉由 GeoGebra 幾何繪圖軟體進行圖形繪製，其拖曳功能及製圖的準確性，讓本研究得以做更完整的分析，彌補尺規作圖上的限制。

肆、研究過程或方法

一、彙整相關文獻:

(一) 第四十八屆全國中小學科展作品《弧弧相切—多邊形內相切弧的探討》，利用多邊形的頂點為圓心畫弧，利用弧弧相切的方法探討多邊形可以產生循環的條件，其中在奇數多邊形中，一定會發生，而在偶數多邊形時，只有當『奇數邊的和＝偶數邊的和』時，才有弧弧相切的現象產生。

(二) 第五十屆全國中小學科展作品《圓舞曲》，利用多邊形的頂點為圓心，按順(逆)時針方向依序畫弧，探討在N邊形中產生的回歸現象及規則，提出了任意N邊形(分奇數與偶數)可以產生一輪回歸、二輪回歸的一般條件，並探討了多邊形的內心與回歸現象之關連性。

(三) 第1070331梯次小論文《被困住的「圓」桌武士》，為解決前兩篇未提及當起始弧的半徑大於邊長的情況，於是將交點落在內部的半徑設為正值，交點落在外部的半徑設為負值的新方法，試圖將外部的軌跡繞回內部亦會產生回歸現象。

綜觀前兩篇文獻提出回歸的觀點，從兩圓相切來看，全建立在外切的基礎上來討論，並分成奇數、偶數多邊形探討可否產生循環現象，做詳盡且完整的說明，得出相同之結論；第

三篇文獻雖企圖解決弧繞至外部的情形提出半徑值設定為正、負的想法，但未考慮弧的軌跡持續留在外部的情形，亦未明確的分類與深入探究，其結果僅為本研究的一特例。從三篇文獻得到靈感，若以兩圓位置關係中外切與內切為基礎來探討此現象，依不同外切與內切個數找尋三、四、五、六邊形可產生循環之規律，雖然路徑數會增加許多，但可得到更完整的結果。

二、名詞釋義:

(一) **輪:**「第一輪」代表起始點沿圓弧繞，於各邊產生第一個交點之軌跡；「第二輪」代表於各邊產生第二個交點之軌跡；「第 n 輪」代表於各邊產生第 n 個交點之軌跡。

(二) $\boldsymbol{r_{ij}}$:指在多邊形第 i 輪繞行軌跡中，以第 j 個頂點為圓心所取的半徑長度。例如: r_{11} 代表在多邊形第 1 輪繞行軌跡中，以第 1 個頂點為圓心所取的半徑長度。

(三) **循環:**「一次循環」代表起始點沿圓弧軌跡依序繞經多邊形各邊一次後回到原起始點，即$r_{21}=r_{11}$；「二次循環」則為起始點沿圓弧軌跡繞經多邊形各邊兩次後回到原起始點，即$r_{31}=r_{11}$。

(四) Geogebra 幾何圖形符號說明(如圖 4-1 和圖 4-2)

1. ▲:繞行軌跡之起始點，此後繞行規則以英文字母順序依序繞行。
2. ●、●、●、●:第一輪、第二輪、第三輪和第四輪繞行軌跡中，於多邊形各邊的交點。
3. 紅色、藍色、橘色、粉色粗體線:第一輪、第二輪、第三輪和第四輪的繞行軌跡。
4. ◆、●:為可完成循環的特定範圍。例如圖 4-2 中，在◆C 和◆K 此兩端點內，必可完成循環，且●J 為可完成一次循環的起始點。

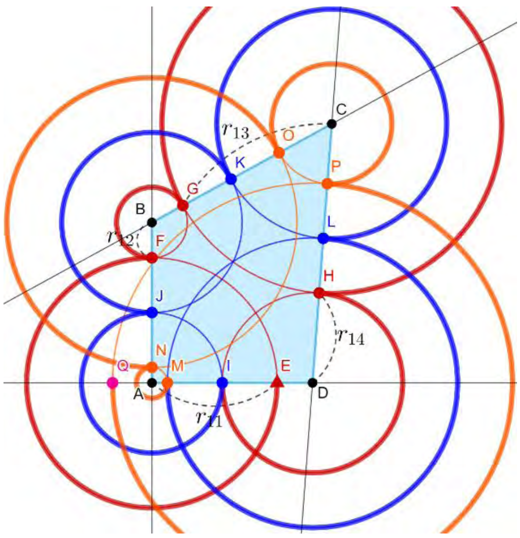


圖 4-1

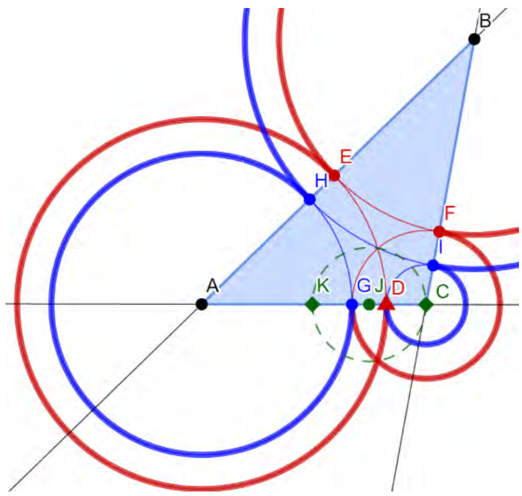
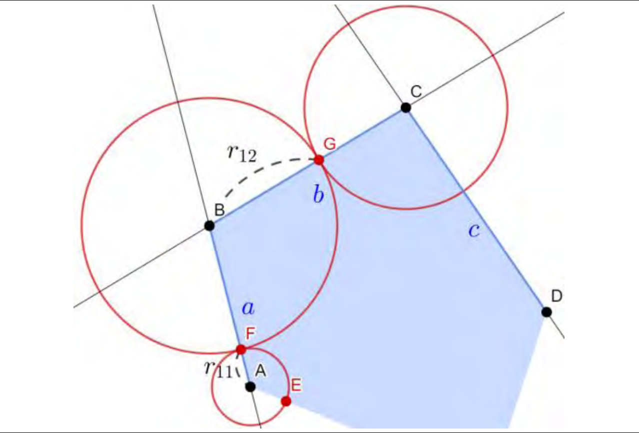
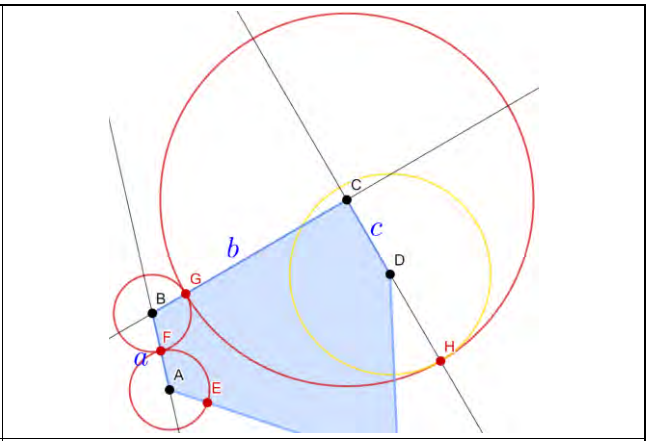


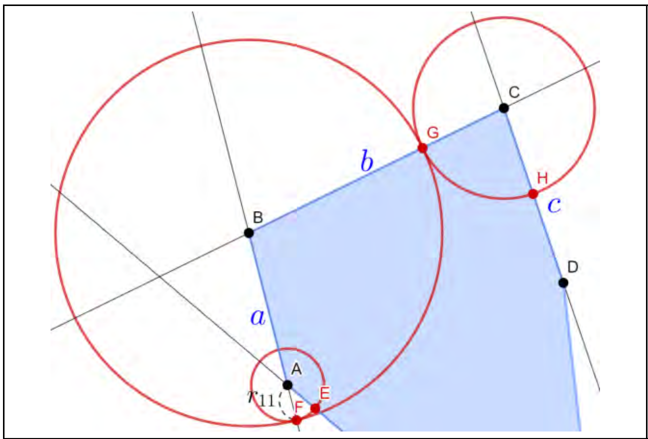
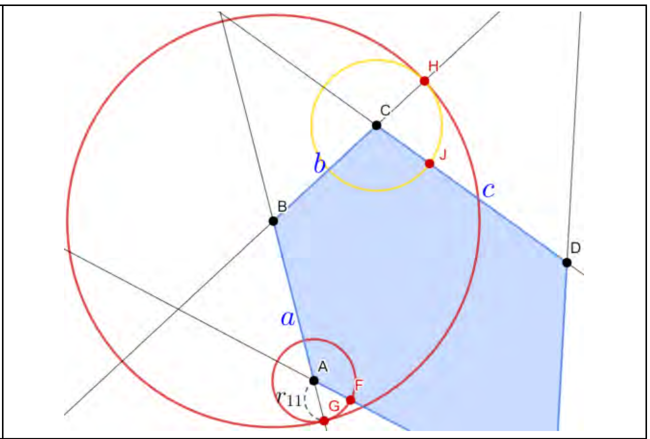
圖 4-2

三、規則建立

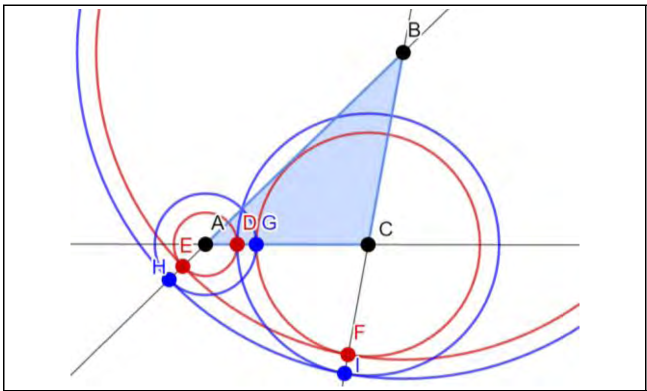
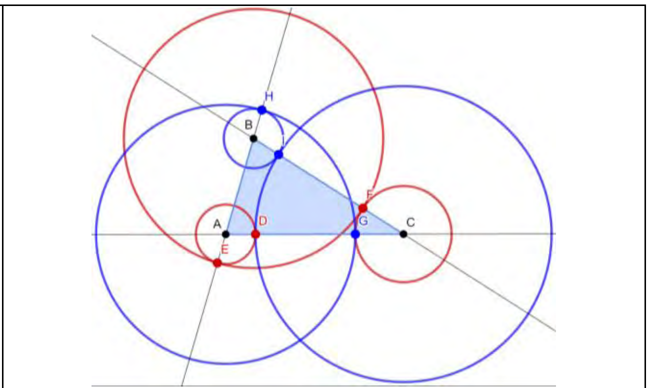
(一) 外切:在0內切(全外切)的循環情況下，則任意連續三個邊長關係須符合第一、三邊長之和大於第二邊之邊長，例如:$a+c>b$，且$a-r_{11}<b$、$b-r_{12}<c$。

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>符合規則一</td><td>不符合規則一($a+c<b$、$b-r_{12}>c$)</td></tr>
</table>

(二) 內切:在1內切(圓A為內切小圓，圓B為內切大圓)的循環情況下，則第二個邊長需大於第一個邊長，例如:$b>a$，也就是說$b>a+r_{11}$。

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>符合規則二</td><td>不符合規則二($b<a$)</td></tr>
</table>

(三) 內切關係一致:各輪中各頂點的圓與下一個圓的內切關係需保持一致，例如:在第一輪和第二輪中，圓 A 皆為內切小圓。

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>符合規則三</td><td>不符合規則三(第一輪圓 A 為內切小圓，第二輪圓 A 則為內切大圓)</td></tr>
</table>

本研究的繪圖規則皆建立在規則一至規則三上，且在可完成循環的情況下，若出現內切情形，統一以內切小圓作為起始點圓心的選取，下一個圓為內切大圓進行循環軌跡的討論，並以內切小圓半徑值$=x$，軌跡繞至下一個邊的長度為a，接下來依序為b、c、d…等。

四、研究內容

(一) 三角形中，利用兩圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

1. **改變起始半徑值**

利用 Geogebra 拖曳功能拖曳起始點 D，則可以輕易產生 G 點與起始點 D 重合，如圖 4-3、圖 4-4，此現象以相鄰兩圓來說明之，即 <u>0 內切</u>必可完成一次循環。

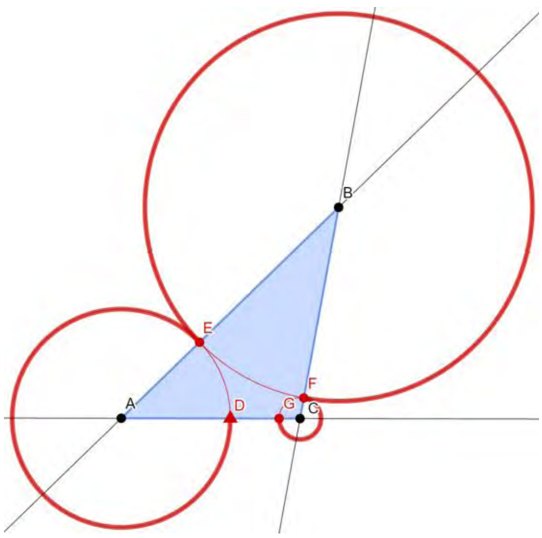


圖 4-3

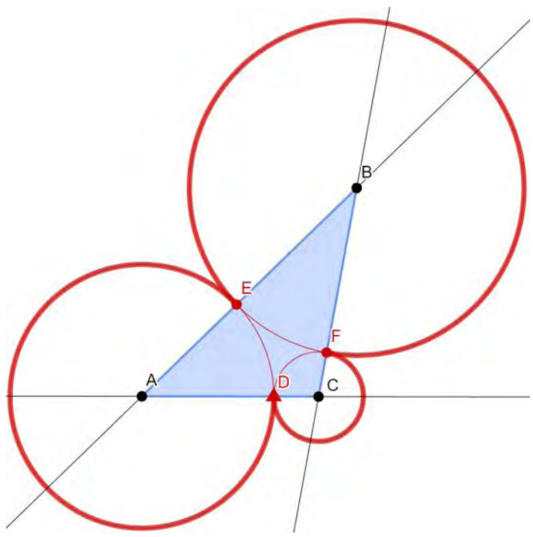


圖 4-4

$\overline{AD}$為起始半徑x，則$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CA}=c$，將各輪半徑整理於下:

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=-x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{31}=x$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=x+\mathrm{b}-\mathrm{c}$	$r_{32}=-x+a$
	$r_{13}=x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=-x+\mathrm{c}$	$r_{33}=x-a+\mathrm{b}$

若可以完成循環，則可能為下列情況:

(1) $r_{21}=r_{11}$

$\Rightarrow -x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}=x$，$x=\dfrac{a-\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2}=\dfrac{r_{11}+r_{21}}{2}$為一次循環的起始半徑值

也就是說當拖曳圖 4-5 原起始點 D 至 J 點時，即為一次循環的繞行軌跡，如圖 4-6。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環，如圖 4-5。

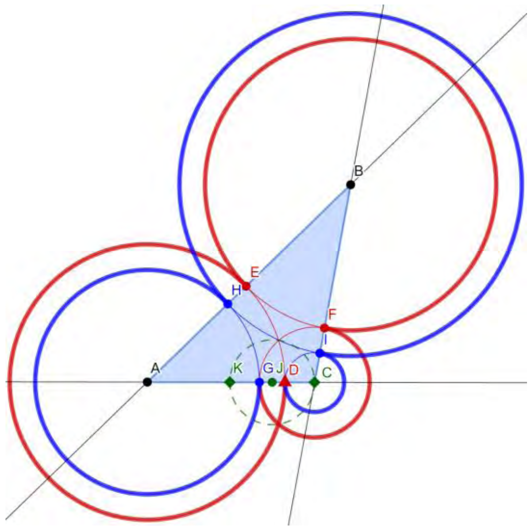


圖 4-5

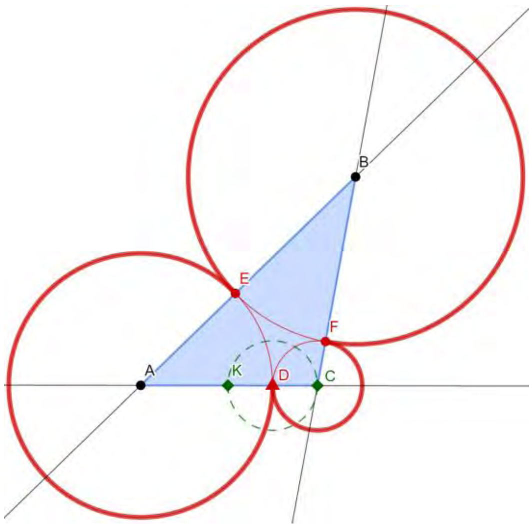


圖 4-6

藉由 Geogebra 將原起始點 D 左右拖曳時，發現到並非在所有範圍下皆能產生繞回原點的現象，且三個圓的半徑大小為影響可循環範圍之關鍵，於是我們做了以下的討論:

其中$\overline{AD}=\dfrac{a-\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2}=\dfrac{r_{11}+r_{21}}{2}$為一次循環的起始半徑值。

找取 $\min\left\{\dfrac{a-b+c}{2},\dfrac{a+b-c}{2},\dfrac{-a+b+c}{2}\right\}$為半徑值，並以原起始點 D 為圓心畫圓，則可以找出二次循環的範圍；即在$\overline{AK}<r_{11}<\overline{AC}$範圍下，三角形 0 內切必可完成一次和二次循環。

2. 拖曳原起始點

接續 0 內切的討論，我們分別將 A、B、C 為圓心所形成的 0 內切原起始點向外拖曳，發現能產生下列 3 種 2 內切循環軌跡，如圖 4-7 至圖 4-9。

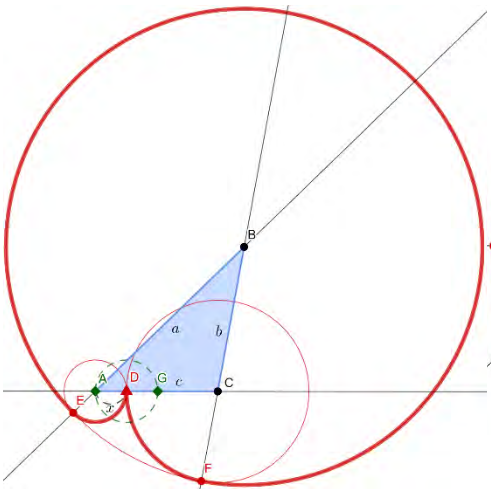


圖 4-7

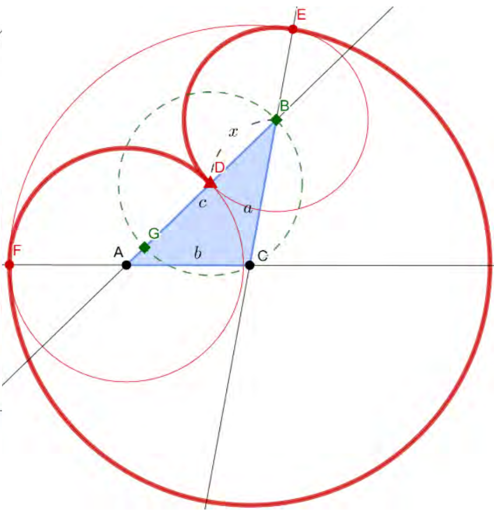


圖 4-8

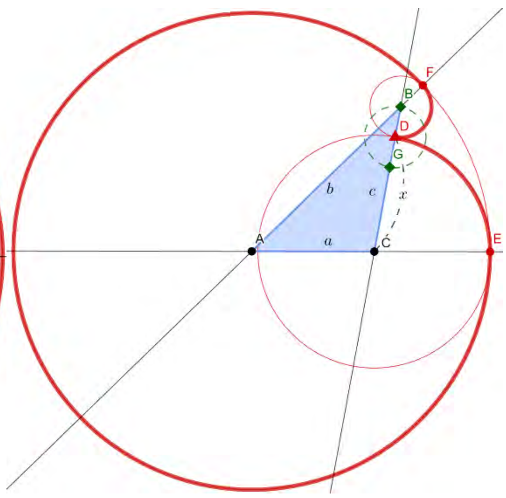


圖 4-9

在符合本研究若出現內切時，皆以起始圓作為內切小圓，下一個圓為內切大圓下，我們統一以內切小圓半徑值$= x$，下一個邊長度為a，接下來邊長依序為b和c，則將各輪之循環半徑整理於下表

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11} = x$	$r_{21} = -x - a + \mathrm{b} + \mathrm{c}$	$r_{31} = x$
	$r_{12} = x + a$	$r_{22} = -x + \mathrm{b} + \mathrm{c}$	$r_{32} = x + a$
	$r_{13} = x + a - \mathrm{b}$	$r_{23} = -x + \mathrm{c}$	$r_{33} = x + a - \mathrm{b}$

若可以完成循環，則可能為下列情況:

(1) $r_{21} = r_{11}$

$\Rightarrow\ -x - a + \mathrm{b} + \mathrm{c} = x$，$x = \dfrac{-a + \mathrm{b} + \mathrm{c}}{2} = \dfrac{r_{11} + r_{21}}{2}$為一次循環的起始半徑值。

(2) $r_{31} = r_{11}$，則必可完成二次循環。

此時，找取 $\min\left\{\dfrac{-a+b+c}{2}, \dfrac{a+b+c}{2}, \dfrac{a-b+c}{2}\right\}$為半徑值，並以原起始點 D 為圓心畫圓，則可以找出二次循環的範圍，故在$0 < r_{11} < \overline{AG}$範圍下，三角形 2 內切必可完成一次和二次循環。

3. 拖曳原起始點

我們改將圖 4-9 中 D 點向下拖曳，則出現圓 C 和圓 A 內切，圓 A 和圓 B 外切，圓 B 和圓 C 外切，1 內切的情形，我們依此規則畫圓，**發現無法繞回**，其繞行軌跡如圖 4-10。

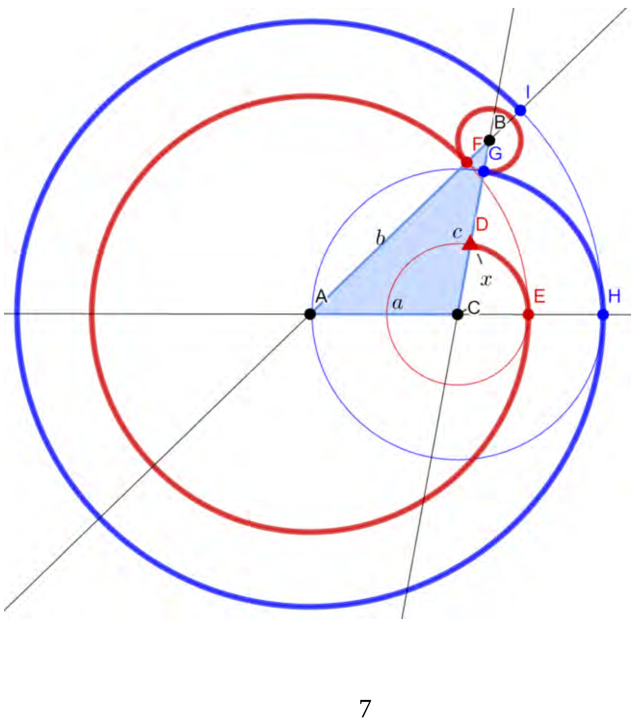


圖 4-10

$\overline{CD}$為起始半徑x，則$\overline{AC} = a$，$\overline{AB} = b$，$\overline{BC} = c$，將各輪半徑整理於下

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11} = x$	$r_{21} = x + a - \mathrm{b} + \mathrm{c}$	$r_{31} = x + 2a - 2\mathrm{b} + 2\mathrm{c}$
	$r_{12} = x + a$	$r_{22} = x + 2a - \mathrm{b} + \mathrm{c}$	$r_{32} = x + 3a - 2\mathrm{b} + 2\mathrm{c}$
	$r_{13} = -x - a + \mathrm{b}$	$r_{23} = -x - 2a + 2\mathrm{b} - \mathrm{c}$	$r_{33} = -x - 3a + 3\mathrm{b} - 2\mathrm{c}$

若可以完成循環，則

(1) $r_{21} = r_{11}$

$\Rightarrow x + a - b + c = x$，$a + c = b$(矛盾)

∴三角形 1 內切無法完成一次循環

(2) $r_{31} = r_{11}$

$\Rightarrow x + 2a - 2b + 2c = x$，$2(a + c) = 2b$，$a + c = b$(矛盾)

∴三角形 1 內切無法完成二次循環

從(1)和(2)可得知，**三角形 1 內切**亦無法完成三、四次...等循環。由此我們發現，三角形 1 內切因受限於三角形三邊長存在兩邊之和大於第三邊的關係，故無法完成循環繞回原起始點。同理可知，**三角形 3 內切**亦會受到三角形三邊長關係的限制，而無法完成循環。

◆ **小結論**

在三角形的研究中，我們以改變起始半徑值的方式，將三角形 0~3 內切等四種狀況做討論與探究，整理得到下列的結果:

1. 一次和二次循環回到原起始點

   三角形在偶數個內切(0 內切、2 內切)下，只要起始點選取在適當的範圍內，皆可完成一次和二次循環。

2. 無法回到原起始點

   三角形在奇數個內切(1 內切、3 內切)下，由於受限於三角形三邊長存在兩邊之和大於第三邊的關係，則無法產生循環繞回原起始點。

(二) 四邊形中，利用兩圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

1. 改變起始半徑值

從正方形 <u>0 內切</u>開始拖曳觀察，發現原起始點 E 在特定範圍下，皆可以輕易地完成一次

循環，如圖 4-11 和圖 4-12。

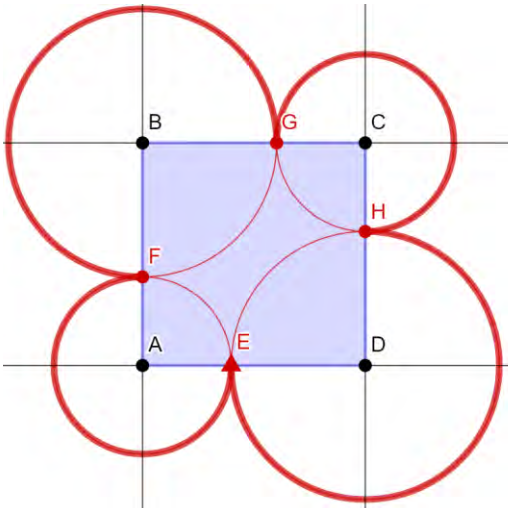


圖 4-11

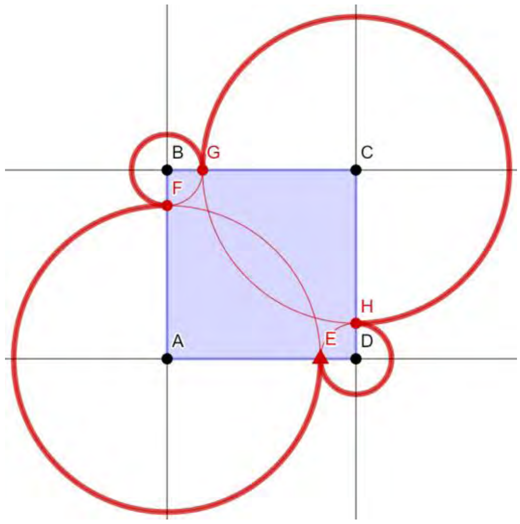


圖 4-12

此時，我們拖曳 C 點的位置，改變圖形邊長關係，則再也無法循環，繞行軌跡如圖 4-13。

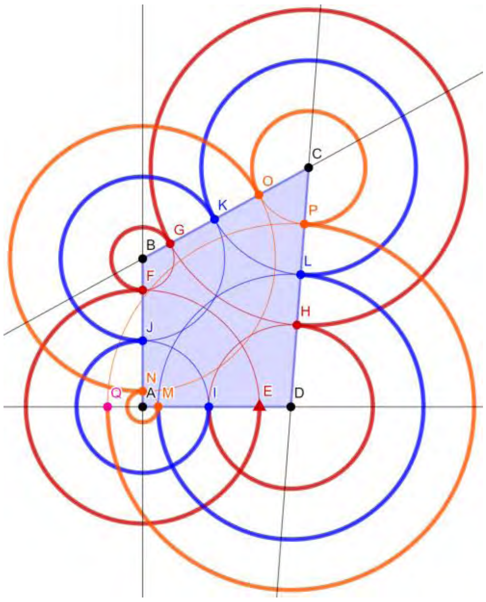


圖 4-13

$\overline{AE}$為起始半徑x，則$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$，將各輪半徑整理於下:

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x-a+b-c+d$	$r_{31}=x-2a+2b-2c+2d$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=-x+2a-b+c-d$	$r_{32}=-x+3a-2b+2c-2d$
	$r_{13}=x-a+b$	$r_{23}=x-2a+2b-c+d$	$r_{33}=x-3a+3b-2c+2d$
	$r_{14}=-x+a-b+c$	$r_{24}=-x+2a-2b+2c-d$	$r_{34}=-x+3a-3b+3c-2d$

距離=$|-a+b-c+d|$

距離=$|-a+b-c+d|$

觀察圖 4-13 我們可以得到下列關係式

$$r_{11}+r_{12}+r_{13}+r_{14}=r_{21}+r_{22}+r_{23}+r_{24}=\cdots=r_{n1}+r_{n2}+r_{n3}+r_{n4}\neq\frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

換句話說，**若$\boldsymbol{a+c\neq b+d}$則無法完成循環回到原起始點，且向原起始點 E 等距離偏離。**

2. 改變四邊形的邊長關係

承 1 的討論，若當距離$|-a+b-c+d|=0$，也就是說**奇數邊長和=偶數邊長和($\boldsymbol{a+c=b+d}$)**時，在範圍$0<r_{11}<\overline{AD}$下，四邊形 0 內切的循環現象必為一次循環。由 Geogebra 拖曳功能改變圖 4-13 中 C 點位置，亦即改變四邊形的邊長關係下，產生四邊形 0 內切一次循環軌跡，如圖 4-14。

其可以完成一次循環範圍為r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}中最小兩個半徑之和，此時循環限制端點為:

右端點 D:若起始點 E 向右拖曳時，r_{14}將逐漸變小，直到 E 點與 D 點重合。

左端點 A:若起始點 E 向左拖曳時，r_{11}將逐漸變小，直到 E 點與 A 點重合。

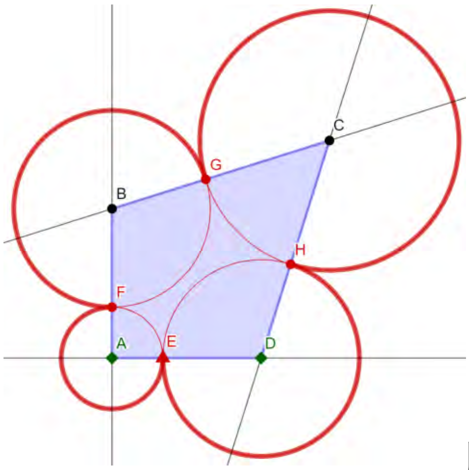


圖 4-14

3. 拖曳原起始點

此時拖曳圖 4-14 中 F 點位置，至出現圓 A 和圓 B、圓 D 內切形成大小交替的 <u>**2 內切**</u>。

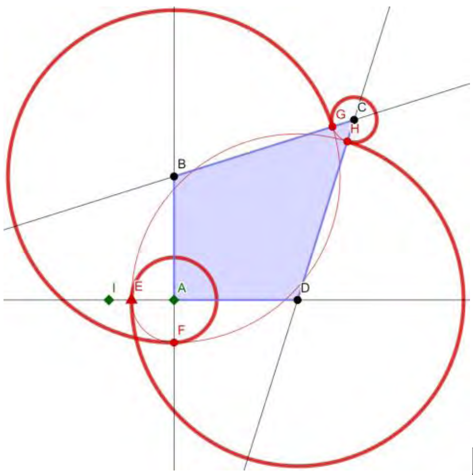


圖 4-15

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d$	$r_{31}=x+2a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-2d$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d$	$r_{32}=x+3a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-2d$
	$r_{13}=-x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=-x-2a+2\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{33}=-x-3a+3\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2d$
	$r_{14}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=x+2a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-d$	$r_{34}=x+3a-3\mathrm{b}+3\mathrm{c}-2d$

距離=$|a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d|$　　距離=$|a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d|$

故當**奇數邊長和=偶數邊長和($a+c=b+d$)**條件下，在範圍$0<r_{11}<\overline{AI}$，四邊形 2 內切必出現一次循環，如圖 4-15。

其可以完成一次循環範圍為r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}中最小兩個半徑之和，此時循環限制端點為:

右端點 A:若起始點 E 向右拖曳時，r_{11}將逐漸變小，直到 E 點與 A 點重合。

左端點 I:若起始點E向左拖曳時，r_{13}將逐漸變小，直到E點與 I 點重合。

4. **改變內切方式，發現新的邊長關係限制條件**

我們思考連續三個圓彼此倆倆內切，除存在一內切小圓同時被兩內切大圓包外，如上圖 4-15，也存在一內切大圓包住兩內切小圓，如下圖 4-16 和圖 4-17，則此不同的內切方式是否也能產生循環呢?於是我們做了以下的討論。

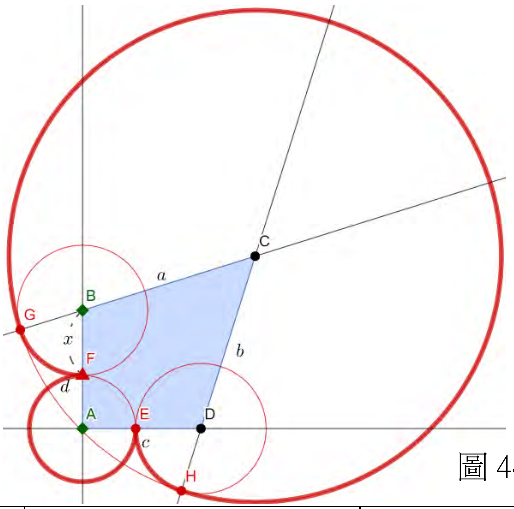


圖 4-16

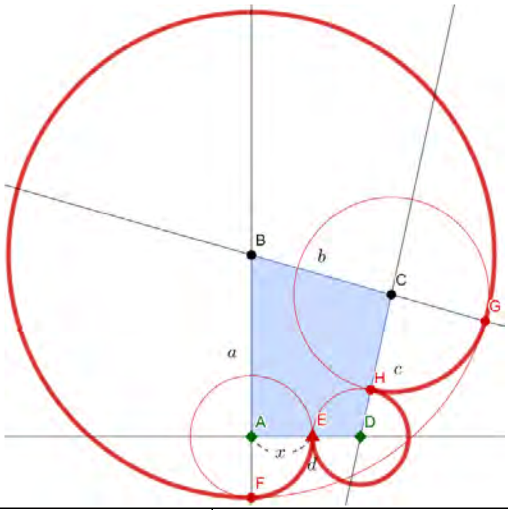


圖 4-17

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{31}=x+2a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2d$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{32}=x+3a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2d$
	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{33}=x+3a-3\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2d$
	$r_{14}=-x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x-2a+2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-d$	$r_{34}=-x-3a+3\mathrm{b}+3\mathrm{c}-2d$

距離=$|a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+d|$　　距離=$|a-\mathrm{b}-\mathrm{c}+d|$

故當兩組二鄰邊之和相等($a+\mathrm{d}=b+c$)條件下，在範圍$0<r_{11}<\overline{AB}$，四邊形 2 內切必出現一次循環，如圖 4-16。

其可以完成一次循環範圍為r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}中最小兩個半徑之和，此時循環限制端點為:

端點 A:若起始點 F 向下拖曳時，r_{14}將逐漸變小，直到 F 點與 A 點重合。

端點 B:若起始點 F 向上拖曳時，r_{11}將逐漸變小，直到 F 點與 B 點重合。

5. **繼續拖曳原起始點，觀察四邊形 4 內切的循環現象**

接續討論 3、4，我們發現在奇數邊長和=偶數邊長和以及兩組二鄰邊之和相等兩種情況，皆可完成四邊形 2 內切一次循環，於是在不改變原有內切圓的相切關係下，我們分別繼續拖曳邊上的起始點位置，亦可完成四邊形 4 內切一次循環，如圖 4-18 和圖 4-19。

奇數邊長和= 偶數邊長和($a+c=b+d$)	兩組二鄰邊之和相等($a+d=b+c$)

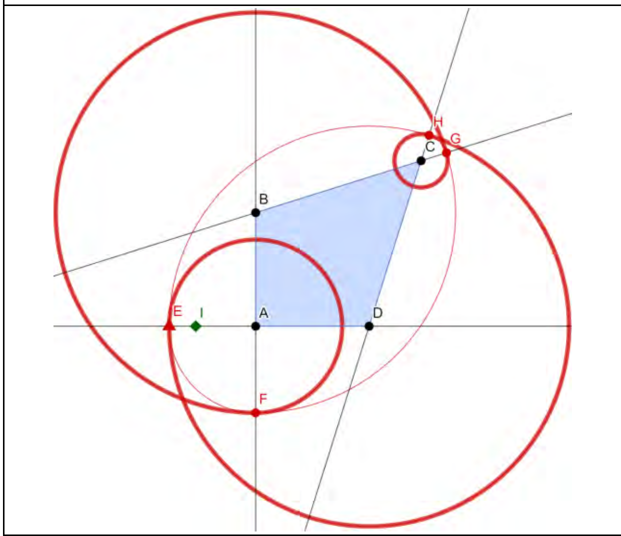
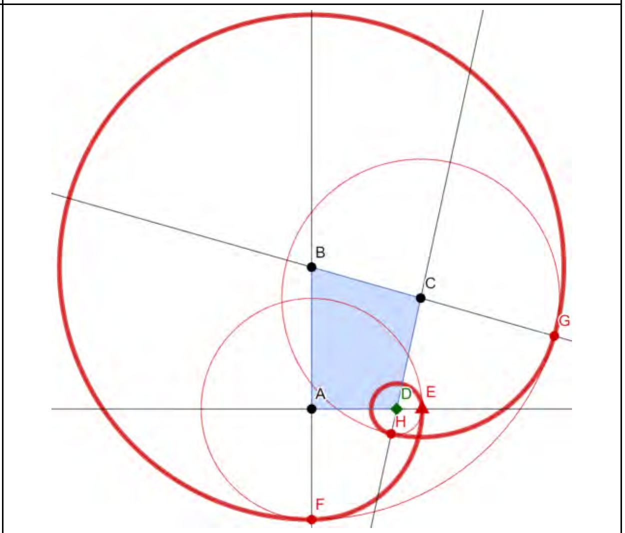

	

圖 4-18 可循環範圍:$r_{11}>\overline{AI}$	圖 4-19 可循環範圍:$r_{11}>\overline{AD}$

6. **四邊形在對邊和相等時，一內切必不會出現循環現象**

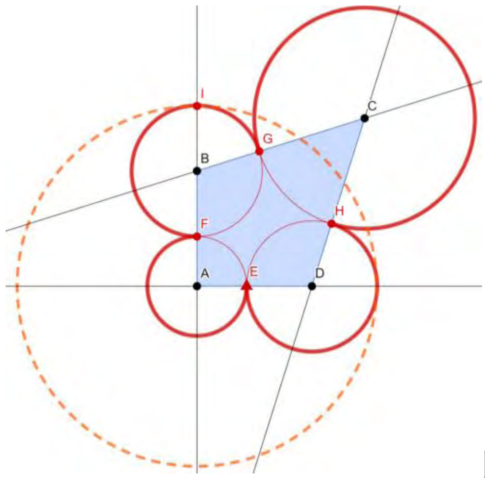


圖 4-20

如圖 4-20 所示，小圓 A 不等於大圓 A，若大小圓 A 同時往 D 靠近，則最後圓 D 將不存在，故當奇數邊長和=偶數邊長和($a+c=b+d$)時，四邊形一內切必不會產生循環。

7. 改變四邊形邊長關係

接續討論 6，此時我們拖曳 C 點來改變邊長關係，恰符合本研究所建立的規則一:$a+c>b$，$b+d>c$和規則二:$b>a$，則可完成四邊形 1 內切繞回原起始點的結果。

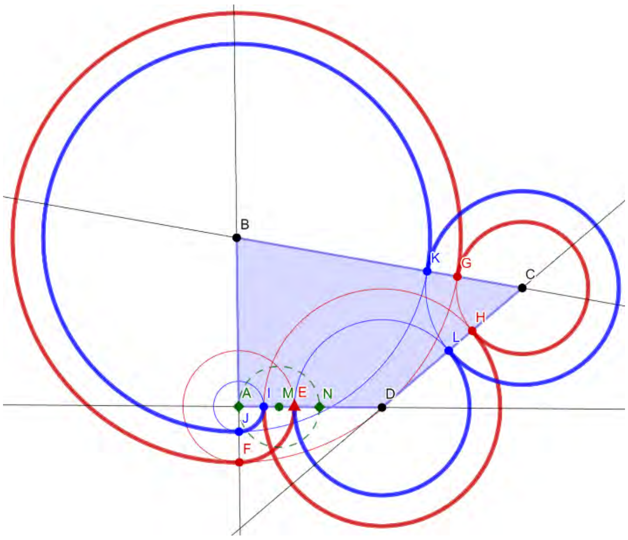


圖 4-21

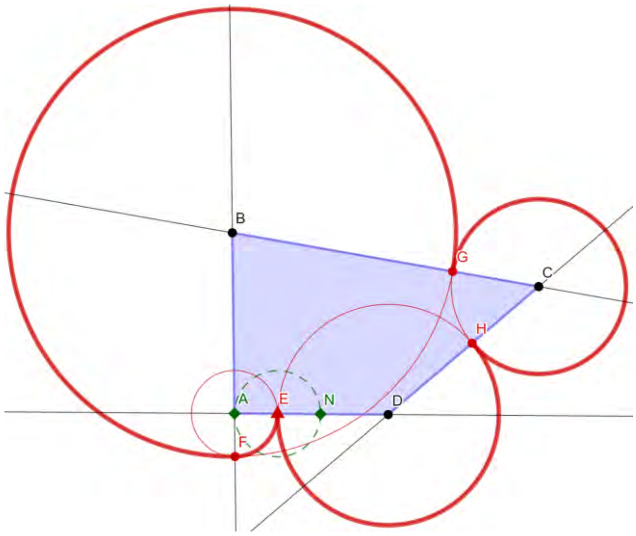


圖 4-22

$\overline{AE}$為起始半徑x，則$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$，將各輪半徑整理於下:

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=-x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{31}=x$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=-x+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{32}=x+a$
	$r_{13}=-x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=x+\mathrm{c}-d$	$r_{33}=-x-a+\mathrm{b}$
	$r_{14}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x+d$	$r_{34}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$

若可以完成循環(其中$a+c\neq b+d$)，則可能為下列情況:

(1) $r_{21}=r_{11}$

$\Rightarrow -x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d=x$，$x=\dfrac{-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d}{2}=\dfrac{r_{11}+r_{21}}{2}$為一次循環的起始半徑值

也就是說當拖曳圖 4-21 原起始點 E 至 M 點時，即為一次循環的繞行軌跡，如圖 4-22。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環，如圖 4-21。

在一次循環中，$r_{11}=\dfrac{-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d}{2}$，$r_{12}=\dfrac{a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d}{2}$，$r_{13}=\dfrac{-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}-d}{2}$，

$r_{14} = \dfrac{a - \mathrm{b} + \mathrm{c} + d}{2}$，此時，找取 $\min\{r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}\}$ 為半徑值，並以 E 為圓心畫圓，則可以找出二次循環的範圍，故在$0 < r_{11} < \overline{AN}$範圍下，四邊形 1 內切必能完成一次和二次循環。

8. 拖曳原起始點

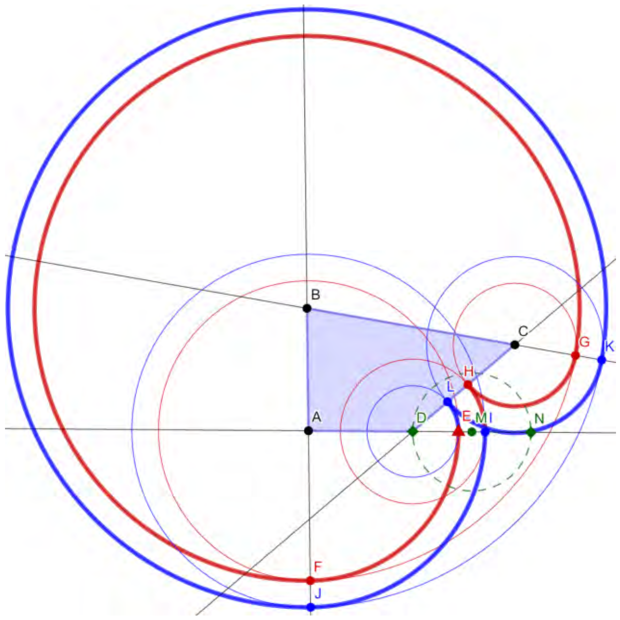


圖 4-23

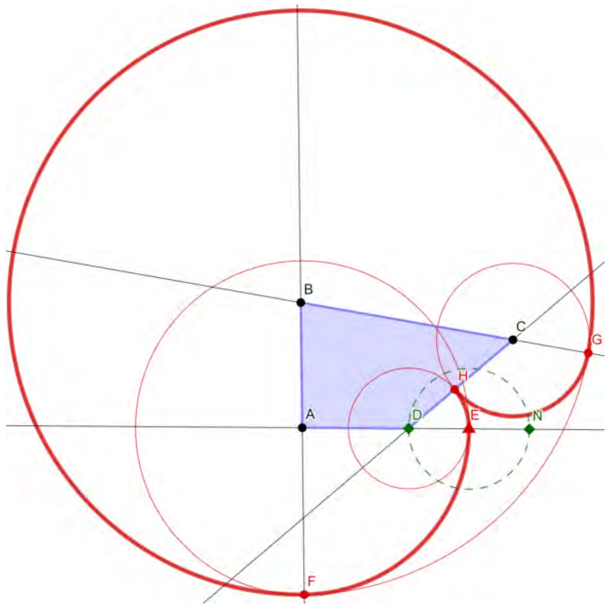


圖 4-24

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11} = x$	$r_{21} = -x - a + \mathrm{b} + \mathrm{c} + d$	$r_{31} = x$
	$r_{12} = x + a$	$r_{22} = -x + \mathrm{b} + \mathrm{c} + d$	$r_{32} = x + a$
	$r_{13} = x + a - \mathrm{b}$	$r_{23} = -x + \mathrm{c} + d$	$r_{33} = x + a - \mathrm{b}$
	$r_{14} = -x - a + \mathrm{b} + \mathrm{c}$	$r_{24} = x - d$	$r_{34} = -x - a + \mathrm{b} + \mathrm{c}$

若可以完成循環(其中$a \neq b + c + d$)，則可能為下列情況:

(1) $r_{21} = r_{11}$

$\Rightarrow -x - a + \mathrm{b} + \mathrm{c} + d = x$，$x = \dfrac{-a + \mathrm{b} + \mathrm{c} + d}{2} = \dfrac{r_{11} + r_{21}}{2}$ 為一次循環的起始半徑值

也就是說當拖曳圖 4-23 原起始點 E 至 M 點時，即為一次循環的繞行軌跡，如圖 4-24。

(2) $r_{31} = r_{11}$，則必可完成二次循環，循環軌跡如圖4-23。

在一次循環中，$r_{11} = \dfrac{-a + b + c + d}{2}$，$r_{12} = \dfrac{a + b + c + d}{2}$，$r_{13} = \dfrac{a - b + c + d}{2}$，

$r_{14}=\dfrac{-a+b+c-d}{2}$，此時取 $\min\{r_{11},r_{12},r_{13},r_{14}\}$ 為半徑值，並以 E 為圓心畫圓，則可以找出二次循環的範圍，故在 $\overline{AD}<r_{11}<\overline{AN}$ 範圍下，四邊形 3 內切必能完成一次和二次循環。

◆ 小結論

在四邊形的研究中，我們以改變起始半徑值、改變邊長關係，以及內切圓相切方式，將四邊形 0~4 內切等五種狀況做討論與整理得到下列的結果:

1. 必為一次循環

(1) **奇數邊長和=偶數邊長和($a+c=b+d$)** 條件下，四邊形在 0 內切、2 內切和 4 內切，於起始點選取適當範圍時，其循環規則必為一次循環。

(2) **兩組二鄰邊之和相等($a+\mathrm{d}=b+c$)** 條件下，四邊形在 2 內切和 4 內切，於起始點選取適當範圍時，其循環規則必為一次循環。

2. 一次或二次循環回到原起始點

四邊形奇數個內切(1、3 內切)，於起始點選取適當範圍必可完成一次和二次循環。

(三) 利用三、四邊形的研究結果推論五邊形可循環之方法

1. 根據三、四邊形之研究推論，五邊形在 <u>0 內切</u>下，可輕易地完成一次和二次循環

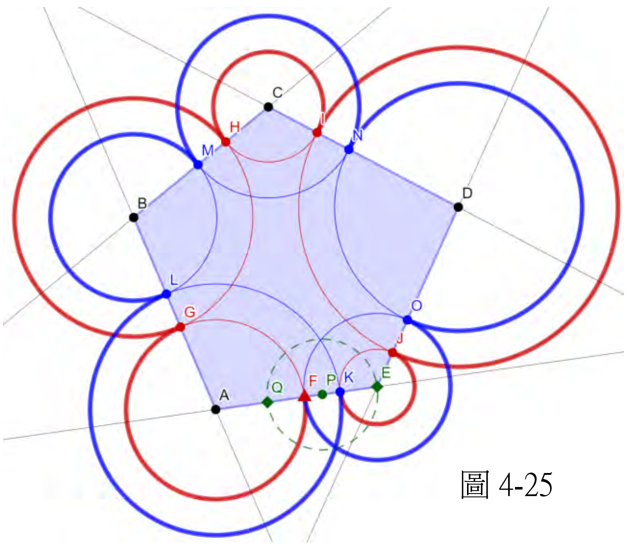


圖 4-25

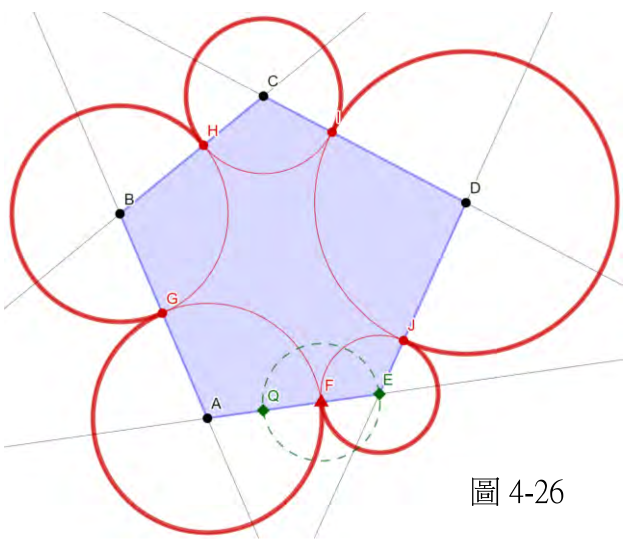


圖 4-26

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=-x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e$	$r_{31}=x$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=x+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d-e$	$r_{32}=-x+a$
	$r_{13}=x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=-x+\mathrm{c}-d+e$	$r_{33}=x-a+\mathrm{b}$
	$r_{14}=-x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=x+d-e$	$r_{34}=-x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$
	$r_{15}=x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{25}=-x+e$	$r_{35}=x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$

若可以完成循環(其中$a+\mathrm{c}+e\neq\mathrm{b}+d$)，則可能情況如下:

(1) $r_{21}=r_{11}$

$\Rightarrow x=\dfrac{a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e}{2}$時，即為一次循環的起始半徑值

也就是說當拖曳圖 4-25 原起始點 F 至 P 點時，即為一次循環的繞行軌跡，如圖 4-26。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環，如圖 4-25。

此時，以圖 4-26 的 F 點為圓心，找取$\min\{r_{11},r_{12},r_{13},r_{14},r_{15}\}$為半徑值畫圓，則可以找出二次循環的範圍。也就是說，當$\overline{AQ}<r_{11}<\overline{AE}$特定範圍下，五邊形 0 內切必可完成一次和二次循環。

2. 拖曳原起始點

將 G 點向下拖曳，則觀察到 2 內切可完成循環。此時，以圖 4-27 的 F 點為圓心，找取$\min\{r_{11},r_{12},r_{13},r_{14},r_{15}\}$為半徑值畫圓，則可以找出二次循環的範圍，故在 $0<r_{11}<\overline{AQ}$ 範圍下，五邊形2內切必可完成一次和二次循環，且一次循環起始半徑值為 $\dfrac{-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e}{2}$。

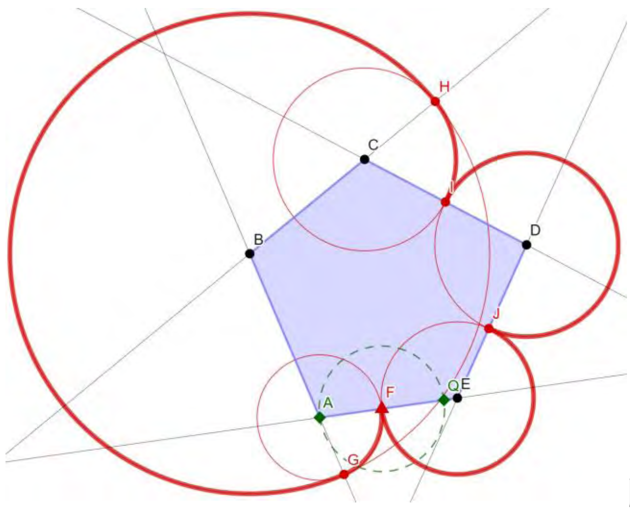


圖 4-27

3. 拖曳原起始點

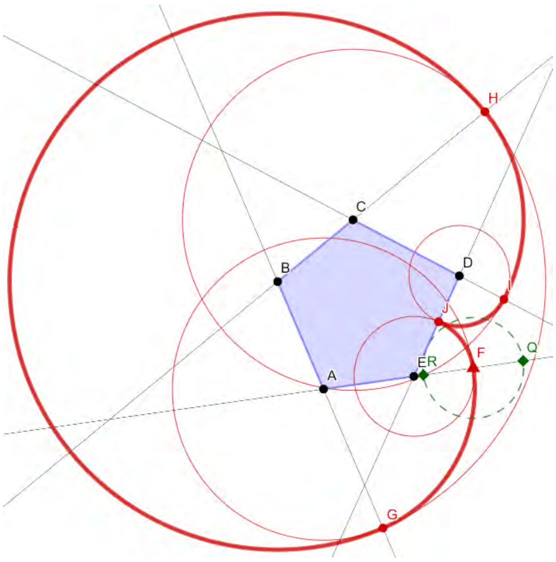


圖 4-28

如左圖 4-28，在$\overline{AR} < r_{11} < \overline{AQ}$範圍下，五邊形 4 內切必可完成一次和二次循環，其中一次循環起始半徑值為$\dfrac{-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}+d+e}{2}$。

4. 改變五邊形的邊長關係，觀察是否會產生 1 內切的循環現象

拖曳 B 點改變五邊形的邊長關係，此時恰符合本研究所建立的規則一:$a+c>b$，$b+d>c$，$c+e>d$，$a+d>e$，$b+e>a$和規則二:$b>a$，則透過循環軌跡的繪製及各輪半徑式子的整理，將內容整理於下。

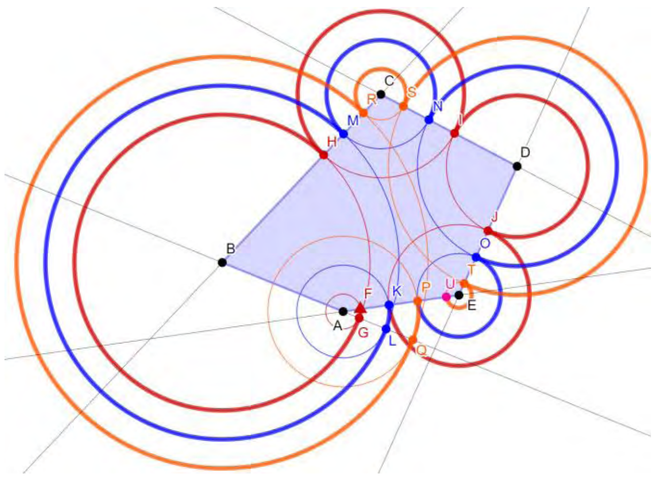


圖 4-29

$\overline{AF}$為起始半徑x，則$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=\mathrm{b}$，$\overline{CD}=\mathrm{c}$，$\overline{DE}=d$，$\overline{AE}=e$，將各輪半徑整理於下:

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e$	$r_{31}=x+2a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e$	$r_{32}=x+3a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{13}=-x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=-x-2a+2\mathrm{b}-\mathrm{c}+d-e$	$r_{33}=-x-3a+3\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2d-2e$
	$r_{14}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=x+2a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}-d+e$	$r_{34}=x+3a-3\mathrm{b}+3\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{15}=-x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{25}=-x-2a+2\mathrm{b}-2\mathrm{c}+2d-e$	$r_{35}=-x-3a+3\mathrm{b}-3\mathrm{c}+3d-2e$

距離=$|a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e|$

距離=$|a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e|$

觀察圖 4-29 及表格，我們發現**若$a+c+e \neq b+d$則無法完成循環，且循環軌跡以等距離的方式向原起始點 F 偏離。**

此時，我們繼續拖曳 B 點位置來改變邊長關係，直到距離$|a-b+c-d+e|=0$，也就是說

奇數邊長和 = 偶數邊長和($a+c+e=b+d$)時，在範圍$0<r_{11}<\overline{AK}$下，五邊形 1 內切循環現象必為一次循環，如圖 4-30。

其可以完成一次循環範圍為r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}中最小兩個半徑之和，限制端點為:

右端點 K:若起始點 F 向右拖曳時，r_{13}將逐漸變小，直到 F 點與 K 點重合。

左端點 A: 若起始點 F 向左拖曳時，r_{11}將逐漸變小，直到 F 點與 A 點重合。

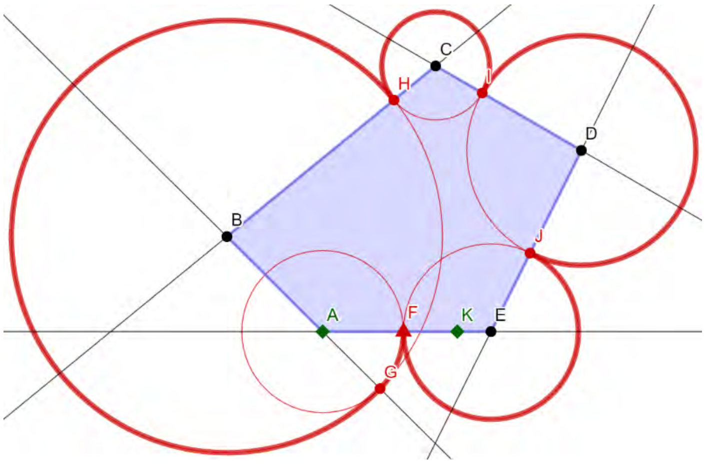


圖 4-30

5. 拖曳原起始點

接續討論 4，在**奇數邊長和 = 偶數邊長和($a+c+e=b+d$)**下，我們將原起始點 F 向右拖曳，則完成五邊形 <u>3 內切</u>一次循環，循環範圍為r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}中最小兩個半徑之和(即$\overline{AK}<r_{11}<\overline{AE}$)下皆能完成，如圖 4-31。

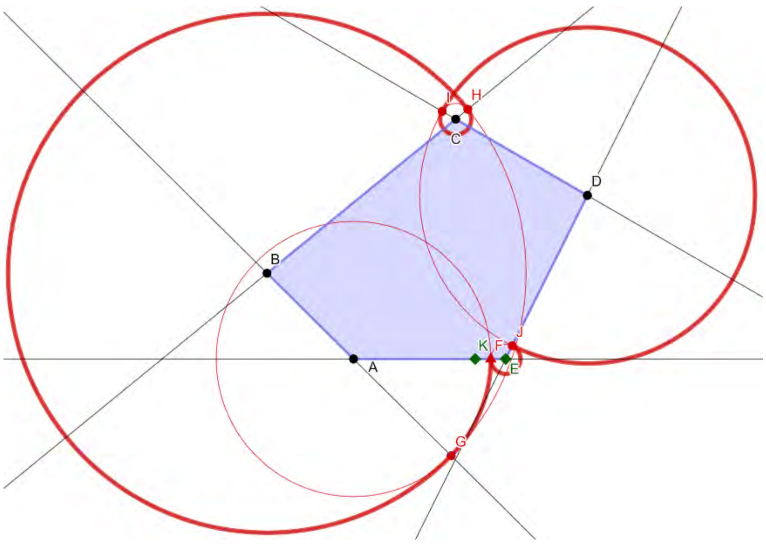


圖 4-31

6. 改變內切方式，發現新的邊長關係限制條件

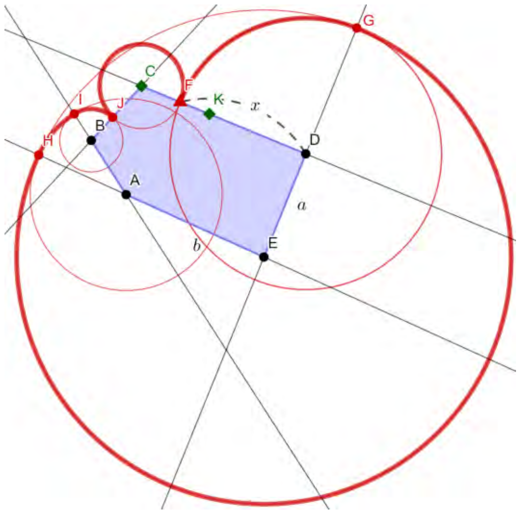


圖 4-32

$\overline{DF}$為起始半徑x，則$\overline{DE}=a$，$\overline{EA}=b$，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=d$，$\overline{CD}=e$，將各輪半徑整理於下:

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-\mathrm{b}-\mathrm{c}-d+e$	$r_{31}=x+2a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-\mathrm{b}-\mathrm{c}-d+e$	$r_{32}=x+3a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{13}=x+a-\mathrm{b}$	$r_{23}=x+2a-2\mathrm{b}-\mathrm{c}-d+e$	$r_{33}=x+3a-3\mathrm{b}-2\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{14}=x+a-\mathrm{b}-\mathrm{c}$	$r_{24}=x+2a-2\mathrm{b}-2\mathrm{c}-d+e$	$r_{34}=x+3a-3\mathrm{b}-3\mathrm{c}-2d+2e$
	$r_{15}=-x-a+\mathrm{b}+\mathrm{c}+d$	$r_{25}=-x-2a+2\mathrm{b}+2\mathrm{c}+2d-e$	$r_{35}=-x-3a+3\mathrm{b}+3\mathrm{c}+3d-2e$

距離=$|a-\mathrm{b}-\mathrm{c}-d+e|$

距離=$|a-\mathrm{b}-\mathrm{c}-d+e|$

當距離$|a-b-c-d+e|=0$，也就是說**二鄰邊和等於三鄰邊和($a+e=b+c+d$)**時，在循環範圍為r_{11}、r_{12}、r_{13}、r_{14}、r_{15}中最小兩個半徑之和(即$\overline{DK}<r_{11}<\overline{DC}$)下皆能完成五邊形 3 內切循環現象必為一次循環，如圖 4-32。

7. **繼續拖曳原起始點，觀察五邊形 5 內切的循環現象**

接續討論 5、6，我們發現在**奇數邊長和=偶數邊長和**以及**二鄰邊和等於三鄰邊和**兩種情況，皆可完成五邊形 3 內切一次循環，於是在不改變原有內切圓的相切關係下，我們分別繼續拖曳邊上的起始點位置，亦可完成五邊形 5 內切一次循環，如圖 4-33 和圖 4-34。

奇數邊長和=偶數邊長和($a+c+e=b+d$)	二鄰邊和等於三鄰邊和($a+e=b+c+d$)

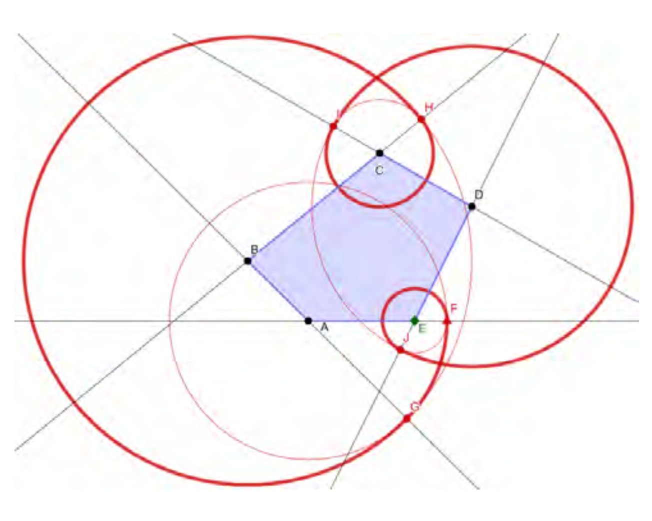
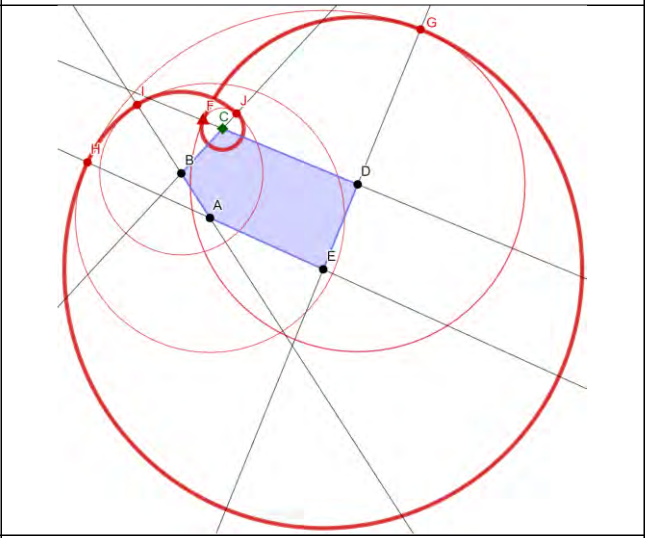

	

圖 4-33 可循環範圍: $r_{11} > \overline{AE}$	圖 4-34 可循環範圍: $r_{11} > \overline{DC}$

(四) 利用四邊形的研究結果推論六邊形可循環之方法

1. **根據四邊形之研究推論，六邊形<u>奇數個內切</u>，其循環現象必為一次和二次循環。**

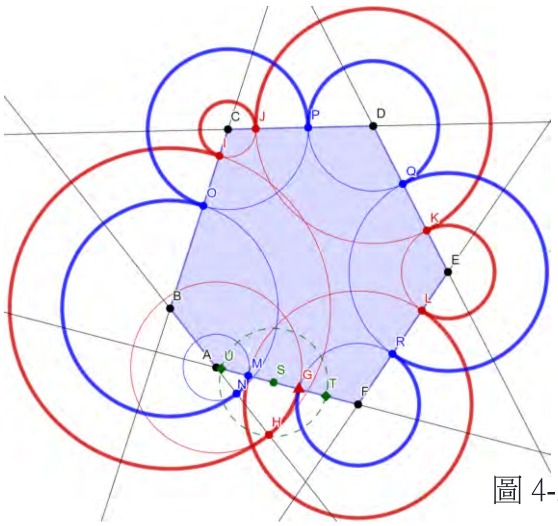


圖 4-35

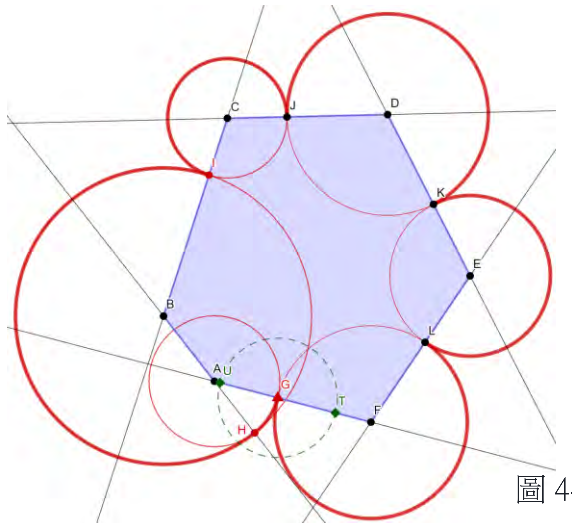


圖 4-36

$\overline{AG}$為起始半徑x，則$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$依此類推，則將各輪半徑整理於下:

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=-x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d-e+f$	$r_{31}=x$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=-x+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d-e+f$	$r_{32}=x+a$
	$r_{13}=-x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=x+\mathrm{c}-d+e-f$	$r_{33}=-x-a+\mathrm{b}$
	$r_{14}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{24}=-x+d-e+f$	$r_{34}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$
	$r_{15}=-x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$	$r_{25}=x+e-f$	$r_{35}=-x-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d$
	$r_{16}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e$	$r_{26}=-x+f$	$r_{36}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}-d+e$

若可以完成循環(其中$a+c+e\neq b+d+f$)，則可能情況如下:

(1) $r_{21}=r_{11}$

$\Rightarrow x=\dfrac{-a+b-c+d-e+f}{2}$即為一次循環的起始半徑值，循環軌跡如圖 4-36。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環，如圖4-35。

此時，以圖 4-36 的 G 點為圓心，找取$\min\{r_{11},r_{12},r_{13},r_{14},r_{15},r_{16}\}$為半徑值畫圓，則可以找出二次循環的範圍。故在$\overline{AU}<r_{11}<\overline{AT}$範圍時，六邊形 1 內切必可完成一次和二次循環。

下圖 4-37 和圖 4-38 為六邊形 3 內切及 5 內切一次循環軌跡圖。

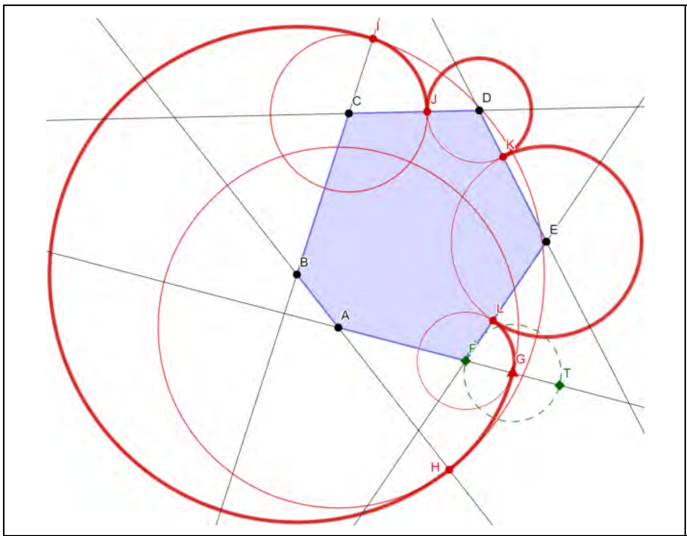


圖 4-37 六邊形 3 內切

$\overline{AF}<r_{11}<\overline{AT}$時必可完成一次和二次循環。

一次循環起始半徑值$\dfrac{-a+b+c-d+e+f}{2}$。

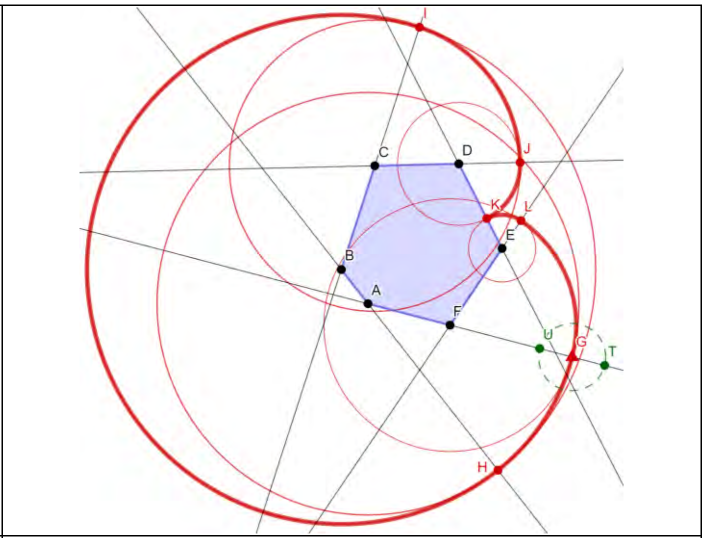


圖 4-38 六邊形 5 內切

$\overline{AU}<r_{11}<\overline{AT}$時必可完成一次和二次循環。

一次循環起始半徑值$\dfrac{-a+b+c+d+e+f}{2}$。

2. 根據四邊形之研究推論，六邊形<u>偶數個內切</u>，在奇數邊長和=偶數邊長和或兩組三鄰邊之和相等(2、4、6 內切)條件下，其循環規則必為一次循環。

(1) 奇數邊長和=偶數邊長和$(a+c+e=b+d+f)$

下圖 4-39 至圖 4-42 分別為六邊形 0、2、4 和 6 內切的一次循環軌跡圖。

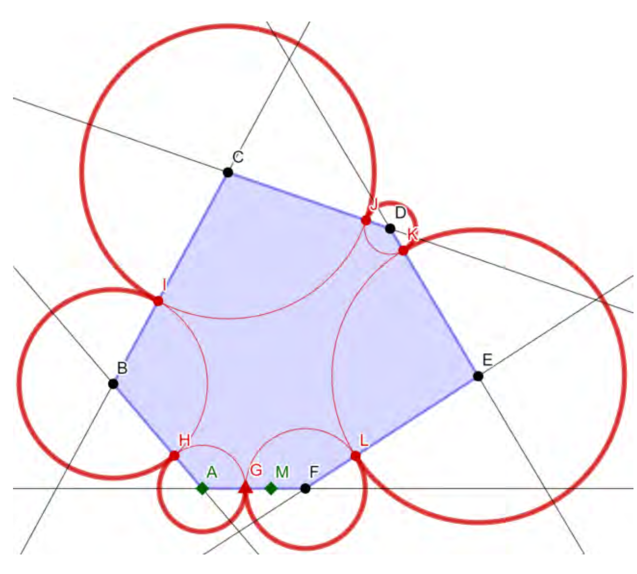


圖 4-39 **六邊形 0 內切**

0< $r_{11} < \overline{AM}$範圍時，**必為一次循環**。

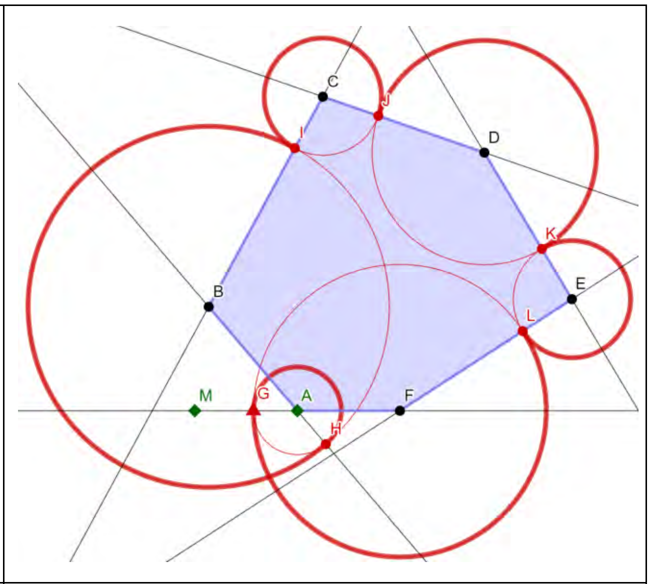


圖 4-40 **六邊形 2 內切**

0< $r_{11} < \overline{AM}$範圍時，**必為一次循環**。

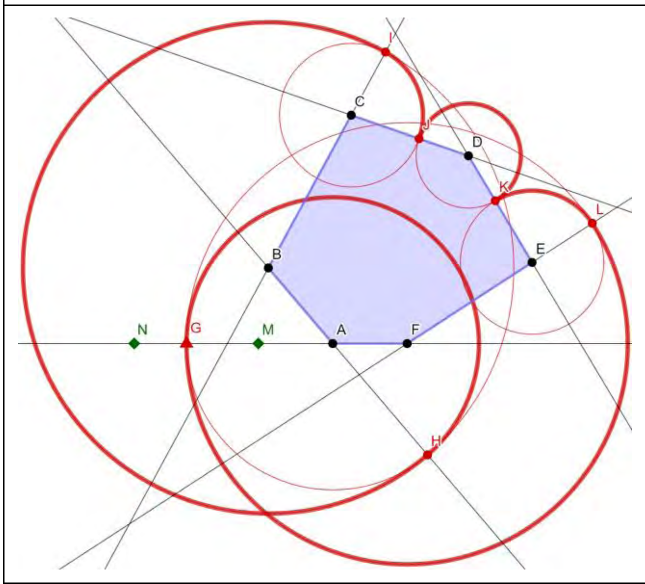


圖 4-41 **六邊形 4 內切**

$\overline{AM} < r_{11} < \overline{AN}$範圍時，**必為一次循環**。

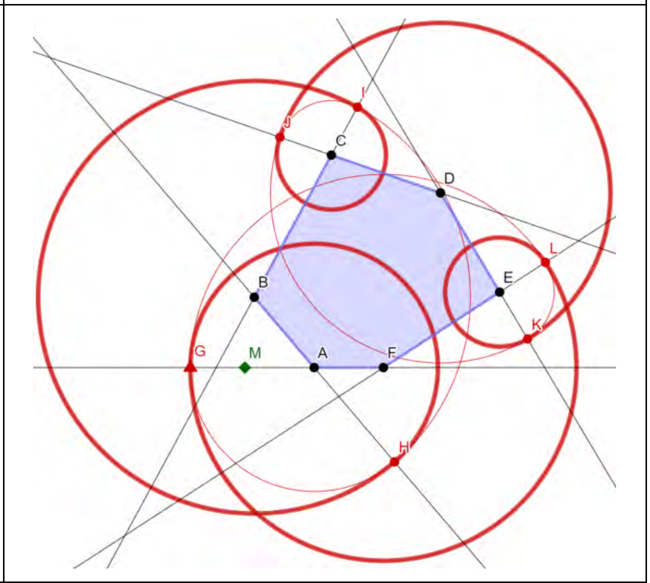


圖 4-42 **六邊形 6 內切**

$r_{11} > \overline{AM}$範圍時，**必為一次循環**。

(2) 兩組三鄰邊之和相等$(a + e + f = b + c + d)$

下圖 4-43 至圖 4-45 分別為六邊形 2、4 和 6 內切的一次循環軌跡圖。

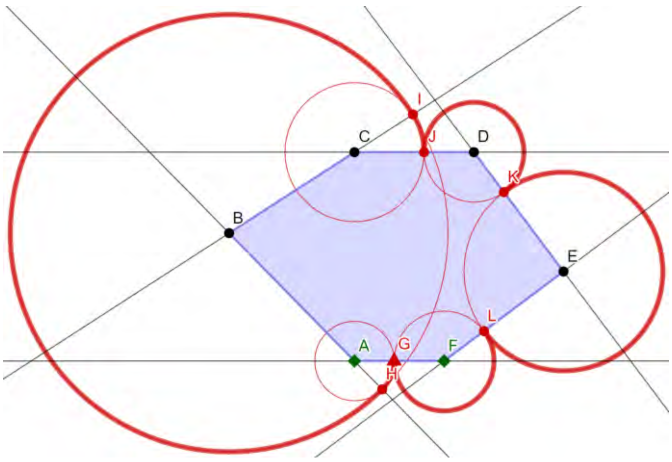


圖 4-43 六邊形 2 內切

$0 < r_{11} < \overline{AF}$範圍時，必為一次循環。

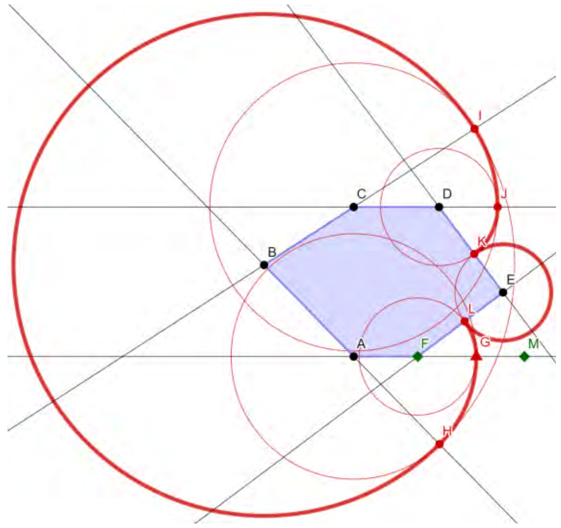


圖 4-44 六邊形 4 內切

$\overline{AF} < r_{11} < \overline{AM}$範圍時，必為一次循環。

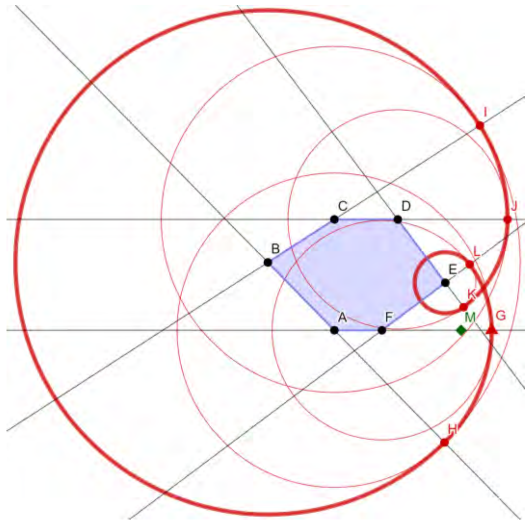


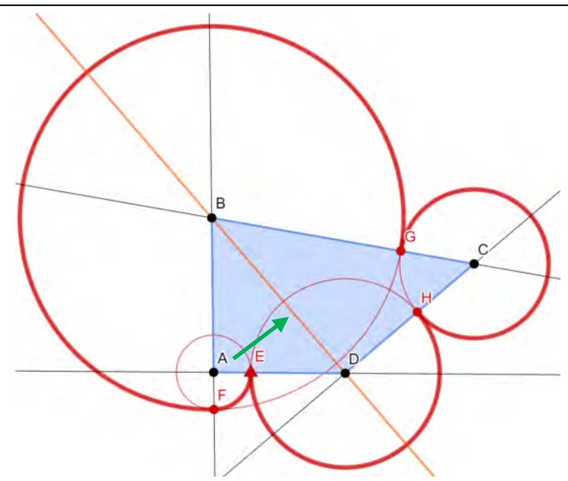
圖 4-45 六邊形 6 內切

$r_{11} > \overline{AM}$範圍時，必為一次循環。

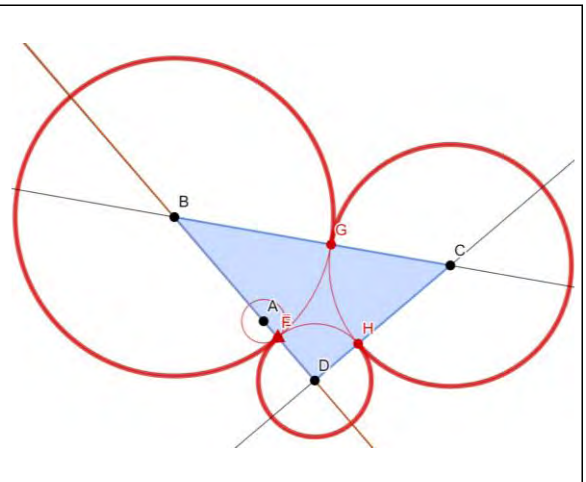
(五) 利用內切圓退化說明循環關係

1. 四、五、六邊形的退化情形:將內切圓出現的端點向內退化，發現下列的循環關係。

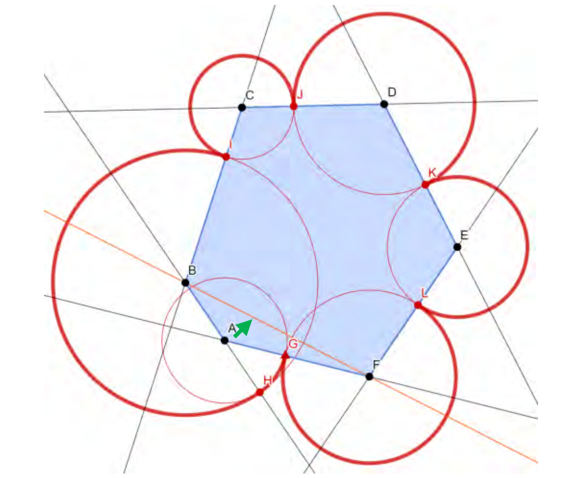
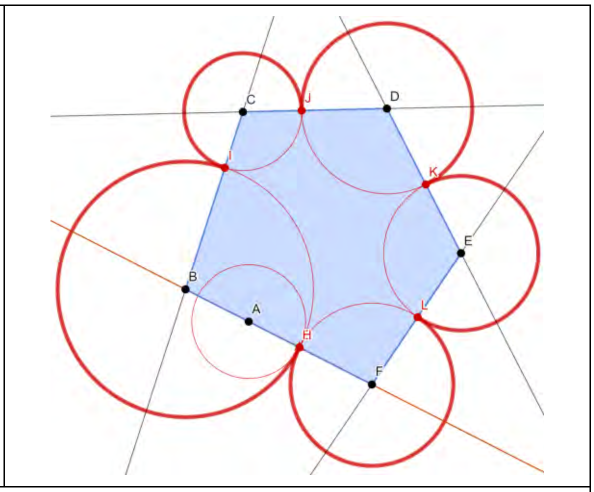
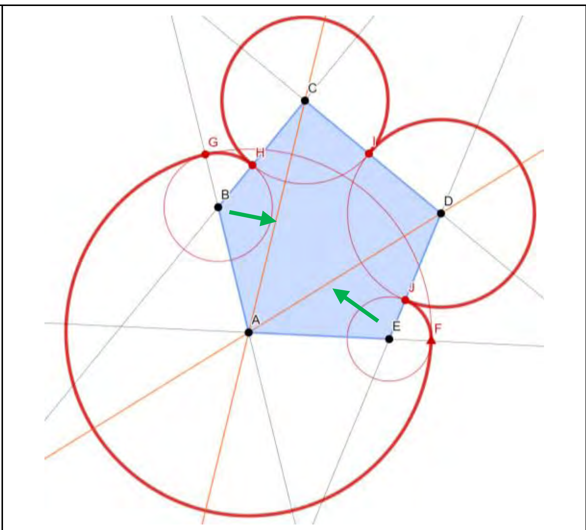
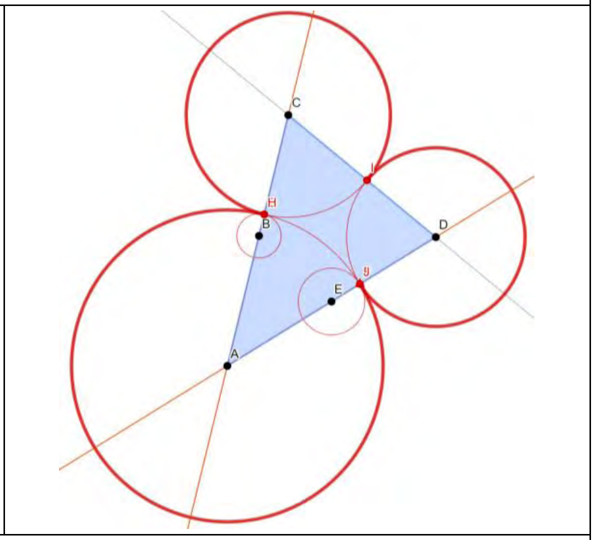
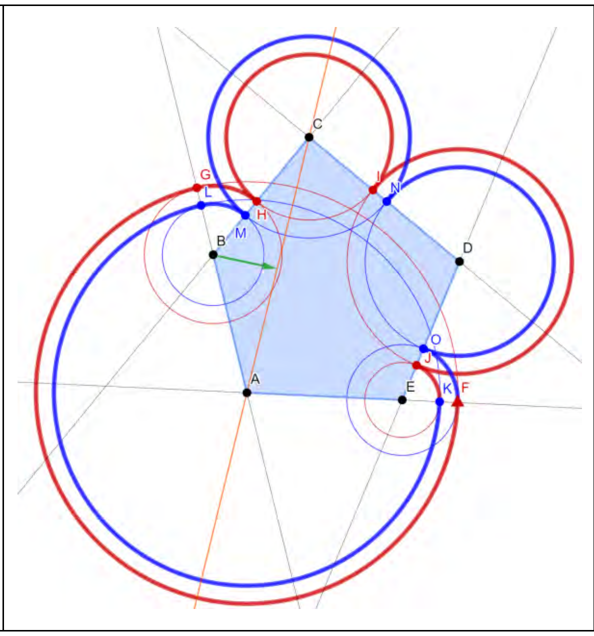
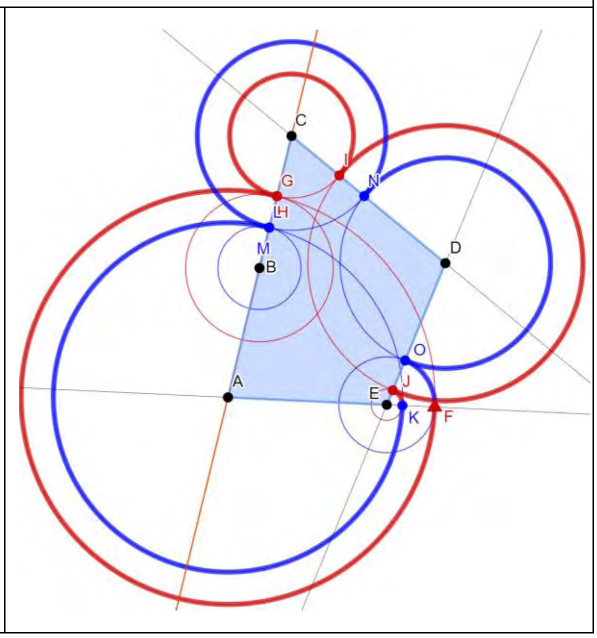
四邊形1內切

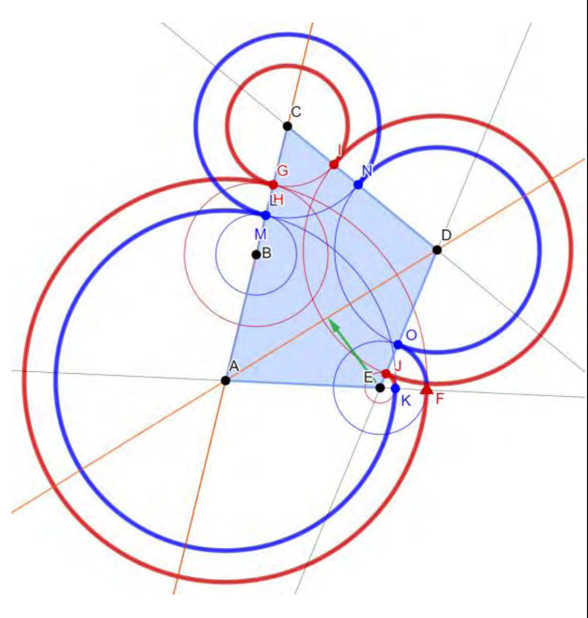
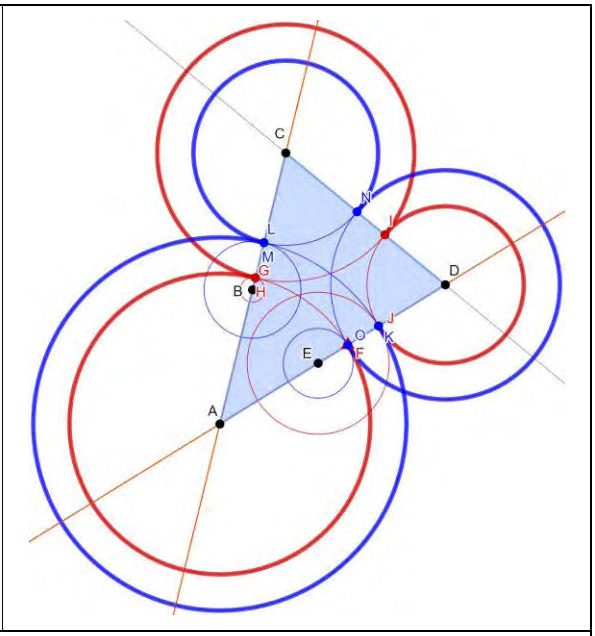


三角形0內切



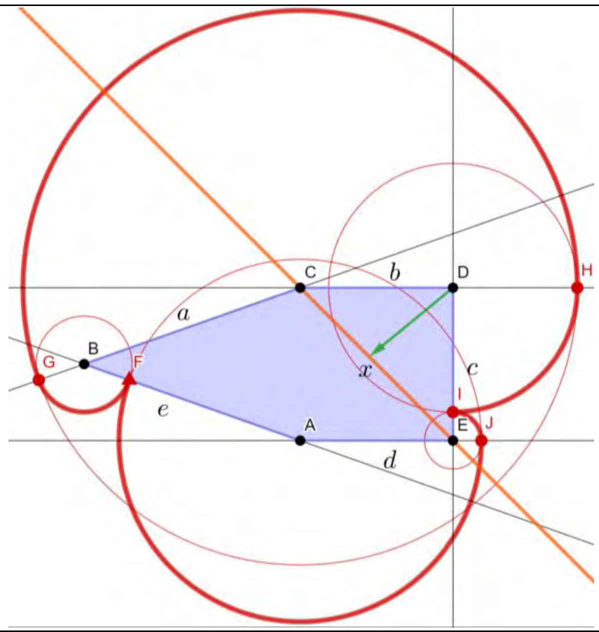
【說明】將左圖四邊形 1 內切循環情形的內切圓圓心 A 向$\overline{BD}$移動到 E、F 兩點重疊時，發現與右圖三角形 0 內切的循環結果相同。

<table>
<tr><td>六邊形1內切</td><td>
</td><td>五邊形0內切</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">【說明】透過內切圓的退化，我們發現六邊形 1 內切與五邊形 0 內切的循環結果相同。</td></tr>
<tr><td>五邊形2內切</td><td>
</td><td>三角形0內切</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">【說明】將五邊形 2 內切的內切圓做兩次退化後，發現與三角形 0 內切的循環結果相同。</td></tr>
<tr><td>五邊形2內切二次循環</td><td>
</td><td>四邊形1內切二次循環</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>四邊形1內切二次循環</td>
<td>
</td>
<td>三角形0內切二次循環</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">【說明】在二次循環情況下，將五邊形 2 內切的內切圓圓心 B 和 E，分別向$\overline{AC}$和$\overline{AD}$退化至切點位置重疊時，發現此兩步驟的內切圓退化情形與四邊形 1 內切、三角形 0 內切的循環結果相同。</td>
</tr>
</table>

2. 五邊形奇數個內切之退化情形

接續上述研究，我們進一步討論五邊形奇數個內切是否能藉由內切圓退化的方法，產生與四邊形偶數個內切相同的循環規則，我們舉五邊形 3 內切二鄰邊和等於三鄰邊和為例。



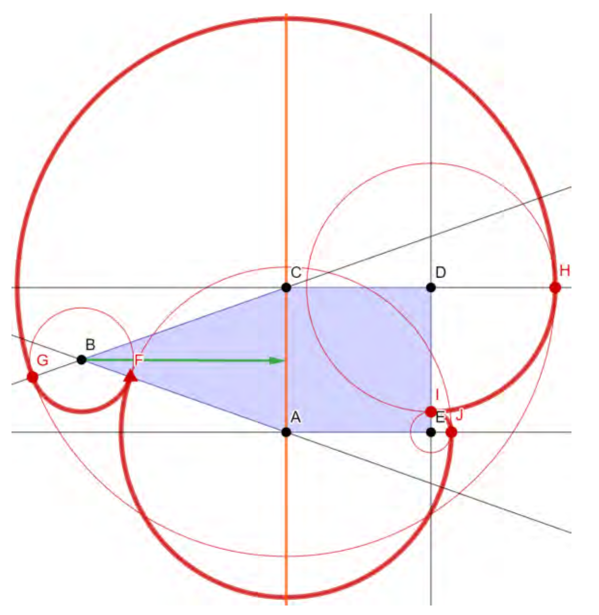
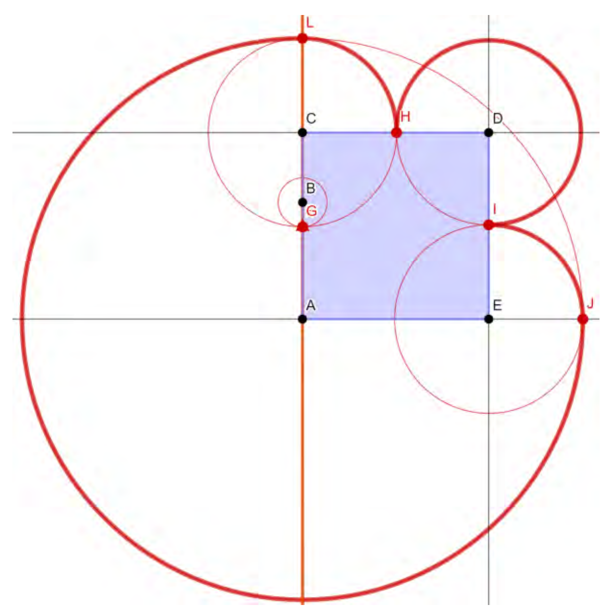
若要完成四邊形 2 內切一次循環，則必須滿足四邊形邊長關係①奇數邊長和=偶數邊長和或②兩組鄰邊之和相等。

【證明】$\overline{BC} = a$，$\overline{CD} = b$，$\overline{DE} = c$，$\overline{EA} = d$，$\overline{AB} = e$且$\overline{CE} = x$

在五邊形 3 內切一次循環存在$a+e=b+c+d$邊長關係下，檢驗內切圓 D 退化後是否符合①或②情況的四邊形邊長限制關係

①四邊形奇數邊長和=偶數邊長和	②兩組鄰邊之和相等
由$x+e=a+d$和$a+e=b+c+d$，可知 $x=2a-b-c$ $\because$ 上圖中$x\neq 2a-b-c$，則退化後邊長關係不符合奇數邊長和=偶數邊長和，故無法完成循環	由$a+e=x+d$和$a+e=b+c+d$，可知 $x=b+c$(矛盾) $\because$ 三角形的三邊長關係$b+c>x$ $\therefore$所以無法完成循環

在此情況下，由①和②的討論，我們得知五邊形 3 內切一次循環無法退化成四邊形 2 內切一次循環的結果。但當改以退化內切圓 B 時，則我們發現下列的情形:

<table>
<tr>
<td>五邊形3內切一次循環</td>
<td>
</td>
<td>四邊形2內切一次循環</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">【說明】將左圖五邊形 3 內切(兩組鄰邊之和相等)循環情形的內切圓圓心 B 向$\overline{AC}$移動到 F、G 兩點重疊時，發現與右圖四邊形 2 內切(兩組鄰邊之和相等)循環結果相同。</td>
</tr>
</table>

◆ **小結論**

利用內切圓退化的方法，我們發現到:

1. 三、五邊形的偶數個內切與四、六邊形奇數個內切在循環規則上具有一致性，且其循環規則皆為一次和二次循環，符合我們在研究內容(一)~(四)的討論。
2. 在五邊形的奇數個內切與四、六邊形偶數個內切循環下，由於受到邊長關係的限制，所以若選取正確的內切圓進行退化，且退化前後邊長關係符合限制條件時，則可藉由內切

圓退化的方法來說明兩者的循環規則具一致性，反之則無法。符合我們在研究內容(二)~(四)所做的討論。

伍、研究結果

一、邊長關係限制條件與循環規則

	關係分類	邊長關係限制	循環規則
循環	三角形、五邊形偶數個內切 四邊形、六邊形奇數個內切	無	一次和二次循環
	五邊形奇數個內切	①奇數邊長和=偶數邊長和 ②二鄰邊和等於三鄰邊和(3、5 內切)	一次循環
	四邊形、六邊形偶數個內切	①奇數邊長和=偶數邊長和 ②兩組鄰邊之和相等(2、4、6 內切)	

二、一次循環之起始半徑值

	內切數	一次循環起始半徑值		內切數	一次循環起始半徑值
三角形偶數個內切	0	$x=\frac{a-b+c}{2}$	四邊形奇數個內切	1	$x=\frac{-a+b-c+d}{2}$
	2	$x=\frac{-a+b+c}{2}$		3	$x=\frac{-a+b+c+d}{2}$
五邊形偶數個內切	0	$x=\frac{a-b+c-d+e}{2}$	六邊形奇數個內切	1	$x=\frac{-a+b-c+d-e+f}{2}$
	2	$x=\frac{-a+b+c-d+e}{2}$		3	$x=\frac{-a+b+c-d+e+f}{2}$
	4	$x=\frac{-a+b+c+d+e}{2}$		5	$x=\frac{-a+b+c+d+e+f}{2}$

三、邊數與內切個數的關連性

(一) 三角形和五邊形偶數個內切的循環結果與四邊形和六邊形奇數個內切相同。

(二) 五邊形奇數個內切的循環結果與四邊形和六邊形偶數個內切相同。

陸、討論

一、不同的畫法是否影響循環結果

在原有規則下，三角形 1 內切因受到三邊長關係的限制而無法完成循環。此時，我們若改變規則三，讓各輪中各頂點的圓與下一個圓的內切關係未保持一致時，則我們發現到下列的情況:

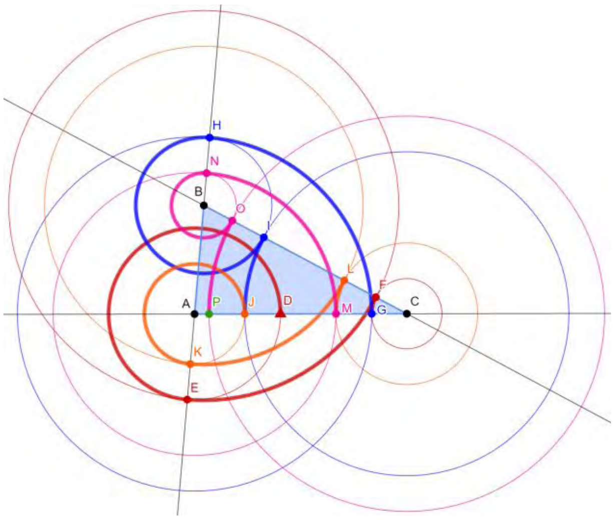


圖 6-1 三角形 1 內切無法循環

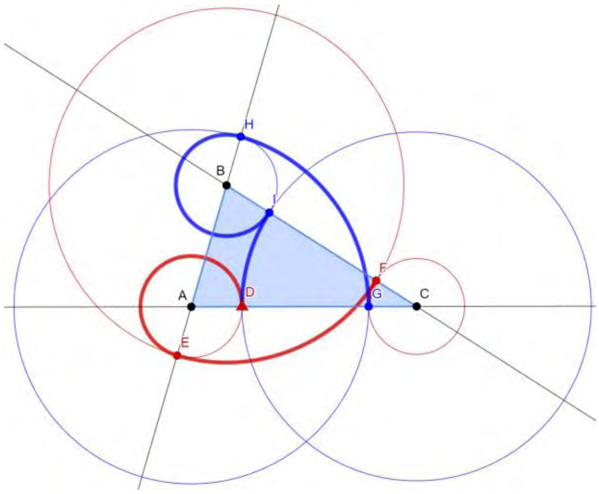


圖 6-2 三角形 1 內切二次循環

觀察圖 6-1，我們發現圓 A 在第一輪(紅色)、第三輪(橘色)中為內切小圓，而在第二輪(藍色)、第四輪(粉色)中則改為內切大圓，於是我們做進一步的討論，將各輪半徑整理於下

公差=$|-2b+2c|$

	第一輪	第二輪	第三輪	第四輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{31}=x-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}$	$r_{41}=x+a-3b+3c$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x-\mathrm{b}+\mathrm{c}$	$r_{32}=x+a-2\mathrm{b}+2\mathrm{c}$	$r_{42}=x-3b+3c$
	$r_{13}=-x-a+\mathrm{b}$	$r_{23}=-x+2\mathrm{b}-\mathrm{c}$	$r_{33}=-x-a+3b-2c$	$r_{43}=-x+4b-3c$

公差=$|-2b+2c|$

觀察表格，發現若可以完成循環，則可能為下列情況:

(1) $r_{21}=r_{11} \Rightarrow\ x+a-b+c=x \Rightarrow\ b=\ a+c$

因為三角形中$a+c>b$，所以與結果產生矛盾，故無法形成一次循環，且繞行軌跡將以跨輪等距離(距離=$|-2b+2c|$)的方式逐漸偏離，軌跡如圖 6-1。

(2) $r_{31}=r_{11} \Rightarrow\ x-2b+2\mathrm{c}=\ x \Rightarrow b=\mathrm{c}$

所以當三角形兩腰相等時，則可以完成二次循環。此時我們拖曳圖 6-1 的 B 點位置，當拖曳至$\overline{BC} = \overline{AC}$時，則三角形 1 內切必為二次循環，如圖 6-2。

(3) $r_{41} = r_{11} \Rightarrow x + a - 3b + 3c = x \Rightarrow 3b = a + 3c$

所以若三角形邊長存在 $3b = a + 3c$關係時，則三角形 1 內切必為三次循環，如圖 6-3。

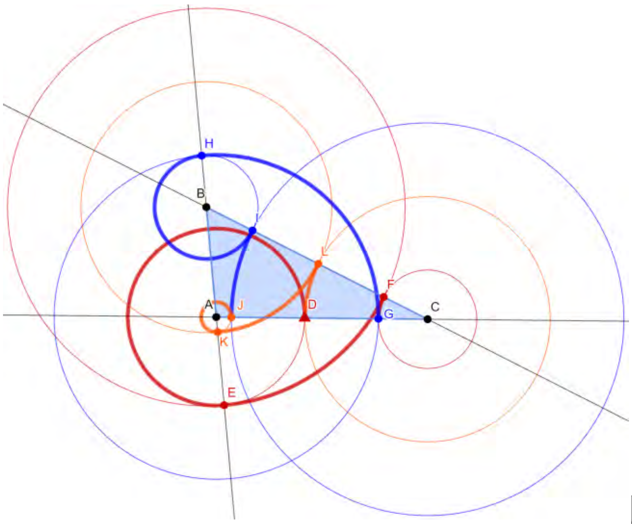


圖 6-3 三角形 1 內切三次循環

故由此討論得知，改變各輪中各頂點的圓與下一個圓的內切關係時將產生不同的循環結果。

二、內切小圓選取位置的不同，是否產生不同的循環結果，我們以四邊形 1 內切為例

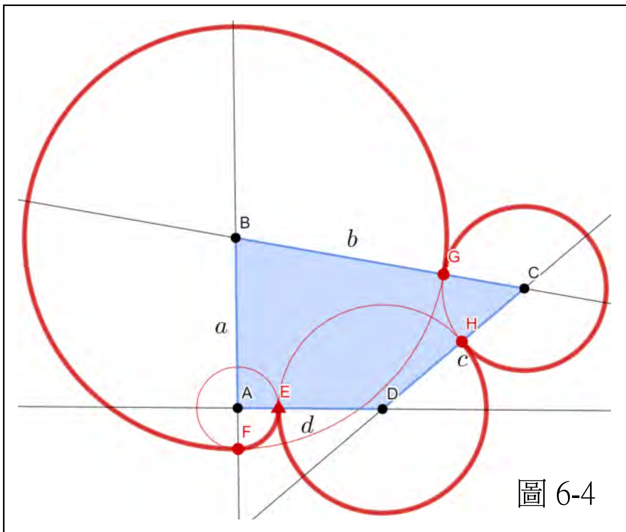


圖 6-4

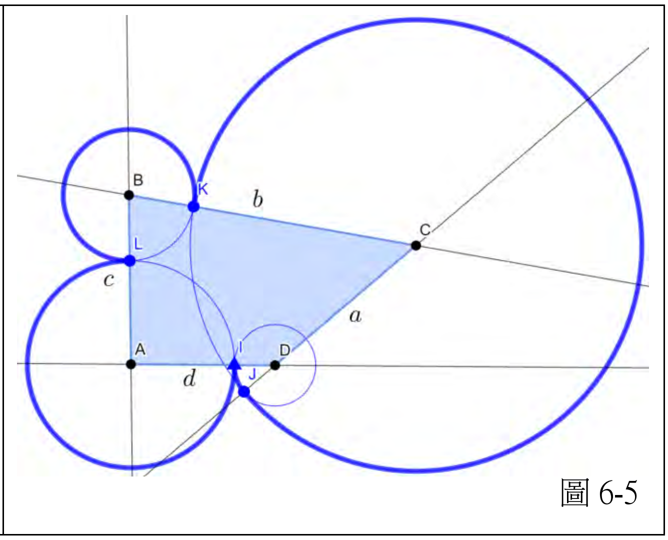


圖 6-5

由圖 6-4(紅色)和圖 6-5(藍色)的循環結果，我們將各輪半徑整理如下

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11} = x$	$r_{21} = -x - a + \mathrm{b} - \mathrm{c} + d$	$r_{31} = x$
	$r_{12} = x + a$	$r_{22} = -x + \mathrm{b} - \mathrm{c} + d$	$r_{32} = x + a$
	$r_{13} = -x - a + \mathrm{b}$	$r_{23} = x + \mathrm{c} - d$	$r_{33} = -x - a + \mathrm{b}$
	$r_{14} = x + a - \mathrm{b} + \mathrm{c}$	$r_{24} = -x + d$	$r_{34} = x + a - \mathrm{b} + \mathrm{c}$

我們發現到:

兩種情形必可完成二次循環，且一次循環起始半徑值之計算公式皆為$\dfrac{-a+\mathrm{b}-\mathrm{c}+d}{2}$。

故同為 1 內切的情況下，內切小圓可以有不同的選取位置，但其循環規則是相同的。

柒、 結論

一、本研究利用兩圓外切及內切的概念，透過拖曳原起始點、改變起始半徑值與邊長大小關係、循環路徑表格分析證明，完整探討三、四、五、六邊形在 0~6 內切情形下可產生循環之規則、邊長關係限制條件與半徑範圍；我們透過退化內切圓的方式檢驗結果的正確性並進一步發現循環規則在不同邊數與內切個數間之關連性。

二、與文獻之異同

與本研究主題相關三篇文獻《弧弧相切─多邊形內相切弧的探討》、《圓舞曲》、《被困住的「圓」桌武士》在循環規則的探討中，無論圓弧半徑是否大於邊長，下一步皆以交點落在多邊形內部邊上為主(即為本文的零內切或一內切)；簡而言之，文獻所建立之循環規則僅為本研究中的一特例。

三、未來展望

加入內切元素後，隨著邊數的增加，我們所需探討的內、外切組合數與循環路徑數亦跟著變多，大幅提升繪圖、代數證明的複雜度，致使我們暫僅研究到六邊形。故在未來的展望上，我們希望做更深入、嚴謹與完整的探究，找出 N 邊形的一致性畫法與規則。

捌、 參考資料

一、陳冠安、陳宇亭、陳佑任、陳芝云(2008)。**弧弧相切－多邊形內相切弧的探討**。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會國中組數學科。

二、林志賢、吳禮揚、楊瓘縉、李易哲(2010)。**圓舞曲**。中華民國第五十屆中小學科學展覽會高中組數學科。

三、曹博源、盧偉丞、劉詠筑(2018)。**被困住的「圓」桌武士。**全國高級中等學校小論文數學類第 1070331 梯次。

【評語】030419

考慮以 n 邊形的頂點 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 當圓心，以 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 為半徑，作圓 $O_1,O_2,\cdots,O_n,\cdots$。在限制 O_i 必須與 O_{i-1} 相切的前提下，以切點相連的圓弧是否會形成封閉曲線的問題。針對三角形、四邊形、五邊形、六邊形這幾種多邊形何時具有這種特性、封閉曲線的構成方式作了詳盡的分析，給出了完整的結果。把原本在多邊形的內部畫相切弧的問題轉成在多邊形的外部畫相切的圓，讓問題可以有更多的變化（可以考慮內切、外切的各種情況），想法很好，值得嘉許。作者們針對三、四、五、六邊形的各種相切情況的循環性做了分析，在這個部分討論的非常仔細而且完整，十分難得，所得到的結果公式可以觀察到有一定的規律，稍嫌美中不足的是沒有能夠針對這個規律做進一步的統整，進而對於一般的 n 邊形給出結論，有點可惜了。

作品海報

摘　要

一、邊長關係無限制

三、**五邊形偶數個內切**與**四、六邊形奇數個內切**皆可產生一次和二次循環。

二、邊長關係受限制

（一）**四、六邊形偶數個內切**產生循環的充分條件為**奇數邊長和 = 偶數邊長和或兩組鄰邊和相等（2、4、6 內切）**。

（二）**五邊形奇數個內切**產生循環的充分條件為**奇數邊長和 = 偶數邊長和或二鄰邊和等於三鄰邊和（3、5 內切）**。

（一）、（二）循環規則必為一次循環。

壹、研究動機

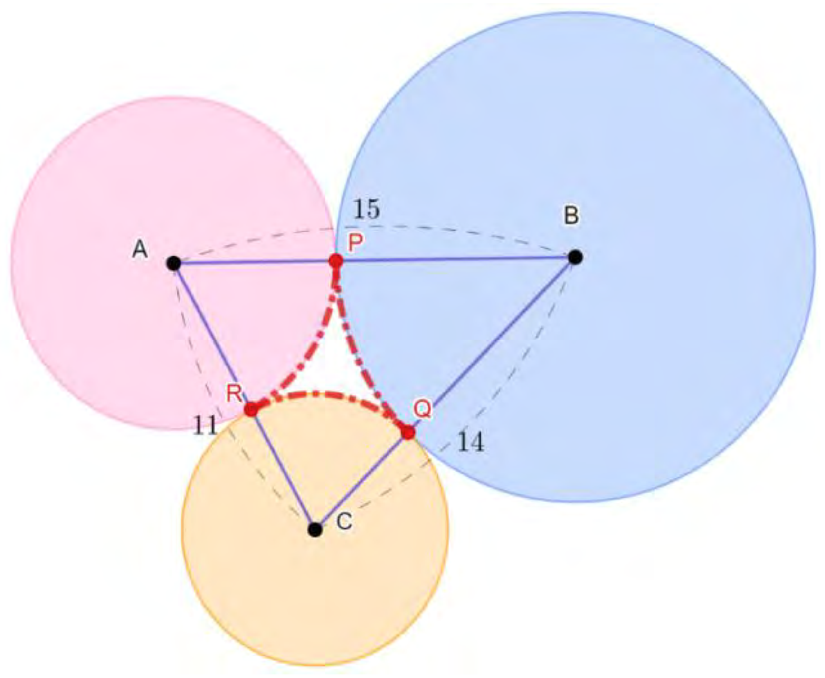
課本的一道題目：

ΔABC 中，已知圓 A、圓 B、圓 C 兩兩外切，且連心線 $\overline{AB}=15$、$\overline{BC}=14$、$\overline{AC}=11$，則圓 A、B、C 的半徑為何？

不禁讓我們感到好奇的是⋯

$Q1$：如果給定任意一個三角形是不是皆能夠以三頂點為圓心畫出兩兩外切的圓呢？

$Q2$：三個外切圓於三角形內部所留下的循環軌跡（$\overset{\frown}{PQ} \to \overset{\frown}{QR} \to \overset{\frown}{RP}$），若加入內切圓是否也能產生繞回的結果呢？四邊形、五邊形⋯等循環結果又會如何呢？



貳、研究目的

一、利用兩圓相切探討三、四、五、六邊形能否產生循環的**邊長關係限制條件**與**循環規則**。

二、利用兩圓相切探討三、四、五、六邊形產生循環的**起始半徑值**與**範圍**。

三、利用退化內切圓的方式找出三、四、五、六邊形**邊數**與**內切個數**的關連性。

參、研究過程與方法

一、彙整相關文獻：

（一）第四十八屆全國中小學科展作品《弧弧相切——多邊形內相切弧的探討》

在奇數多邊形中，一定會發生，而在偶數多邊形時，只有當『奇數邊的和＝偶數邊的和』時，才有弧弧相切的現象產生。

（二）第五十屆全國中小學科展作品《圓舞曲》

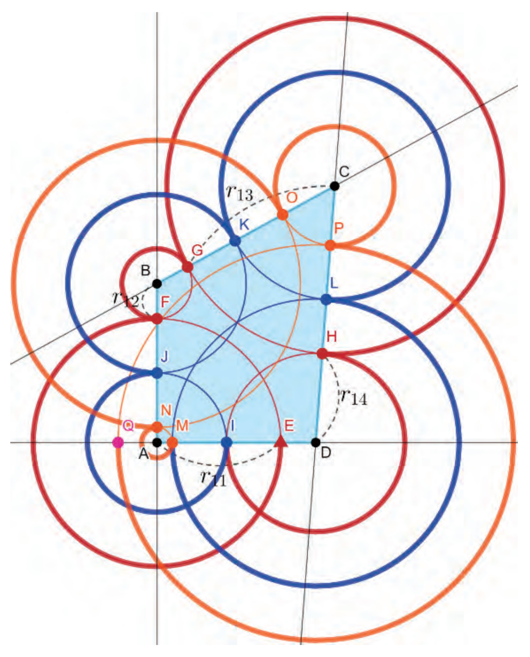
提出了任意 N 邊形（分奇數與偶數）可以產生一輪回歸、二輪回歸的一般條件，並探討了多邊形的內心與回歸現象之關連性。

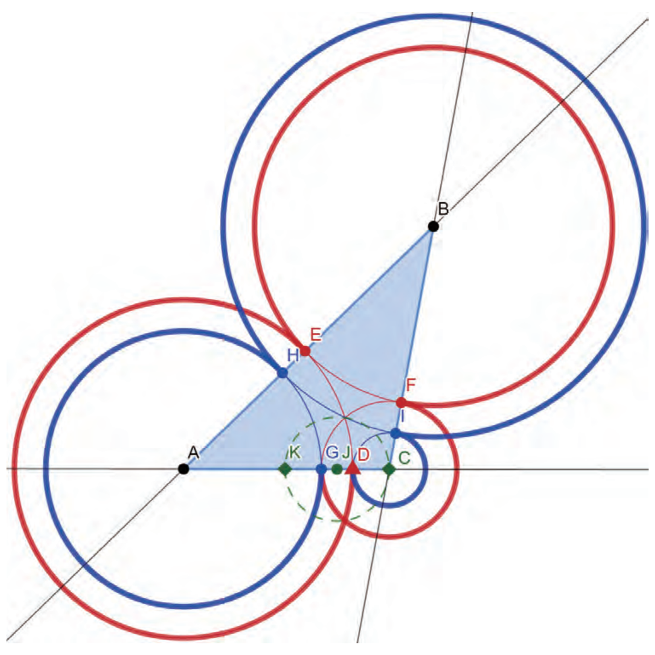
（三）第 1070331 梯次小論文《被困住的「圓」桌武士》

將交點落在內部的半徑設為正值，交點落在外部的半徑設為負值的新方法，試圖將外部的軌跡繞回內部亦會產生回歸現象。

二、名詞釋義：

Geogebra 幾何圖形符號說明





r_{ij}：指在多邊形第 i 輪繞行軌跡中，以第 j 個頂點為圓心所取的半徑長。

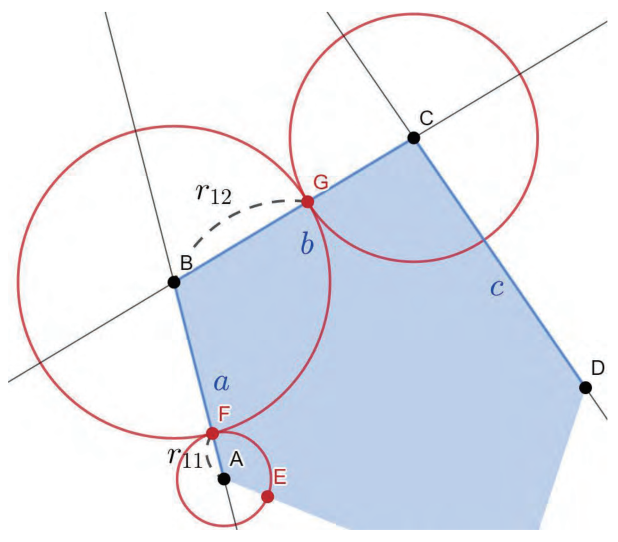
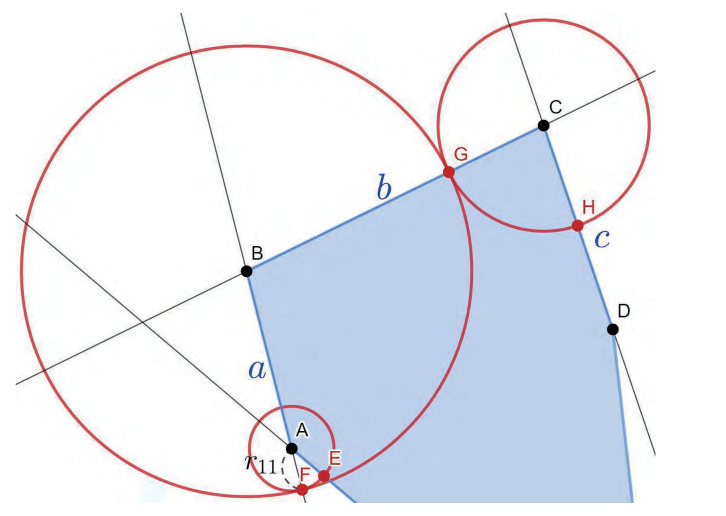
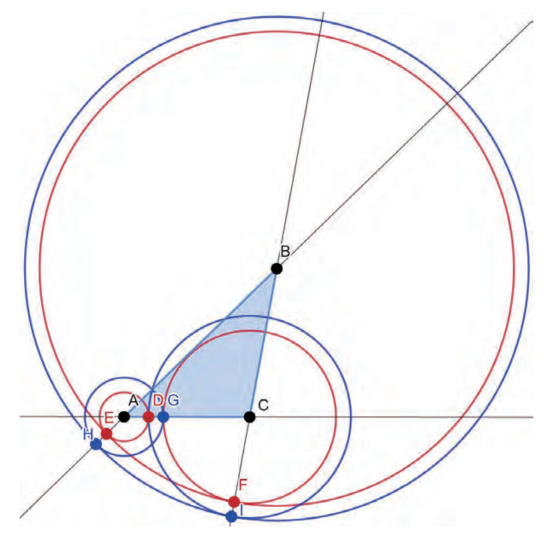
▲：繞行軌跡之起始點。

●、●、●、●：第一輪至第四輪繞行軌跡於多邊形各邊的交點。

紅色、藍色、橘色、粉色粗體線：第一輪至第四輪繞行軌跡。

◆、●：為可完成循環的特定範圍。

三、規則建立：

【規則一】外切	【規則二】內切	【規則三】內切關係一致
		
在 0 內切（全外切）的循環情況下，則任意連續三個邊長關係須符合第一、三邊長之和大於第二邊之邊長。	在 1 內切（圓 A 為內切小圓，圓 B 為內切大圓）的循環情況下，則第二個邊長需大於第一個邊長。	各輪中各頂點的圓與下一個圓的內切關係需保持一致。

本研究的繪圖規則皆建立在規則一至規則三上，若出現內切情形，統一以內切小圓半徑值 = x，軌跡繞至下一個邊的長度為 a，接下來依序為 b、c、d⋯等。

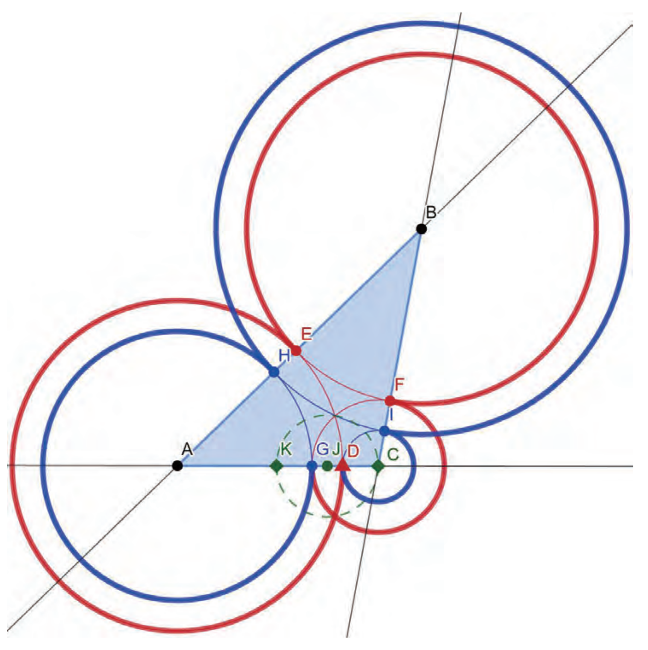
四、研究內容：

（一）三角形中，利用兩圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

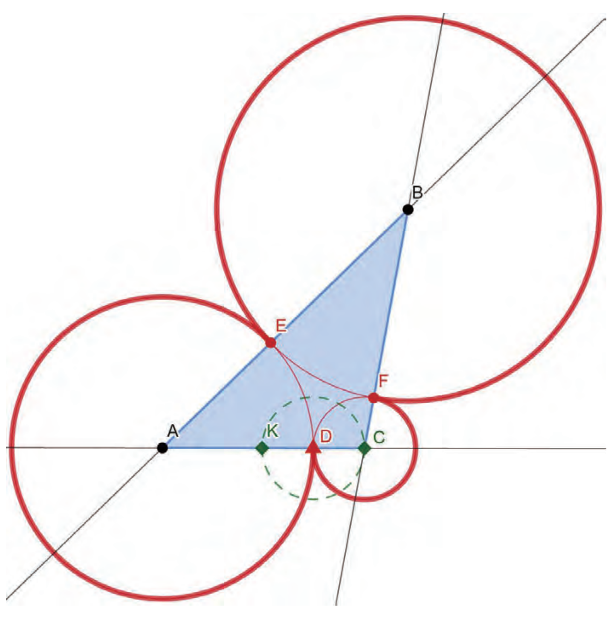
1. 偶數個內切

假設 $\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CA}=c$

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=-x+a-b+c$	$r_{31}=x$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=x+b-c$	$r_{32}=-x+a$
	$r_{13}=x-a+b$	$r_{23}=-x+c$	$r_{33}=x-a+b$



三角形 0 內切二次循環



三角形 0 內切一次循環

◆ 完成循環，可能情況：(1) $r_{21}=r_{11} \Rightarrow x=\dfrac{a-b+c}{2}=\dfrac{r_{11}+r_{21}}{2}$ 為一次循環的起始半徑值。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環。

◆ 範圍限制：D 點為圓心，$min\left\{\dfrac{a-b+c}{2},\dfrac{a+b-c}{2},\dfrac{-a+b+c}{2}\right\}$ 為半徑值畫圓，

則 $\overline{AK}<r_{11}<\overline{AC}$，必可一次和二次循環。

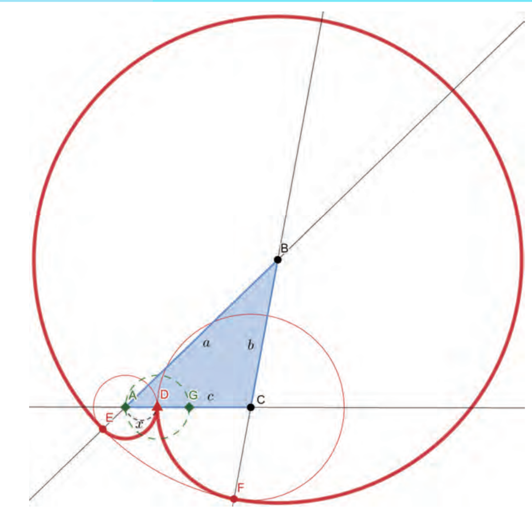
◆ 研究發現：二次循環中點軌跡為一次循環軌跡。

當 $r_{11}\neq\dfrac{a-b+c}{2}$ 時，在起始點選取至適當範圍下，必為二次循環。

◆ 完成循環，可能情況：(1) $r_{21}=r_{11} \Rightarrow x=\frac{-a+b+c}{2}=\frac{r_{11}+r_{21}}{2}$ 為一次循環的起始半徑值。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環。

◆ 範圍限制：D 點為圓心，$min\{\frac{-a+b+c}{2},\frac{a+b+c}{2},\frac{a-b+c}{2}\}$ 為半徑值畫圓，則 $0<r_{11}<\overline{AG}$，必可一次和二次循環。



三角形 2 內切一次循環

2. 奇數個內切

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-b+c$	$r_{31}=x+2a-2b+2c$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b+c$	$r_{32}=x+3a-2b+2c$
	$r_{13}=-x-a+b$	$r_{23}=-x-2a+2b-c$	$r_{33}=-x-3a+3b-2c$

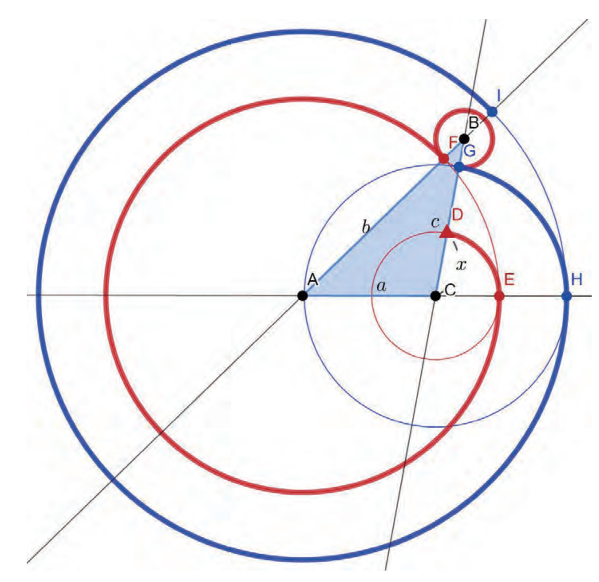
若可以完成循環，則

(1) $r_{21}=r_{11} \Rightarrow x+a-b+c=x$，$a+c=b$（矛盾）

(2) $r_{31}=r_{11} \Rightarrow x+2a-2b+2c=x$，$a+c=b$（矛盾）

從(1)和(2)可得知：三角形 1 內切因受限於三角形三邊長存在兩邊之和大於第三邊的關係，故無法完成循環。

同理可知，三角形 3 內切亦會受到三角形三邊長關係的限制，而無法完成循環繞回原起始點。



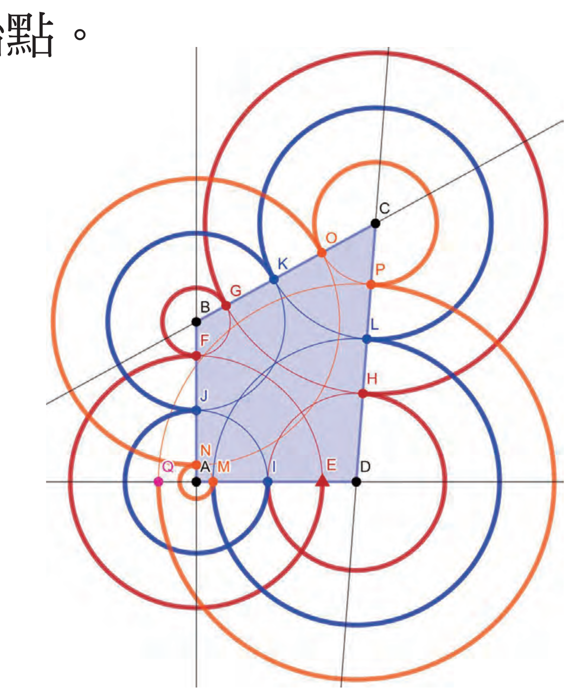
三角形 1 內切無法循環

（二）四邊形中，利用兩圓內、外切的關係找出繞回原起始點的方法

1. 偶數個內切

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x-a+b-c+d$	$r_{31}=x-2a+2b-2c+2d$
	$r_{12}=-x+a$	$r_{22}=-x+2a-b+c-d$	$r_{32}=-x+3a-2b+2c-2d$
	$r_{13}=x-a+b$	$r_{23}=x-2a+2b-c+d$	$r_{33}=x-3a+3b-2c+2d$
	$r_{14}=-x+a-b+c$	$r_{24}=-x+2a-2b+2c-d$	$r_{34}=-x+3a-3b+3c-2d$

距離 $=|-a+b-c+d|$　距離 $=|-a+b-c+d|$

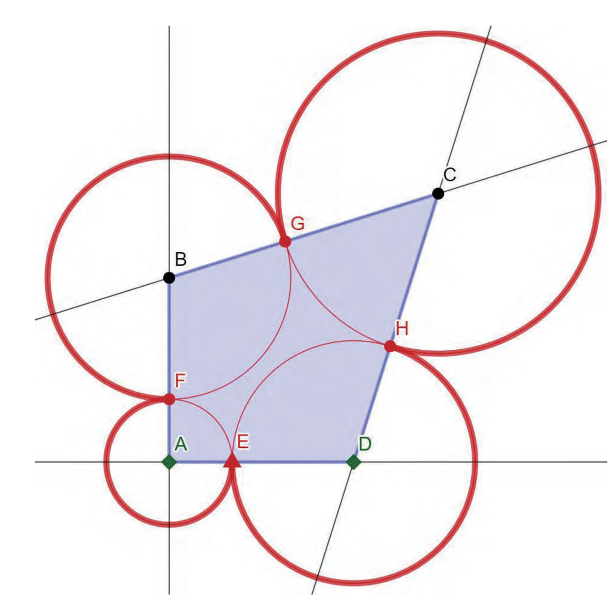


四邊形 0 內切無法循環

若 $a+c \neq b+d$ 則無法完成循環回到原起始點，且向原起始點 E 偏離。

◆ 完成循環：邊長關係限制條件：奇數邊長和 = 偶數邊長和（$a+c=b+d$）時，循環現象必為一次循環。

◆ 範圍限制：循環範圍為 $min\{r_{11},r_{13}\}+min\{r_{12},r_{14}\}$，故當 $0<r_{11}<\overline{AD}$ 下，必為一次循環。

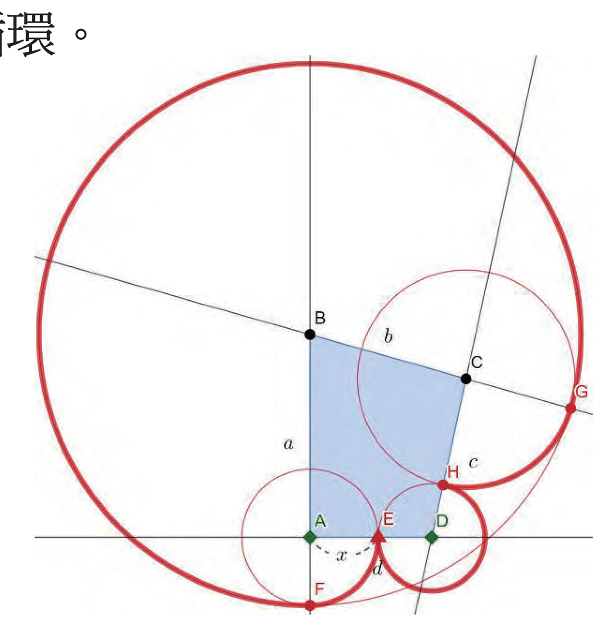


四邊形 0 內切一次循環
（$a+c=b+d$）

◆ 改變內切方式，發現新的邊長關係限制條件

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-b-c+d$	$r_{31}=x+2a-2b-2c+2d$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b-c+d$	$r_{32}=x+3a-2b-2c+2d$
	$r_{13}=x+a-b$	$r_{23}=x+2a-2b-c+d$	$r_{33}=x+3a-3b-2c+2d$
	$r_{14}=-x-a+b+c$	$r_{24}=-x-2a+2b+2c-d$	$r_{34}=-x-3a+3b+3c-2d$

距離 $=|a-b-c+d|$　距離 $=|a-b-c+d|$

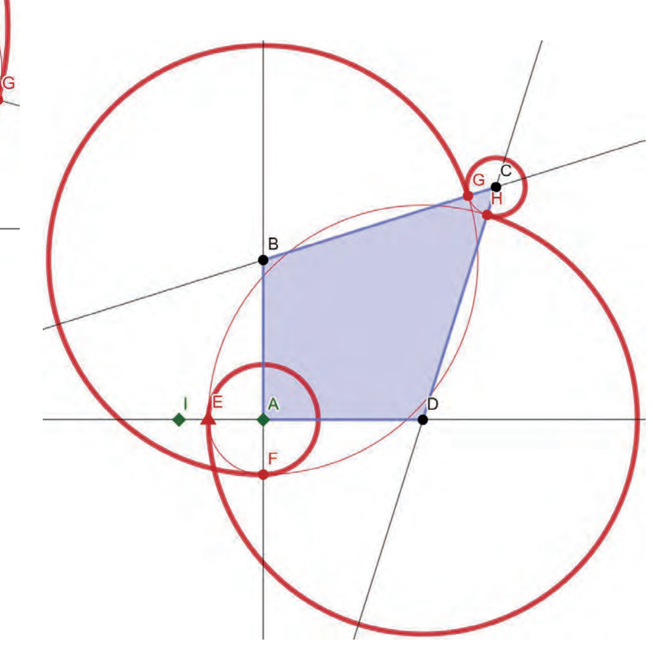


四邊形 2 內切一次循環
（$a+d=b+c$）

◆ 完成循環與限制範圍：邊長關係限制條件：兩組二鄰邊之和相等（$a+d=b+c$）時，

當 $0<r_{11}<\overline{AD}$，2 內切亦可出現一次循環。

◆ 四邊形 4 內切在奇數邊長和 = 偶數邊長和及兩組二鄰邊之和相等兩種情況下，皆可完成一次循環。



四邊形 2 內切一次循環
（$a+c=b+d$）

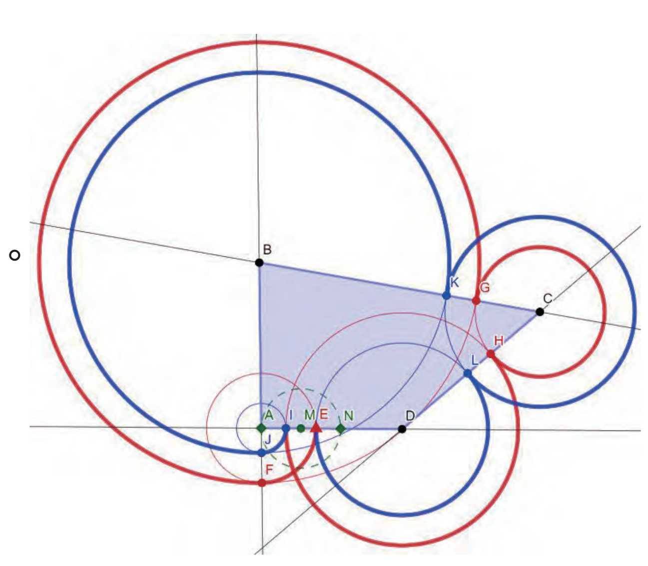
2. 奇數個內切

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=-x-a+b-c+d$	$r_{31}=x$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=-x+b-c+d$	$r_{32}=x+a$
	$r_{13}=-x-a+b$	$r_{23}=x+c-d$	$r_{33}=-x-a+b$
	$r_{14}=x+a-b+c$	$r_{24}=-x+d$	$r_{34}=x+a-b+c$

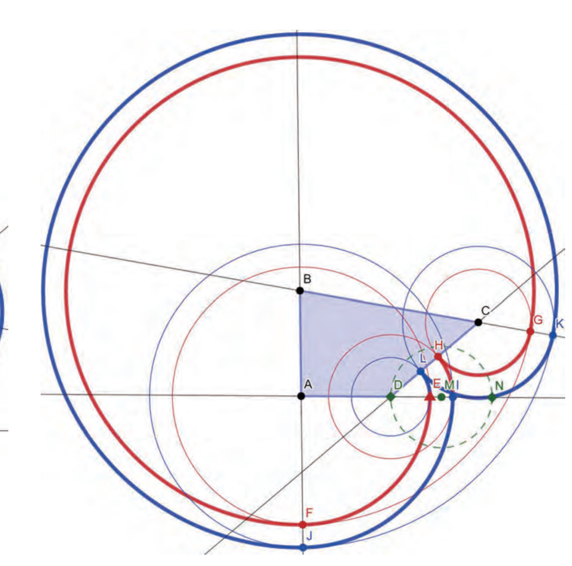
◆ 完成循環，可能情況：(1) $r_{21}=r_{11} \Rightarrow x=\frac{-a+b-c+d}{2}=\frac{r_{11}+r_{21}}{2}$ 為一次循環的起始半徑值。

(2) $r_{31}=r_{11}$，則必可完成二次循環。

◆ 範圍限制：E 點為圓心，$min\{r_{11},r_{12},r_{13},r_{14}\}$ 為半徑值畫圓，則 $0<r_{11}<\overline{AN}$，必能完成一次和二次循環。



四邊形 1 內切二次循環



四邊形 3 內切二次循環

（三）利用三、四邊形的研究結果推論五邊形可循環之方法

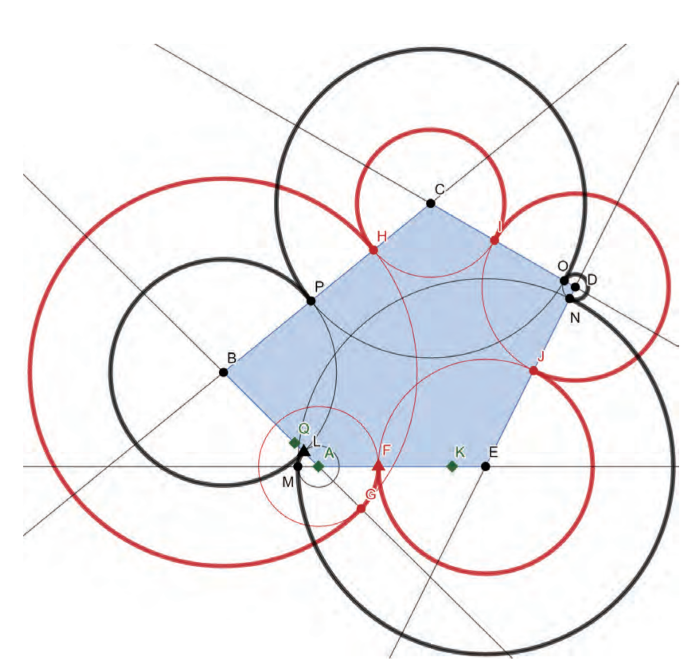
1. 偶數個內切

在 0、2、4 內切下，只要起始點選取在適當的範圍內，皆可完成一次和二次循環。

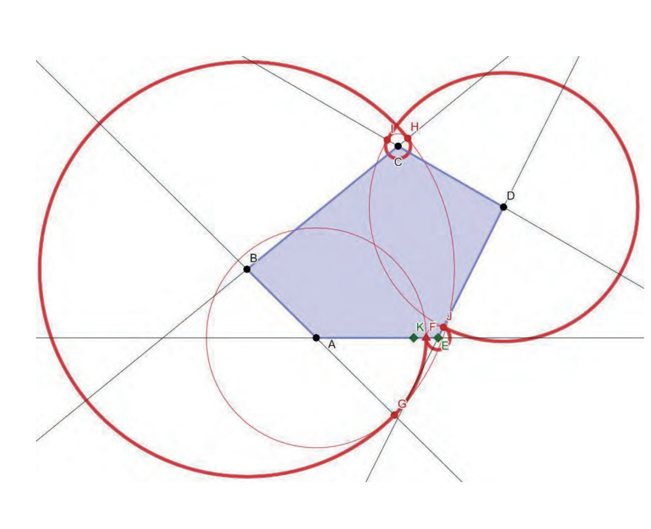
2. 奇數個內切

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-b+c-d+e$	$r_{31}=x+2a-2b+2c-2d+2e$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b+c-d+e$	$r_{32}=x+3a-2b+2c-2d+2e$
	$r_{13}=-x-a+b$	$r_{23}=-x-2a+2b-c+d-e$	$r_{33}=-x-3a+3b-2c+2d-2e$
	$r_{14}=x+a-b+c$	$r_{24}=x+2a-2b+2c-d+e$	$r_{34}=x+3a-3b+3c-2d+2e$
	$r_{15}=-x-a+b-c+d$	$r_{25}=-x-2a+2b-2c+2d-e$	$r_{35}=-x-3a+3b-3c+3d-2e$

距離 $=|a-b+c-d+e|$　距離 $=|a-b+c-d+e|$



五邊形 1 內切一次循環



五邊形 3 內切一次循環

若 $a-b+c-d+e \neq 0$ 則無法完成循環回到原起始點，且向原起始點 F 偏離。

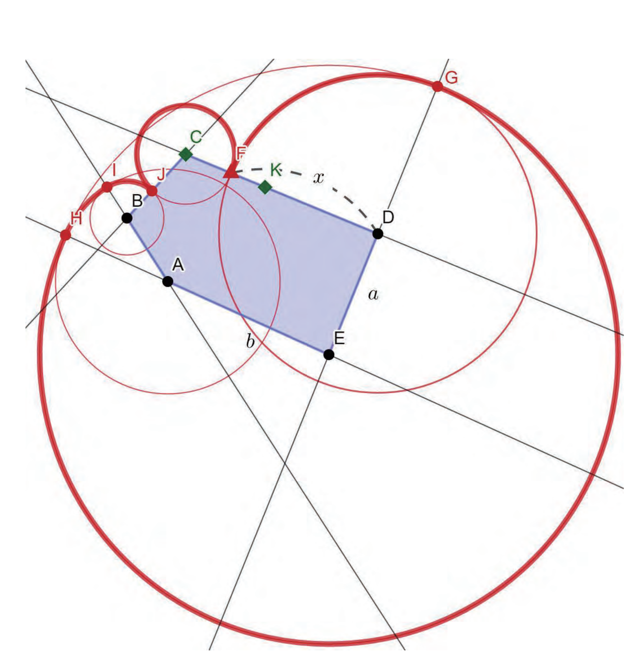
◆ 完成循環與限制範圍：

邊長關係限制條件：奇數邊長和 = 偶數邊長和（$a+c+e=b+d$）時，

在 $0<r_{11}<\overline{AK}$ 下，必為一次循環。

◆ 改變內切方式，發現新的邊長關係限制條件

	第一輪	第二輪	第三輪
半徑	$r_{11}=x$	$r_{21}=x+a-b-c-d+e$	$r_{31}=x+2a-2b-2c-2d+2e$
	$r_{12}=x+a$	$r_{22}=x+2a-b-c-d+e$	$r_{32}=x+3a-2b-2c-2d+2e$
	$r_{13}=x+a-b$	$r_{23}=x+2a-2b-c-d+e$	$r_{33}=x+3a-3b-2c-2d+2e$
	$r_{14}=x+a-b-c$	$r_{24}=x+2a-2b-2c-d+e$	$r_{34}=x+3a-3b-3c-2d+2e$
	$r_{15}=-x-a+b+c+d$	$r_{25}=-x-2a+2b+2c+2d-e$	$r_{35}=-x-3a+3b+3c+3d-2e$



五邊形 3 內切一次循環

距離 $=|a-b-c-d+e|$　距離 $=|a-b-c-d+e|$

◆ 完成循環與限制範圍：邊長關係限制條件：二鄰邊和等於三鄰邊和（$a+e=b+c+d$）時，在 $\overline{DK}<r_{11}<\overline{DC}$，3 內切亦可出現一次循環。

◆ 五邊形 5 內切在奇數邊長和 = 偶數邊長和以及二鄰邊和等於三鄰邊和兩種情況下，皆可完成一次循環。

（四）利用四邊形的研究結果推論六邊形可循環之方法

1. 偶數個內切

(1) 邊長關係限制條件：奇數邊長和 = 偶數邊長和 時，0、2、4、6 內切的循環現象必為一次循環。

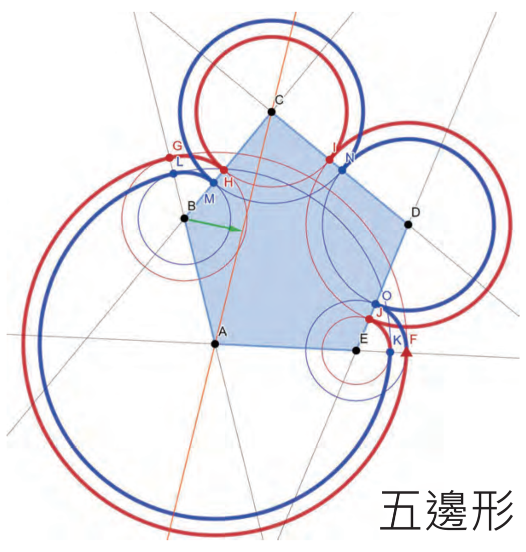
(2) 邊長關係限制條件：兩組三鄰邊之和相等 時，2、4、6 內切的循環現象必為一次循環。

2. 奇數個內切

在 1、3、5 內切下，只要起始點選取在適當的範圍內，皆可完成一次和二次循環。

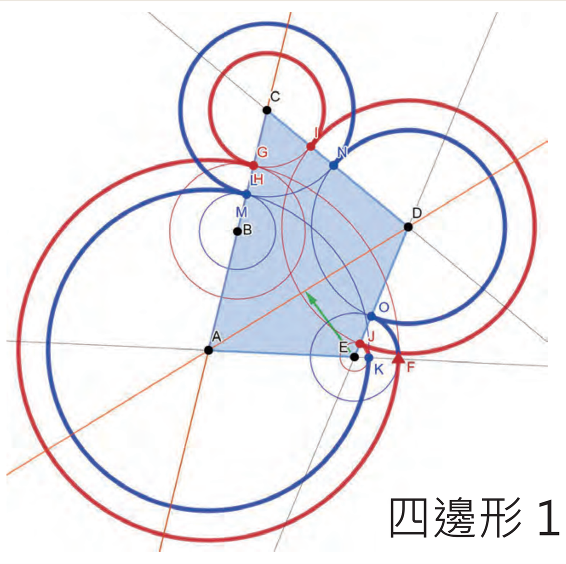
（五）利用內切圓退化說明循環關係

1. 四、五、六邊形的退化情形：將內切圓出現的端點向內退化，發現下列的循環結果相同。



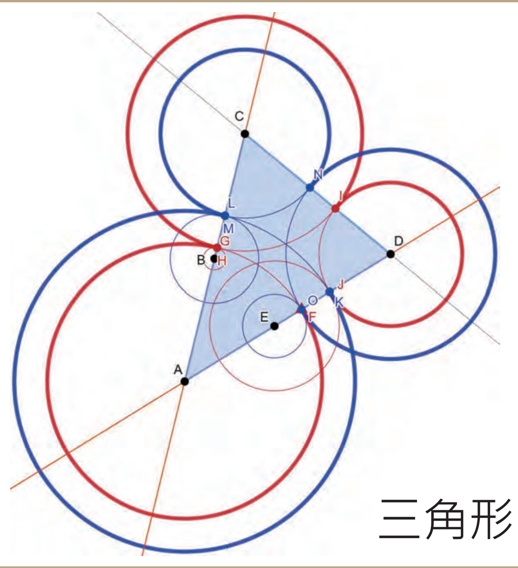
五邊形 2 內切二次循環

退化內切圓 B



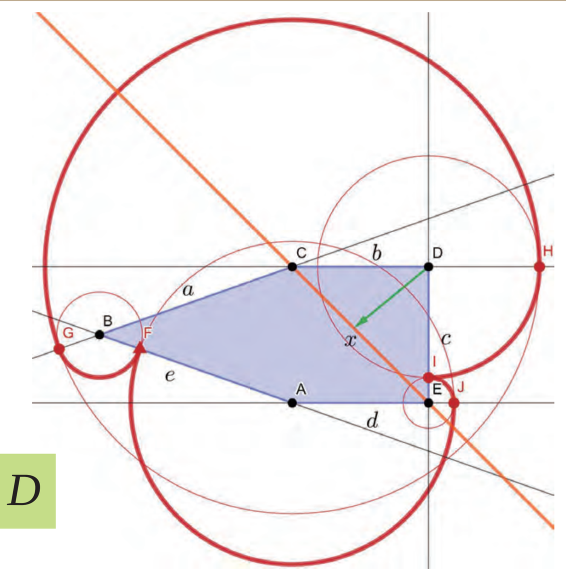
四邊形 1 內切二次循環

退化內切圓 E



三角形 0 內切二次循環

2. 五邊形奇數個內切之退化情形



退化內切圓 D

五邊形 3 內切（二鄰邊和等於三鄰邊和）

(1)四邊形奇數邊長和 = 偶數邊長和

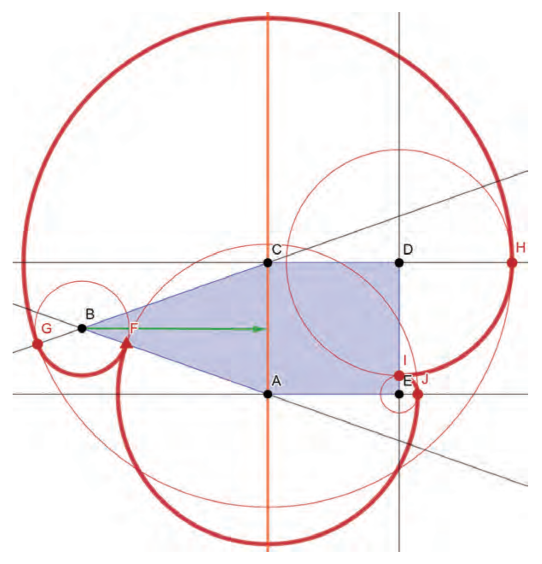
由 $x+e=a+d$ 和 $a+e=b+c+d$，可知 $x=2a-b-c$

∵上圖 $x \neq 2a-b-c$，則退化後邊長關係不符合限制條件

(2)四邊形兩組鄰邊之和相等

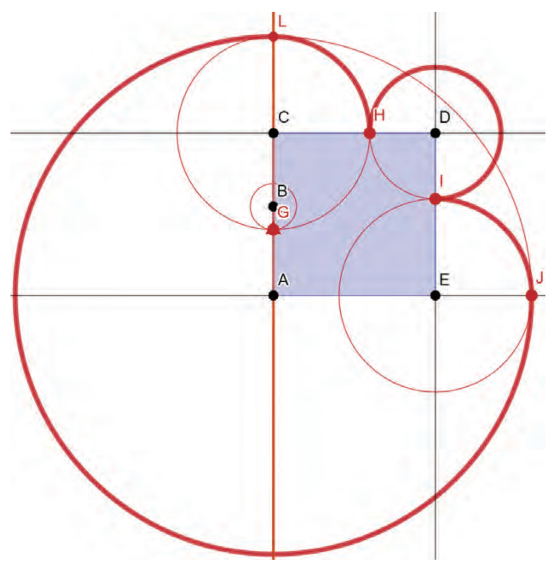
由 $a+e=x+d$ 和 $a+e=b+c+d$，可知 $x=b+c$（矛盾）

由(1)、(2)知，退化內切圓 D 無法完成循環。



五邊形 3 內切
（二鄰邊和等於三鄰邊和）

退化內切圓 B



四邊形 2 內切
（兩組鄰邊之和相等）

將左圖五邊形 3 內切（二鄰邊和等於三鄰邊和）循環情形的內切圓圓心 B 向 $\overline{AC}$ 移動到 F、G 兩點重疊時，發現與右圖四邊形 2 內切（兩組鄰邊之和相等）循環結果相同。

肆、研究結果

一、邊長關係限制條件與循環規則

	關係分類	邊長關係限制	循環規則
循環	三角形、五邊形偶數個內切 四邊形、六邊形奇數個內切	無	一次和 二次循環
	五邊形奇數個內切	①奇數邊長和 = 偶數邊長和 ②二鄰邊和等於三鄰邊和（3、5 內切）	一次循環
	四邊形、六邊形偶數個內切	①奇數邊長和 = 偶數邊長和 ②兩組鄰邊之和相等（2、4、6 內切）	

二、一次循環之起始半徑計算公式

	內切數	一次循環起始半徑值
三角形偶數個內切	0	$x=\dfrac{a-b+c}{2}$
	2	$x=\dfrac{-a+b+c}{2}$
四邊形奇數個內切	1	$x=\dfrac{-a+b-c+d}{2}$
	3	$x=\dfrac{-a+b+c+d}{2}$
五邊形偶數個內切	0	$x=\dfrac{a-b+c-d+e}{2}$
	2	$x=\dfrac{-a+b+c-d+e}{2}$
	4	$x=\dfrac{-a+b+c+d+e}{2}$
六邊形奇數個內切	1	$x=\dfrac{-a+b-c+d-e+f}{2}$
	3	$x=\dfrac{-a+b+c-d+e+f}{2}$
	5	$x=\dfrac{-a+b+c+d+e+f}{2}$

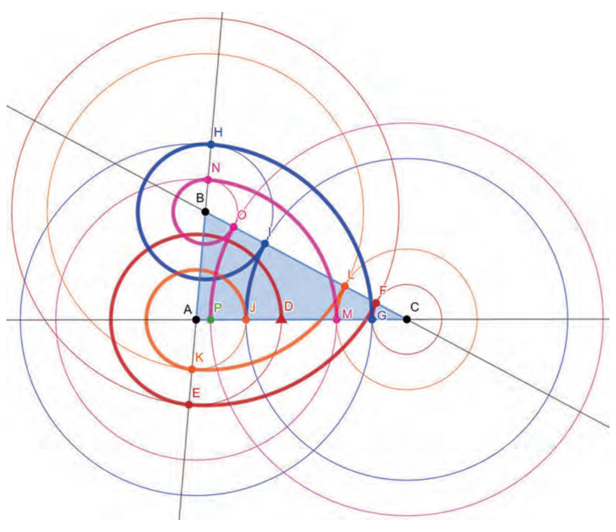
三、邊數與內切個數的關連性

（一）三角形和五邊形偶數個內切的循環結果與四邊形和六邊形奇數個內切相同。

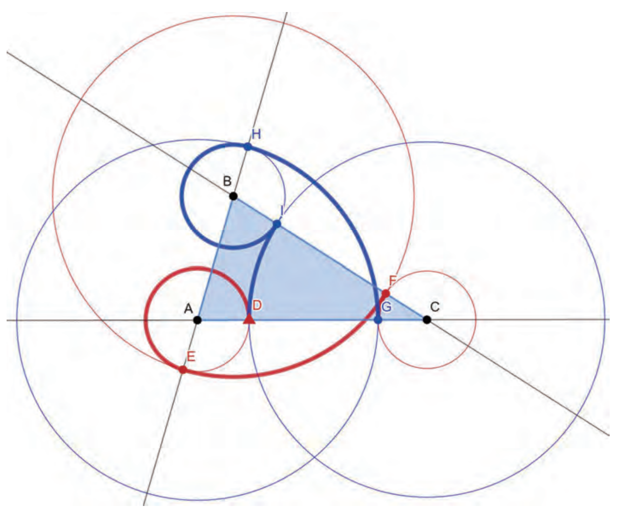
（二）五邊形奇數個內切的循環結果與四邊形和六邊形偶數個內切相同。

伍、討論

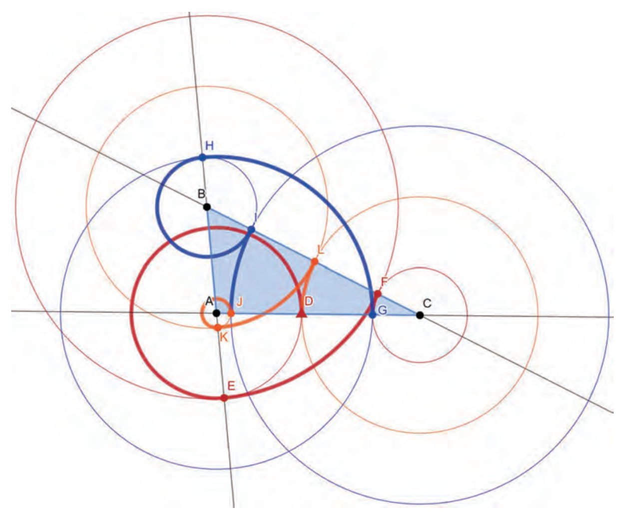
一、 改變各輪中各頂點的圓與下一個圓的內切關係時將產生不同的循環結果。



三角形 1 內切無法循環



三角形 1 內切二次循環 $(b=c)$

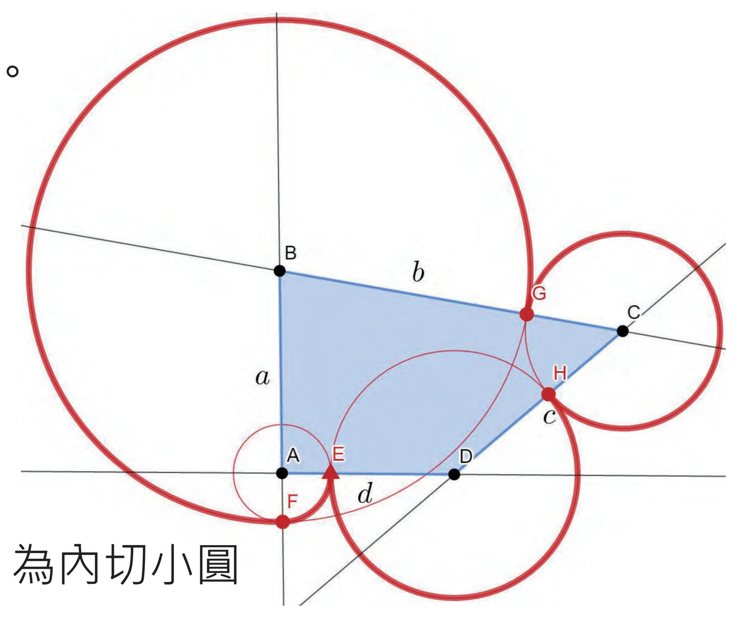


三角形 1 內切三次循環 $(3b=a+3c)$

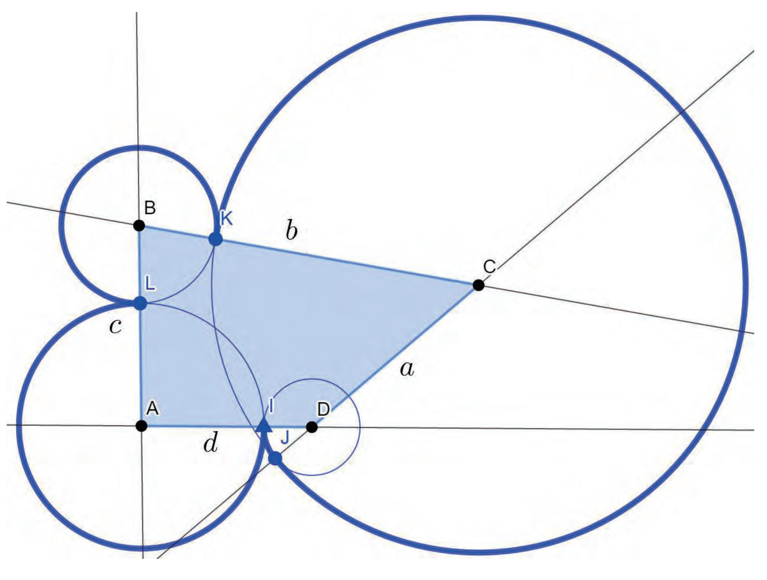
二、內切小圓可以有不同的選取位置，但其循環規則是相同的。

兩種情形皆可完成一次和二次循環。

一次循環起始半徑值計算公式皆為 $\dfrac{-a+b-c+d}{2}$。



圓 A 為內切小圓



圓 D 為內切小圓

陸、結論

一、本研究利用兩圓外切及內切的概念，透過拖曳原起始點、改變起始半徑值與邊長大小關係、循環路徑表格分析證明，完整探討三、四、五、六邊形在 0~6 內切情形下可產生循環之規則、邊長關係限制條件與循環範圍；我們透過退化內切圓的方式檢驗結果的正確性並進一步發現循環規則在不同邊數與內切個數間之關連性。

二、與文獻之異同

三、未來展望

柒、參考資料

一、陳冠安、陳宇亭、陳佑任、陳芝云（2008）。**弧弧相切——多邊形內相切弧的探討**。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會國中組數學科。

二、林志賢、吳禮揚、楊璿縉、李易哲（2010）。**圓舞曲**。中華民國第五十屆中小學科學展覽會高中組數學科。

三、曹博源、盧偉丞、劉詠筑（2018）。**被困住的「圓」桌武士**。全國高級中等學校小論文數學類第 1070331 梯次。