# 中華民國第59屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

國中組　數學科

## 第二名

030418

## 環環相扣～我的數學「週期表」

學校名稱：高雄市立三民國民中學



| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國二 林以晴 | 黃昭勳<br>蔡震珊 |



關鍵詞：固定點、自戀環、週期解

# 摘要

本研究主要探討四位數經 $f(X)$函數運算後的結果。研究後得知經 $f(X)$函數運算後輸出值的標準形態 $(x, x-1, k-x-1, k-x)$，只需要用一個變數即可控制所輸出的四位數之值。從而導出若進位制為 3 的倍數則有固定點，其通式解為 $\left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}-1, \frac{2k}{3}-1, \frac{2k}{3}\right)$。後來更進一步將進位制限制在 $3 \times 2^n$，則只有固定點而沒有自戀環，而進入固定點的兩種路線型態之步數為 $\mathrm{n}-\mathrm{t}+1$ 和 $2\mathrm{n}-\mathrm{t}+1$。而在自戀環方面，我們將週期解寫成 ${}_r^1T_{\frac{k}{r}}$ 的型態，並得知其週期解的個數公式 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$，和週期解內元素個數公式 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2} T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$，以及週期解內元素為何。另外，藉由歐拉公式推導出不在週期解內且滿足標準形態的四位數，經$f(X)$函數運算後進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內個數的公式，且依照週期解條件不同，其計算公式分為下列兩種 $\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2}+\sum_{y=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{m\cdot 2^y}\right)$ 以及 $\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x r}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$。

# 壹、研究動機

在數理資優班的理化課中我學到「週期」一詞，意指周而復始的一個「性質」，如同一個迴圈循環不已。然而在我背誦「週期表」的時候，老師告訴我們週期表排列的順序和元素的原子序(質子數=電子數)有關，並且電子繞著原子核運「動」。且「每一族元素電子的運動軌域」是呈現有規律的分佈：2,8,8,18⋯

這一圈圈(層層)固定的電子分布讓我覺得新穎不已。且我突然靈光乍現有一個想法：「不同的電子數就會有不同的電子「軌域」分布，「不同的電子能階分布就讓元素具有不同的性質。」如果把不同的進位制想成是不同的原子序(=電子數)，那數學上的進位制是否能如電子數般，影響遞迴函數的週期解個數，和週期解內『組成份子』的分布呢?」

在這個想法之下，我構造了一個遞迴函數運算模型，就把不同進位制想成不同的電子數，去探究進位制對週期解個數的影響(如同電子分布幾個能階)，且每一個週期解的週期為何(如同有幾個電子)，而開始了「環環相扣~我的數學『週期表』」研究之旅了。

# 貳、研究目的

一、透過實例的研究，觀察週期解的存在性並給予證明。

二、推導在 $f$ 函數運算下，函數值數字間所滿足的關係式。

三、探究在 $k$ 進位制下，固定點存在和唯一性，並證明固定點的通式解。

四、證明在 $3 \times 2^n$ 進位制下只有固定點，並給出進入固定點之型態與所需計算次數。

五、發展任意進位制下週期解個數理論，並建構週期解內循環週期的個數和元素通式解。

六、求出在 $k$ 進位制下，週期外且滿足標準形態的四位數經$f(X)$ 函數運算後進入週期解 $r_iT_{\frac{k}{r_i}}$ 內之元素個數的公式。

# 參、名詞定義

1. $f(X)$：定義 $f(X)=(a_{1,}a_{2,}a_{3,}a_4)-(a_{3,}a_{4,}a_{1,}a_2)$

其中$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$，但此四個數字不完全相同

此處 $(a_1,a_2,a_3,a_4)$為四位數 $x$ 中的各個數字由大而小排列所得之四位數，

其中 $a_1$代表千位數、 $a_2$代表百位數、 $a_3$代表十位數、 $a_4$代表個位數

如在 $k$ 進位制下， $x=1324$，則 $f(X)=4321-2143$

2. $(a,b)$：我們以千位數 $a$ 、個位數 $b$ 、符號$(a,b)$代表標準型態下的整個四位數

3. 週期解：在 $k$ 進位制下，四位數經 $f(X)$ 函數遞迴運算，其輸出值形成週期性的循環，此一循環我們稱之為 $k$ 進位制下的一個週期解。

4. 固定點：週期為 1 的週期解。

5. 自戀環：週期為 1 以上的週期解。

6. 週期解個數：在 $k$ 進位制下，固定點和自戀環的個數總和

7. 週期：週期解內循環元素的個數

如在 4 進位下，令 $x=(2,2,1,1)$，

則$f(X)=(1,0,2,1)$，$f^2(X)=(2,1,1,2)$，$f^3(X)=(1,0,2,3)$，$f^4(X)=(2,1,1,2)$，$f^5(X)=(1,0,2,3)$。

故 $\{(1,0,2,3)(2,1,1,2)\}$ 為 $f(X)$ 在 4 進位制下週期為 2 的自戀環。

8. $T_k$：$T_k$ 為在 $k$ 進位制下的固定點或自戀環，其集合結構式為

$\{(a_i,b_i) | a_i+b_i=k$，且$(a_i,b_i)=1$，$k$ 為奇數$\}$，

如 $T_5=\{(1,4)(3,2)\}$ 其中 1、4 互質；2、3 互質。

9. $rT_k$：把 $T_k$ 內之元素乘以 $r$ 倍，

其集合結構式為$\{(ra_i,rb_i) | a_i+b_i=k$，且$(a_i,b_i)=1$，$k$ 為奇數$\}$

10. $N(rT_k)$：表 $rT_k$ 固定點或自戀環內之元素個數。

11. 歐拉函數$\varphi(n)$：代表 1 到 $n$ 之正整數中，與 $n$ 互質的個數

12. 對稱四位數：若$(a_i,b_i)$為某一週期解內的元素，則稱$(b_i,a_i,)$為其對稱四位數

# 肆、研究過程

**研究目的一：透過實例的研究，觀察週期解的存在性並給予證明。**

研究一開始我們先定義一個在 $k$ 進位制下的遞迴運算

給定 $k$ 進位制下的任意四位數 $x$，把 $x$的千位數百位數十位數個位數案大小順序排列後得 $(a_1,a_2,a_3,a_4)$，其中$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4$，但此四個數字不完全相同

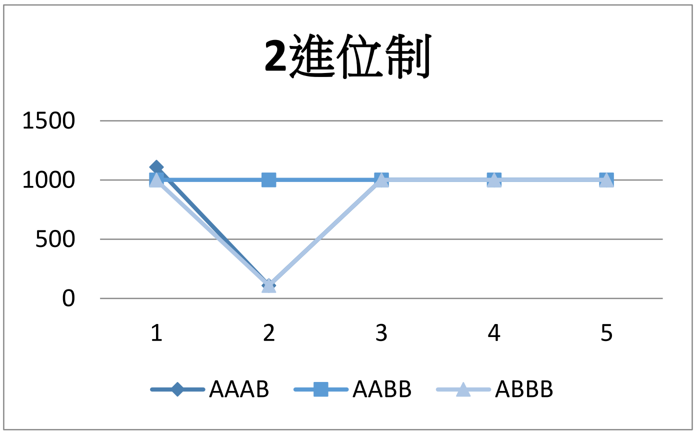
定義 $k$ 進位制下的減法運算：$f(X) = (a_{1,}a_{2,}a_{3,}a_4) - (a_{3,}a_{4,}a_{1,}a_2)$

其中 $x$ 為四位數，其「四個位置上的阿拉伯數字分別為 $a_1,a_2,a_3,a_4$」。

嘗試在不同進位制下進行 $f(X)$ 的遞迴運算，首先取$k = 2$。

2 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | 固定點 |
|---|---|---|---|---|
| (1,1,1,0) | (0,0,1,1) | (1,0,0,1) | (1,0,0,1) | (1,0,0,1) |
| (1,0,0,1) | (1,0,0,1) | (1,0,0,1) | (1,0,0,1) | |
| (1,0,0,0) | (0,1,1,0) | (1,0,0,1) | (1,0,0,1) | |
| | | | | |



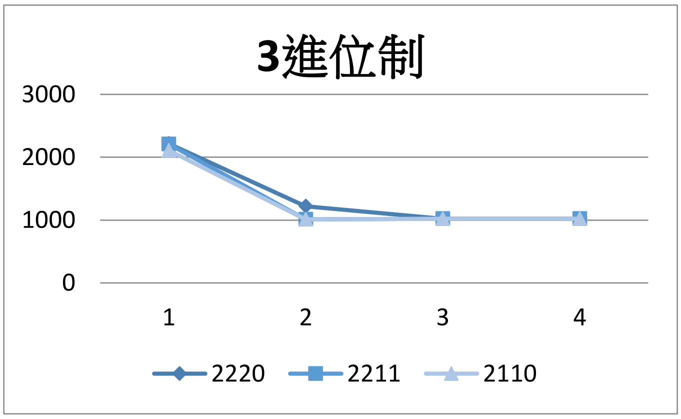

我們發現給定不同的……斂到(1,0,0,1)，因此我們說$\{(1,0,0,1)\}$即為 2 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的固定點。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到同一條直線，並持續保持在同一位置。

| 在二進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個固定點(1,0,0,1) |
|---|

3 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | 固定點 |
|---|---|---|---|---|
| (2,2,2,0) | (0,1,2,1) | (1,0,1,2) | (1,0,1,2) | (1,0,1,2) |
| (2,2,1,1) | (1,0,1,2) | (1,0,1,2) | (1,0,1,2) | |
| (2,1,1,0) | (1,0,1,2) | (1,0,1,2) | (1,0,1,2) | |



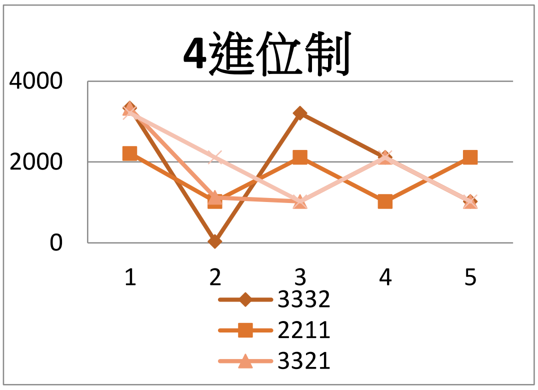

我們發現給定不同的輸入最後都會收斂到(1,0,1,2)，因此我們說$\{(1,0,1,2)\}$即為 3 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的固定點。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到同一條直線，並持續保持在同一位置。

| 在三進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個固定點(1,0,1,2) |
|---|

4 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ | 自戀環 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (3,3,3,2) | (0,0,3,3) | (3,2,0,1) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3)<br>(2,1,1,2) |
| (2,2,1,1) | (1,0,2,1) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3) | |
| (3,3,2,1) | (1,1,2,2) | (1,0,2,3) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3) | (2,1,1,2) | |
| (3,2,1,0) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3) | (2,1,1,2) | (1,0,2,3) | (2,1,1,2) | |




我們發現所有的輸入最後都會收斂到{(1,0,2,3)(2,1,1,2)}

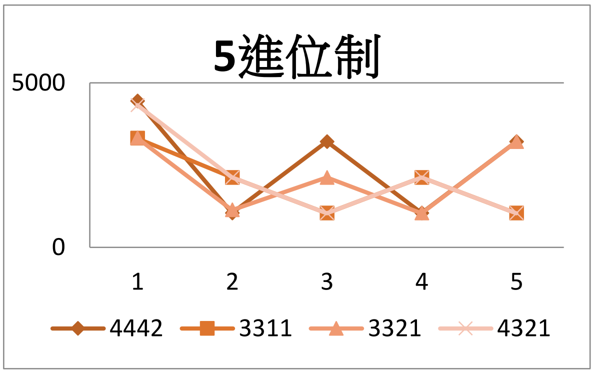
因此我們說{(1,0,2,3)(2,1,1,2)}即為 4 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的自戀環。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到規律的上下起伏，並持續保持在同一模式。

在四進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個週期為二的自戀環，且其環中的元素為(1,0,2,3),(2,1,1,2)

5 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | 自戀環 |
|---|---|---|---|---|---|
| (4,4,4,2) | (0,1,4,3) | (3,2,1,2) | (1,0,3,4) | (3,2,1,2) | (1,0,3,4)<br>(3,2,1,2) |
| (3,3,1,1) | (2,1,2,3) | (1,0,3,4) | (3,2,1,2) | (1,0,3,4) | |
| (3,3,2,1) | (1,1,3,3) | (2,1,2,3) | (1,0,3,4) | (3,2,1,2) | |
| (4,3,2,1) | (2,1,2,3) | (1,0,3,4) | (3,2,1,2) | (1,0,3,4) | |




我們發現所有的輸入最後都會收斂到{(1,0,3,4)(3,2,1,2)}，

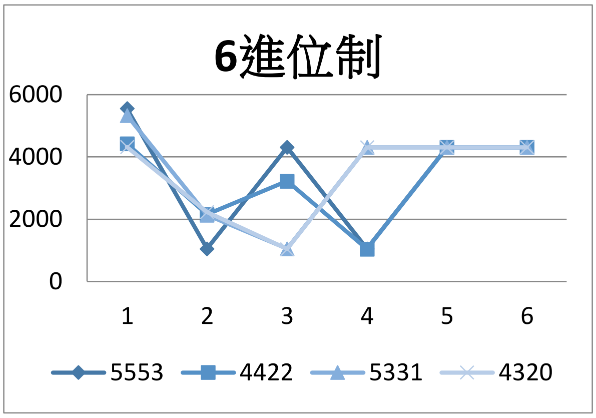
因此我們說{(1,0,3,4)(3,2,1,2)}即為 5 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的自戀環。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到規律的上下起伏，並持續保持在同一模式。

在五進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個週期為二的自戀環，且其環中的元素為(1,0,3,4),(2,1,2,3)

6 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | 固定點 |
|---|---|---|---|---|---|
| (5,5,5,3) | (0,1,5,4) | (4,3,1,2) | (2,1,3,4) | (2,1,3,4) | (2,1,3,4) |
| (4,4,2,2) | (2,1,5,4) | (3,2,2,3) | (1,0,4,5) | (4,3,1,2) | |
| (5,3,3,1) | (2,1,3,4) | (1,0,5,4) | (2,1,3,4) | (2,1,3,4) | |
| (4,3,2,0) | (2,2,3,3) | (1,0,4,5) | (4,3,1,2) | (2,1,3,4) | |




我們發現給定不同的輸入最後都會收斂到 2134，

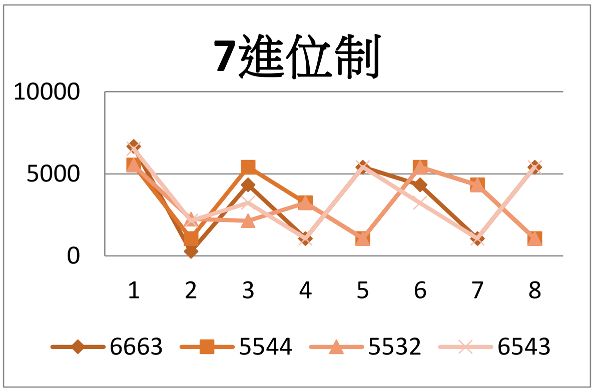
因此我們說{(2,1,3,4)}即為 6 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的固定點。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到同一條直線，並持續保持在同一位置。

在六進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個固定點(2,1,4,3)

7 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | 自戀環 |
|---|---|---|---|---|---|
| (6,6,6,3) | (0,2,6,4) | (4,3,2,3) | (1,0,5,6) | (5,4,1,2) | (1,0,5,6) (5,4,1,2) (3,2,4,3) |
| (5,5,4,4) | (1,0,5,6) | (5,4,1,2) | (3,2,3,4) | (1,0,5,6) | |
| (5,5,3,2) | (2,2,4,4) | (2,1,4,5) | (3,2,3,4) | (1,0,5,6) | |
| (6,5,4,3) | (2,1,4,5) | (3,2,3,4) | (1,0,5,6) | (5,4,1,2) | |




我們發現所有的輸入最後都會收斂到{(1,0,5,6)(5,4,1,2)(3,2,4,3)}，

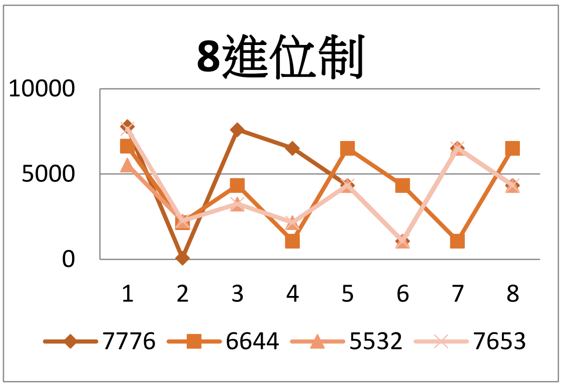
因此我們說{(1,0,5,6)(5,4,1,2)(3,2,4,3)}即為 7 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的自戀環。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到規律的上下起伏，並持續保持在同一模式。

在七進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個週期為三的自戀環，且其環中的元素為(1,0,5,6),( 5,4,1,2), (3,2,3,4)

8 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ | 自戀環 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (7,7,7,6) | (0,0,7,7) | (7,6,0,1) | (6,5,1,2) | (4,3,3,4) | (1,0,6,7) | (1,0,6,7)<br>(6,5,1,2)<br>(4,3,3,4) |
| (6,6,4,4) | (2,1,5,6) | (4,3,3,4) | (1,0,6,7) | (6,5,1,2) | (4,3,3,4) | |
| (5,5,3,2) | (2,2,5,5) | (3,2,4,5) | (2,1,5,6) | (4,3,3,4) | (1,0,6,7) | |
| (7,6,5,3) | (2,2,5,5) | (3,2,4,5) | (2,1,5,6) | (4,3,3,4) | (1,0,6,7) | |




我們發現所有的輸入最後都會收斂到{(1,0,6,7)(6,5,1,2)(4,3,3,4)}，

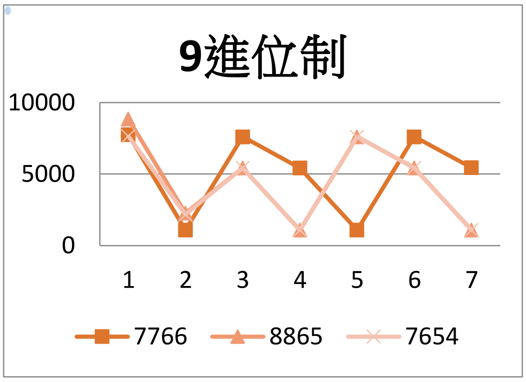
因此我們推測{(1,0,6,7)(6,5,1,2)(4,3,3,4)}即為 8 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的自戀環。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，無論數字為何，經數次運算後都會達到規律的上下起伏，並持續保持在同一模式。

> 在八進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個週期為三的自戀環，且其環中的元素為(4,3,3,4), (1,0,6,7), (6,5,1,2)

9 進位制

| 輸入 | $f^1$ | $f^2$ | $f^3$ | $f^4$ | $f^5$ | 自戀環 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (8,8,8,5) | (0,2,8,6) | (6,5,2,3) | (3,2,5,6) | (3,2,5,6) | (3,2,5,6) | (1,0,7,8)<br>(7,6,1,2)<br>(5,4,3,4) |
| (7,7,6,6) | (1,0,7,8) | (7,6,1,2) | (5,4,3,4) | (1,0,7,8) | (7,6,1,2) | |
| (8,8,6,5) | (2,2,6,6) | (5,4,3,4) | (1,0,7,8) | (7,6,1,2) | (5,43,4) | |
| (7,6,5,4) | (2,1,6,7) | (5,4,3,4) | (1,0,7,8) | (7,6,1,2) | (5,43,4) | |




我們發現部分的輸入最後都會收斂到 3256。但同時也發現，另一部份的輸入最後都會收斂到{(1,0,7,8)(7,6,1,2)(5,4,3,4)}，因此我們說{(3,2,5,6)}為 9 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的固定點，而{(1,0,7,8)(7,6,1,2)(5,4,3,4)}則為 9 進位制下經$f(X)$的遞迴運算下的自戀環。

以折線圖紀錄之則可清楚看到，一部分數字，經數次運算後都會達到同一條直線，並持續保持在同一位置。而另一部份數字，經數次運算後都會達到規律的上下起伏，並持續保持在同一模式。

> 在九進位制下，經過遞迴運算後結果，可以得到一個固定點(3,2,5,6)，及一個週期為三的自戀環，且其環中的元素為(1,0,7,8),(7,6,1,2),(5,4,3,4)

將實例研究結果製成表格：

| 進位制 | 性質 | 固定點(環) |
|---|---|---|
| 2 | 固定點 | $\{(1,0,0,1)\}$ |
| 3 | 固定點 | $\{(1,0,1,2)\}$ |
| 4 | 自戀環 | $\{(1,0,2,3)(2,1,1,2)\}$ |
| 5 | 自戀環 | $\{(1,0,3,4)(3,2,1,2)\}$ |
| 6 | 固定點 | $\{(2,1,3,4)\}$ |
| 7 | 自戀環 | $\{(1,0,5,6)(5,4,1,2)(3,2,4,3)\}$ |
| 8 | 自戀環 | $\{(1,0,6,7)(6,5,1,2)(4,3,3,4)\}$ |
| 9 | 自戀環 | $\{(1,0,7,8)(7,6,1,2)(5,4,3,4)\}$ |
| | 固定點 | $\{(3,2,5,6)\}$ |

有些數字只有固定點，有些數字只有自戀環，甚至有些既有固定點又有自戀環。可是無論結果為固定點或自戀環，皆屬於週期解，因此讓我們好奇，是否所有的進位制下都會存在週期解呢？答案是肯定的，說明如下。

定理 1.給定數字不完全相同的四位數經$f(X)$函數的遞迴運算後，其週期解必存在。

證明：

假設給定一個數，經函數 $f$ 遞迴運算後，不存在週期解，則必會得到一個矛盾的結果：

即輸出值有無限多個四位數，此與進位制下四位數的個數為有限個矛盾。

故數字不完全相同的四位數經 $f$ 函數運算後其週期解必存在。

由上述表格可發現，只有 3、6、9 進位制下有固定點，其他都只有自戀環。難道只有 3 的倍數才有固定點？為什麼其他進位制下沒有呢？每一個 3 的倍數都會有嗎？像 300、甚至 3000 這麼大的數字也是如此嗎？

**研究目的二：推導在 $f$ 函數運算下，函數值數字間所滿足的關係式。**

由上述研究得知，由於數字每次運算都必須依大小重新排列一次，因此會影響輸出的函數值是和輸入的數字異同有關，和輸入的數字排列位置無關。故可將所有四位數分為 AAAA、AAAB、AABB、AABC、ABBB、ABBC，ABCC、ABCD 的型態。其中 AAAA 型態的四位數字均相同，將其數字重排後運算相減答案為 0，則不討論。於是我們用剩下的七種型態進行下列的探討。

定理 2.給定數字不完全相同的四位數，定義在$k$進位制下，經$f(X)$函數的一次運算，其輸出結果必滿足下列關係式：

(1)千位+十位$= k-1$

(2)百位+個位$= k-1$

證明：

設$\mathrm{A}>\mathrm{B}>\mathrm{C}>\mathrm{D}$，且$1\le \mathrm{A}、\mathrm{B}、\mathrm{C}、\mathrm{D}\le k-1$的整數

| 被減數−減數 | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{AAAB}-\mathrm{ABAA}$ | 0 | $\mathrm{A}-\mathrm{B}-1$ | $k-1$ | $\mathrm{B}-\mathrm{A}+k$ |
| $\mathrm{AABB}-\mathrm{BBAA}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{B}-1$ | $\mathrm{B}-\mathrm{A}+k-1$ | $\mathrm{B}-\mathrm{A}+k$ |
| $\mathrm{ABBB}-\mathrm{BBAB}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{B}-1$ | $k-1$ | $\mathrm{B}-\mathrm{A}+k$ | 0 |
| $\mathrm{AABC}-\mathrm{BCAA}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{C}-1$ | $\mathrm{B}-\mathrm{A}+k-1$ | $\mathrm{C}-\mathrm{A}+k$ |
| $\mathrm{ABBC}-\mathrm{BCAB}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ | $\mathrm{B}-\mathrm{C}-1$ | $\mathrm{B}-\mathrm{A}+k-1$ | $\mathrm{C}-\mathrm{B}+k$ |
| $\mathrm{ABCC}-\mathrm{BCAB}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{C}$ | $\mathrm{B}-\mathrm{C}-1$ | $\mathrm{C}-\mathrm{A}+k-1$ | $\mathrm{C}-\mathrm{B}+k$ |
| $\mathrm{ABCD}-\mathrm{CDAB}$ | $\mathrm{A}-\mathrm{C}$ | $\mathrm{B}-\mathrm{D}-1$ | $\mathrm{C}-\mathrm{A}+k-1$ | $\mathrm{D}-\mathrm{B}+k$ |

由上表可知千位+十位= 百位 + 個位 $= k-1$，故得證。

遞迴 $f$ 函數的運算模式是將第一次運算輸出的結果當第二次運算的輸入，於是我們令

千位數字$= x_1$、百位數字$= y_1$

十位數字$= k-(x_1+1)$、個位數字$= k-(y_1+1)$

所以第二次運算輸入的數字為：

$(x_1, y_1, k-x_1-1, k-y_1-1)$

舉例佐證即為：

| | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | $k=5$ | $k=6$ | $k=7$ | $k=8$ | $k=9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 輸入 | (1,0,0,1) | (2,2,1,1) | (3,3,2,1) | (3,3,1,1) | (5,3,3,1) | (6,5,4,3) | (6,6,4,4) | (7,6,5,4) |
| 第一步 | (1,0,0,1) | (1,0,1,2) | (1,1,2,2) | (2,1,2,3) | (2,1,3,4) | (2,1,4,5) | (2,1,5,6) | (2,1,6,7) |
| 千位+十位 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 百位 + 個位 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\mathrm{k}-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

令千位數字$= x_1$、百位數字$= y_1$，依據定理 2 可知十位數字$= k - x_1 - 1$、個位數字$= k - y_1 - 1$，所以第一次運算輸出值為：$(x_1, y_1, k - x_1 - 1, k - y_1 - 1)$

又遞迴 $f$ 函數的運算模式是將第一次運算輸出的結果當第二次運算的輸入值，

於是此型態為第二次運算輸入值。也就是當 $k$ 值(進位制)確定時，經第一次運算輸出的函數值轉為第二次輸入時，其表現式可由兩個變數所決定。

再將第一次的輸出值當作第二次的輸入值，經第二次的函數運算後，

其輸出的四位數會得到以下的定理：

定理 3：給定數字不完全相同的四位數，定義在$k$進位制下，經過$f(X)$函數的二次運算，

其輸出結果不只滿足定理 2 的關係式，也會滿足下列關係式：

(1)千位+個位= $k$

(2)百位+十位= $k - 2$

證明：輸入為$\left(x_1, y_1, k - x_1 - 1, k - y_1 - 1\right)$

不失一般性，令$x_1 > y_1$，且$k - x_1 - 1 > x_1$，$k - y_1 - 1 > y_1$，

四位數自大小關係即為$k - y_1 - 1 > k - x_1 - 1 > x_1 > y_1$

| 故 | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| | $k - y_1 - 1$ | $k - x_1 - 1$ | $x_1$ | $y_1$ |
| －) | $x_1$ | $y_1$ | $k - y_1 - 1$ | $k - x_1 - 1$ |
| | $k - (x_1 + y_1) - 1$ | $k - (x_1 + y_1) - 2$ | $x_1 + y_1$ | $(x_1 + y_1) + 1$ |

再令$k - (x_1 + y_1) - 1 = x_2$

故輸出為$(x_2, x_2 - 1, k - x_2 - 1, k - x_2)$

千位+十位= $k$

百位+個位= $k - 2$　　故得證

令千位數字$= x_2$，依據定理 3 可知第二次運算輸出值為：$(x_2, x_2 - 1, k - x_2 - 1, k - x_2)$

當 $k$ 值(進位制)確定時，經第二次運算輸出的函數值轉為第三次輸入時，

其表現式可由兩個變數所決定。

承接定理 3，我們可以得到一個重要的結論

結論：遞迴函數$f(X)$在 k 進位制下，經過兩次運算其輸出值必為

$(x, x - 1, k - x - 1, k - x)$ 往後我們稱此型態為標準型態

**研究目的三：探究在 $k$ 進位制下，固定點存在和唯一性，且證明固定點的通式解。**

本研究一開始，我們透過實作，去搜尋 $k = 2\sim9$ 進位制中固定點或自戀環的存在，但因數字組合樣本過多，花費很多時間和精神；因此我們想尋找更有效率的方法，研究目的二中最後所提的定理 3 中的關係式，即可達成我們的願望。

遞迴函數 $f(X)$ 在 $k$ 進位下，進入週期解(固定點及自戀環)時，其形態必為 $(x,x-1,k-x-1\,,k-x)$透過這個型態，我們可在不同進位制中，設定 $x$ 的數字一一帶入計算，但這土法煉鋼的方式也比研究目的一的實作方法有效率許多，例如：在七進位制下，我們只需運算 6 次；在九進位制下，我們只需運算 8 次（運算次數$= k-1$次）。我們更進一步探究定理 4 的關係式，發現其實在 $k$ 進位制下，並不需要運算 $k-1$ 次那麼多，其實僅 $\frac{k-1}{2}$ 需次即可，證明如下：

| |
|---|
| 定理 4：在 $k \geq 3$ 的進位制中，在遞迴函數$f(X)$運算下若存在固定點<br>$(x,x-1,k-x-1\,,k-x)$ ，則所需檢查的 $x$ 之範圍為 $x \leq \frac{k-1}{2}$ |

證明：

由定理 3 的固定點組合 $(x,x-1,k-x-1\,,k-x)$，不失一般性，令$x < k-x$

$\because x < k-x$

且 $k-x-1$ 是小於 $k-x$ 的最大整數

故$x \leq k-x-1$

$x \leq \frac{k-1}{2}$

由定理 4 我們已知 $x \leq \left(\frac{k-1}{2}\right)$，能有效縮減固定點的檢查範圍，但我們希望有更直接的方法，可以去判斷所給定的 $k$ 進位制是否有固定點存在。透過我們的思考，終於找到固定點的通式，並證明它的存在。

利用上述的結論，即可證出當 $k = 3p$ 時其固定點必存在且唯一。說明如下。

| |
|---|
| 定理 5：在 $k$ 進位制下，遞迴函數$f(X)$之固定點若存在，則必唯一。<br>且(1)當 $k = 3p$ 時，固定點通式解為$\left(\frac{k}{3}\,,\frac{k}{3}-1\,,\frac{2k}{3}-1\,,\frac{2k}{3}\right)$ ，p= 1、2⋯<br>(2)當 $k = 3p+1$、$3p+2$ 時，固定點不存在，只有自戀環。 |

證明：

(1)令輸入為 $(x,x-1,k-x-1\,,k-x)$，分兩種形況討論

a：設 $x>k-x$，且 $x>x-1\geq k-x>k-x-1$

| | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $x-1$ | $k-x$ | $k-x-1$ |
| 一) | $k-x$ | $k-x-1$ | $x$ | $x-1$ |
| | $2x-k$ | $2x-k-1$ | $2k-2x-1$ | $2k-2x$ |

由於當輸出值達到固定點時，其下一次運算後所得輸出值需與原來輸入值相同。

因此 $2x-k=x$

$x=k$　　故不合

b：設 $x<k-x$，且 $k-x>k-x-1\geq x>x-1$

| | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| | $k-x$ | $k-x-1$ | $x$ | $x-1$ |
| 一) | $x$ | $x-1$ | $k-x$ | $k-x-1$ |
| | $k-2x$ | $k-2x-1$ | $2x-1$ | $2x$ |

由於當輸出值達到固定點時，其下一次運算後所得輸出值需與原來輸入值相同。

因此 $k-2x=x$

$k=3x$

$\therefore k$必為 3 的倍數($k=3p$，$p=$1、2、3……)，其固定點通式解為$\left(\frac{k}{3}\,,\,\frac{k}{3}-1\,,\,\frac{2k}{3}-1\,,\frac{2k}{3}\right)$

(2)由(1)得知 $k=3p+1$、$3p+2$時無固定點，但由定理 1 知必有週期解，故只有自變環。

利用定理 5 舉幾個實例並直接計算其固定點，整理如下表，而不必如定理 1 的實作方法一一帶入計算。

| 進位制 | $\frac{k}{3}$ | $\frac{k}{3}-1$ | $\frac{2k}{3}-1$ | $\frac{2k}{3}$ | 固定點 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 1 | 2 | (1,0,1,2) |
| 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | (2,1,3,4) |
| 9 | 3 | 2 | 5 | 6 | (3,2,5,6) |
| 12 | 4 | 3 | 7 | 8 | (4,3,7,8) |
| 15 | 5 | 4 | 9 | 10 | (5,4,9,10) |
| 18 | 6 | 5 | 11 | 12 | (6,5,11,12) |
| 21 | 7 | 6 | 13 | 14 | (7,6,13,14) |

經由定理 5 推導出固定點公式後，我們可以直接回答再任意進位制下，是否存在固定點。如果有，也可以直接經計算得出其值，不須一一嘗試、費心尋找了。

現在我們得知只有進位制為 3 的倍數之下才有固定點，可是並非所有 3 的倍數的進位制都「只有」固定點。比如在上述表格中，進位制 9 和進位制 15，帶入一部份數字做運算會進入自變環；而進位制 3、進位制 6 和進位制 12 都只會到達唯一的固定點而不會進入自變環。那麼「只有」固定點的進位制又有哪些呢？

為了探討「只有固定點的進位制」，我們再進一步求得$f(X)$函數經三次運算後，輸出值所滿足的關係式，以提高對四位數字的掌控性，以利往後的推展。

> 定理 6：給定數字不完全相同的四位數，定義在$k$進位制下，令經過$f(X)$函數的二次運算，
> 其輸出值由$x_2$所控制；經過$f(X)$函數的三次運算，若其輸出值的第一位數值為$x_3$。
> 則$x_3$不只滿足定理 2、3 的關係式，也會滿足下列關係式：
> (1)得輸出結果為 $(x_3,x_3-1,k-x_3-1\ ,\ k-x_3)$，其中 $x_3=|2x_2-k|$

證明：(1)輸入值為$(x_2,x_2-1,k-x_2-1\ ,k-x_2)$，且已知$x_2>x_2-1$，$k-x_2>k-x_2-1$

令$k-x_2>x_2$，四位數自大小關係即為 $k-x_2>k-x_2-1\geq x_2>x_2-1$

| 故 | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| | $k-x_2$ | $k-x_2-1$ | $x_2$ | $x_2-1$ |
| −) | $x_2$ | $x_2-1$ | $k-x_2$ | $k-x_2-1$ |
| | $k-2x_2$ | $k-2x_2-1$ | $2x_2-1$ | $2x_2$ |

因此$x_3=k-2x_2$

(2)令輸入值為$(x_2,x_2-1,k-x_2-1\ ,k-x_2)$，且已知$x_2>x_2-1$，$k-x_2>k-x_2-1$

令$x_2>k-x_2$，四位數自大小關係即為 $x_2>x_2-1\geq k-x_2>k-x_2-1$

| 故 | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| | $x_2$ | $x_2-1$ | $k-x_2$ | $k-x_2-1$ |
| −) | $k-x_2$ | $k-x_2-1$ | $x_2$ | $x_2-1$ |
| | $2x_2-k$ | $2x_2-k-1$ | $2k-2x_2-1$ | $2k-2x_2$ |

因此 $x_3=2x_2-k$

故可得當輸入值 $x_2<\frac{k}{2}$，則輸出值 $x_3=k-2x_2$

當輸入值 $x_2>\frac{k}{2}$，則輸出值 $x_3=2x_2-k$

將兩者合併改寫為 $x_3=|2x_2-k|$

由上述定理可得知若取 $\alpha=\min(\ x_2,k-x_2)$，則千位數可表示成 $x_3=k-2\alpha$，個位數可表示成 $k-x_3=2\alpha$。這個表示方法不需使用絕對值符號，在往後的探究中我們將使用此表示法，用以大大的節省$f(X)$函數在多次運算下，其龐雜的運算過程在表示上的不便。

## 研究目的四、證明在 $\mathbf{3\times 2^n}$ 進位制下只有固定點，並給出進入固定點之型態與所需計算次數。

依據研究目的三(第 13 頁)的表格，我們發現似乎在 3、6、12 進位制下只有固定點，沒有自戀環。因此我們思考一個問題：在$3\times 2^n$進位制下$f(X)$遞迴函數皆只存在固定點，沒有自戀環嗎？舉一個誇張的實例好了，當$k=3\times 2^{50}$時，是不是真的只有固定點沒有自戀環。像這個例子，我們只能靠證明去得出結果，而無法用土法煉鋼的方式一一去檢視了。

透過下面定理 7 和定理 8 證明，我們證明出此猜想為真，且我們更得出，進入自戀環所需計算步數的通式解。在 $3\times 2^n$ 進位制下，定理 7 所闡明的是當我們的輸入滿足千位加個位等於 $k$，且千位數字不為 3 的倍數，所需的計算步數公式；定理 8 所闡明的是當我們的輸入滿足千位加個位等於 $k$，且千位數字為 3 的倍數，所需的計算步數公式。以此透過此兩定理即可求得任意進位制下進入固定點的步數。

定理 7：給定一四位數 $(\alpha,\alpha-1,k-\alpha-1,k-\alpha)$，令 α 為非 3 的倍數之奇數。
則在 $3\times 2^n$進位制下，經過$f(X)$函數的運算，
只會到達唯一的固定點而不會進入自戀環，且其所需運算次數為 $n+1$ 步。

證明：

$$\begin{aligned}
k=3\times 2^n &= (\alpha)+(3\times 2^n-\alpha)\\
&= [(3\times 2^n-2\alpha_1)+2\alpha_1]\\
&= 2[(3\times 2^{n-1}-\alpha_1)+\alpha_1]\\
&= 2[(3\times 2^{n-1}-2\alpha_2)+2\alpha_2]\\
&= 2^2[(3\times 2^{n-2}-\alpha_2)+\alpha_2]\\
&= 2^2[(3\times 2^{n-2}-2\alpha_3)+2\alpha_3]\\
&= 2^3[(3\times 2^{n-3}-\alpha_3)+\alpha_3]\\
&\ \ \vdots\\
&= 2^n[(3\times 2^0-1)+1]
\end{aligned}$$

其中依據定理 6，

$\alpha_1=\min(\alpha,3\times 2^n-\alpha)$，

$\alpha_{i+1}=\min(3\times 2^{n-i}-\alpha_i,\alpha_i)$

以此類推

此時輸出值的為$(2^{n+1},2^{n+1}-1,\ 2^n-1,2^n)$

再經一次運算後輸出值為$(2^n,2^n-1,2^{n+1}-1,2^{n+1})$，此輸出值再做下一次運算之輸入值，其運算結果仍為$(2^n,2^n-1,2^{n+1}-1,2^{n+1})$，與輸入值相同，往後繼續運算也是如此。

故在 $3\times 2^n$進位制下只會到達唯一的固定點而不會進入自戀環，且其所需運算次數為 $n+1$ 步。

定理 8：給定一任意四位數 $x_2=(\alpha,\alpha-1,k-\alpha-1,k-\alpha)$，令$\alpha=3p$為三的倍數其中$p$為任意奇數。則在$3\times2^n$進位制下，經過$f(X)$函數的運算，只會到達固定點且其所需運算次數為 $2\mathrm{n}+1$步。

證明：

$$
\begin{aligned}
k&=3\times2^n=(3\mathrm{p})+(3\times2^n-3\mathrm{p})\\
2^n&=(\mathrm{p})+(2^n-\mathrm{p})\\
2^n&=[(2^n-2\alpha_1)+2\alpha_1]\\
&=2[(2^{n-1}-\alpha_1)+\alpha_1]\\
&=2[(2^{n-1}-2\alpha_2)+2\alpha_2]\\
&=2^2[(2^{n-2}-\alpha_2)+\alpha_2]\\
&=2^2[(2^{n-2}-2\alpha_3)+2\alpha_3]\\
&=2^3[(2^{n-3}-\alpha_3)+\alpha_3]\\
&\vdots\\
&=2^{n-1}[(1)+1]
\end{aligned}
$$

其中依據定理 6，

$\alpha_1=\min(\mathrm{p},2^n-\mathrm{p})$

$\alpha_{i+1}=\min(2^{n-i}-\alpha_i,\ \alpha_i)$

以此類推

經 $n-1$ 次運算後，此時輸出值的為 $(3\times2^{n-1},3\times2^{n-1}-1,\ 3\times2^{n-1}-1,3\times2^{n-1})$

因千位與百位相同，故再經一次運算後輸出的值為 $(1,0,k-2,k-1)$

又將輸出作為輸入進行運算

$$
\begin{aligned}
k&=[1+(k-1)]\\
&=[(k-2)+2]\\
&=[(k-2^2)+2^2]\\
&=[(k-2^3)+2^3]\\
&\vdots\\
&=[(k-2^n)+2^n]
\end{aligned}
$$

此時輸出值的為$(2^{n+1},2^{n+1}-1,\ 2^n-1,2^n)$

再經一次運算後輸出值為$(2^n,2^n-1,2^{n+1}-1,2^{n+1})$，此輸出值再做下一次運算之輸入值，其運算結果仍為$(2^n,2^n-1,2^{n+1}-1,2^{n+1})$，與輸入值相同，往後繼續運算也是如此。

故在 $3\times2^n$進位制下只會到達唯一的固定點而不會進入自戀環，且其所需運算次數為 $2\mathrm{n}+1$ 步。

在上述定理 7 定理 8 的陳述中，我得知奇數進位制下任意輸入值進入固定點之所需步數。因此我們便好奇若當進位制為偶數，即 $\alpha=\mathrm{S}\times2^t$或$\alpha=3\mathrm{p}\times2^t$時，其進入固定點之路徑狀況為何？由於偶數進位制所帶的二次方會加速運算中提出次方數二的速率，故將原計算公式減去其二次方數 $t$，得到以下的計算公式。

推論：(1)若$\alpha = \mathrm{S} \times 2^{t}$，$t \neq 0$且 $(\mathrm{S}, 6) = 1$故推論此時 $x_2$達到固定點所需之步數為 $\mathrm{n} - \mathrm{t} + 1$。

(2)若$\alpha = 3\mathrm{p} \times 2^{t}$，$t \neq 0$且 p 為奇數，故推論此時 $x_2$達到固定點所需之步數為 $2\mathrm{n} - \mathrm{t} + 1$。

由上述兩個推論得知，給定任一四位數，經至多兩次運算之後，達到標準型態 $(x, x-1, k-x-1, k-x)$，則必存在一正整數使得$f(x) = (2^{n}, 2^{n}-1, 2^{n+1}-1, 2^{n+1})$。且其步數範圍為$1 \leq H(x) \leq 2\mathrm{n} - \mathrm{t} + 1$，若加入前 2 步，則為$1 \leq H(x) \leq 2\mathrm{n} - \mathrm{t} + 3$。

舉例說明

依據定理 3，四位數經$f(X)$函數運算兩次之後會到達$(x_2, x_2 - 1, k - x_2 - 1, k - x_2)$的型態，故可由千位數及個位數得知其百位數與十位數字，因此以符號$(x, k-x)$來表示此四位數。

48 進位制下的固定點與到達固定點所需的步數表

| 進位制：48　(固定點為16,15,31,32) | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 輸入值 | α不為3的倍數 | | | | | | α為3的倍數 | | | | | |
| | (5,43) | (7, 41) | (11,37) | (4,44) | (8,40) | (10,38) | (3, 45) | (9, 39) | (15,33) | (6, 42) | (12,36) | (18,30) |
| $f(x)^1$ | (38,10) | (34,14) | (26,22) | (40,8) | (32,16) | (28,20) | (42,6) | (30,18) | (30,18) | (36,2) | (24,24) | (12,36) |
| $f(x)^2$ | (28,20) | (20,28) | (4,44) | (32,16) | (16,32) | (8, 40) | (36,12) | (12,36) | (12,36) | (24,24) | (1,47) | (24,24) |
| $f(x)^3$ | (8,40) | (8,40) | (40,8) | (16,32) | | (32,16) | (24,24) | (24,24) | (24,24) | (1, 47) | (46,2) | (1,47) |
| $f(x)^4$ | (32,16) | (32,16) | (32,16) | | | (16,32) | (1,47) | (1,47) | (1,47) | (46, 2) | (44,4) | (46,2) |
| $f(x)^5$ | (16,32) | (16,32) | (16,32) | | | | (46,2) | (46,2) | (46,2) | (44, 4) | (40,8) | (44,4) |
| $f(x)^6$ | | | | | | | (44,4) | (44,4) | (44,4) | (40,8) | (32,16) | (40,8) |
| $f(x)^7$ | | | | | | | (40,8) | (40,8) | (40,8) | (32,16) | (16,32) | (32,16) |
| $f(x)^8$ | | | | | | | (32,16) | (32,16) | (32,16) | (16,32) | | (16,32) |
| $f(x)^9$ | | | | | | | (16,32) | (16,32) | (16,32) | | | |
| $n$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| t | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| $\mathrm{n} - \mathrm{t} + 1$ | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 | 4 | | | | | | |
| $2\mathrm{n} - \mathrm{t} + 1$ | | | | | | | 9 | 9 | 9 | 8 | 7 | 8 |

若輸入值不為3的倍數，則其到達固定點之所需步數較少；若輸入值為3的倍數，則其到達固定點之所需步數較多。而輸入值為二的倍數者所需步數更少。其中，與非二的倍數者相比，若輸入值的質因數分解式中含有二的一次方，則其所需步數即少一；若含有二的二次方，則其所需步數即少二，以此類推。

依據上述定理與表格，雖然我們可以得知其進入標準型態後到達固定點的所需步數，但由於進入標準型態之前的兩步無法掌握，導致我們對於總步數依然無法確切指出。於是我們接續思考問題：在哪些輸入情形僅須一步即可到達標準型態？我們的研究分析如下：

定理 9：給定非標準型態下的四位數 $X$，經過 $f(X)$函數的運算，

僅須一步即到達標準型態者，其四位數字必滿足下列三種情形之一。

(1)$\mathrm{AABB}$，其中$\mathrm{A} > \mathrm{B}$

(2)$\mathrm{ABBC}$，其中$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C}$，且$\mathrm{A} + \mathrm{C} = 2\mathrm{B}$

(3)$\mathrm{ABCD}$，其中$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C} > \mathrm{D}$，且$\mathrm{A} - \mathrm{C} = \mathrm{B} - \mathrm{D}$

證明：

設$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C} > \mathrm{D}$，且$1 \leq \mathrm{A}、\mathrm{B}、\mathrm{C}、\mathrm{D} \leq \mathrm{k} - 1$的整數

| 被減數−減數 | 千位 | 百位 | 十位 | 個位 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{AAAB} - \mathrm{ABAA}$ | 0 | $\mathrm{A} - \mathrm{B} - 1$ | $k - 1$ | $\mathrm{B} - \mathrm{A} + k$ |
| $\mathrm{AABB} - \mathrm{BBAA}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{B} - 1$ | $\mathrm{B} - \mathrm{A} + k - 1$ | $\mathrm{B} - \mathrm{A} + k$ |
| $\mathrm{ABBB} - \mathrm{BBAB}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{B} - 1$ | $k - 1$ | $\mathrm{B} - \mathrm{A} + k$ | 0 |
| $\mathrm{AABC} - \mathrm{BCAA}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{C} - 1$ | $\mathrm{B} - \mathrm{A} + k - 1$ | $\mathrm{C} - \mathrm{A} + k$ |
| $\mathrm{ABBC} - \mathrm{BCAB}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ | $\mathrm{B} - \mathrm{C} - 1$ | $\mathrm{B} - \mathrm{A} + k - 1$ | $\mathrm{C} - \mathrm{B} + k$ |
| $\mathrm{ABCC} - \mathrm{BCAB}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{C}$ | $\mathrm{B} - \mathrm{C} - 1$ | $\mathrm{C} - \mathrm{A} + k - 1$ | $\mathrm{C} - \mathrm{B} + k$ |
| $\mathrm{ABCD} - \mathrm{CDAB}$ | $\mathrm{A} - \mathrm{C}$ | $\mathrm{B} - \mathrm{D} - 1$ | $\mathrm{C} - \mathrm{A} + k - 1$ | $\mathrm{D} - \mathrm{B} + k$ |

(1)當 被減數−減數$= \mathrm{AAAB} - \mathrm{ABAA}$時，設 $0 + (\mathrm{B} - \mathrm{A} + k) = k$，則 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$，與 $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ 不合

(2)當 被減數−減數$= \mathrm{AABB} - \mathrm{BBAA}$時，設 $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + (\mathrm{B} - \mathrm{A} + k) = k$，則 $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ 的任意數均合

(3)當 被減數−減數$= \mathrm{ABBB} - \mathrm{BBAB}$時，設 $(\mathrm{A} - \mathrm{B} - 1) + 0 = k$，則當 $\mathrm{A} - \mathrm{B} = k + 1$，與 $\mathrm{A} < k$ 不合

(4)當 被減數−減數$= \mathrm{AABC} - \mathrm{BCAA}$時，設 $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + (\mathrm{C} - \mathrm{A} + k) = k$，則 $\mathrm{B} = \mathrm{C}$，與$\mathrm{B} > \mathrm{C}$不合

(5)當 被減數−減數$= \mathrm{ABBC} - \mathrm{BCAB}$時，設$(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B} + k) = k$，則當 $\mathrm{A} + \mathrm{C} = 2\mathrm{B}$，合

(6)當 被減數−減數$= \mathrm{ABCC} - \mathrm{BCAB}$時，設 $(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + (\mathrm{C} - \mathrm{B} + k) = k$，則 $\mathrm{A} = \mathrm{B}$，與 $\mathrm{A} > \mathrm{B}$不合

(7)當 被減數−減數$= \mathrm{ABCD} - \mathrm{CDAB}$時，設 $(\mathrm{A} - \mathrm{C}) + (\mathrm{D} - \mathrm{B} + k) = k$，則當 $\mathrm{A} - \mathrm{C} = \mathrm{B} - \mathrm{D}$，合

由以上定理 9，我們可以得出，當輸入滿足上述性質時，其僅須一步即可到達標準型態。而在非標準型態下的輸入值當中，不符合定理九之敘述者則為須兩步才可到達標準型態之輸入值。也就是說，只要滿足定理 9 的條件者，利用定理 7、8 求得其進入標準型態後到達固定點的所需步數後，加一步即為其總步數，其餘則須加兩步。

**研究目的五：發展任意進位制下週期解個數理論，並建構週期解內循環元素的個數通式。**

在上述的研究中我們知道當進位制 $k$為三的倍數時必有固定點，而其中 $k=3\times 2^n$ 時，只有固定點而沒有自戀環，即只有唯一的週期解。現在我們的興趣在於完備整個問題的研究，將原本侷限在$3\times 2^n$ 進位制下固定點的研究，拓展到任意進位制下的週期解。也就是說，若給定一進位制，會存在幾個週期解？且週期解中又是以幾個元素為一循環？

將上頁表格新增如下：

| 進位制 | 性質 | 固定點(環) |
|---|---|---|
| 2 | 固定點 | $\{(1,0,0,1)\}$ |
| 3 | 固定點 | $\{(1,0,1,2)\}$ |
| 4 | 自戀環 | $\{(1,0,2,3)(2,1,1,2)\}$ |
| 5 | 自戀環 | $\{(1,0,3,4)(3,2,1,2)\}$ |
| 6 | 固定點 | $\{(2,1,3,4)\}$ |
| 7 | 自戀環 | $\{(1,0,5,6)(5,4,1,2)(3,2,4,3)\}$ |
| 8 | 自戀環 | $\{(1,0,6,7)(6,5,1,2)(4,3,3,4)\}$ |
| 9 | 自戀環 | $\{(1,0,7,8)(7,6,1,2)(5,4,3,4)\}$ |
| | 固定點 | $\{(3,2,5,6)\}$ |

透過下列三個證明，我們得出從進位制求其週期解個數的通式解，以及求週期解內元素個數的通式解。其中，定理 10 所敘述的是週期解的特質；定理 11 所敘述的是利用定理 10 的結果，進一步得到週期解個數的通式解；定理 12 所敘述的則是週期解內元素個數的形態與其通式解。

為了推導下面關於週期解的定理，以定理 10 證明有關週期解之特質，包括有限性、存在性以及唯一性，作為以下定理 11、定理 12 週期解相關通式時所需的準備。相關敘述與證明推導如下：

定理 10：給定任一正奇數 $k$ 為進位制，凡符合 $a_i+b_i=k$，

且$a_i$、$b_i$ 兩數互質，則 $k$ 的分解 $(a_i,b_i)$

皆只存在於輸入值為 $(1,k-1)$ 在$f(X)$函數運算下所得到的循環遞迴分解 $T_k$中

且此循環遞迴分解的週期小於或等於 $\frac{k-1}{2}$

證明：(1)有限性證明

首先證明其週期解為有限個，且其個數為 $N(p) \le \frac{k-1}{2}$

$\because k$ 為奇數，$\therefore k = 1 + (k-1)$

$= 2 + (k-2)$

$= 3 + (k-3)$

$\vdots$

$= \left(\frac{k-1}{2}\right) + \left(\frac{k+1}{2}\right)$

共有 $\left(\frac{k-1}{2}\right)$ 個等式，故其最多有$\left(\frac{k-1}{2}\right)$ 個分解等式，故分解為有限。

(2)存在性證明

證明滿足 $T_k = a_i + b_i = (2a_i + b_i - a_i)$之遞迴分解為一個週期解

$k = a_i + (k - a_i)$

$= (k - 2\alpha_1) + 2\alpha_1$

$= (k - 2\alpha_2) + 2\alpha_2$

$\vdots$

$= 1 + (k-1)$

$= (k-2) + 2$

$\vdots$

$= a_i + (k - a_i)$

其中依據定理 6，

$\alpha_1 = \min(a_i, k - a_i)$

$\alpha_{i+1} = \min(2^{n-i} - \alpha_i,\ \alpha_i)$

以此類推

因此可由上述等式得知$k$ 的分解 $(a_i, b_i)$，

皆存在於輸入值為 $(1, k-1)$ 在$f(X)$函數運算下所得到的循環遞迴分解 $T_k$中

(3)唯一性證明

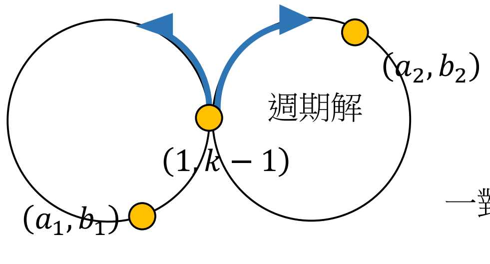
設 $\ni$ $(a_i, b_i)$ 滿足 $(a_i, b_i) = 1$，且 $a_i + b_i = k$，但 $(a_i, b_i)$ 不在循環遞迴分解 $T_k$中

依據上述(2)存在性證明，每一個$(a_i, b_i)$經$f(X)$函數運算下，皆會到達$(1, k-1)$

故違反函數的基本定義，當計算至 $(1, k-1)$ 時

下一步輸出值將因其存在之自變環的不同而有不同的輸出值

也就是當輸入確定以後輸出沒有唯一決定，而得到矛盾




一對多

在研究目的一中我們已證明在 $f(X)$ 函數在$k$ 進位制下其週期解必存在，那我們要研究的課題是：「週期解必存在，那麼其週期解個數為何？」也就是說 $f(X)$ 函數在 $k$ 進位制下有自戀環、固定點，請問這種週期解有幾個？經過我們的深思探究，終於倒出週期解個數的計算公式 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$，其中 $r$ 為 $k$ 的奇質因數，定理敘述與證明推導如下

定理 11：給定一進位制 $k$，其中 $k\geq 3$，且 $k$為奇數

且 $k=\prod_{i=1}^{n}{e_i}^{n_i}$ 為 $k$ 之標準分解式，則

(1) $f(X)$ 在 $k$ 進位制下的週期解個數為 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$，

(2)凡符合 $a_i+b_i=k$，且 $\gcd(a_i,b_i)=r$之 $a_i$、$b_i$ 兩數，則 $(a_i,a_i-1,b_i-1,b_i)$ 皆為 $k$ 進位制下 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解之內部元素，其中 $r|\,k$ 但 $r\neq k$

證明：

在 $k$ 進位制下，$f(X)$ 週期解中的元素，皆滿足千位+個位$=k$ 的條件

給定一四位數 $X$ 其千位數字和個位數字分別為 $a_i$ 和 $b_i$ ，令$gcd(a_i,b_i)=r$

則 $a_i+b_i=r(p_i+q_i)$

其中$(p_i\,,q_i)=1$，且 $p_i,q_i$ 為一奇一偶，又 $k=r\cdot\frac{k}{r}$，故 $p_i+q_i=\frac{k}{r}$

故 $\frac{k}{r}=(p_i+\ q_i)$　不失一般性，令 $p_i>q_i$

$$=(p_i-\ q_i\ +2q_i)$$

$$\vdots$$

$$=(1+\frac{k}{r}-1)$$

$$=(2+\frac{k}{r}-2)$$

$$\vdots$$

$$=(p_i+\ q_i)$$

依據定理 10，每一個$(a_i,b_i)$經$f(X)$函數運算下，皆會到達$(1,k-1)$

這些等式會形成一遞迴週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$

因為 $k$ 的每一奇因數 $r$ 會一對一對應到一個週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$

又 $k=\prod_{i=1}^{n}r^{n_i}$ ，則 $k$ 的正因數個數共有 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)$ 個

$\because r\neq k$ ，故 $k$ 的正因數個數中小於 $k$ 者共有 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$ 個

因此 $f(x)$ 在 $k$ 進位制下共有 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$ 個週期解　　　故得證

結論：當 $a_i+b_i=k$ ，且 $(a_i,b_i)=r$，則 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解內元素的通式解為 $(a_i,a_i-1,b_i-1,b_i)$ ，其中$k$為奇數。

根據定理 11 與其所得到的結果，我們即可得到下面的推論。

推論：當進位制 $k$ 為偶數，令 $k=2^p\cdot m$，且 $m$ 為奇數，$m\geq 3$，$\gcd(m,2)=1$，則，

(1)已知 $m$ 進位制下之週期解 $rT_{\frac{m}{r}}$ ，$k$ 進位制下週期解為 $2^p rT_{\frac{m}{r}}$，其中$r|m$

(2) $k$ 進位制下週期解個數與 $m$ 進位制下週期解個數相同

(3)凡符合 $a_i+b_i=k$，若 $r|m$ 且$(a_i,\ b_i)=2^p\cdot r$，

則 $(a_i,\ b_i)$ 為 $k$ 進位制下 $2^p rT_{\frac{m}{r}}$ 環週期解之內部元素

現在任意給定一進位制，我們即可正確回答出其週期解共有幾個，但我們還希望能知道：「每一週期解內部共有幾個元素？」。也就是說$f(X)$ 函數在$k$ 進位制下有 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$ 個週期解，請問每一個週期解含有幾個元素？即每一個週期解的週期為何？透過下面定理 12 的證明，終於倒出元素個數的計算公式，定理敘述與證明推導如下。

定理 12：設在 $k$ 進位制下，函數$f(X)$ 具有 $rT_{\frac{k}{r}}$ 的週期解

則(一)當 $k$ 為奇數，則分為以下兩種情況

(1)當 $\frac{k}{r}$ 為質數時，且 $r\geq 3$，則 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解的週期為$N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right)=\frac{\frac{k}{r}-1}{2}$

(2)當 $\frac{k}{r}=\prod_{i=1}^{n}\ell_i{}^{n_i}$ 為合數時，則週期解的週期為

$N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right)=\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$，其中$\ell_i$為 $\frac{k}{r}$ 的因數，$\ell_i\neq\frac{k}{r}$

(二)設 $k$ 為偶數， $k=2^p\cdot m$，$m\geq 3$，$(m,2)=1$，

則在 $k$ 進位制下其週期解的週期與 $m$ 進位制下週期解的週期相同

(三)若 $k=2^n$，則僅有一週期為 $n$ 的自戀環。

證明： (一) 當 $k$ 為奇數

(1)當 $\frac{k}{r}$ 為質數時

則 $\frac{k}{r}=1+(\frac{k}{r}-1)$

$=\left(\frac{k}{r}-2\right)+2$

$\vdots$

$=\left(\frac{\frac{k}{r}-1}{2}\right)+\left(\frac{\frac{k}{r}+1}{2}\right)$

共有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}$ 個等式，且任意等式中的兩個數皆為互質，

故週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 中的元素個數共有$\frac{\frac{k}{r}-1}{2}$個

(2)當 $\frac{k}{r}$ 為合數且$\frac{k}{r}=\prod_{i=1}^{n}\ell_i^{\,n_i}$為其標準分解式時，給定任意 $(a_i,b_i)=1$，

且 $a_i+b_i=\frac{k}{r_i}$，則滿足上述條件的等式共有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}$ 個

其中 $\ell_i\left|\frac{k}{r}\right.$，且 $\ell_i\neq 1$、 $\ell_i\neq\frac{k}{r}$

故 $rT_{\frac{k}{r}}$ 中的元素個數共有 $N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right)=\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}$ 個

(二) 當 $k$ 為偶數，且 $k=2^p\cdot m$，$m\geq 3$，$(m,2)=1$

由定理 11 的推論知 $m$ 進位制下之週期解 $rT_{\frac{m}{r}}$ ，

則 $k$ 進位制下對應週期解為 $2^p rT_{\frac{m}{r}}$，

因此偶數進位制下週期解之週期與奇數進位制下週期解之週期一一對應，

只是其對應係數不同而已。

(三)若 $k=2^n$，則

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+2^n-1)\\
&= (2^n-2+2)=2^1(2^{n-1}-1+1)\\
&= 2^1(2^{n-1}-2+2)=2^2(2^{n-2}-1+1)\\
&= 2^2(2^{n-2}-2+2)=2^3(2^{n-3}-1+1)\\
&\quad\vdots\\
&= 2^{n-1}(2-1+1)
\end{aligned}$$

也就是經 $n-1$ 步到達$(2^{n-1},2^{n-1}-1,2^{n-1}-1,2^{n-1})$

再經一步即可得$(1,0,2^n-2,2^n-1)$

故其週期解週期為 $n$

經由上述研究後，只要給定任意進位制，我們即可得知其週期解之元素個數與內容。也就是說，我們已經成功導出週期解元素與內容的通式。回過頭來，我們再看一次$k=3\times 2^n$的問題，將其帶入定理 11 及 12 的公式後，立即算可得週期解為 $2^n\cdot T_3$，且元素為 $2^n(1,0,1,2)$，也就是週期解只有一個，而其週期為一。故研究目的三、四所探討的問題，是研究目的五週期解的特例之一。

同理，仿定理 7、定理 8 進入固定點之型態與所需計算次數理論，運用在 $k=m\times 2^n$ 進位制下，得到週期解的步數公式，推論如下。

推論：給定一四位數 $x_2 = (\alpha, \alpha - 1, k - \alpha - 1, k - \alpha)$，令$\alpha = S \times 2^t$，其中$\gcd(m, S) = 1$

則在 $k = m \times 2^n$進位制下，經過$f(X)$ 函數的運算，

其到達週期解 $2^n T_m$ 之所需運算次數為$n - t + 1$ 步。

推論：給定一任意四位數 $x_2 = (\alpha, \alpha - 1, k - \alpha - 1, k - \alpha)$，令$\alpha = p \times 2^t$，其中$m|\alpha$

則在 $k = m \times 2^n$進位制下，經過$f(X)$ 函數的運算，

其到達週期解 $2^n T_m$之所需運算次數為 $2n - t + 1$步。

舉例說明如下

56 進位制下的自戀環與到達自戀環所需的步數表

| 進位制：$56 = 2^3 \times 7$ (自戀環$8T_7$為(8,48)(40,16)(24,32)) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 輸入值 | α不為7的倍數 | | | | α為7的倍數 | | | |
| | (2,54) | (11,45) | (27,29) | (48,8) | (7,49) | (14,42) | (35,21) | (28,28) |
| $f(x)^1$ | (52,4) | (34,22) | (2,54) | (40,16) | (42,14) | (28,28) | (14,42) | (1,55) |
| $f(x)^2$ | (48,8) | (12,44) | (52,4) | | (28,28) | (1,55) | (28,28) | (54,2) |
| $f(x)^3$ | (40,16) | (32,24) | (48,8) | | (1,55) | (54,2) | (1,55) | (52,4) |
| $f(x)^4$ | | (8,48) | (40,16) | | (54,2) | (52,4) | (54,2) | (48,8) |
| $f(x)^5$ | | | | | (52,4) | (48,8) | (52,4) | (40,16) |
| $f(x)^6$ | | | | | (48,8) | (40,16) | (48,8) | |
| $f(x)^7$ | | | | | (40,16) | | (40,16) | |
| $n$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| T | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $n - t + 1$ | 3 | 4 | 4 | 1 | | | | |
| $2n - t + 1$ | | | | | 7 | 6 | 7 | 5 |

經由定理 12 推導出週期解公式後，我們可以直接回答再任意進位制下，存在幾個週期解並經由直接經計算得出其內部元素之值與個數，不須再一一嘗試、費心尋找了。

### 研究目的六、求出在 $\boldsymbol{k}$ 進位制下，週期外且滿足標準形態的四位數經 $\boldsymbol{f(X)}$ 函數運算後進入週期解 $\boldsymbol{rT_{\frac{k}{r}}}$ 內之元素個數的公式

由研究目的一至研究目的五，我們得知：「週期解的元素必為標準型態，但符合標準型態之元素卻不一定在週期解之中」。因此我們好奇，在週期外且滿足標準形態的四位數經 $f(X)$ 函數運算後會進入哪一個週期解呢？比如在進位制為 36 的情況下，由定理 11 可得知其輸出值會形成兩個週期解，分別是 $12T_3$ 環以及 $4T_9$ 環，那麼在標準形態下，那些輸入值會進入 $12T_3$，又那些輸入值會進入 $4T_9$ 呢？經過我們的思考與探究，終於導出其進入指定週期解的個數公式及其形態之週期解，陳述如下。

> 定理 13：當進位制 $k$ 為奇數時，令 $(a_i,b_i)$ 為週期 $rT_{\frac{k}{r}}$ 解內之元素
>
> 則在週期外且滿足標準形態的四位數經 $f(X)$ 函數運算後
>
> 進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內之元素，其形態必為 $(b_i,a_{i},)$，且其個數為 $\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$

證明：

已知 $(a_i,b_i)$ 為 $rT_{\frac{k}{r}}$ 之元素，

則對稱四位數 $(b_i,a_i)$ 與 $(a_i,b_i)$ 經 $f(X)$ 函數運算一次後的輸出值相同，

也就是說 $(b_i,a_{i},)$ 經 $f(X)$ 函數運算一次後的輸出值也是 $rT_{\frac{k}{r}}$ 之元素，

又 $rT_{\frac{k}{r}}$ 之週期為 $\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$，藉由對稱性得知，在週期解外滿足標準型態的四位數，

能進入週期解內之元素亦為 $\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$

> 定理 14：當進位制 $k$ 為偶數且 $k=2^p\cdot m$，$m\geq 3$，$\gcd(m,2)=1$，
>
> 其週期解之型態為 $2^p rT_{\frac{m}{r}}$
>
> (一) 當 $r=1$時，在週期外且滿足標準形態的四位數經 $f(X)$ 函數運算後
>
> 進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內之元素型態有下列二種情況：
>
> (1) $(a_i,b_i)$，$\gcd(a_i,k)=2^x$，$x$ 可為 0、1、2 $\cdots p-1$
>
> (2) $(b_i,a_i)$，$\gcd(a_i,k)=2^p$，且 $(a_i,b_i)$ 為 $2^pT_m$ 內一元素之對稱四位數
>
> (3) $(a_i,b_i)$，$\gcd(a_i,k)=m\cdot 2^y$，$y$ 可為 0、1、2 $\cdots p-1$
>
> 且其總個數為 $\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2}+\sum_{y=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{m\cdot 2^y}\right)$

(二) 當$r \neq 1$時，在週期外且滿足標準形態的四位數經$f(X)$ 函數運算後

進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內之元素型態有下列二種情況：

(1)$(a_i, b_i)$，gcd $(a_i, k) = 2^x r$，$x$ 可為 0、1、2 ⋯ $p-1$

(2)$(b_i, a_i)$，gcd $(a_i, k) = 2^p r$，且$(a_i, b_i)$為 $2^p T_m$ 內一元素之對稱四位數

且其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x r}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$

證明：

(一)當 $r = 1$，則進入週期解 $2^p T_m$之個數為

(1)$(a_i, b_i)$，gcd $(a_i, k) = 2^x$，則$(a_i, b_i)$個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x}\right)$，

其中$x$ 可為 0、1、2 ⋯ $p-1$。

(2)$(b_i, a_i)$，gcd $(a_i, k) = 2^p$，故$(b_i, a_i)$之個數亦為 $\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2}$，

其中$(a_i, b_i)$為 $2^p T_m$ 內一元素。

(3) $(a_i, b_i)$，gcd $= m \cdot 2^y$，則$(a_i, b_i)$個數為$\sum_{y=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{m \cdot 2^y}\right)$，

其中$y$ 可為 0、1、2 ⋯ $p-1$。

綜合(1)(2)(3)之結果，則其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2} + \sum_{y=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{m \cdot 2^y}\right)$

(二)當 $r \neq 1$，則能進入週期解 $2^p T_m$之個數為

(1) $(a_i, b_i)$，gcd$(a_i, k) = 2^x r$，則$(a_i, b_i)$個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x r}\right)$，

其中$x$ 可為 0、1、2 ⋯ $p-1$。

(2) $(b_i, a_i)$，gcd$(a_i, k) = 2^p r$，故$(b_i, a_i)$之個數亦為 $\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$，

其中$(a_i, b_i)$為 $2^p T_m$ 內一元素。

綜合(1)(2)之結果，則其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x r}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$

經由研究目的五、六完整的研究，只要任意給定進位制，我們即可直接回答週期解個數，並指出其元素分別為何。而只要任意給定輸入值，至多運算兩次後，我們即可得知此輸入值會進入哪一個週期解，以及計算進入週期解之所需步數。

底下我計算出一百以內的自戀環個數，以及$T_3$、$T_5$、$T_7$、$T_9$、$T_{11}$、$T_{13}$、$T_{15}$ 環內的元素值，並列成表格以便底下例題的計算。

我的週期表

$k$ 輸入一百以內的奇數，並將 $T_k$ 列成下表用以計算上的對照

$k = 1\sim49$

| $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 11 | 5 | 21 | 6 | 31 | 15 | 41 | 20 |
| 3 | 1 | 13 | 6 | 23 | 11 | 33 | 10 | 43 | 21 |
| 5 | 2 | 15 | 4 | 25 | 10 | 35 | 12 | 45 | 12 |
| 7 | 3 | 17 | 8 | 27 | 9 | 37 | 18 | 47 | 23 |
| 9 | 3 | 19 | 9 | 29 | 14 | 39 | 12 | 49 | 21 |

$k = 51\sim99$

| $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ | $k$ | $T_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 16 | 61 | 30 | 71 | 35 | 81 | 37 | 91 | 36 |
| 53 | 26 | 63 | 18 | 73 | 36 | 83 | 41 | 93 | 30 |
| 55 | 20 | 65 | 24 | 75 | 10 | 85 | 32 | 95 | 36 |
| 57 | 18 | 67 | 33 | 77 | 30 | 87 | 28 | 97 | 48 |
| 59 | 29 | 69 | 22 | 79 | 39 | 89 | 44 | 99 | 30 |

| | |
|---|---|
| $T_3$ | (1,0,1,2) |
| $T_5$ | (1,0,3,4)(3,2,1,2) |
| $T_7$ | (1,0,5,6)(5,4,1,2)(3,2,4,3) |
| $T_9$ | (1,0,7,8)(7,6,1,2)(5,4,3,4) |
| $T_{11}$ | (1,0,9,10)(9,8,1,2)(7,6,3,4)(3,2,7,8)(5,4,5,6) |
| $T_{13}$ | (1,0,11,12)(11,10,1,2)(9,8,3,4)(5,4,7,8)(3,2,9,10)(7,6,5,6) |
| $T_{15}$ | (1,0,13,14)(13,12,1,2)(11,10,3,4)(7,6,7,8) |

底下我們以$k=180$進位制為例，陳述我們所有的研究結果。

依據定理 5：在 180 進位制下，$k=3p$，固定點為$\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3}-1\ ,\ \frac{2k}{3}-1,\frac{2k}{3}\right)=(60,59,119,120)$

依據定理 11：在 180 進位制下$k=2^2\times 3^2\times 5$為$k$之標準分解式，其週期解個數為

$\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1=(2+1)(1+1)-1=5$，

分別為$4T_{45}$、$12T_{15}$、$20T_9$、$36T_5$、$60T_3$

依據定理 12：在 180 進位制下，具有$4T_{45}$、$12T_{15}$、$20T_9$、$36T_5$、$60T_3$的週期解

(1) $4T_{45}$ 有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=12$個元素

分別為$\left\{\begin{matrix}(1,0,175,176)(172,171,7,8)(164,163,15,16)(148,147,31,32)\\(116,115,63,64)(52,51,127,128)(76,75,103,104)(28,27,151,152)\\(124,123,55,56)(68,67,111,112)(44,43,135,136)(92,91,87,88)\end{matrix}\right\}$

(2)$12T_{15}$有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=4$個元素

分別為$\{(12,11,167,168)(156,155,23,24)(132,131,47,48)(84,83,95,96)\}$

(3)$20T_9$ 有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=3$個元素

分別為$\{(20,19,159,160)(140,139,39,40)(100,99,79,80)\}$

(4)$36T_5$ 有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=2$個元素

分別為$\{(36,35,143,144)(108,107,71,72)\}$

(5)$60T_3$ 有 $\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=1$個元素

分別為$\{(60,59,119,120)\}$

依據定理 14：在 180 進位制下，具有$4T_{45}$、$12T_{15}$、$20T_9$、$36T_5$、$60T_3$的週期解

(1)$4T_{45}$週期外且滿足標準形態的四位數經函數運算後進入此週期解內之元素

有$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2}+\sum_{y=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{m\cdot 2^y}\right)=87$個

(2)$12T_{15}$週期外且滿足標準形態的四位數經函數運算後進入此週期解內之元素

有$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^{x}r}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=4$個

(3)$20T_{9}$週期外且滿足標準形態的四位數經函數運算後進入此週期解內之元素

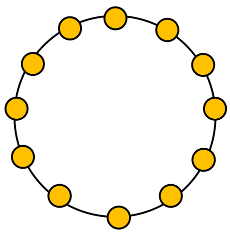
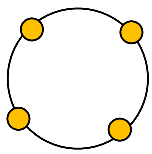
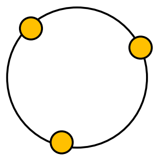
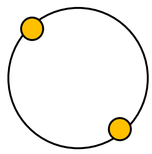
有$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^{x}r}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=13$個

(4)$36T_{5}$週期外且滿足標準形態的四位數經函數運算後進入此週期解內之元素

有$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^{x}r}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=22$個

(5)$60T_{3}$ 週期外且滿足標準形態的四位數經函數運算後進入此週期解內之元素

有$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^{x}r}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}=31$個

| | $4T_{45}$ | $12T_{15}$ | $20T_{9}$ | $36T_{5}$ | $60T_{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k=180$<br>週期解 |  |  |  |  |  |
| | (1,0,175,176)<br>(172,171,7,8)<br>(164,163,15,16)<br>(148,147,31,32)<br>(116,115,63,64)<br>(52,51,127,128)<br>(76,75,103,104)<br>(28,27,151,152)<br>(124,123,55,56)<br>(68,67,111,112)<br>(44,43,135,136)<br>(92,91,87,88) | (12,11,167,168)<br>(156,155,23,24)<br>(132,131,47,48)<br>(84,83,95,96) | (20,19,159,160)<br>(140,139,39,40)<br>(100,99,79,80) | (36,35,143,144)<br>(108,107,71,72) | (60,59,119,120) |

# 伍、結論

一、 給定一進位制 $k$，其中 $k \geq 3$，且 $k$為奇數， $k = \prod_{i=1}^{n} e_i^{n_i}$ 為 $k$ 之標準分解式，則

1. $f(X)$ 在 $k$ 進位制下的週期解個數為 $\prod_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 1$，

2. 凡符合 $a_i + b_i = k$，且 $\gcd(a_i, b_i) = r$之 $a_i$、$b_i$ 兩數，則 $(a_i, a_i - 1, b_i - 1, b_i)$ 皆為 $k$ 進位制下 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解之內部元素，其中 $r|\, k$ 但 $r \neq k$

二、 設在 $k$ 進位制下，函數$f(X)$ 具有 $rT_{\frac{k}{r}}$ 的週期解

1. 當 $k$ 為奇數，則分為以下兩種情況

(1)當$\frac{k}{r}$ 為質數時，且 $r \geq 3$，則 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解的週期為$N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right) = \frac{\frac{k}{r}-1}{2}$

(2)當 $\frac{k}{r} = \prod_{i=1}^{n} \ell_i^{n_i}$ 為合數時，則週期解的週期為

$$N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right) = \frac{\frac{k}{r}-1}{2} - \sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2} T_{\ell_i} = \frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$$，其中$\ell_i$為$\frac{k}{r}$的因數，$\ell_i \neq t_{r_i}$

2. 設 $k$ 為偶數， $k = 2^p \cdot m$，$m \geq 3$，$(m, 2) = 1$，

則在 $k$ 進位制下其週期解的週期與 $m$ 進位制下週期解的週期相同

3. 若 $k = 2^n$，則僅有一週期為 $n$ 的自戀環。

三、當進位制 $k = 2^p \cdot m$，$m \geq 3$，$(m, 2) = 1$，其週期解之型態為 $2^p rT_{\frac{m}{r}}$

1. 當$r_i = 1$時，在週期外且滿足標準形態的四位數經$f(X)$ 函數運算後進入週期解 $r_i T_{\frac{k}{r_i}}$ 內之元素型態有下列二種情況：

(1) $(a_i, b_i)$，$\gcd(a_i, k) = 2^x$，$x$ 可為 0、1、2 $\cdots$ $p - 1$

(2) $(b_i, a_i)$，$\gcd(a_i, k) = 2^p$，且$(a_i, b_i)$為 $2^p T_m$ 內一元素之對稱四位數

(3) $(a_i, b_i)$，$\gcd(a_i, k) = m \cdot 2^y$，$y$ 可為 0、1、2 $\cdots$ $p - 1$

且其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2} + \sum_{y=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{m \cdot 2^y}\right)$

2. 當$r_i \neq 1$時，在週期外且滿足標準形態的四位數經$f(X)$ 函數運算後進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內之元素型態有下列二種情況：

(1)$(a_i, b_i)$，$\gcd(a_i, k) = 2^x r$，$x$ 可為 0、1、2 $\cdots$ $p - 1$

(2)$(b_i, a_i)$，$\gcd(a_i, k) = 2^p r$，且$(a_i, b_i)$為 $2^p T_m$ 內一元素之對稱四位數

且其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1} \varphi\left(\frac{k}{2^x r}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$

# 陸、結語

最初是因為知道了有關十進位下，四位數由大到小排列減掉由小到大排列之後，會到達數字黑洞 6174 的趣事才展開的研究。原本的想法很簡單，將它推廣到任意進位制，求計算固定點的通式，可是後來失望的發現這個運算模型每一次的輸出輸入，都是無法掌控的，四位數字中存在太多的變數，連下一個固定點存在的進位制都找不到。於是開始思索改變運算的模型，進行第一部分的研究。可依據排列組合，總共有24套運算模型有待探討，一個一個找實例帶入運算十分耗時費力。用蠻力硬算的執著、無可理喻的傻勁慢慢試，最後終於找到了 $(a_1, a_2, a_3, a_4) - (a_3, a_4, a_1, a_2)$ 這樣一組特別的運算式。從例子的觀察，發現每個數、每個進位制都能進入週期解，後來又求得其輸出值會滿足漂亮的關係式$(x, x-1, k-x-1, k-x)$，只用一個變數即可操控整個四位數字！憑著這劑強心劑，繼續回到尋找固定點通式的初衷，成功推演得 $\left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}-1, \frac{2k}{3}-1, \frac{2k}{3}\right)$ 的通式解。

雖然一開始的目標達成，但在研究的過程中，發現了週期解分為兩種型態：固定點或自繼環。隨之接續出現了許多問題，逐漸勾起探索的興趣，便展開第二部分的研究。得知某些情況下的輸出只有固定點，那麼「只有」固定點的進位制又有什麼奇特之處？得知在 $3 \times 2^n$ 則只有固定點之後，又 $3 \times 2^n$ 進位制下經$f(x)$函數遞迴運算後皆只存在固定點嗎？得知計算進入固定點有兩種型態的步數 $\mathrm{n-t+1}$ 和$\mathrm{2n-t+1}$ 之後，又那些輸入情形會使總步數達到最大值$\mathrm{2n+3}$呢？有關固定點的疑問一一解出後，才發現原來所謂固定點只是所有週期解當中的特例，於是便將研究焦點轉移到自繼環上，希望能由它來推廣到所有的週期解皆適用的通式，讓研究結果不只侷限於固定點，這是第三部分的研究。

首先探討週期解的型態與特質，發現輸出值會呈現有規律的遞增與遞減，但其總和保持不變。果然運用了公因數與週期解會形成一對一對應的關係此一性質，成功推演得出兩條運算公式：週期解個數計算公式 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$，以及各週期解中週期之值的計算公式 $\frac{t_r-1}{2} - \sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2} T_{a_i}$。最後進一步推倒週期外且滿足標準形態的四位數經 $f(X)$ 函數運算後進入週期解 $r_i T_{\frac{k}{r_i}}$ 內之元素個數的公式 $\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2} + \sum_{y=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{m \cdot 2^y}\right)$ 和 $\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x r_i}\right) + \frac{\varphi\left(\frac{k}{r_i}\right)}{2}$。現在我們不但得知週期解的個數、內部元素個數，甚至連元素的長相都能確切知道。且無論是固定點或自繼環，無論是任一個進位制、任一個輸入值下皆適用，只要隨意給定進位制，有關其週期解的所有問題都能回答得快又正確。整個有關數字週期解的研究已經十分透澈完整，和原先土法煉鋼慢慢求解的運算大不相同，多令人振奮的成果！

# 柒、參考資料

一、國中數學課本第二冊・康軒文教事業

二、卡布列克常數・維基百科・取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%91%E6%B4%9E%E6%95%B8

三、週期函數・維基百科・取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%91%A8%E6%9C%9F%E5%87%BD%E6%95%B0

四、孫文先(2000)・神秘有趣的數學・九章出版社

# 【評語】030418

本件作品屬數論的相關主題,源自數字黑洞 6174 問題的想法,作者考慮 X 是由四個相異數字$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$排列而成的四位數,其中 $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq a_4$,在眾多排列組合中,作者找到一個有趣的函數 $f(X) = a_1a_2a_3a_4 - a_3a_4a_1a_2$,即 f(X)的函數值為兩個四位數 $a_1a_2a_3a_4$ 與 $a_3a_4a_1a_2$ 之差,發現在各種 k 進位制下,X 經過函數 f(X)疊代運算其函數值呈現周期性循環現象,而且由單一變數控制,並獲得一些有趣的成果,包括在各種 k 進位制下固定點的通解,週期長度及週期內元素通解等,內容豐富且分析詳盡。

# 作品海報

# 壹、研究動機

在數理資優班的理化課中我學到「週期」一詞，意指周而復始的一個「性質」，如同一個迴圈循環不已。然而在我背誦「週期表」的時候，老師告訴我們週期表排列的順序和元素的原子序(質子數=電子數)有關，並且電子繞著原子核運「動」。且「每一族元素電子的運動軌域」是呈現有有規律的分佈：2,8,8,18…

這一圈圈(層層)固定的電子分布讓我覺得新穎不已。且我突然靈光乍現有一個想法：「不同的電子數就會有不同的電子「軌域」分布，「不同的電子能階分布就讓元素具有不同的性質。」如果把不同的進位制想成是不同的原子序(=電子數)，那數學上的進位制是否能如電子數般，影響遞迴函數的週期解個數，和週期解內『組成份子』的分布呢?」

在這個想法之下，我構造了一個遞迴函數運算模型，就把不同進位制想成不同的電子數，去探究進位制對週期解個數的影響(如同電子分布幾個能階)，且每一個週期解的週期為何(如同有幾個電子)，而開始了「環環相扣~我的數學『週期表』」研究之旅。

# 貳、研究目的

一、透過實例的研究，觀察週期解的存在性並給予證明。

二、推導在 $f$ 函數運算下，函數值數字間所滿足的關係式。

三、探究在 $k$ 進位制下，固定點存在和唯一性，並證明固定點的通式解。

四、證明在 $3\times 2^n$ 進位制下只有固定點，並給出進入固定點之型態與所需計算次數。

五、發展任意進位制下自戀環個數理論，並建構自戀環內週期的個數和元素的通式解。

六、求出在 $k$ 進位制下，週期外且滿足標準形態的四位數經 $f(X)$ 函數運算後進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內之元素個數的公式。

# 參、名詞定義

1. $f(X)$：定義 $f(X)=(a_1a_2a_3a_4)-(a_3a_4a_1a_2)$

2. 固定點：週期為 1 的週期解。

3. 自戀環：週期為 2 以上的週期解。

4. $T_{\frac{k}{r}}$： $\left\{(a_i,b_i)\,\middle|\,a_i+b_i=\frac{k}{r}\text{，且}(a_i,b_i)=1\text{，}k\text{ 為奇數}\right\}$

5. $r\,T_{\frac{k}{r}}$：把 $T_{\frac{k}{r}}$內之元素做修正，其集合結構式為

$$\left\{(ra_i,rb_i)\,\middle|\,a_i+b_i=\frac{k}{r}\text{，且}(a_i,b_i)=1\text{，}k\text{ 為奇數}\right\}$$

6. 歐拉函數$\varphi(n)$：代表 1 到 $n$ 之正整數中，與 $n$ 互質的個數

# 肆、研究過程

**研究目的一：透過實例的研究，觀察週期解的存在性並給予證明**

| 進位制 | 性質 | 固定點(環) |
|---|---|---|
| 2 | 固定點 | {(1,0,0,1)} |
| 3 | 固定點 | {(1,0,1,2)} |
| 4 | 自戀環 | {(1,0,2,3)(2,1,1,2)} |
| 5 | 自戀環 | {(1,0,3,4)(3,2,1,2)} |
| 6 | 固定點 | {(2,1,3,4)} |
| 7 | 自戀環 | {(1,0,5,6)(5,4,1,2)(3,2,4,3)} |
| 8 | 自戀環 | {(1,0,6,7)(6,5,1,2)(4,3,3,4)} |
| 9 | 自戀環 | {(1,0,7,8)(7,6,1,2)(5,4,3,4)} |
| | 固定點 | {(3,2,5,6)} |

有些數字只有固定點，有些數字只有自戀環，甚至有些既有固定點又有自戀環。可是無論結果為固定點或自戀環，皆屬於週期解，因此讓我們好奇，是否所有的進位制下都會存在週期解呢？答案是肯定的，說明如下。

> 定理 1.給定數字不完全相同的四位數經 $f$ 函數的遞迴運算後，其週期解必存在。
> (1)週期為一稱為固定點。
> (2)週期為二以上稱為自戀環。

由上述表格可發現，只有 3、6、9 進位制下有固定點，其他都只有自戀環。難道只有 3 的倍數才有固定點？為什麼其他進位制下沒有呢？每一個 3 的倍數都會有嗎？像 300、甚至 3000 這麼大的數字也是如此嗎？

**研究目的二：推導$f$函數運算下，函數值數字間所滿足的關係式**

由上述研究得知，由於數字每次運算都必須依大小重新排列一次，因此會影響輸出的函數值是和輸入的數字異同有關，和輸入的數字排列位置無關。故可將所有四位數分為 AAAA、AAAB、AABB、AABC、ABBB、ABBC，ABCC、ABCD 的型態。其中 AAAA 型態的四位數字均相同，將其數字重排後運算相減答案為 0，則不討論。於是我們用剩下的七種型態進行下列的探討。

> 定理 2.給定數字不完全相同的四位數，定義在 $k$ 進位制下，經 $f$ 函數的一次運算，其輸出結果必滿足下列關係式：
> (1)千位＋十位＝$k-1$　(2)百位＋個位＝$k-1$

> 定理 3.給定數字不完全相同的四位數，定義在 $k$ 進位制下，經 $f$ 函數的二次運算，其輸出結果不只滿足定理 2 的關係式，也會滿足下列關係式
> (1)千位＋個位＝$k$　　(2)百位＋十位＝$k-2$

> 結論：遞迴函數 $f$ 在 $k$ 進位制下，經過兩次運算其輸出值必為 $(x,x-1,k-x-1,k-x)$，往後我們稱此為標準型態。

也就是當 $k$ 值(進位制)確定時，經第一次運算輸出的函數值轉為第二次輸入時，其表現式可由一個變數所決定。

**研究目的三：探究在 $k$ 進位制下，固定點存在和唯一性，**

**且證明固定點的通式解。**

本研究一開始，我們透過實作，去搜尋 $k=2\sim 9$ 進位制中固定點或自戀環的存在，但因數字組合樣本過多，花費很多時間和精神；因此我們想尋找更有效率的方法，發現其實在 $k$ 進位制下，並不需要運算 $k-1$次那麼多，其實僅需$(\frac{k-1}{2})$次即可，敘述如下。

> 定理 4：在 $k\geq 3$的進位制中，在遞迴函數 $f(x)$ 運算下若存在固定點$(x,x-1,k-x-1,k-x)$，
> 則所需檢查的 $x$ 之範圍 $x\leq(\frac{k-1}{2})$

由定理 4 我們已知 $x\leq(\frac{k-1}{2})$，能有效縮減固定點的檢查範圍，但我們希望有更直接的方法可以去判斷所給定的 $k$ 進位制是否有固定點存在。終於找到固定點的通式，並證明它的存在。利用上述的結論，即可證出當 $k=3p$時其固定點必存在且唯一。

說明如下。

定理 5：在 $k$ 進位制下，遞迴函數 $f(x)$ 之固定點若存在，則必唯一。

(1)當 $k=3p$ 時，固定點通式為 $(\frac{k}{3},\frac{k}{3}-1,\frac{2k}{3}-1,\frac{2k}{3})$ ， $p=1$ 、 $2\cdots$

(2)當 $k=3p+1$ 、 $3p+2$ 時，固定點不存在，只有自繼環。

舉幾個實例整理如下表，利用定理 5 直接計算其固定點，而不必如定理 1 的實作方法一一帶入計算。

| 進位制 | $\frac{k}{3}$ | $\frac{k}{3}-1$ | $\frac{2k}{3}-1$ | $\frac{2k}{3}$ | 固定點 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 | 1 | 2 | (1,0,1,2) |
| 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | (2,1,3,4) |
| 9 | 3 | 2 | 5 | 6 | (3,2,5,6) |
| 12 | 4 | 3 | 7 | 8 | (4,3,7,8) |
| 15 | 5 | 4 | 9 | 10 | (5,4,9,10) |
| 18 | 6 | 5 | 11 | 12 | (6,5,11,12) |
| 21 | 7 | 6 | 13 | 14 | (7,6,13,14) |

推導出固定點公式後，我們可以直接回答在任意進位制下，是否存在固定點。如果有，也可以直接經計算得出其值，不須一一嘗試、費心尋找。

現在我們得知只有進位制為 3 的倍數之下才有固定點，可是並非所有 3 的倍數的進位制都「只有」固定點。比如在上述表格中，進位制 9 和進位制 15，帶入一部份數字做運算會進入自繼環；而進位制 3、進位制 6 和進位制 12 都只會到達唯一的固定點而不會進入自繼環。那麼「只有」固定點的進位制又有什麼奇特之處呢？

為了探討「只有固定點的進位制」，我們再進一步求得$f(X)$函數經三次運算後，輸出值所滿足的關係式，以提高對四位數字的掌控性，以利往後的推展。

定理 6：給定數字不完全相同的四位數，定義在 $k$ 進位制下，

令經過 $f(x)$ 函數的二次運算，其輸出值由 $x_2$ 所控制，

經過 $f(x)$ 函數的三次運算，若其輸出值的第一位數值為 $x_3$ 。

則 $x_3$ 不只滿足定理 2、3 的關係式，也會滿足下列關係式：

(1)得輸出結果為 $(x_3,x_3-1,k-x_3-1,k-x_3)$ (2)其中 $x_3=|2x_2-k|$

在以往的計算中，需要做四位數的減法運算才能求出輸出值，並當作輸入再進行下一次運算。可是依據研究目的二的定理四，得知了在經第二次運算後，只要知道掌握千位數和個位數即可得知整個四位數之值，因此我們希望將原本含有四位數字的運算化簡成只有千位數和個位數的運算，不僅能簡化運算過程，同時也不會影響我們得知整個四位數字的值。其中定理 6 即可達成我們的需求。

此定理可縮減採用 $f(x)$ 函數運算所需進行的計算過程。但我們推導上述性質，目的性不侷限在化簡運算過程的問題，其真正目的是為了證明週期解計算公式所做的準備。

**研究目的四、證明在 $3\times2^n$ 進位制下只有固定點，並給出進入固定點之型態與所需計算次數。**

依據研究目的三(第 11 頁)的表格，我們發現似乎在 3、6、12 進位制下只有固定點，沒有自繼環。因此我們思考一個問題：在 $3\times2^n$ 進位制 $f(x)$ 下遞迴函數皆只存在固定點，沒有自繼環嗎？舉一個誇張的實例好了，當 $k=3\times2^{50}$ 時，是不是真的只有固定點沒有自繼環。像這個例子，我們只能靠證明去得出結果，而無法用土法煉鋼的方式一一去檢視了。

透過下面定理 7 和定理 8 證明，我們證明出此猜想為真，且我們更得出，進入固定點所需計算步數的通式解。在 $3\times2^n$ 進位制下，定理 7 所闡明的是當我們的輸入滿足千位加個位等於 $k$ ，且千位數字不為 3 的倍數，所需的計算步數公式；定理 8 所闡明的是當我們的輸入滿足千位加個位等於 $k$ ，且千位數字為 3 的倍數，所需的計算步數公式。以此透過此兩定理即可求得任意進位制下進入固定點的步數。

定理 7：給定一四位數 $(\alpha,\alpha-1,k-\alpha-1,k-\alpha)$，

令 $\alpha$ 為任意非 3 的倍數之奇數，則在 $3\times2^n$ 進位制下，

經過$f(X)$函數的運算，只會到達唯一的固定點而不會進入自繼環，

且其所需運算次數為 $\mathrm{n}+1$步。

定理 8：給定一四位數 $x_2=(\alpha,\alpha-1,k-\alpha-1,k-\alpha)$，

令$\alpha=3p$為任意三的倍數之奇數，則在$3\times2^n$進位制下，

經過$f(X)$函數的運算，只會到達唯一的固定點而不會進入自繼環，

且其所需運算次數為$2\mathrm{n}+1$步。

在上述定理 7 定理 8 的陳述中，我得知奇數進位制下任意輸入值進入固定點之所需步數。因此我們便好奇若當進位制為偶數，即 $\alpha=S\times2^t$ 或 $\alpha=3p\times2^t$ 時，其進入固定點之路徑狀況為何？由於偶數進位制所帶的二次方會加速運算中提出次方數二的速率，故將原計算公式減去其二次方數 $t$ ，得到以下的計算公式。

推論：(1)若$\alpha=\mathrm{S}\times2^t$，$t\neq0$且 $(\mathrm{S},6)=1$

故推論此時 $x_2$達到固定點所需之步數為 $\mathrm{n}-\mathrm{t}+1$。

(2)若$\alpha=3\mathrm{p}\times2^t$，$t\neq0$且 p 為奇數，

故推論此時 $x_2$達到固定點所需之步數為 $2\mathrm{n}-\mathrm{t}+1$。

依據上述定理，雖然我們可以得知其進入標準型態後到達固定點的所需步數，但由於進入標準型態之前的兩步無法掌握，導致我們對於總步數依然無法確切指出。於是我們接續思考問題：在哪些輸入情形僅須一步即可到達標準型態？我們的研究分析如下：

定理 9：給定非標準型態下的四位數 $X$，經過 $f(X)$函數的運算，

僅須一步即到達標準型態者，其四位數字必滿足下列三種情形之一

(1)AABB，其中$\mathrm{A}>\mathrm{B}$

(2)ABBC，其中$\mathrm{A}>\mathrm{B}>\mathrm{C}$，且$\mathrm{A}+\mathrm{C}=2\mathrm{B}$

(3)ABCD，其中$\mathrm{A}>\mathrm{B}>\mathrm{C}>\mathrm{D}$，且$\mathrm{A}-\mathrm{C}=\mathrm{B}-\mathrm{D}$

由以上定理 9，我們可以得出，當輸入滿足上述性質時，其僅須一步即可到達標準型態。而在非標準型態下的輸入值當中，不符合定理九之敘述者則為須兩步才可到達標準型態之輸入值。也就是說，只要滿足定理 9 的條件者，利用定理 7、8 求得其進入標準型態後到達固定點的所需步數後，加一步即為其總步數，其餘則須加兩步。

**研究目的五：發展任意進位制下自繼環個數理論，並建構自繼環內循環週期解的個數通式。**

在上述的研究中我們知道當 $k=3\times2^n$ 時，只有固定點而沒有自繼環；在其他的進位制中，當 $k=3p$ ， $p\neq2^n$ 時有固定點也有自繼環； $k\neq3p$ 時則只有自繼環。現在我們的興趣在於完備整個問題的研究。也就是說，若給定一進位制，會存在幾個週期解？週期解中又是以幾個元素為一循環？

透過下列三個證明，我們得出從進位制求其週期解個數的通式解，以及求週期解內元素個數的通式解。其中，定理 10 所敘述的是週期解的特質；定理 11 所敘述的是利用定理 10 的結果，進一步得到週期解個數的通式解；定理 12 所敘述的則是週期解內元素個數的形態與其通式解。

為了推導下面關於週期解的定理，以定理 10 證明有關週期解之特質，包括有限性、存在性以及唯一性，作為以下定理 11、定理 12 週期解相關通式時所需的準備。相關敘述如下：

定理 10：給定任一正奇數 $k$，令 $k$ 的一遞迴循環分解$(a_i,b_i)$，其中 $a_i+b_i=k$，$(a_i,b_i)=1$，則存在且唯一一個有限的循環遞迴分解滿足上述關係式，稱其為 $T_k$，且此遞迴循環分解的週期小於或等於 $\frac{k-1}{2}$

在研究目的一中我們已證明在 $f(X)$ 函數在$k$ 進位制下其週期解必存在，那我們要研究的課題是：「週期解必存在，那麼其週期解個數為何？」也就是說 $f(X)$ 函數在 $k$ 進位制下有自戀環、固定點，請問這種週期解有幾個？經過我們的深思探究，終於倒出週期解個數的計算公式 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$，其中 $r_i$ 為 $k$ 的奇質因數，定理敘述如下。

定理 11：給定一進位制 $k$，其中 $k\geq 3$，且 $k$為奇數且 $k=\prod_{i=1}^{n}{e_i}^{n_i}$ 為 $k$ 之標準分解式，則

(1) $f(X)$ 在 $k$ 進位制下的週期解個數為 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$

(2)凡符合$a_i+b_i=k$，且 $\gcd(a_i,b_i)=r$之 $a_i$、$b_i$ 兩數，則 $(a_i,a_i-1,b_i-1,b_i)$ 皆為 $k$ 進位制下 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解之內部元素，其中 $r|\,k$ 但 $r\neq k$

推論：當進位制 $k$ 為偶數，令 $k=2^p\cdot m$，且 $m$ 為奇數，$m\geq 3$，$\gcd(m,2)=1$，則，

(1)已知 $m$ 進位制下之週期解 $rT_{\frac{m}{r}}$，$k$ 進位制下週期解為 $2^prT_{\frac{m}{r}}$，其中$r|m$

(2) $k$ 進位制下週期解個數與 $m$ 進位制下週期解個數相同

(3)凡符合 $a_i+b_i=k$，若 $r|m$ 且$(a_i,\ b_i)=2^p\cdot r$，則 $(a_i,\ b_i)$ 為 $k$ 進位制下 $2^prT_{\frac{m}{r}}$ 環週期解之內部元素

現在任意給定一進位制，我們即可正確回答出其週期解共有幾個，但我們還希望能知道：「每一週期解內部共有幾個元素？」。也就是說$f(X)$ 函數在$k$ 進位制下有 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$ 個週期解，請問每一個週期解含有幾個元素？即每一個週期解的週期為何？透過下面定理 12 的證明，終於導出元素個數的計算公式，定理敘述如下。

定理 12：設在 $k$ 進位制下，函數$f(X)$ 具有 $rT_{\frac{k}{r}}$ 的週期解，則

(一)當 $k$ 為奇數，則分為以下兩種情況

(1)當$\frac{k}{r}$ 為質數時，且 $r\geq 3$，則 $rT_{\frac{k}{r}}$ 週期解的週期為$N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right)=\frac{\frac{k}{r}-1}{2}$

(2)當 $\frac{k}{r}=\prod_{i=1}^{n}{\ell_i}^{n_i}$ 為合數時，則週期解的週期為

$N\left(rT_{\frac{k}{r}}\right)=\frac{\frac{k}{r}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$，

其中$\ell_i$為$\frac{k}{r}$的因數，$\ell_i\neq t_{r_i}$

(二)設 $k$ 為偶數，$k=2^p\cdot m$，$m\geq 3$，$(m,2)=1$，則在 $k$ 進位制下其週期解的週期與 $m$ 進位制下週期解的週期相同

(三)若 $k=2^n$，則僅有一週期為 $n$ 的自戀環。

**研究目的六、求在$k$進位制下，週期外且滿足標準形態的四位數經$f$函數運算後進入週期解 $2^prT_{\frac{m}{r}}$內之元素個數的公式**

由研究目的一至五可知週期解的元素必為標準型態，但符合標準型態卻不一定存在週期解中。因此我們好奇，在週期解外且滿足標準型態的四位數經$f$函數運算後會進入哪一個週期解呢？比如在進位制為 36 的情況下，由定理 11 可得知其輸出值會形成兩個週期解：$12T_3$ 環、$4T_9$ 環，那麼在標準形態下，哪些輸入值會進入$12T_3$，哪些輸入值會進入 $4T_9$ 呢？經過我們的思考與探究，終於導出其進入指定週期解的個數公式及其形態，敘述如下。

定理 13：當進位制 $k$ 為奇數時，令$(a_i,b_i)$為週期$rT_{\frac{k}{r}}$解內元素則在週期外且滿足標準形態的四位數經$f$函數運算後進入週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$ 內之元素，其形態必為$(b_i,a_i,)$，且其個數為 $\frac{\varphi\left(\frac{k}{r}\right)}{2}$

定理 14：當進位制$k$為偶數且 $k=2^p\cdot m$，$m\geq 3$，$\gcd(m,2)=1$，其週期解之型態為 $2^prT_{\frac{m}{r}}$

(一)當$r_i=1$時，在週期外且滿足標準形態的四位數經$f$函數運算後進入週期解 $2^prT_{\frac{m}{r}}$內之元素型態有下列二種情況：

(1) $(a_i,b_i)$，$\gcd(a_i,k)=2^x$，$x$ 可為 0、1、2⋯$p-1$

(2) $(b_i,a_i)$，$\gcd(a_i,k)=2^p$，且$(a_i,b_i)$為 $2^pT_m$ 內一元素之對稱四位數

(3) $(a_i,b_i)$，$\gcd(a_i,k)=m\cdot 2^y$，$y$ 可為 0、1、2⋯$p-1$

其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2}+\sum_{y=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{m\cdot 2^y}\right)$

(二)當$r_i\neq 1$時，在週期外且滿足標準形態的四位數經$f$函數運算後進入週期解 $2^prT_{\frac{m}{r}}$內之元素型態有下列二種情況：

(1)$(a_i,b_i)$，$\gcd(a_i,k)=2^xr$，$x$ 可為 0、1、2⋯$p-1$

(2)$(b_i,a_i)$，$\gcd(a_i,k)=2^pr$，且$(a_i,b_i)$為 $2^pT_m$ 內一元素之對稱四位數

其總個數為$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^xr}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^pr}\right)}{2}$

經由研究目的五、六完整的研究，只要任意給定進位制，我們即可直接回答其週期解個數，並指出其元素分別為何。而只要給定任意輸入值，至多運算兩次後，我們即可得知此輸入值會進入哪個週期解，以及計算進入週期解之所需步數。

## 伍、結論

一、若進位制$k$為三的倍數，則存在固定點$\left(\frac{k}{3},\frac{k}{3}-1,\frac{2k}{3}-1,\frac{2k}{3}\right)$

二、若進位制$k$為 $3\times 2^n$，則只有固定點，進入固定點的步數依據輸入值不同分為兩種路線$n-t+1$ 或 $2n-t+1$

三、在 $k$ 進位制下有週期解 $rT_{\frac{k}{r}}$,則週期解個數為 $\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-1$，且其元素個數為 $\frac{\frac{k}{r_i}-1}{2}-\sum_{i=1}^{\prod_{i=1}^{n}(n_i+1)-2}T_{\ell_i}=\frac{\varphi\left(\frac{k}{r_i}\right)}{2}$。

四、週期外且滿足標準形態的四位數經$f$函數運算後進入週期解 $r_iT_{\frac{k}{r_i}}$ 內之元素個數的公式為 $\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x r_i}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{r_i}\right)}{2}$ 或$\sum_{x=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{2^x}\right)+\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^p}\right)}{2}+\sum_{y=0}^{p-1}\varphi\left(\frac{k}{m\cdot 2^y}\right)$。

## 陸、參考資料


一、國中數學課本第二冊．康軒文教事業

二、孫文先(2000)．神秘有趣的數學．九章出版社