中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030417

【軌跡密碼】－從青蛙環繞跳荷葉落點探究漢米爾頓問題之解析

學校名稱：桃園市立大竹國民中學

作者：	指導老師：
國三 魏廣誠 國三 呂祐傑	林樂鄺

關鍵詞：互質、數列、漢米爾頓問題

摘　　要

此作品研究「對於編號 i 青蛙決定移動方向，而在形成多邊形的荷葉一組或兩組以上；由 i 號荷葉開始，依跳的距離不同，觀察在落點處所成的數列中，是否有漢米爾頓問題出現。」對於移動方向分成定向、回頭、不斷換向，定向指都是順時針方向，回頭指每次碰到起始點即時換向，在回頭的規則中則利用總共跳的荷葉數／邊形數 取其商+1 即目前停留落點處的圈數，其值的奇偶可判別接下來的移動方向，而不斷換向指每次跳躍皆與上次不同方向；依邊形數組數又分出一組及兩組以上，兩組以上時利用轉換的方式探討；在不同的移動方向中，跳的距離無論組數又分成固定距離和遞增數列，而不斷換向在固定距離時沒有意義，所以只做出遞增數列來探討。

壹、研究動機

在數理研究社團中，我們從**國立台灣科學教育館網站**查詢到**【科學研習月刊】：「森棚教官的數學題 - 八隻青蛙」**，題目敘述如下：

正 8 邊形池塘上的頂點上各有一片荷葉，每片荷葉上有一隻青蛙，將青蛙逆時針編號為 0、1、2、3、4、5、6、7，每隻青蛙要在此八片荷葉上逆時針移動 20 次。每隻青蛙第一次的移動是原地跳，此後每一次移動跳的距離就是牠的編號。因此，0 號青蛙事實上會原地跳 20 次，3 號青蛙的前三步會落在編號 3、6、1 的荷葉上，而 1 號青蛙最後會移動到一開始 4 號青蛙的荷葉上。請問所有青蛙移動完後，有幾片荷葉上有青蛙？

加上在數學課時，我們也學習到數列，但還不太瞭解其運用性，於是我們閱讀了一些相關研究的報告，並閱讀到『**沒有數字的數學**』一書，書中提及 **Hamiltonian Cycle（漢米爾頓迴路：在圖形上，經過所有的落點處且不重複落點處而回到原來的出發落點處）**，以及相關涉及到的 **Hamiltonian path（漢米爾頓路徑：在圖形上給定任意兩個狀態 A、B，從 A 出發要經過所有的狀態且不重複狀態，而到達到 B）**，這兩大重要性質引發我們高度的興趣。

從青蛙環繞跳荷葉落點其中有許多令人好奇的點，透過不同思維想法的方式，因此我們便開始著手研究推導並將落點處擴充，經研究並更改其原本的條件後，利用不同的旋繞順序求出每隻青蛙環繞的迴路，並觀察其規律。

貳、研究目的

定義由 A 個荷葉擺成正 A(≧3)邊形，以順時針標號，在第 A 片荷葉時稱 0 號荷葉，青蛙依順時針方向移動，荷葉上 i 號青蛙由 i 號荷葉開始，探討以下情況是否有出現漢米爾頓問題：

一、定向：

(一)一組(無重疊)邊形：

1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數互質； (2)跳的距離與邊形數不互質

2.以遞增數列作跳的距離

(1)等差數列； (2)費氏數列； (3)盧卡斯數列； (4)質數數列； (5)某數的次方形成之數列

(二) 至少兩組(至少重疊分別為一片、兩片)邊形：

1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數總和互質； (2)跳的距離與邊形數總和不互質

2.以遞增數列作跳的距離

(1)等差數列； (2)費氏數列； (3)盧卡斯數列； (4)質數數列； (5)某數的次方形成之數列

二、回頭：

(一)一組(無重疊)邊形：

1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數互質； (2)跳的距離與邊形數不互質

2.以遞增數列作跳的距離

(1)等差數列； (2)費氏數列； (3)盧卡斯數列； (4)質數數列； (5)某數的次方形成之數列

(二) 至少兩組(至少重疊分別為一片、兩片)邊形：

1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數總和互質； (2)跳的距離與邊形數總和不互質

2.以遞增數列作跳的距離

(1)等差數列； (2)費氏數列； (3)盧卡斯數列； (4)質數數列； (5)某數的次方形成之數列

三、不斷換向：

(一)一組(無重疊)邊形：

1.以遞增數列作跳的距離

(1)等差數列； (2)費氏數列； (3)盧卡斯數列； (4)質數數列； (5)某數的次方形成之數列

(二) 至少兩組(至少重疊分別為一片、兩片)邊形：

1.以遞增數列作跳的距離

(1)等差數列； (2)費氏數列； (3)盧卡斯數列； (4)質數數列； (5)某數的次方形成之數列

四、利用我們發現的環繞跳荷葉落點處之樹枝狀演算法，在得到條件且輸入數值後，將數值帶入到對應的通式中，快速地得出 i 號青蛙的落點處數列。

五、探討在通式中找到演算法，利用電腦程式來檢驗。

參、研究設備及器材

一、筆記本、筆(記錄用)

二、電腦、自備隨身碟

三、Microsoft Excel VBA 2010、跨平台的繪圖軟體 yEd Graph Editor

肆、文獻探討

做本研究之前，我們先參考了一些別人的文獻資料：

屆數	組別	作品名稱	研究方法	得獎情形
57	國中組	八隻青蛙與停車場的邂逅	落點與有青蛙的荷葉數之一般式	佳作
57	國中組	從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析	漢米爾頓路徑	第三名

表一：文獻資料

從全國中小學科展網站查詢到相關系列議題的資料：關於我們的作品與第 57 屆全國科展國中組數學科佳作「八隻青蛙與停車場的邂逅」相同處都是藉由初始題目「八隻青蛙」著手，而不同處則為第 57 屆其研究方法是：給出「有幾片荷葉有青蛙」與落點的一般式，並探討與停車場問題之關係；我們的作品研究方法是：回頭利用總共跳的荷葉數／邊形數 取其商+1 即目前停留落點處的圈數，就其值的奇偶可判別接下來的移動方向；不斷換向利用與上一次跳不同方向來進行跳躍，而在定向、回頭、不斷換向中，邊形數與固定距離的互質關係，則用來判別是否有漢米爾頓問題出現。

再者，我們的作品與第 57 屆全國科展國中組數學科第三名「從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析」相同處是我們把狀態都當成一個點，而不同處則為第 57 屆其研究方法是：以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數的情形來作探討；

我們的作品研究方法是：探討從各種不同移動方向，我們分成定向、回頭、不斷換向；從邊形數組數又分成一組、兩組及三組邊形；依跳的距離不同，觀察落點處所成數列是否有漢米爾頓問題出現。與上述兩件第 57 屆參考文獻的研究方法上，有著極大不同的探討方向。

因此，在第 59 屆我們的作品把青蛙環繞跳荷葉落點延伸成探討在各種不同跳法的方式，研究推導並將落點處擴充，再探究並更改其原本的條件後，利用不同的旋繞順序，求出每隻青蛙環繞的迴路，同時探討在各種跳躍情況下，是否有出現漢米爾頓問題做更為深入且一般性的探究，期盼研究性價值在題材創新度及作品內容能有提升的空間，讓結果更加廣義且完備，故我們以此作為主題，做以下一系列的探討及研究。

伍、研究過程及方法

研究期間，分成了不少階段，以及不同的突破，下表是我們研究進度概要：

時間	進展
107 年 9 月	發現青蛙環繞跳荷葉落點，並開始研究「八隻青蛙與停車場的邂逅」(三)
107 年 10 月	發現有漢米爾頓問題，並著手研究「從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析」(二)
107 年 11 月	分別以遞增跳 1,2,3,4,5,⋯的步數、以費氏數列及質數當數列為跳的步數
107 年 12 月	嘗試推廣到正 A 邊形及青蛙所跳步數進行分類探討，並找出各種情形的規律
108 年 1 月	尋找可能經過起始點時，在起始點做折返使其移動方向與原方向相反的規律
108 年 2 月	推廣到由一組 A(≧3)邊形的荷葉及一組 B(≧3)邊形的荷葉，將 A 與 B 的其中一片荷葉重疊，以 M 型為路徑走法，進行分類找尋其規律，並分別探討是否有出現漢米爾頓問題？
108 年 3 月	以盧卡斯數列為青蛙所跳步數進行分類探討，並找出各種情形的規律性
108 年 4 月	仍以 M 型為路徑走法，水平擴展由左向右依序為 A 與 B，其和為 Z(≧6)，甚至推廣到 A(≧3)邊形與 B(≧3)邊形與 C(≧3)邊形的和為 Z(≧9)，依此類推；進行分類找尋其規律，並分別探討是否有出現漢米爾頓問題？
108 年 5 月	將上述所有做法改以 S 型為路徑走法，並與 M 型為路徑走法並列做比較。
108 年 6 月	將新增的不同跳躍方式整合並分類，同時加入不斷換向的考量因素做討論。

表二:研究進度概要

一、名詞定義：

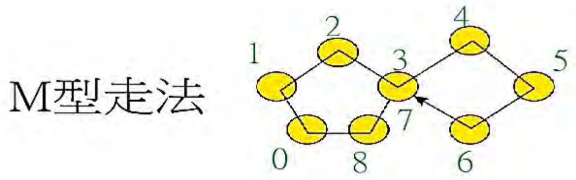
(一)只有一組邊形時，為正 A 邊形，依順時針方向，青蛙編號為 i，由 i 號荷葉開始，每次跳 y 片荷葉，A 為正整數且 A≧3，i 為非負整數且 0≦i<A(Z)，y 為正整數。

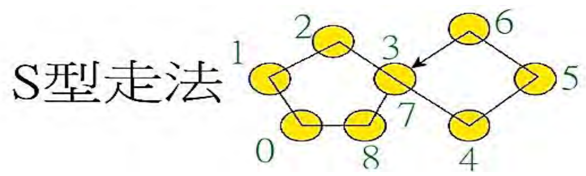
(二)荷葉形成的邊形由左至右排列，而一組是指荷葉形成 A 邊形一組邊形，兩組指荷葉形成由左至右分別為 A 邊形與 B 邊形兩組荷葉，以此類推。a_n為落點的第 n 個呈現數(本作品表格呈現的數字都是指 a 的底標，例:1→2→3 即表示為 $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$)。

(三)在大於 1 組邊形時，重疊荷葉必在前一邊形(假設為 A)的第 A/2(A 為偶數時) 或 (A+1)/2(A 為奇數時)片荷葉，和後一邊形的第一片荷葉。在任意組邊形中，由重疊點開始，逆時針前一標號為減 1、順時針後一標號為加 1。

(四)在大於 1 組邊形時，1-1 代表 A 邊形的第一片荷葉，2-1 代表 B 邊形的第一片荷葉，以此類推；而我們在做一組邊形數以外的計算時，皆使用到了換算的方式，此換算規則為：A 邊形的 1 號荷葉開始，編號為 1，依接續移動到的荷葉進行標號(一個荷葉可能有兩個編號)，移動到起始點的前一片荷葉為 0 號荷葉，即在 1-0 時稱 0 號荷葉。

(五)在大於 1 組邊形時，**M 型(換組同方向)走法**:開頭順時針方向，到達交接點後並以順時針換到另外一個邊形上。**S 型(換組換方向)走法**:當起點在奇數邊形數上，以順時針方向移動，到達交接點時變換方向，以此類推；當起點在偶數邊形數上，以逆時針方向移動，到達交接點時變換方向。





(六)在大於 1 組邊形時，a 指的是 A/2 或 (A+1)/2(在轉換後 A 和 B 邊形的重疊荷葉較小的 i 值)，b 指的是$a+\frac{B}{2}$ 或 $a+\frac{B+1}{2}$ (在轉換後 B 和 C 邊形的重疊荷葉較小的 i 值)。i 號青蛙(在一組邊形數以外時，i 皆指轉換後的 i)由 i 號荷葉開始跳躍。n 視情況分成三種狀況：1.正整數；2.非負整數；3.零或偶數，會加註在後面。

(七)以一組邊形做例子，依順時針標號，在第 A 片荷葉時，稱 0 號荷葉，而青蛙以順時針跳，稱作向前；以方向的改變分為定向、回頭及不斷換向。定向指皆為向前移動；回頭指每次

碰到起始點即時換向，即第一圈向前移動，第二圈向後，第三圈向前，以此類推；不斷換向指跳第一次向前，第二次向後，第三次向前，以此類推。

(八)mod(a,b)指的是取 a 除以 b 的餘數。

二、環繞跳荷葉落點處的漢米爾頓問題之樹枝狀演算法：

得到條件(方向,幾組邊形數(S 型 or M 型),跳躍方式)

輸入數值()

計算()

轉換()

輸出()

得到條件(方向,幾組邊形數,跳躍方式)

依得到的條件，分別有以下幾種狀況：

(1) 條件(定向,一組,固定距離)

輸入(N,y,i)

計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

轉換(X)

輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

ex:1 號青蛙在 N 邊型為 5 邊形中每次跳 2 個荷葉，第 1 個落點為 1(i 號青蛙第一個落點為 i)，推得落點形成的數列為 1→3→0→2→4→1。

(2) 條件(定向,一組,遞增數列)

輸入(N,數列(ε1ε2ε3),i)

計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

轉換(X)

輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

ex:2 號青蛙在 N 邊形為 5 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)來跳推得落點數列為 2→3→4→1 →4→4。

(3) 條件(定向,多組,固定距離)

輸入(A B C…,y,i)

計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

轉換(1=1-1,2=1-2,…) ，其中 << - >> 為幾之幾

轉換後輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

<1>定向,兩組邊形,固定距離

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形 4 邊形中每次跳 2 個荷葉，M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→2-0→2-2→1-0→1-2→2-3，S 型為 1-1→2-2→2-0→1-0→1-2→2-3。

<2>定向,三組邊形,固定距離

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形、C 邊形為 3 邊形中每次跳 2 個荷葉，M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→2-0→3-2→2-2→1-0→1-2，S 型為 1-1→2-2→3-0→2-0→1-0→1-2。

(4) 條件(定向,多組,遞增數列)

輸入(A B C…,數列(ε 1 ε 2 ε 3),i)

計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

轉換(1=1-1,2=1-2,…)

轉換後輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(i+總跳距,N)→…)

<1>定向,兩組邊形,遞增數列

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)， M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→2-0→1-2→1-2→1-1，S 型為 1-1→1-2→2-2→1-2→1-2 →1-1。

<2>定向,三組邊形,遞增數列

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形、C 邊形為 3 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)， M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→2-0→3-2→1-2→2-2，S 型為 1-1→1-2→2-2→3-0→1-2→3-2。

(5) 條件(回頭,一組,固定距離)

輸入(N,y,i)

計算(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

轉換(X)

輸出(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳 距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

ex: 3 號青蛙在 7 邊形中每次跳 3 個荷葉，推得落點數列為 3→6→2→1→5→4。

(6) 條件(回頭,一組,遞增數列)

輸入(N,數列(ε 1 ε 2 ε 3),i)

計算(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

轉換(X)

輸出(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

ex:4 號青蛙在 7 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)來跳推得落點數列為 4→5→6→1→4→6。

(7) 條件(回頭,多組,固定距離)

輸入(A B C…,y,i)

計算(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

轉換(1=1-1,2=1-2,…)

轉換後輸出(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

<1>回頭,兩組邊形,固定距離

ex:5 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形 4 邊形中每次跳 3 個荷葉，M 型跳法推得落點形成的數列為 2-0→1-1→2-3→2-2→1-0→1-2，S 型為 2-2→1-1→2-3→2-0→1-0→1-2。

<2>回頭,三組邊形,固定距離

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形、C 邊形為 3 邊形中每次跳 2 個荷葉，M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→2-2→3-0→2-0→1-0→1-0，S 型為 1-1→2-0→3-2→2-2→1-0→1-0。

(8) 條件(回頭,多組,遞增數列)

輸入(A B C…,數列(ε 1 ε 2 ε 3),i)

計算(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

轉換(1=1-1,2=1-2,…)

轉換後輸出(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

<1>回頭,兩組邊形,遞增數列

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)， M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→2-2→1-2→1-0→1-1，S 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→2-0→1-2→1-0→1-1。

<2>回頭,三組邊形,遞增數列

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形、C 邊形為 3 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)， M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→2-2→3-0→1-2→2-0，S 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→2-0→3-2→1-2→2-2。

(9) 條件(不斷換向,一組,遞增數列)

輸入(N,數列(ε 1 ε 2 ε 3),i)

計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(N+i-mod(總跳距,N),N),mod(i+總跳距,N),→…)

轉換(X)

輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(N+i-mod(總跳距,N),N),mod(i+總跳距,N)→…)

ex:0 號青蛙在 5 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)來跳推得落點數列為 0→1→0→2→4→4。

(10) 條件(不斷換向,多組,遞增數列)

輸入(A B C…,數列(ε 1 ε 2 ε 3),i)

計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(N+i-mod(總跳距,N),N),mod(i+總跳距,N),→…)

轉換(1=1-1,2=1-2,…)

轉換後輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(N+i-mod(總跳距,N),N),mod(i+總跳距,N)→…)

<1>不斷換向,兩組邊形,遞增數列

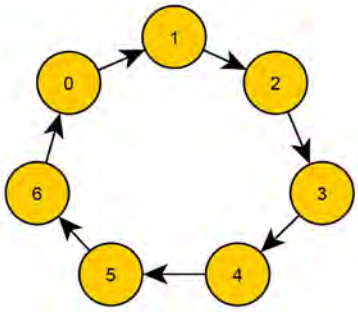
ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)， M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→1-1→2-2→1-0→1-2，S 型為 1-1→1-2→1-1→2-0→1-0→1-2。

<2>不斷換向,三組邊形, 遞增數列

ex:1 號青蛙在 A 邊形為 3 邊形、B 邊形為 3 邊形、C 邊形為 3 邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)，M 型跳法推得落點形成的數列為 1-1→1-2→1-1→2-2→1-0→1-2，S 型為 1-1→1-2→1-1→2-0→1-0→1-2。

陸、研究結果

由 A 個荷葉擺成正 A(≧3)邊形，依順時針標號，在第 A 片荷葉時稱 0 號荷葉，起始點為 i 的情況下，青蛙依順時針方向移動，荷葉上 i 號青蛙由 i 號荷葉開始，探討以下情況是否有出現漢米爾頓問題：



一、定向：

(一)一組(無重疊)邊形：1.每次跳的距離相同：

(1)跳的距離與邊形數互質： A 和 y 互質時有漢米爾頓迴路。

例：A 為 7、y 為 2、i 為 1 時，有漢米爾頓迴路。

A	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	2	1	1	→	0	→	2	→	1	→	0	→	2	→	1	→	0
4	3	1	1	→	0	→	3	→	2	→	1	→	0	→	3	→	2
5	2	1	1	→	3	→	0	→	2	→	4	→	1	→	3	→	0
6	5	1	1	→	0	→	5	→	4	→	3	→	2	→	1	→	0
7	2	1	1	→	3	→	5	→	0	→	2	→	4	→	6	→	1
8	3	1	1	→	4	→	7	→	2	→	5	→	0	→	3	→	6
9	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	0	→	2	→	4	→	6
10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	3	→	6	→	9	→	2
11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	2	→	4
12	5	1	1	→	6	→	11	→	4	→	9	→	2	→	7	→	0

(2)跳的距離與邊形數不互質：沒有漢米爾頓問題。

A	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	3	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
4	2	1	1	→	3	→	1	→	3	→	1	→	3	→	1	→	3
5	5	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
6	2	1	1	→	3	→	5	→	1	→	3	→	5	→	1	→	3
7	7	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
8	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	1	→	3	→	5	→	7
9	3	1	1	→	4	→	7	→	1	→	4	→	7	→	1	→	4
10	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	1	→	3	→	5
11	11	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
12	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	1	→	3

2.以遞增數列作跳的距離：

(1)等差數列：

<1>若等差數列中的首項值與 A 互質，公差為 n×A 值(n 為正整數)，則有漢米爾頓迴路。

<2>若 A 值為某數的次方(除了 2 的次方)時，此時不考慮<1>的狀況，若等差數列中的首項值與 A 互質，當公差值為此某數的正整數倍數時，會有漢米爾頓路徑。

<3>若 A 值為 2 的次方時，此時不考慮<1>的狀況，若等差數列中的首項值與 A 互質，當公差值與等差數列中的首項相同，會有漢米爾頓路徑，此時公差值去加減正整數倍的 A 值也有漢米爾頓路徑，或公差值為 4 的正整數倍數時也會有漢米爾頓路徑。

例：在跳首項為 1、公差為 3 的等差數列中，A 為 3、i 為 1 時有漢米爾頓迴路。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	2	→	0	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	2	→	1	→	3	→	0	→	0	→	3
5	1	1	→	2	→	1	→	3	→	3	→	1	→	2	→	1
6	1	1	→	2	→	0	→	1	→	5	→	0	→	4	→	5
7	1	1	→	2	→	6	→	6	→	2	→	1	→	3	→	1
8	1	1	→	2	→	6	→	5	→	7	→	4	→	4	→	7
9	1	1	→	2	→	6	→	4	→	5	→	0	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	6	→	3	→	3	→	6	→	2	→	1
11	1	1	→	2	→	6	→	2	→	1	→	3	→	8	→	5
12	1	1	→	2	→	6	→	1	→	11	→	0	→	4	→	11

(2)費氏數列：A 為 3 時有漢米爾頓路徑。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	2	→	2	→	1	→	0	→	1
4	1	1	→	2	→	3	→	1	→	0	→	1	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	3	→	0	→	3	→	3	→	1	→	4
6	1	1	→	2	→	3	→	5	→	2	→	1	→	3	→	4
7	1	1	→	2	→	3	→	5	→	1	→	6	→	0	→	6
8	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	5	→	5	→	2
9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	4	→	3	→	7
10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	3	→	1	→	4
11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	2	→	10	→	1
12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1	→	9	→	10

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	2	→	0	→	1	→	0	→	0	→	2
4	1	1	→	2	→	1	→	1	→	0	→	3	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	0	→	4	→	1	→	2	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	5	→	3	→	4	→	3	→	3	→	2
7	1	1	→	2	→	5	→	2	→	2	→	6	→	3	→	4
8	1	1	→	2	→	5	→	1	→	0	→	3	→	5	→	2
9	1	1	→	2	→	5	→	0	→	7	→	0	→	0	→	2
10	1	1	→	2	→	5	→	9	→	6	→	7	→	5	→	4
11	1	1	→	2	→	5	→	9	→	5	→	5	→	1	→	8
12	1	1	→	2	→	5	→	9	→	4	→	3	→	9	→	2

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	0	→	0	→	2	→	0	→	2	→	0	→	2
4	1	1	→	3	→	2	→	3	→	2	→	1	→	2	→	3
5	1	1	→	3	→	1	→	1	→	3	→	4	→	2	→	4
6	1	1	→	3	→	0	→	5	→	0	→	5	→	0	→	5
7	1	1	→	3	→	6	→	4	→	4	→	1	→	0	→	3
8	1	1	→	3	→	6	→	3	→	2	→	5	→	2	→	3
9	1	1	→	3	→	6	→	2	→	0	→	2	→	6	→	5
10	1	1	→	3	→	6	→	1	→	8	→	9	→	2	→	9
11	1	1	→	3	→	6	→	0	→	7	→	7	→	9	→	4
12	1	1	→	3	→	6	→	11	→	6	→	5	→	6	→	11

(5)某數的次方形成之數列：

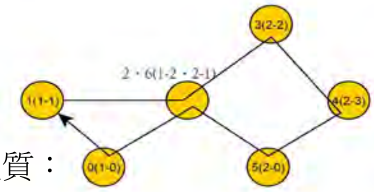
不管 A 值為多少，在跳 n×A+1(n 為非負整數)次方所組成的數列時，皆有漢米爾頓迴路。

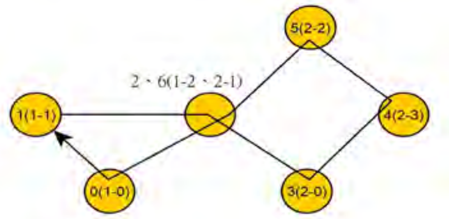
例：跳由 4 的次方所組成的數列，A 為 3、i 為 1 時有漢米爾頓迴路。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	2	→	0	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	2	→	2	→	2	→	2	→	2	→	2
5	1	1	→	2	→	1	→	2	→	1	→	2	→	1	→	2
6	1	1	→	2	→	0	→	4	→	2	→	0	→	4	→	2
7	1	1	→	2	→	6	→	1	→	2	→	6	→	1	→	2
8	1	1	→	2	→	6	→	6	→	6	→	6	→	6	→	6
9	1	1	→	2	→	6	→	4	→	5	→	0	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	6	→	2	→	6	→	2	→	6	→	2
11	1	1	→	2	→	6	→	0	→	9	→	1	→	2	→	6
12	1	1	→	2	→	6	→	10	→	2	→	6	→	10	→	2

(二)二組邊形：

1.每次跳的距離相同：





(1)跳的距離與邊形數總和互質：

當 Z 和 y 互質時，i 為 a+y 或 a+B+y 所成的落點數列有漢米爾頓路徑，但 i 同加減後要除以 Z 取餘數。

例：S 型走法和 M 型走法中，A 為 3、B 為 4、y 為 2 時有漢米爾頓路徑。

	A	B	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7
S型走法	3	4	=	7	1	3	2-0	→	2-3	→	2-2	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
M型走法	3	4	=	7	1	3	2-2	→	2-3	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	4	=	7	1	3	3	→	4	→	5	→	6	→	0	→	1	→	2
	3	3	=	6	2	1	1	→	3	→	5	→	1	→	3	→	5	→	1
	4	4	=	8	4	1	1	→	5	→	1	→	5	→	1	→	5	→	1
	4	5	=	9	8	1	1	→	0	→	8	→	7	→	6	→	5	→	4
	5	5	=	10	6	1	1	→	7	→	3	→	9	→	5	→	1	→	7
	5	6	=	11	4	1	1	→	5	→	9	→	2	→	6	→	10	→	3
	6	6	=	12	12	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	6	7	=	13	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	0

(2)跳的距離與邊形數總和不互質：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	2	1	1-1	→	2-0	→	1-2	→	1-1	→	2-0	→	1-2
M型走法	3	3	=	6	2	1	1-1	→	2-2	→	1-2	→	1-1	→	2-2	→	1-2
	3	3	=	6	2	1	1	→	3	→	5	→	1	→	3	→	5
	3	4	=	7	7	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	4	4	=	8	4	1	1	→	5	→	1	→	5	→	1	→	5
	4	5	=	9	6	1	1	→	7	→	4	→	1	→	7	→	4
	5	5	=	10	5	1	1	→	6	→	1	→	6	→	1	→	6
	5	6	=	11	11	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	6	6	=	12	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	1	→	4
	6	7	=	13	13	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1

2.以遞增數列作跳的距離：

(1)等差數列：在每個 Z 值中，由特定的 i 點開始跳特定的等差數列所成的落點數列有漢米爾頓路徑，找出符合漢米爾頓路徑等差數列中的首項和公差再加上正整數倍的 Z 值(不一定要同加減)也會有漢米爾頓路徑。

【舉例說明】：Z=8 時，由 2 開始跳首項=1、公差=1 的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑；由 2 開始跳首項=9、公差=1 的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	4	4	=	8	2	1-2	→	2-0	→	2-2	→	1-0	→	2-3	→	1-1	→	1-3	→	1-2
M型走法	4	4	=	8	2	1-2	→	2-2	→	2-0	→	1-0	→	2-3	→	1-1	→	1-3	→	1-2
	4	4	=	8	2	2	→	3	→	5	→	0	→	4	→	1	→	7	→	6
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	4	→	0	→	4	→	2	→	1	→	1
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	4	→	7	→	3	→	0	→	6	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	4	→	7	→	2	→	7	→	4	→	2
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	4	→	7	→	1	→	6	→	2	→	9
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	4	→	7	→	0	→	5	→	0	→	7
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	4	→	7	→	11	→	4	→	10	→	5
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	4	→	7	→	11	→	3	→	9	→	3

例：S 型走法和 M 型走法中，跳首項為 1、公差為 1 所形成的等差數列，A 為 4、B 為 4、i 為 2 時，有漢米爾頓迴路。

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	2-3	→	1-2	→	1-2	→	1-1
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	2-2	→	1-2	→	1-2	→	1-1
	3	3	=	6	1	1	→	2	→	3	→	5	→	2	→	1
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	3	→	5	→	1	→	6
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	4
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	3
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	2
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	2-0
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	2-0
	3	3	=	6	1	1	→	2	→	5	→	3	→	4	→	3
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	5	→	2	→	2	→	6
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	5	→	1	→	0	→	3
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	5	→	0	→	7	→	0
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	5	→	9	→	6	→	7
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	5	→	9	→	5	→	5
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	5	→	9	→	4	→	3
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	5	→	9	→	3	→	1

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-0	→	1-0	→	1-2	→	1-0	→	1-2
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-2	→	1-0	→	1-2	→	1-0	→	1-2
	3	3	=	6	1	1	→	3	→	0	→	5	→	0	→	5
	4	4	=	8	1	1	→	3	→	6	→	3	→	2	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	3	→	6	→	2	→	0	→	2
	5	5	=	10	1	1	→	3	→	6	→	1	→	8	→	9
	5	6	=	11	1	1	→	3	→	6	→	0	→	7	→	7
	6	6	=	12	1	1	→	3	→	6	→	11	→	6	→	5
	6	7	=	13	1	1	→	3	→	6	→	11	→	5	→	3
	7	7	=	14	1	1	→	3	→	6	→	11	→	4	→	1

(5)某數的次方形成之數列：

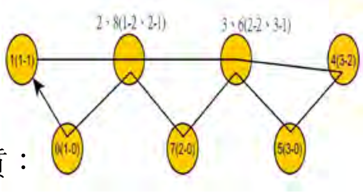
當 i 號青蛙為兩組邊形的交接點加 1 時(有兩個值)，即 i=a+1 或 a+B+1，且跳 n×Z+1(n 為非負整數)次方所組成的數列時，落點數列中會呈現漢米爾頓路徑。

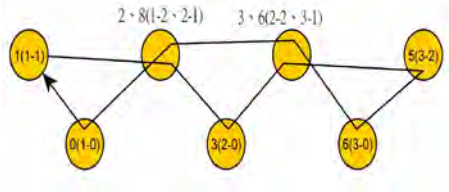
	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	4	4	=	8	3	2-0	→	2-3	→	2-2	→	1-2	→	1-3	→	1-0	→	1-1	→	1-2
M型走法	4	4	=	8	3	2-2	→	2-3	→	2-0	→	1-2	→	1-3	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	4	4	=	8	3	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	0	→	1	→	2
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	0	→	1
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	0
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8

例：S 型走法和 M 型走法，在跳由 1 次方所組成的數列，A 為 4、B 為 4、i 為 3 時，有漢米爾頓路徑。

(三)三組邊形：

1.每次跳的距離相同：





(1)跳的距離與邊形數總和互質：

在 y 和 i 為特定值時，落點數列中會呈現漢米爾頓路徑，但 y 和 i 並無特殊規律。

【舉例說明】：M 型走法當 Z=9 時，y=1、i=4 所成的落點數列有漢米爾頓路徑；

S 型走法當 Z=9 時，y=1、i=0 所成的落點數列有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	3	→	6	→	9	→	2
	3	4	4	=	11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	2	→	4
	4	4	4	=	12	5	1	1	→	6	→	11	→	4	→	9	→	2	→	7	→	0
	4	4	5	=	13	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	0	→	2
	4	5	5	=	14	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	2	→	5	→	8
	5	5	5	=	15	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	13	→	0
	5	5	6	=	16	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	0	→	3	→	6

(2)跳的距離與邊形數總和不互質：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8	→	9
S型走法	3	3	4	=	10	2	1	1-1	→	2-0	→	3-2	→	3-0	→	1-2	→	1-1	→	2-0	→	3-2	→	3-0
M型走法	3	3	4	=	10	2	1	1-1	→	2-2	→	3-3	→	2-2	→	1-2	→	1-1	→	2-2	→	3-3	→	2-2
	3	3	4	=	10	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	1	→	3	→	5	→	7
	3	3	3	=	9	3	1	1	→	4	→	7	→	1	→	4	→	7	→	1	→	4	→	7
	3	4	4	=	11	11	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	4	4	4	=	12	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	1	→	4	→	7	→	10	→	1
	4	4	5	=	13	13	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	4	5	5	=	14	4	1	1	→	5	→	9	→	13	→	3	→	7	→	11	→	1	→	5
	5	5	5	=	15	5	1	1	→	6	→	11	→	1	→	6	→	11	→	1	→	6	→	11
	5	5	6	=	16	4	1	1	→	5	→	9	→	13	→	1	→	5	→	9	→	13	→	1

2.以遞增數列作跳的距離：

(1)等差數列：在 y 和 i 為特定值時，落點數列會呈現漢米爾頓路徑，但 y 和 i 並無特殊規律。

【舉例說明】：M 型走法當 Z=9 時，y=1、i=4 所成的落點數列有漢米爾頓路徑；

S 型走法當 Z=9 時，y=1、i=0 所成的落點數列有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	6	3-0	→	2-2	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	3-2	→	2-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	1-0	→	2-0	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	6	→	4	→	5	→	0	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	6	→	3	→	3	→	6	→	2	→	1
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	6	→	2	→	1	→	3	→	8	→	5
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	6	→	1	→	11	→	0	→	4	→	11
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	6	→	0	→	10	→	10	→	0	→	6
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	6	→	13	→	9	→	8	→	10	→	1
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	6	→	13	→	8	→	6	→	7	→	11
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	6	→	13	→	7	→	4	→	4	→	7

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	2-0	→	3-2	→	1-2	→	2-2	→	2-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	2-2	→	3-0	→	1-2	→	3-2	→	2-2	→	2-0
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	4	→	3	→	7
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	3	→	1	→	4
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	2	→	10	→	1
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1	→	9	→	10
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0	→	8	→	8
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	13	→	7	→	6
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	13	→	6	→	4
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	13	→	5	→	2

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	3-0	→	1-0	→	2-2	→	1-0	→	1-0	→	1-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	3-0	→	1-0	→	2-0	→	1-0	→	1-0	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	5	→	0	→	7	→	0	→	0	→	2
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	5	→	9	→	6	→	7	→	5	→	4
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	5	→	9	→	5	→	5	→	1	→	8
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	5	→	9	→	4	→	3	→	9	→	2
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	5	→	9	→	3	→	1	→	6	→	9
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	5	→	9	→	2	→	13	→	3	→	4
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	5	→	9	→	1	→	12	→	0	→	14
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	5	→	9	→	0	→	11	→	13	→	10

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	2-0	→	3-0	→	1-2	→	1-0	→	1-2	→	3-0	→	3-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	2-2	→	2-2	→	1-2	→	1-0	→	1-2	→	2-2	→	3-0
	3	3	3	=	9	1	1	→	3	→	6	→	2	→	0	→	2	→	6	→	5
	3	3	4	=	10	1	1	→	3	→	6	→	1	→	8	→	9	→	2	→	9
	3	4	4	=	11	1	1	→	3	→	6	→	0	→	7	→	7	→	9	→	4
	3	4	5	=	12	1	1	→	3	→	6	→	11	→	6	→	5	→	6	→	11
	4	4	5	=	13	1	1	→	3	→	6	→	11	→	5	→	3	→	3	→	7
	4	5	5	=	14	1	1	→	3	→	6	→	11	→	4	→	1	→	0	→	3
	4	5	6	=	15	1	1	→	3	→	6	→	11	→	3	→	14	→	12	→	14
	5	5	6	=	16	1	1	→	3	→	6	→	11	→	2	→	13	→	10	→	11

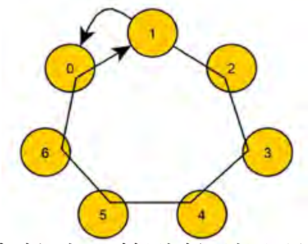
(5)某數的次方形成之數列：

S 型走法時，第一組邊形以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三，若 i=(a+C+4)/Z 的餘數，在跳 n×Z+1(n 為非負整數)次方所組成的數列時，則落點數列中會呈現出漢米爾頓路徑；M 型走法時，第一組邊形以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三，若 i=a+1×(幾組邊形-1)，在跳 n×Z+1(n 為非負整數)次方所組成的數列時，則落點數列中會呈現出漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8

例：S 型走法中，在跳由 1 次方所組成的數列，A、B、C 皆為 3、i 為 0 時，有漢米爾頓路徑；M 型走法中，在跳由 1 次方所組成的數列，A、B、C 皆為 3、i 為 4 時，有漢米爾頓路徑。

二、回頭(圖示中的曲線代表要換的方向)：



(一)一組(無重疊)邊形：

1.每次跳的距離相同：

(1)跳的距離與邊形數互質：當 A 與 y 互質且 y 為奇數時，落點數列呈現出漢米爾頓迴路。

例：A 為 3、y 為 1、i 為 1 時有漢米爾頓迴路。

A	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	1	→	2	→	0	→	1	→	0	→	2	→	1	→	2
4	3	1	1	→	0	→	3	→	2	→	1	→	2	→	3	→	0
5	2	1	1	→	3	→	0	→	0	→	3	→	1	→	3	→	0
6	5	1	1	→	0	→	3	→	4	→	5	→	2	→	1	→	2
7	2	1	1	→	3	→	5	→	0	→	0	→	5	→	3	→	1
8	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	5	→	2	→	3	→	6
9	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	0	→	0	→	7	→	5
10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	9	→	6	→	3	→	2
11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	0	→	9
12	5	1	1	→	6	→	11	→	10	→	5	→	2	→	7	→	0

(2)跳的距離與邊形數不互質：沒有漢米爾頓問題。

A	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	3	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
4	2	1	1	→	3	→	1	→	3	→	1	→	3	→	1	→	3
5	5	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
6	2	1	1	→	3	→	5	→	1	→	5	→	3	→	1	→	3
7	7	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
8	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	1	→	7	→	5	→	3
9	3	1	1	→	4	→	7	→	1	→	7	→	4	→	1	→	4
10	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	1	→	9	→	7
11	11	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
12	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	1	→	11

2.以遞增數列作跳的距離： (1)等差數列：

<table>
<tr><td rowspan="5">A為奇數</td><td rowspan="4">A=4n-1</td><td rowspan="2">首項與A互質且為奇</td><td>公差為A的倍數且為偶</td><td></td></tr>
<tr><td>公差=2*首項-2N or 2*首項</td><td>+2A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">首項與A互質且為偶</td><td>公差為A的倍數且為奇</td><td></td></tr>
<tr><td>公差=-2*首項+A or 2*首項-A</td><td>+2A</td></tr>
<tr><td>A=4n+1</td><td>首項為奇</td><td>公差為A的倍數</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">A為偶數</td><td></td><td>首項與A互質</td><td>公差為A的偶數倍數</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">A=4</td><td>首項為奇</td><td>公差為(a1)/8的餘數</td><td>+A</td></tr>
<tr><td>首項不為4的倍數且為偶</td><td>公差為a1/8的餘數再除以2</td><td>+A</td></tr>
</table>

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	0	→	2	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	1	→	0	→	1	→	2	→	1	→	0
5	1	1	→	2	→	3	→	2	→	1	→	1	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	5	→	4	→	5	→	0	→	1	→	2
7	1	1	→	2	→	0	→	1	→	3	→	6	→	3	→	1
8	1	1	→	2	→	1	→	6	→	1	→	2	→	1	→	6
9	1	1	→	2	→	0	→	4	→	5	→	8	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	9	→	2	→	1	→	6	→	5	→	8
11	1	1	→	2	→	9	→	2	→	5	→	2	→	9	→	2
12	1	1	→	2	→	9	→	4	→	9	→	8	→	1	→	0

例：在跳首項為 1、公差為 6 的等差數列，A 為 3、i 為 1 時有漢米爾頓迴路。

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	0	→	2	→	1	→	0	→	1
4	1	1	→	2	→	3	→	1	→	2	→	1	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	3	→	0	→	4	→	3	→	1	→	4
6	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	1	→	5	→	4
7	1	1	→	2	→	3	→	5	→	1	→	3	→	0	→	6
8	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	5	→	5	→	2
9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	7	→	3	→	4
10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	9	→	1	→	8
11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0	→	3	→	1
12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1	→	5	→	10

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	0	→	1	→	0	→	0	→	2
4	1	1	→	2	→	1	→	1	→	2	→	3	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	0	→	3	→	1	→	0	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	5	→	5	→	4	→	3	→	5	→	2
7	1	1	→	2	→	5	→	0	→	2	→	3	→	3	→	4
8	1	1	→	2	→	5	→	1	→	2	→	7	→	5	→	0
9	1	1	→	2	→	5	→	0	→	4	→	0	→	0	→	2
10	1	1	→	2	→	5	→	9	→	6	→	7	→	5	→	8
11	1	1	→	2	→	5	→	9	→	8	→	5	→	1	→	8
12	1	1	→	2	→	5	→	9	→	10	→	3	→	5	→	2

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	0	→	2	→	0	→	2	→	0	→	2	→	0
4	1	1	→	3	→	0	→	3	→	2	→	1	→	2	→	3
5	1	1	→	3	→	1	→	1	→	4	→	3	→	2	→	3
6	1	1	→	3	→	0	→	3	→	0	→	5	→	0	→	3
7	1	1	→	3	→	6	→	5	→	4	→	1	→	2	→	3
8	1	1	→	3	→	6	→	7	→	2	→	5	→	0	→	7
9	1	1	→	3	→	6	→	0	→	2	→	0	→	6	→	5
10	1	1	→	3	→	6	→	1	→	4	→	9	→	2	→	3
11	1	1	→	3	→	6	→	0	→	6	→	7	→	4	→	9
12	1	1	→	3	→	6	→	11	→	8	→	5	→	8	→	11

(5)某數的次方形成之數列：

不管 A 值為多少，在跳 $n\times A+1$(n 為偶數或 0)次方所組成的數列時，皆有漢米爾頓迴路。

當 A=3 時，在跳 3 的奇數倍之次方所組成的數列時，皆有漢米爾頓迴路。

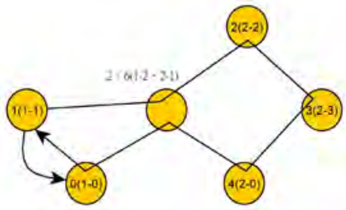
A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	0	→	2	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	3	→	0	→	1	→	0	→	3	→	2
5	1	1	→	2	→	3	→	4	→	0	→	1	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	0	→	1	→	0
7	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	0	→	1
8	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	0
9	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
11	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
12	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8

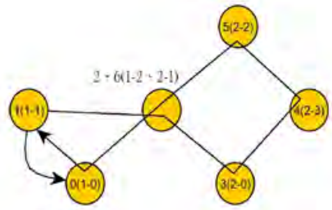
例：在跳由 1 次方所組成的數列，A 為 3、i 為 1 時有漢米爾頓迴路。

(二) 二組邊形：

1.每次跳的距離相同：

(1)跳的距離與邊形數總和互質：





當 Z 和 y 互質且 y 為奇數時，i 為 a+y 或 a+B+y 有漢米爾頓路徑，但 i 要除以 Z 取餘數。

例：S 型走法和 M 型走法中，A 為 3、B 為 4、y 為 1、i 為 3 時有漢米爾頓路徑。

	A	B	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7
S型走法	3	4	=	7	1	3	2-0	→	2-3	→	2-2	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
M型走法	3	4	=	7	1	3	2-2	→	2-3	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	4	=	7	1	3	3	→	4	→	5	→	6	→	0	→	1	→	2
	3	3	=	6	1	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	0	→	1
	4	4	=	8	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	5	→	2	→	3
	4	5	=	9	8	1	1	→	0	→	3	→	7	→	5	→	5	→	7
	5	5	=	10	7	1	1	→	8	→	7	→	2	→	9	→	6	→	3
	5	6	=	11	4	1	1	→	5	→	9	→	0	→	7	→	3	→	3
	6	6	=	12	5	1	1	→	6	→	11	→	10	→	5	→	2	→	7
	6	7	=	13	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	0

(2)跳的距離與邊形數總和不互質：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	2	1	1-1	→	2-0	→	1-2	→	1-1	→	1-2	→	2-0
M型走法	3	3	=	6	2	1	1-1	→	2-2	→	1-2	→	1-1	→	1-2	→	2-2
	3	3	=	6	2	1	1	→	3	→	5	→	1	→	5	→	3
	3	4	=	7	7	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	4	4	=	8	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	1	→	7
	4	5	=	9	6	1	1	→	7	→	7	→	1	→	7	→	7
	5	5	=	10	5	1	1	→	6	→	1	→	6	→	1	→	6
	5	6	=	11	11	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	6	6	=	12	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	1	→	10
	6	7	=	13	13	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1

2.以遞增數列作跳的距離：

(1)等差數列：

在每個 Z 值中，由特定的 i 點開始跳特定的等差數列所成的落點數列有漢米爾頓路徑，找出符合漢米爾頓路徑等差數列中的首項和公差再加上偶數倍的 Z 值(不一定要同加減)也會有漢米爾頓路徑。

【舉例說明】：當 Z=6 時，由 1 開始跳首項=4、公差=9 的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由 1 開始跳首項=16、公差=21 的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-0	→	2-2	→	2-0	→	2-0
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-0	→	2-0	→	2-2	→	2-2
	3	3	=	6	1	1	→	5	→	0	→	4	→	3	→	3
	3	4	=	7	1	1	→	5	→	4	→	4	→	1	→	3
	4	4	=	8	1	1	→	5	→	2	→	0	→	7	→	3
	4	5	=	9	1	1	→	5	→	2	→	4	→	3	→	3
	5	5	=	10	1	1	→	5	→	4	→	2	→	1	→	1
	5	6	=	11	1	1	→	5	→	6	→	6	→	5	→	1
	6	6	=	12	1	1	→	5	→	8	→	10	→	3	→	11
	6	7	=	13	1	1	→	5	→	10	→	1	→	9	→	7

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	2-2	→	1-2	→	1-0	→	1-1
	3	3	=	6	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	1
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	3	→	5	→	1	→	3
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	7
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	9
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	1-2	→	2-2	→	2-0
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	1-2	→	2-0	→	2-2
	3	3	=	6	1	1	→	2	→	5	→	5	→	4	→	3
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	5	→	0	→	2	→	3
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	5	→	1	→	2	→	7
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	5	→	0	→	4	→	0
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	5	→	9	→	6	→	7
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	5	→	9	→	8	→	5
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	5	→	9	→	10	→	3
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	5	→	9	→	12	→	1

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-0	→	1-0	→	2-0	→	1-0	→	1-2
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-2	→	1-0	→	2-2	→	1-0	→	1-2
	3	3	=	6	1	1	→	3	→	0	→	3	→	0	→	5
	3	4	=	7	1	1	→	3	→	6	→	5	→	4	→	1
	4	4	=	8	1	1	→	3	→	6	→	7	→	2	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	3	→	6	→	0	→	2	→	0
	5	5	=	10	1	1	→	3	→	6	→	1	→	4	→	9
	5	6	=	11	1	1	→	3	→	6	→	0	→	6	→	7
	6	6	=	12	1	1	→	3	→	6	→	11	→	8	→	5
	6	7	=	13	1	1	→	3	→	6	→	11	→	10	→	3

(5)某數的次方形成之數列：

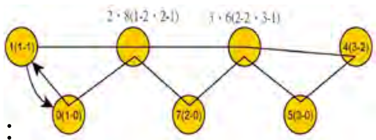
當 i=a+1 或 a+B+1，且跳 n×Z+1(n 為偶數或 0)次方所組成的數列時，落點數列中會呈現漢米爾頓路徑。

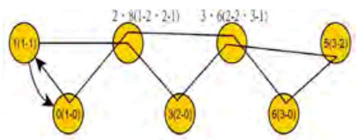
	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	3	2-0	→	2-2	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
M型走法	3	3	=	6	3	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	=	6	3	3	→	4	→	5	→	0	→	1	→	2
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6

例：S 型走法和 M 型走法中，在跳由 1 的次方所組成的數列，A 為 3、B 為 3、i 為 3 時，有漢米爾頓路徑。

(三)三組邊形：

1.每次跳的距離相同：





(1)跳的距離與邊形數總和互質：

在 y 和 i 為特定值時，落點數列中會呈現漢米爾頓路徑，但 y 和 i 並無特殊規律。

【舉例說明】：M 型走法當 Z=9 時，y=1、i=4 所成的落點數列有漢米爾頓路徑；

S 型走法當 Z=9 時，y=1、i=0 所成的落點數列有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	9	→	6	→	3	→	2
	3	4	4	=	11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	0	→	9
	4	4	4	=	12	5	1	1	→	6	→	11	→	10	→	5	→	2	→	7	→	0
	4	4	5	=	13	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	0	→	0
	4	5	5	=	14	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	0	→	11	→	8
	5	5	5	=	15	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	13	→	0
	5	5	6	=	16	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	0	→	15	→	12

(2)跳的距離與邊形數總和不互質：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8	→	9
S型走法	3	3	4	=	10	2	1	1-1	→	2-0	→	3-2	→	3-0	→	1-2	→	1-1	→	1-2	→	3-0	→	3-2
M型走法	3	3	4	=	10	2	1	1-1	→	2-2	→	3-3	→	2-2	→	1-2	→	1-1	→	1-2	→	2-2	→	3-3
	3	3	4	=	10	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	1	→	9	→	7	→	5
	3	3	3	=	9	3	1	1	→	4	→	7	→	1	→	7	→	4	→	1	→	4	→	7
	3	4	4	=	11	11	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	4	4	4	=	12	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	1	→	11	→	9
	4	4	5	=	13	13	1	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1	→	1
	4	5	5	=	14	4	1	1	→	5	→	9	→	13	→	13	→	9	→	5	→	1	→	5
	5	5	5	=	15	5	1	1	→	6	→	11	→	1	→	11	→	6	→	1	→	6	→	11
	5	5	6	=	16	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	13	→	15	→	1

2.以遞增數列作跳的距離：

(1)等差數列：在每個 Z 值中，由特定的 i 點開始跳特定的等差數列所成的落點數列有漢米爾頓路徑，找出符合漢米爾頓路徑等差數列中的首項和公差再加上偶數倍的 Z 值(不一定要同加減)也會有漢米爾頓路徑。

【舉例說明】：M 型走法當 Z=9 時，由 1 開始跳首項=18、公差=4 的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由 4 開始跳首項=1、公差=18 的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑；

S 型走法當 Z=9 時，由 0 開始跳首項=1、公差=18 的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由 0 開始跳首項=19、公差=18 的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	1	→	4	→	9	→	6	→	5	→	6
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	3	→	10	→	3	→	10	→	0	→	1
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	5	→	10	→	9	→	8	→	1	→	2
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	7	→	6	→	9	→	4	→	11	→	6
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	9	→	2	→	1	→	12	→	5	→	8
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	11	→	4	→	9	→	6	→	7	→	6
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	13	→	8	→	1	→	8	→	13	→	2

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	2-0	→	3-2	→	1-2	→	2-2	→	2-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	2-2	→	3-0	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	7	→	3	→	4
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	9	→	1	→	8
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0	→	3	→	1
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1	→	5	→	10
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	0	→	7	→	8
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	13	→	9	→	6
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	13	→	11	→	4
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	13	→	13	→	2

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	3-2	→	1-0	→	2-2	→	1-0	→	1-0	→	1-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	3-0	→	1-0	→	3-2	→	1-0	→	1-0	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	5	→	0	→	4	→	0	→	0	→	2
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	5	→	9	→	6	→	7	→	5	→	8
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	5	→	9	→	8	→	5	→	1	→	8
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	5	→	9	→	10	→	3	→	5	→	2
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	5	→	9	→	12	→	1	→	9	→	6
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	5	→	9	→	0	→	3	→	13	→	12
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	5	→	9	→	1	→	5	→	0	→	14
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	5	→	9	→	0	→	7	→	13	→	10

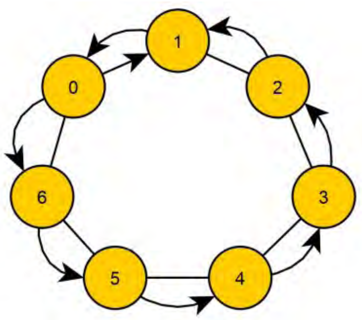
(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	2-0	→	3-0	→	1-0	→	1-2	→	1-0	→	3-0	→	3-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	2-2	→	2-2	→	1-0	→	1-2	→	1-0	→	2-2	→	3-0
	3	3	3	=	9	1	1	→	3	→	6	→	0	→	2	→	0	→	6	→	5
	3	3	4	=	10	1	1	→	3	→	6	→	1	→	4	→	9	→	2	→	3
	3	4	4	=	11	1	1	→	3	→	6	→	0	→	6	→	7	→	4	→	9
	4	4	4	=	12	1	1	→	3	→	6	→	11	→	8	→	5	→	8	→	11
	4	4	5	=	13	1	1	→	3	→	6	→	11	→	10	→	3	→	12	→	7
	4	5	5	=	14	1	1	→	3	→	6	→	11	→	12	→	1	→	0	→	3
	5	5	5	=	15	1	1	→	3	→	6	→	11	→	14	→	3	→	12	→	3
	5	5	6	=	16	1	1	→	3	→	6	→	11	→	0	→	5	→	10	→	7

(5)某數的次方形成之數列：

S 型走法時，且除了第一組邊形以及最後一組邊形的邊形數皆為三，若 i=a+C+4/Z 的餘數，在跳 n×Z+1(n 為偶數或 0)次方所組成的數列時，則落點數列中會呈現出漢米爾頓路徑。M 型走法時，且除了第一組邊形以及最後一組邊形的邊形數皆為三，若 i=a+1×(幾組邊形-1)，在跳 n×Z+1(n 為偶數或 0)次方所組成的數列時，則落點數列中會呈現出漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8



三、不斷換向(圖示中的第一次走直線，第二次走曲線，以此類推)：

(一)一組(無重疊)邊形：

1.以遞增數列作跳的距離：

(1)等差數列：若等差數列中的首項=公差且首項和公差皆與 A 互質，呈現的結果皆有漢米爾頓路徑，等差數列中的首項和公差可以去加減正整數倍的 A 值(不一定要同加減)也都有漢米爾頓路徑。

例：在跳首項為 1、公差為 1 的等差數列，A 為 3、i 為 1 時有漢米爾頓路徑。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	0	→	2	→	1	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	0	→	3	→	3	→	0	→	2	→	1
5	1	1	→	2	→	0	→	3	→	4	→	4	→	3	→	0
6	1	1	→	2	→	0	→	3	→	5	→	4	→	4	→	5
7	1	1	→	2	→	0	→	3	→	6	→	4	→	5	→	5
8	1	1	→	2	→	0	→	3	→	7	→	4	→	6	→	5
9	1	1	→	2	→	0	→	3	→	8	→	4	→	7	→	5
10	1	1	→	2	→	0	→	3	→	9	→	4	→	8	→	5
11	1	1	→	2	→	0	→	3	→	10	→	4	→	9	→	5
12	1	1	→	2	→	0	→	3	→	11	→	4	→	10	→	5

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	1	→	0	→	0	→	2	→	0	→	1
4	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	1	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	0	→	2	→	0
6	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	3	→	4
7	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	4	→	3
8	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	5	→	2
9	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	6	→	1
10	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	7	→	0
11	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	8	→	10
12	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	9	→	10

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	2	→	0	→	2	→	1	→	1	→	0
4	1	1	→	2	→	3	→	3	→	0	→	3	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	4	→	3	→	1	→	2	→	4	→	3
6	1	1	→	2	→	5	→	3	→	2	→	1	→	1	→	0
7	1	1	→	2	→	6	→	3	→	3	→	0	→	3	→	4
8	1	1	→	2	→	7	→	3	→	4	→	7	→	5	→	2
9	1	1	→	2	→	8	→	3	→	5	→	7	→	7	→	0
10	1	1	→	2	→	9	→	3	→	6	→	7	→	9	→	8
11	1	1	→	2	→	10	→	3	→	7	→	7	→	0	→	7
12	1	1	→	2	→	11	→	3	→	8	→	7	→	1	→	6

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	0	→	0	→	2	→	1	→	0	→	2	→	1
4	1	1	→	3	→	0	→	1	→	2	→	1	→	0	→	1
5	1	1	→	3	→	0	→	0	→	3	→	4	→	1	→	3
6	1	1	→	3	→	0	→	5	→	4	→	3	→	2	→	1
7	1	1	→	3	→	0	→	5	→	5	→	2	→	3	→	6
8	1	1	→	3	→	0	→	5	→	6	→	1	→	4	→	5
9	1	1	→	3	→	0	→	5	→	7	→	0	→	5	→	4
10	1	1	→	3	→	0	→	5	→	8	→	9	→	6	→	3
11	1	1	→	3	→	0	→	5	→	9	→	9	→	7	→	2
12	1	1	→	3	→	0	→	5	→	10	→	9	→	8	→	1

(5)某數的次方形成之數列：

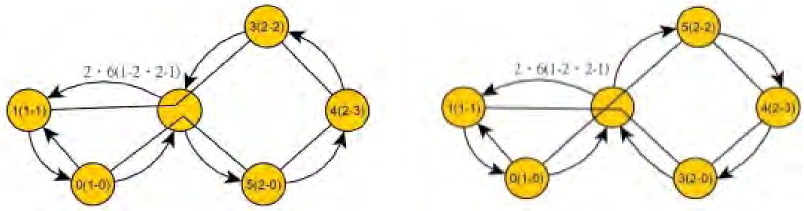
在 A 不為任意數的≧2 次方或為 4，利用 nA-1 (n 為正整數)的次方所成的落點數列來進行跳躍會有漢米爾頓迴路；在 A 為任意數的≧2 次方且不為 4，狀況和此任意數相同(如果任意數為 2 則在 4 的倍數-1 的次方數列有漢米爾頓迴路，例如 2^3 與 2^2 符合漢米爾頓迴路的次方所成的數列來進行跳躍相同。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	2	→	0	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	0	→	0	→	0	→	0	→	0	→	0
5	1	1	→	2	→	0	→	4	→	1	→	2	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	0	→	4	→	2	→	0	→	4	→	2
7	1	1	→	2	→	0	→	4	→	3	→	5	→	1	→	2
8	1	1	→	2	→	0	→	4	→	4	→	4	→	4	→	4
9	1	1	→	2	→	0	→	4	→	5	→	3	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	0	→	4	→	6	→	2	→	0	→	4
11	1	1	→	2	→	0	→	4	→	7	→	1	→	2	→	0
12	1	1	→	2	→	0	→	4	→	8	→	0	→	4	→	8

例：在跳由 2 的次方所組成的數列，A 為 3、i 為 1 時有漢米爾頓迴路。

(二) 二組邊形：

1.以遞增數列作跳的距離：



(1)等差數列：

當 Z 值為奇數，若 i=a 或 a+B-1；當 Z 值為偶數，若 i=a 或 a+B，等差數列中的首項和公差皆為 n × Z 值+1(n 為非負整數)時，呈現的結果皆有漢米爾頓迴路。

例：S 型走法和 M 型走法中，在跳首項為 1、公差為 1 的等差數列，A 為 4、B 為 4、i 為 2 時有漢米爾頓迴路。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	4	4	=	8	2	1-2	→	2-0	→	1-1	→	2-3	→	1-0	→	2-2	→	1-3	→	1-2
M型走法	4	4	=	8	2	1-2	→	2-2	→	1-1	→	2-3	→	1-0	→	2-0	→	1-3	→	1-2
	4	4	=	8	2	2	→	3	→	1	→	4	→	0	→	5	→	7	→	6
	3	4	=	7	2	2	→	3	→	1	→	4	→	0	→	5	→	6	→	6
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	0	→	3	→	7	→	4	→	6	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	0	→	3	→	8	→	4	→	7	→	5
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	0	→	3	→	9	→	4	→	8	→	5
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	0	→	3	→	10	→	4	→	9	→	5
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	0	→	3	→	11	→	4	→	10	→	5
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	0	→	3	→	12	→	4	→	11	→	5

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-1	→	2-0	→	1-0	→	1-2
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-1	→	2-2	→	1-0	→	1-2
	3	3	=	6	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	2-0	→	1-2	→	1-1
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	2-2	→	1-2	→	1-1
	3	3	=	6	1	1	→	2	→	5	→	3	→	2	→	1
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	6	→	3	→	3	→	0
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	7	→	3	→	4	→	7
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	8	→	3	→	5	→	7
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	9	→	3	→	6	→	7
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	10	→	3	→	7	→	7
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	11	→	3	→	8	→	7
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	12	→	3	→	9	→	7

(4)質數數列：當 Z=6 時，i=1 或 4 時有漢米爾頓路徑，其餘皆沒有。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-0	→	1-0	→	1-2	→	2-2	→	2-0
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-2	→	1-0	→	1-2	→	2-0	→	2-2
	3	3	=	6	1	1	→	3	→	0	→	5	→	4	→	3
	4	4	=	8	1	1	→	3	→	0	→	5	→	6	→	1
	4	5	=	9	1	1	→	3	→	0	→	5	→	7	→	0
	5	5	=	10	1	1	→	3	→	0	→	5	→	8	→	9
	5	6	=	11	1	1	→	3	→	0	→	5	→	9	→	9
	6	6	=	12	1	1	→	3	→	0	→	5	→	10	→	9
	6	7	=	13	1	1	→	3	→	0	→	5	→	11	→	9
	7	7	=	14	1	1	→	3	→	0	→	5	→	12	→	9

(5)某數的次方形成之數列：

輸入特定數的次方所組成的數列以及特定的 i 值時，特定數的值沒有一定的規律，但在跳一個特定數的次方所形成的數列時，得到的落點數列符合漢米爾頓問題(有路徑或迴路)時，此值加上 Z 值且 i 值不需更改也會有漢米爾頓問題，在當中共同的規律是在次方為 Z-1 時且 i=a+1 或(a+B+1)除以 Z 的餘數必定有漢米爾頓問題。

【舉例說明】：A=3，B=4 時，Z=7，

<1>跳 2 的次方數列時，i 為 1 或 4 所成的落點數列有漢米爾頓問題；

<2>跳 4 的次方數列時，i 為 3 或 6 所成的落點數列有漢米爾頓問題；

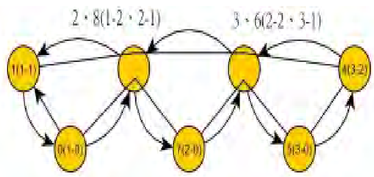
<3>跳 6 的次方數列時，i 為 3 或 0 所成的落點數列有漢米爾頓問題；

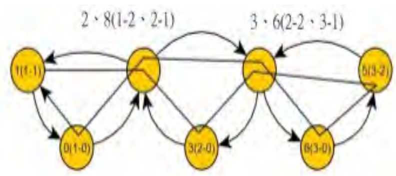
<4>跳 9 的次方數列時，i 為 1 或 4 所成的落點數列有漢米爾頓問題且 i 值次方值為 2 時相同。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7
S型走法	3	4	=	7	1	1-1	→	1-2	→	1-0	→	2-3	→	2-0	→	2-2	→	1-1
M型走法	3	4	=	7	1	1-1	→	1-2	→	1-0	→	2-3	→	2-2	→	2-0	→	1-1
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	0	→	4	→	3	→	5	→	1
	3	4	=	7	1	1	→	2	→	0	→	4	→	3	→	5	→	1
	4	4	=	8	1	1	→	2	→	0	→	4	→	4	→	4	→	4
	4	5	=	9	1	1	→	2	→	0	→	4	→	5	→	3	→	7
	5	5	=	10	1	1	→	2	→	0	→	4	→	6	→	2	→	0
	5	6	=	11	1	1	→	2	→	0	→	4	→	7	→	1	→	2
	6	6	=	12	1	1	→	2	→	0	→	4	→	8	→	0	→	4
	6	7	=	13	1	1	→	2	→	0	→	4	→	9	→	12	→	6

(三)三組邊形：

1. 以遞增數列作跳的距離：





(1)等差數列：

在每個 Z 值中，由特定的 i 點開始跳特定的等差數列所成的落點數列有漢米爾頓路徑，找出符合漢米爾頓路徑等差數列中的首項和公差再加上正整數倍的 Z 值(不一定要同加減)也會有漢米爾頓路徑。

【舉例說明】：M 型走法中，當 Z=9 時，由 1 開始跳首項=1、公差=5 的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由 1 開始跳首項=10、公差=5 的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑；

S 型走法中，當 Z=9 時，由 6 開始跳首項=1、公差=5 的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由 6 開始跳首項=10、公差=5 的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	6	3-0	→	2-2	→	1-1	→	2-0	→	3-2	→	1-2	→	1-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	3-0	→	2-0	→	1-0	→	2-2	→	3-2	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	5	→	7	→	0	→	3	→	4	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	6	→	7	→	1	→	2	→	6	→	7
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	7	→	7	→	2	→	1	→	8	→	6
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	8	→	7	→	3	→	0	→	10	→	5
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	9	→	7	→	4	→	12	→	12	→	4
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	10	→	7	→	5	→	12	→	0	→	3
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	11	→	7	→	6	→	12	→	1	→	2
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	12	→	7	→	7	→	12	→	2	→	1

(2)費氏數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	1-1	→	2-0	→	1-0	→	3-2	→	3-0	→	1-1
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	1-1	→	2-2	→	1-0	→	3-0	→	2-2	→	1-1
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	6	→	1
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	7	→	0
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	8	→	10
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	9	→	10
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	10	→	10
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	11	→	10
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	12	→	10
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	1	→	3	→	0	→	5	→	13	→	10

(3)盧卡斯數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	2-2	→	3-0	→	2-2	→	2-2	→	1-0
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	1-2	→	2-2	→	3-0	→	2-0	→	2-0	→	1-0
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	8	→	3	→	5	→	7	→	7	→	0
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	9	→	3	→	6	→	7	→	9	→	8
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	10	→	3	→	7	→	7	→	0	→	7
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	11	→	3	→	8	→	7	→	1	→	6
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	12	→	3	→	9	→	7	→	2	→	5
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	13	→	3	→	10	→	7	→	3	→	4
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	14	→	3	→	11	→	7	→	4	→	3
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	15	→	3	→	12	→	7	→	5	→	2

(4)質數數列：沒有漢米爾頓問題。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	2-0	→	1-0	→	3-2	→	2-2	→	1-0	→	3-2	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	2-2	→	1-0	→	3-0	→	2-0	→	1-0	→	3-0	→	3-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	3	→	0	→	5	→	7	→	0	→	5	→	4
	3	3	4	=	10	1	1	→	3	→	0	→	5	→	8	→	9	→	6	→	3
	3	4	4	=	11	1	1	→	3	→	0	→	5	→	9	→	9	→	7	→	2
	3	4	5	=	12	1	1	→	3	→	0	→	5	→	10	→	9	→	8	→	1
	4	4	5	=	13	1	1	→	3	→	0	→	5	→	11	→	9	→	9	→	0
	4	5	5	=	14	1	1	→	3	→	0	→	5	→	12	→	9	→	10	→	13
	4	5	6	=	15	1	1	→	3	→	0	→	5	→	13	→	9	→	11	→	13
	5	5	6	=	16	1	1	→	3	→	0	→	5	→	14	→	9	→	12	→	13

(5)某數的次方形成之數列：

在每個 Z 值中，跳特定的次方所組成的數列和特定的 i 值時有漢米爾頓路徑，找出符合漢米爾頓路徑的次方所組成的落點數列再加上正整數倍的 Z 值(不一定要同加減)也會有漢米爾頓路徑。

【舉例說明】：

M 型走法當 Z=9 時，在跳 2 的次方所組成的數列且 i=1 所成的落點數列有漢米爾頓路徑，在跳 11 的次方所組成的數列且 i=1 所成的落點數列也有漢米爾頓路徑；

S 型走法當 Z=9 時，在跳 2 的次方所組成的數列且 i=6 所成的落點數列有漢米爾頓路徑，在跳 11 的次方所組成的數列且 i=6 所組成的落點數列也有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	6	3-0	→	2-2	→	3-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	1-0	→	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	0	→	4	→	5	→	3	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	0	→	4	→	6	→	2	→	0	→	4
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	0	→	4	→	7	→	1	→	2	→	0
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	0	→	4	→	8	→	0	→	4	→	8
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	0	→	4	→	9	→	12	→	6	→	5
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	0	→	4	→	10	→	12	→	8	→	2
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	0	→	4	→	11	→	12	→	10	→	14
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	0	→	4	→	12	→	12	→	12	→	12

柒、討論

雖然我們更深入地探究、發掘並解決相當部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、關於擴充到更多組邊形(>3 組)有漢米爾頓問題但目前尚未發現規律，則是否存在特殊性？或與邊形組數相關聯性？

二、邊形組數的規律是否有出現漢米爾頓問題和重疊荷葉的數量奇偶性是否有關？

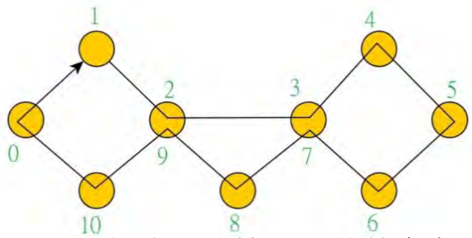
三、可再增加更多種類的數列，來加以探討是否有出現漢米爾頓問題？

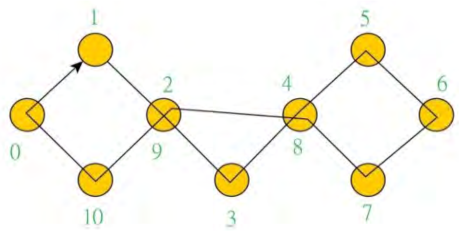
四、從兩片重疊荷葉探討更多重疊荷葉時，最前、最後一組邊形為任意邊形，固定距離為 1(狀況較明顯)，以中間的邊形數不同之狀況，探討是否有特殊規律存在？

在下圖中，左邊皆為 M 型走法，而右邊皆為 S 型走法

(一)皆為三角形：

1.三組荷葉呈現：

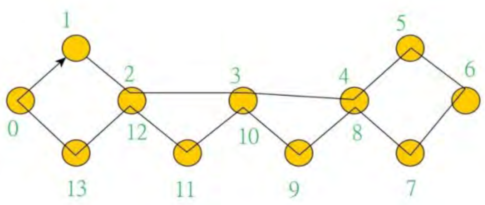


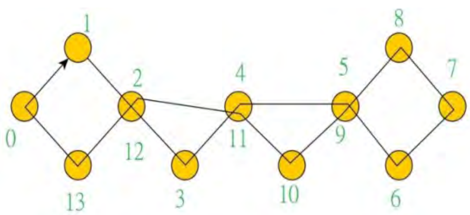


M 型走法時，i 在最後一個邊形的第二片荷葉會有漢米爾頓路徑。

S 型走法時，i 為第一組與第二組的重疊荷葉在第一組中的下一荷葉，有漢米爾頓路徑。

2.四組荷葉呈現：



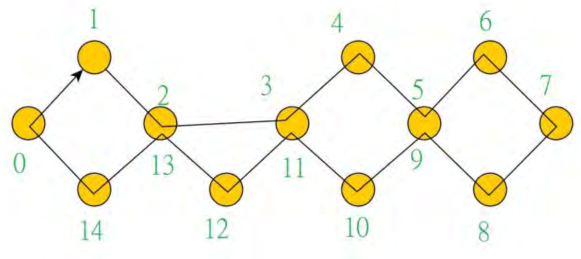


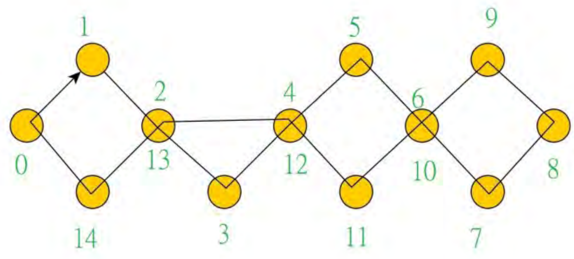
M 型走法時，i 在最後一個邊形的第二片荷葉會有漢米爾頓路徑。

S 型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

(二)有出現三角形(並非全部都是三角形)：

1.四組荷葉呈現：

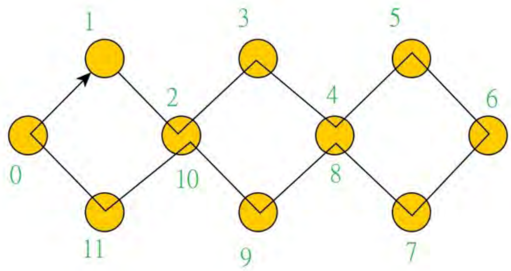


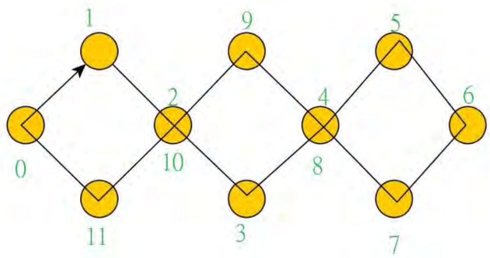


無論 M、S 型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

(三)無三角形：

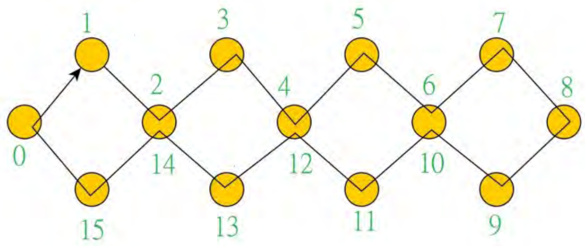
1.三組荷葉呈現：

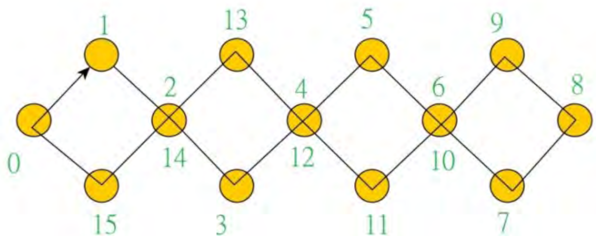




無論 M、S 型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

2.四組荷葉呈現：





無論 M、S 型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

對於上述我們察覺各類情形所呈現的規律性，尚未研究完善，目前我們仍持續推導它，並且去尋找有沒有其它種情形，試著驗證其存在性，同時就有漢米爾頓問題的狀況，以不同的特性討論說明其唯一性。綜合以上的討論，將是我們日後繼續研究精進其完備的方向。

捌、結論

定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	有漢米爾頓迴路
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	不互質	無漢米爾頓問題
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		符合等差數列中的首項值與A互質，公差為n A值(n為正整數)，有漢米爾頓迴路
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		等差數列中的首項值與A互質且A值為某數的次方(除了2的次方)，等差數列中的首項值與A互質，公差為此某數的正整數倍數，有漢米爾路徑
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		等差數列中的首項值與A互質且A值為2的次方，公差值與等差數列中的首項相同，而公差值去加減正整數倍的A值，或公差值為4的正整數倍數，有漢米爾頓路徑
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		存在特例
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	i為a+y或a+B+y時，有漢米爾頓迴路
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	不互質	無漢米爾頓問題
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		存在特例
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		i為a+1或a+B+1，且跳nZ+1(n為非負整數)次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	存在特例
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	不互質	無漢米爾頓問題
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		存在特例
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		S型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三邊形，i=(a+C+4)/Z的餘數，跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑
定向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		M型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三邊形，i=a+1 (幾組邊形-1)，在跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列時，有漢米爾頓路徑
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	y為奇數，有漢米爾頓迴路
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	不互質	無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		N為4，有漢米爾頓路徑
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		nA+1(n為偶數或0)的次方所組成的數列時，有漢米爾頓迴路
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		A=3，在跳3的奇數倍時次方所組成的數列時，有漢米爾頓迴路
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	y為奇數，i為a+y或a+B+y，有漢米爾頓路徑
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	不互質	無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		存在特例
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		i為a+1或a+B+1，跳nZ+1(n為偶數或0)次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑。
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	存在特例
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	不互質	無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		存在特例
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		S型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三邊形，i=(a+C+4)/Z的餘數，跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑
回頭	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		M型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三邊形，i=a+1 (幾組邊形-1)，在跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列時，有漢米爾頓路徑
不斷換向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		首項=公差且首項和公差皆與A互質，首項和公差可以去加減正整數倍的A值(不一定要同加減)，有漢米爾頓路徑
不斷換向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		在A為某數的次方時，此某數的正整數倍數減一(若某數為2則為4的倍數-1)的次方數列有漢米爾頓迴路
不斷換向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		Z為奇數，i為a或a+B-1，等差數列中的首項和公差皆為nZ+1(n為非負整數)時，有漢米爾頓迴路
不斷換向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		Z為偶數，i為a或a+B，等差數列中的首項和公差皆為nZ+1(n為非負整數)時，有漢米爾頓迴路
不斷換向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		存在特例
不斷換向	組的數量	兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		存在特例
不斷換向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	等差數列		存在特例
不斷換向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以費氏數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以質數數列		無漢米爾頓問題
不斷換向	組的數量	三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以某數的次方形成之數列		存在特例

全國科展 or 台灣國際科展	組 別	作 品 名 稱	研 究 範 疇 與 貢 獻
2005年 台灣國際科展	高中	停車場就是彈硬幣	研究停車場問題和彈硬幣遊戲之間有趣的關連。
第57屆	國中	八隻青蛙與停車場的邂逅	給出「有幾片荷葉有青蛙」與落點的一般式，並定義新的「停車場問題」，找到Cycle的一般式和落點的快速演算法，更發現停車場問題 Cycle 和巴斯卡三角形的關係！
第57屆	國中	從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析	若有M個杯子且全部朝上，每次翻轉N個杯子，討論M、N在何種條件下，可將M個杯子翻成全部朝下，讓每個0到M之間的朝上杯數，都翻過一次且不得重複出現(即為漢米爾頓路徑Hamiltonian path)？同時探討在符合某些條件的情況下，必會有Hamiltonian path並證明之。
第59屆	**國中**	【軌跡密碼】─從青蛙環繞跳荷葉落點探究漢米爾頓問題之解析 **(本作品是我們所研究的)**	**(1)在定向、回頭和不斷換向三種狀況下，推廣到A(≧3)邊形與B(≧3)邊形的和為Z(≧6)，甚至推廣到A(≧3)邊形與B(≧3)邊形與C(≧3)邊形的和為Z(≧9)，在每種狀況有些有獨特的規律，可找出漢米爾頓問題；有些有漢米爾頓問題卻沒有獨特的規律；有些是沒有漢米爾頓問題。 (2)除質數數列外，以其他數列做跳的距離，都會重複落點數列。 (3)以費氏數列或盧卡斯數列作為每次跳的距離時，皆沒有漢米爾頓問題。 (4)在跳固定距離時，距離和邊形數(總和邊形數)互質為前提，才可能有漢米爾頓問題。 (5)在一組荷葉邊形中，i值並不會影響到是否有漢米爾頓問題，但在兩組、三組荷葉邊形時，只有特定 i 值才會有漢米爾頓問題。 (6)在兩組荷葉邊形，以S型走法和M型走法中，當跳相同定距或數列時，若S型走法有漢米爾頓問題，則M型走法也會有，且 i 值相同，在三組荷葉邊形有漢米爾頓的狀況中，則 i 值不同。**

數學的奧妙之處在尋求其解決問題的過程中，又引發出新的問題，讓我們發現可再對討論所列出的進行探究。此過程推導磨練我們耐力與毅力，也遇到許多困難與挫折，還要拚命想出解釋的方法與為什麼會這樣，可是，當我們試驗導出時，也就顯得格外愉悅！在我們的努力和老師的協助下，我們成功地完成了這個試驗，清楚的解釋了為什麼，並從這次的試驗，我們不斷地假設、推導、觀察、驗證和統整歸納的過程中，我們獲得了更多的知識，從中發掘到了數學樂趣，也更能體會「團結就是力量」！仔細剖析探索，不難發現在日常生活中的每樣東西都有它的規律，相當有趣而奇妙；另外，我們也發現了數列與漢米爾頓問題的妙用及其限制，當遇到瓶頸無法突破時，我們試著找尋相關知識並請教老師，使問題的研究得以繼續進行，這些都是我們日後進一步做研究的寶貴經驗。

玖、參考資料及其他

一、游森棚(2016)，八隻青蛙，科學研習月刊，No.55-12，pp.61

二、連亮凱、胡和維、吳懿宸，第五十七屆全國科展國中組數學科第三名「從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析」

三、陳姿妤，第五十七屆全國科展國中組數學科佳作「八隻青蛙與停車場的邂逅」

四、賴俊儒，2005 台灣國際科展數學科第一名「停車場就是彈硬幣」

五、馬榮喜、陳世易，國中數學第四冊，康軒文教事業股份有限公司，2015

六、許志農 主編，高中數學第二冊，龍騰文化事業股份有限公司，2011

七、徐力行 著，沒有數字的數學，天下文化，2003

【評語】030417

源自於科學月刊所介紹的一個趣味問題「八隻青蛙」，作者們自行設定移動規則和特殊路徑走法而衍生出各種變形問題，依循指定的移動規則，由某一個點出發後，是否可以經過所有點一次回到原出發點的問題，由此與漢米爾頓問題連結。作者們考慮多種特別的數列與特殊走法作了分析，想法頗具創意，值得嘉許。過程中從大量的實驗發現一些規律，觀察相當有趣。較為美中不足的是作品中未有系統化的論述，數學論證不足，對於怎樣的圖形、何種走法，我們可以確定會存在一個從出發點經過所有點一次回到原出發點的路徑？如果能多一些關於這個主要問題的具體論述會更好。

作品海報

摘　要

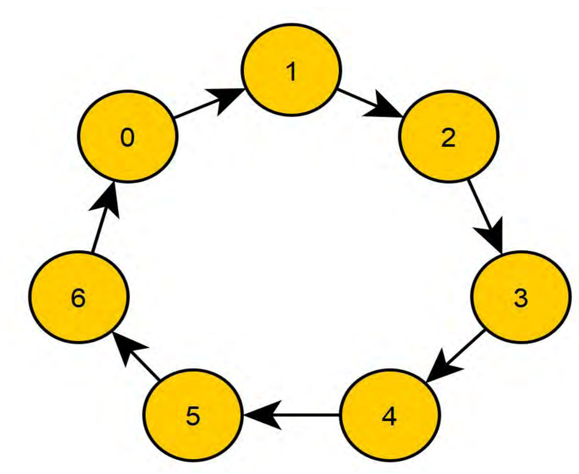
此作品研究「對於編號i青蛙決定移動方向，而在形成多邊形的荷葉一組或兩組以上；由i號荷葉開始，依跳的距離不同，觀察在落點處所成的數列中，是否有漢米爾頓問題出現。」對於移動方向分成定向、回頭、不斷換向，定向指都是順時針方向，回頭指每次碰到起始點即時換向，在回頭的規則中則利用總共跳的荷葉數／邊形數 取其商+1 即目前停留落點處的圈數，其值的奇偶可判別接下來的移動方向，而不斷換向指每次跳躍皆與上次不同方向；依邊形數組數又分出一組及兩組以上，兩組以上時利用轉換的方式探討；在不同的移動方向中，跳的距離無論組數又分成固定距離和遞增數列，而不斷換向在固定距離時沒有意義，所以只做出遞增數列來探討。

壹、研究動機

1. 從國立台灣科學教育館網站查詢到【科學研習月刊】：「森棚教官的數學題-八隻青蛙」，加上數學課也學習到數列與級數，於是我們著手研究推導將落點處擴充，且更改其原本的條件後，觀察其規律性。
2. 閱讀課外書籍『沒有數字的數學』，書中提及漢米爾頓迴路(Hamiltonian Cycle)，以及相關涉略到的漢米爾頓路徑(Hamiltonian path)，此兩大重要性質引發我們高度的興趣。
3. 同時找尋到在第 57 屆全國中小學科展網站與 2005年台灣國際科展-運用【 數列 & 漢米爾頓問題 】做探討。
4. 在歷屆全國科展作品之評審評語也是建議在題材創新度及作品內容有提升空間，使得這樣地結果仍有很大的研究性價值，並採用不同旋繞順序，求出每隻青蛙環繞的迴路進行討論，做更為深入且一般性的探究。

貳、研究目的

定義由A個荷葉擺成正A(≧3)邊形，以順時針標號，在第A片荷葉時稱0號荷葉，青蛙依順時針方向移動，荷葉上i號青蛙由i號荷葉開始，探討以下情況是否有出現漢米爾頓問題：



一、定向：

(一) 一組(荷葉無重疊)邊形：

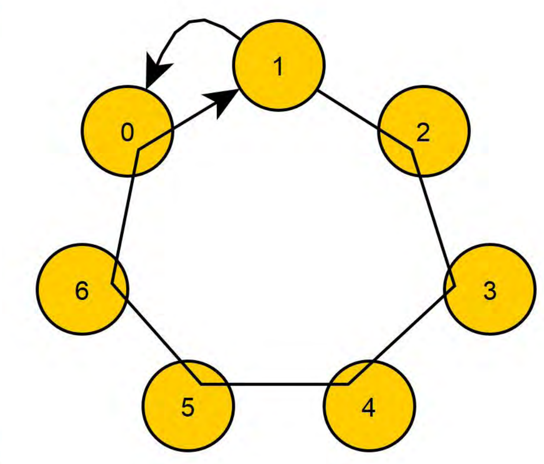
1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數互質；　(2)跳的距離與邊形數不互質

2.以遞增數列作跳的距離：(1)等差數列；　(2)費氏數列；　(3)盧卡斯數列；　(4)質數數列；　(5)某數的次方形成之數列

(二) 至少兩組(至少重疊分別為一片、兩片)邊形：

1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數總和互質；　(2)跳的距離與邊形數總和不互質

2.以遞增數列作跳的距離：(1)等差數列；　(2)費氏數列；　(3)盧卡斯數列；　(4)質數數列；　(5)某數的次方形成之數列



二、回頭(圖示中的曲線代表要換的方向)：

(一) 一組(荷葉無重疊)邊形：

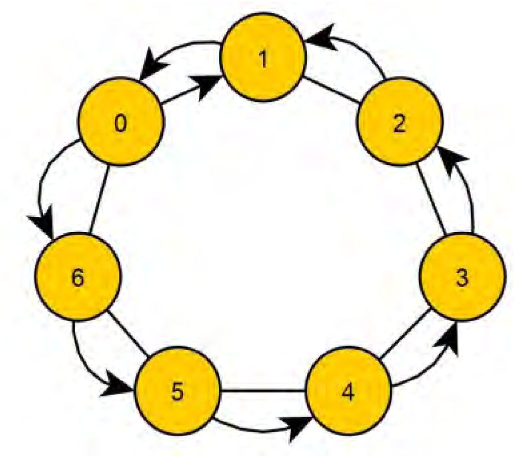
1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數互質；　(2)跳的距離與邊形數不互質

2.以遞增數列作跳的距離：(1)等差數列；　(2)費氏數列；　(3)盧卡斯數列；　(4)質數數列；　(5)某數的次方形成之數列

(二) 至少兩組(至少重疊分別為一片、兩片)邊形：

1.每次跳的距離相同：(1)跳的距離與邊形數總和互質；　(2)跳的距離與邊形數總和不互質

2.以遞增數列作跳的距離：(1)等差數列；　(2)費氏數列；　(3)盧卡斯數列；　(4)質數數列；　(5)某數的次方形成之數列



三、不斷換向(圖示中的第一次走直線，第二次走曲線，第三次走直線，以此類推)：

(一) 一組(荷葉無重疊)邊形：

1.以遞增數列作跳的距離：(1)等差數列；　(2)費氏數列；　(3)盧卡斯數列；　(4)質數數列；　(5)某數的次方形成之數列

(二) 至少兩組(至少重疊分別為一片、兩片)邊形：

1.以遞增數列作跳的距離：(1)等差數列；　(2)費氏數列；　(3)盧卡斯數列；　(4)質數數列；　(5)某數的次方形成之數列

四、利用我們發現的環繞跳荷葉落點處之樹枝狀演算法，在得到條件且輸入數值後，將數值帶入到對應的通式中，快速地得出i號青蛙的落點處數列。

五、探討在通式中找到演算法，利用電腦程式來檢驗。

參、研究設備及器材

筆記本、筆(記錄用)、筆記型電腦、自備隨身碟、Microsoft Excel VBA 2010 、跨平台的繪圖軟體yEd Graph Editor

肆、文獻探討

做本研究之前，我們先參考了一些別人的文獻資料：

屆數	組別	作品名稱	研究方法	得獎情形
57	國中組	八隻青蛙與停車場的邂逅	落點與有青蛙的荷葉數之一般式	佳作
57	國中組	從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析	漢米爾頓路徑	第三名

表一：文獻資料

一、名詞定義:

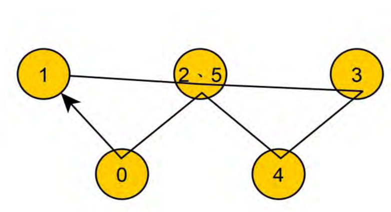
(一)只有一組邊形時，為正A邊形，依順時針方向，青蛙編號為i，由i號荷葉開始，每次跳y片荷葉，A為正整數且大於或等於3，i為非負整數且小於A，y為正整數，Z為不只一組邊形時的邊形數總和。

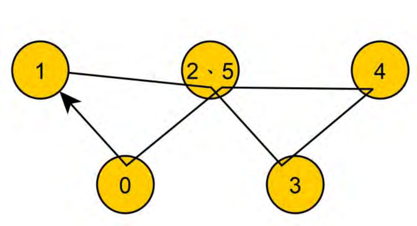
(二)荷葉形成的邊形由左至右排列，而一組是指荷葉形成A邊形一組邊形，兩組指荷葉形成由左至右分別為A邊形與B邊形兩組荷葉，以此類推。

(三)在大於1組邊形時，重疊荷葉必在前一邊形(假設為A)的第A/2(A為偶數時) 或 (A+1)/2(A為奇數時)片荷葉，和後一邊形的第一片荷葉。在任意組邊形中，由重疊點開始，逆時針前一標號為減1、順時針後一標號為加1。

(四)在大於1組邊形時，1-1代表A邊形的第一片荷葉，2-1代表B邊形的第一片荷葉，以此類推；而我們在做一組邊形數以外的計算時，皆使用到了換算的方式，此換算規則為：A邊形的1號荷葉開始，編號為1，依接續移動到的荷葉進行標號(一個荷葉可能有兩個編號)，移動到起始點的前一片荷葉為0號荷葉，即在1-0時稱0號荷葉。

(五)在大於1組邊形時，M型(換組同方向)走法:開頭順時針方向，到達交接點後並以順時針換到另外一個邊形上。
S型(換組換方向)走法:當起點在奇數邊形數上，以順時針方向移動，到達交接點時變換方向；當起點在偶數邊形數上，以逆時針方向移動，到達交接點時變換方向。

M型走法


S型走法


(六)在大於1組邊形時，a指的是A/2 或 (A+1)/2(在轉換後A和B邊形的重疊荷葉較小的i值)，b指的是$a+\frac{B}{2}$或$a+\frac{B-1}{2}$(在轉換後B和C邊形的重疊荷葉較小的i值)。i號青蛙(在一組邊形數以外時，i皆指轉換後的i)由i號荷葉開始跳躍。n視情況分成三種狀況：1.正整數；2.非負整數；3.零或偶數，會加註在後面。

(七)以一組邊形做例子，依順時針標號，在第A片荷葉時，稱0號荷葉，而青蛙以順時針跳，稱作向前；以方向的改變分為定向、回頭及不斷換向。定向指皆為向前移動；回頭指每次碰到起始點即時換向，即第一圈向前移動，第二圈向後，第三圈向前，以此類推；不斷換向指跳第一次向前，第二次向後，第三次向前，以此類推。

(八)mod(a,b)指的是取a除以b的餘數。

伍、研究過程與方法

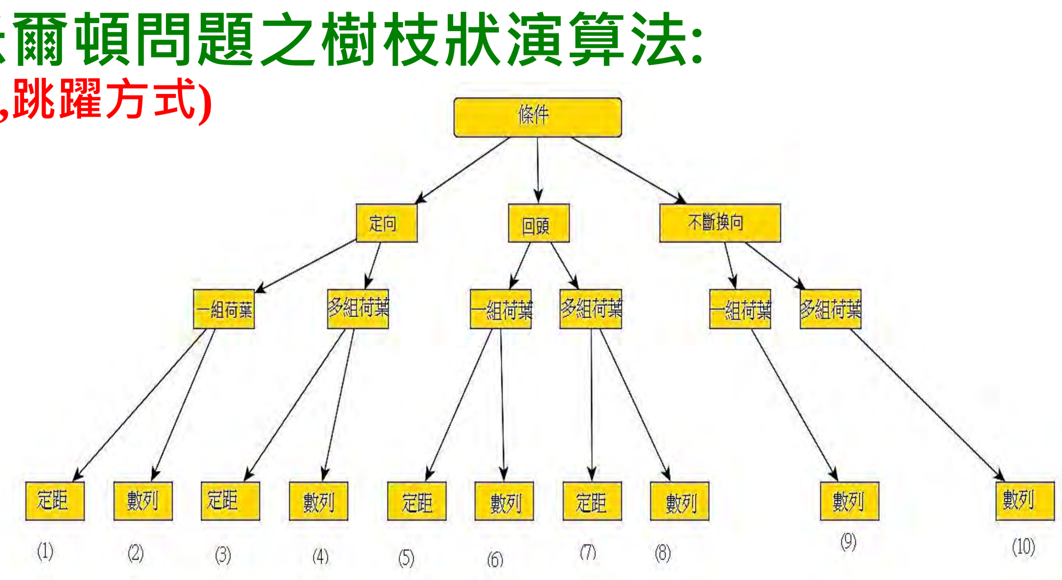
研究期間，分成了不少階段，以及不同的突破，下表是我們研究進度概要：

時間	進展
107 年 9 月	發現青蛙環繞跳荷葉落點，並開始研究「八隻青蛙與停車場的邂逅」(三)
107 年 10 月	發現有漢米爾頓問題，並著手研究「從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析」(二)
107 年 11 月	分別以遞增跳 1,2,3,4,5,‧‧‧的步數、以費氏數列及質數當數列為跳的步數
107 年 12 月	嘗試推廣到正 A 邊形及青蛙所跳步數進行分類探討，並找出各種情形的規律
108 年 1 月	尋找可能經過起始點時，在起始點做折返使其移動方向與原方向相反的規律
108 年 2 月	推廣到由一組 A(≧3)邊形的荷葉及一組 B(≧3)邊形的荷葉，將 A 與 B 的其中一片荷葉重疊，以 M 型為路徑走法，進行分類找尋其規律，並分別探討是否有出現漢米爾頓問題？
108 年 3 月	以盧卡斯數列為青蛙所跳步數進行分類探討，並找出各種情形的規律性
108 年 4 月	仍以 M 型為路徑走法，水平擴展由左向右依序為 A 與 B，其和為 Z(≧6)，甚至推廣到 A(≧3)邊形與 B(≧3)邊形與 C(≧3)邊形的和為 Z(≧9)，依此類推；進行分類找尋其規律，並分別探討是否有出現漢米爾頓問題？
108 年 5 月	將上述所有做法改以 S 型為路徑走法，並與 M 型為路徑走法並列做比較。
108 年 6 月	將新增的不同跳躍方式整合並分類，同時加入不斷換向的考量因素做討論。

表二:研究進度概要

二、環繞跳荷葉落點處的漢米爾頓問題之樹枝狀演算法:

得到條件(方向,幾組邊形數(S型or M型),跳躍方式)
輸入數值()
計算()
轉換()
輸出()



得到條件(方向,幾組邊形數,跳躍方式)
依得到的條件，分別有以下幾種狀況：

條件(回頭,多組,遞增數列)
輸入(A B C…,數列(ε1ε2ε3),i)
計算(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)
轉換(1=1-1,2=1-2,…)
轉換後輸出(i→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→圈數為偶【mod(N+i-mod(總跳距,N),N)】,圈數為奇【mod(i+總跳距,N)】→…)

<1>回頭,兩組邊形,遞增數列
ex:1號青蛙在A邊形為3邊形、B邊形為3邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)，
M型跳法推得落點形成的數列為1-1→1-2→2-2→1-2→1-0→1-1，
S型跳法推得落點形成的數列為1-1→1-2→2-0→1-2→1-0→1-1。

<2>回頭,三組邊形,遞增數列
ex:1號青蛙在A邊形為3邊形、B邊形為3邊形、C邊形為3邊形中以費氏數列(1,1,2,3,5)，
M型跳法推得落點形成的數列為1-1→1-2→2-2→3-0→1-2→2-0，
S型跳法推得落點形成的數列為1-1→1-2→2-0→3-2→1-2→2-2。

條件(不斷換向,一組,遞增數列)
輸入(N,數列(ε1ε2ε3),i)
計算(i→mod(i+總跳距,N)→mod(N+i-mod(總跳距,N),N),mod(i+總跳距,N),→…)
轉換(X)
輸出(i→mod(i+總跳距,N)→mod(N+i-mod(總跳距,N),N),mod(i+總跳距,N)→…)
ex:0號青蛙在5邊形中，以費氏數列(1,1,2,3,5)來跳，推得落點數列為0→1→0→2→4→4。

陸、研究結果

由A個荷葉擺成正A(≧3)邊形，依順時針標號，在第A片荷葉時稱0號荷葉，起始點為i的情況下，青蛙依順時針方向移動，荷葉上i號青蛙由i號荷葉開始，將有出現漢米爾頓問題的情形分類討論如下：

一、有漢米爾頓問題且規律只有一種，分別有三種情形討論：

(一)定向-一組(荷葉無重疊)邊形-每次跳的距離相同且與邊形數互質：

A和y互質時有漢米爾頓迴路。

例:A為7、y為2、i為1時，有漢米爾頓迴路。

A	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	2	1	1	→	0	→	2	→	1	→	0	→	2	→	1	→	0
4	3	1	1	→	0	→	3	→	2	→	1	→	0	→	3	→	2
5	2	1	1	→	3	→	0	→	2	→	4	→	1	→	3	→	0
6	5	1	1	→	0	→	5	→	4	→	3	→	2	→	1	→	0
7	2	1	1	→	3	→	5	→	0	→	2	→	4	→	6	→	1
8	3	1	1	→	4	→	7	→	2	→	5	→	0	→	3	→	6
9	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	0	→	2	→	4	→	6
10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	3	→	6	→	9	→	2
11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	2	→	4
12	5	1	1	→	6	→	11	→	4	→	9	→	2	→	7	→	0

(二)回頭-一組(荷葉無重疊)邊形-每次跳的距離相同且與邊形數互質：

當A與y互質且y為奇數時，落點數列呈現出漢米爾頓迴路。

例:A為7、y為2、i為1時，有漢米爾頓迴路。

A	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	1	→	2	→	0	→	1	→	0	→	2	→	1	→	2
4	3	1	1	→	0	→	3	→	2	→	1	→	2	→	3	→	0
5	2	1	1	→	3	→	0	→	0	→	3	→	1	→	3	→	0
6	5	1	1	→	0	→	3	→	4	→	5	→	2	→	1	→	2
7	2	1	1	→	3	→	5	→	0	→	0	→	5	→	3	→	1
8	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	5	→	2	→	3	→	6
9	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	0	→	0	→	7	→	5
10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	9	→	6	→	3	→	2
11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	0	→	9
12	5	1	1	→	6	→	11	→	10	→	5	→	2	→	7	→	0

(三)不斷換向-一組(荷葉無重疊)邊形-以遞增數列作跳的距離-等差數列：

若等差數列中的首項=公差且首項和公差皆與A互質，呈現的結果皆有漢米爾頓路徑，等差數列中的首項和公差可以去加減正整數倍的A值(不一定要同加減)也都有漢米爾頓路徑。

例：在跳首項為1、公差為1的等差數列，A為3、i為1時有漢米爾頓路徑。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	0	→	2	→	1	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	0	→	3	→	3	→	0	→	2	→	1
5	1	1	→	2	→	0	→	3	→	4	→	4	→	3	→	0
6	1	1	→	2	→	0	→	3	→	5	→	4	→	4	→	5
7	1	1	→	2	→	0	→	3	→	6	→	4	→	5	→	5
8	1	1	→	2	→	0	→	3	→	7	→	4	→	6	→	5
9	1	1	→	2	→	0	→	3	→	8	→	4	→	7	→	5
10	1	1	→	2	→	0	→	3	→	9	→	4	→	8	→	5
11	1	1	→	2	→	0	→	3	→	10	→	4	→	9	→	5
12	1	1	→	2	→	0	→	3	→	11	→	4	→	10	→	5

二、有漢米爾頓問題且規律不只一種，分別有三種情形討論：

(一)定向-一組(荷葉無重疊)邊形-以遞增數列作跳的距離-等差數列：

<1>若等差數列中的首項值與A互質，公差為nxA值(n為正整數)，則有漢米爾頓迴路

<2>若A值為某數的次方(除了2的次方)時，此時不考慮<1>的狀況，若等差數列中的首項值與A互質，當公差值為此某數的正整數倍數時，會有漢米爾頓路徑。

<3>若A值為2的次方時，此時不考慮<1>的狀況，若等差數列中的首項值與A互質，當公差值與等差數列中的首項相同，會有漢米爾頓路徑，此時公差值去加減正整數倍的A值也有漢米爾頓路徑，或公差值為4的正整數倍數時也會有漢米爾頓路徑。

例：在跳首項為1、公差為3的等差數列中，A為3、i為1時有漢米爾頓迴路

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	2	→	0	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	2	→	1	→	3	→	0	→	0	→	3
5	1	1	→	2	→	1	→	3	→	3	→	1	→	2	→	1
6	1	1	→	2	→	0	→	1	→	5	→	0	→	4	→	5
7	1	1	→	2	→	6	→	6	→	2	→	1	→	3	→	1
8	1	1	→	2	→	6	→	5	→	7	→	4	→	4	→	7
9	1	1	→	2	→	6	→	4	→	5	→	0	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	6	→	3	→	3	→	6	→	2	→	1
11	1	1	→	2	→	6	→	2	→	1	→	3	→	8	→	5
12	1	1	→	2	→	6	→	1	→	11	→	0	→	4	→	11

(二)回頭-一組(荷葉無重疊)邊形-以遞增數列作跳的距離-等差數列： *註:公差>0

<table>
<tr><th>A的奇偶</th><th>A值</th><th>首項</th><th>公差</th><th>下一解公差增加量</th></tr>
<tr><td rowspan="5">A為奇數</td><td rowspan="4">A=4n-1</td><td rowspan="2">首項與A互質且為奇</td><td>公差為A的倍數且為偶</td><td></td></tr>
<tr><td>公差=2*首項-2A or 2*首項</td><td>+2A</td></tr>
<tr><td rowspan="2">首項與A互質且為偶</td><td>公差為A的倍數且為奇</td><td></td></tr>
<tr><td>公差=2*首項+A or 2*首項-A</td><td>+2A</td></tr>
<tr><td>A=4n+1</td><td>首項為奇</td><td>公差為A的倍數</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">A為偶數</td><td></td><td>首項與A互質</td><td>公差為A的偶數倍數</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">A=4</td><td>首項為奇</td><td>公差為(a1)/8的餘數</td><td>+2A</td></tr>
<tr><td>首項不為4的倍數且為偶</td><td>公差為(a1)/8的餘數再除以2</td><td>+A</td></tr>
</table>

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	0	→	2	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	1	→	0	→	1	→	2	→	1	→	0
5	1	1	→	2	→	3	→	2	→	1	→	1	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	5	→	4	→	5	→	0	→	1	→	2
7	1	1	→	2	→	0	→	1	→	3	→	6	→	3	→	1
8	1	1	→	2	→	1	→	6	→	1	→	2	→	1	→	6
9	1	1	→	2	→	0	→	4	→	5	→	8	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	9	→	2	→	1	→	6	→	5	→	8
11	1	1	→	2	→	9	→	2	→	5	→	2	→	9	→	2
12	1	1	→	2	→	9	→	4	→	9	→	8	→	1	→	0

例：在跳首項為1、公差為6的等差數列，A為3、i為1時有漢米爾頓迴路。

(三)不斷換向-一組邊形-以遞增數列作跳的距離-某數的次方形成之數列：

在A不為任意數的≧2次方或為4，利用nA-1 (n為正整數)的次方所成的落點數列來進行跳躍，會有漢米爾頓迴路；在A為任意數的≧2次方且不為4，狀況和此任意數相同(如果任意數為2，則在4的倍數-1的次方數列，有漢米爾頓迴路，例如 2^3 與 2^2 符合漢米爾頓迴路的次方所成的數列來進行跳躍相同。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	1	→	2	→	0	→	1	→	2
4	1	1	→	2	→	0	→	0	→	0	→	0	→	0	→	0
5	1	1	→	2	→	0	→	4	→	1	→	2	→	0	→	4
6	1	1	→	2	→	0	→	4	→	2	→	0	→	4	→	2
7	1	1	→	2	→	0	→	4	→	3	→	5	→	1	→	2
8	1	1	→	2	→	0	→	4	→	4	→	4	→	4	→	4
9	1	1	→	2	→	0	→	4	→	5	→	3	→	7	→	8
10	1	1	→	2	→	0	→	4	→	6	→	2	→	0	→	4
11	1	1	→	2	→	0	→	4	→	7	→	1	→	2	→	0
12	1	1	→	2	→	0	→	4	→	8	→	0	→	4	→	8

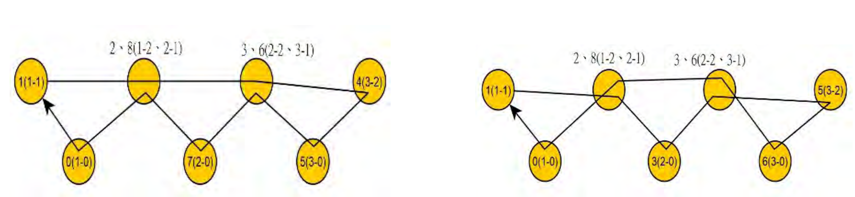
例：在跳由2的次方所組成的數列，A為3、i為1時有漢米爾頓迴路。

三、有漢米爾頓問題但無規律，分別有三種情形討論：

(一)定向-三組邊形-每次跳的距離相同且與邊形數總和互質：

在y和i為特定值時，落點數列中會呈現漢米爾頓路徑，

但y和i並無特殊規律。



【舉例說明】：

M型走法當Z=9時，y=1、i=4所成的落點數列有漢米爾頓路徑；

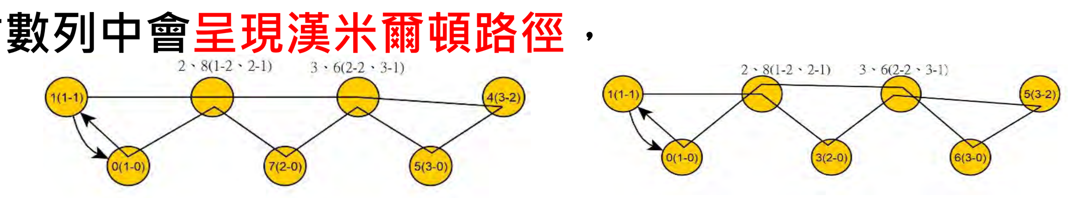
S型走法當Z=9時，y=1、i=0所成的落點數列有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	3	→	6	→	9	→	2
	3	4	4	=	11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	2	→	4
	4	4	4	=	12	5	1	1	→	6	→	11	→	4	→	9	→	2	→	7	→	0
	4	4	5	=	13	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	0	→	2
	4	5	5	=	14	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	2	→	5	→	8
	5	5	5	=	15	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	13	→	0
	5	5	6	=	16	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	0	→	3	→	6

(二)回頭-三組邊形-每次跳的距離相同且與邊形數總和互質：

在y和i為特定值時，落點數列中會呈現漢米爾頓路徑，

但y和i並無特殊規律。



【舉例說明】：

M型走法當Z=9時，y=1、i=4所成的落點數列有漢米爾頓路徑；

S型走法當Z=9時，y=1、i=0所成的落點數列有漢米爾頓路徑。

	A	B	C	=	Z	y	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	1	0	1-0	→	1-1	→	1-2	→	2-0	→	2-2	→	3-2	→	3-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	4	3-2	→	3-0	→	2-2	→	2-0	→	1-2	→	1-0	→	1-1	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
	3	3	4	=	10	3	1	1	→	4	→	7	→	0	→	9	→	6	→	3	→	2
	3	4	4	=	11	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	0	→	0	→	9
	4	4	4	=	12	5	1	1	→	6	→	11	→	10	→	5	→	2	→	7	→	0
	4	4	5	=	13	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	0	→	0
	4	5	5	=	14	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	0	→	11	→	8
	5	5	5	=	15	2	1	1	→	3	→	5	→	7	→	9	→	11	→	13	→	0
	5	5	6	=	16	3	1	1	→	4	→	7	→	10	→	13	→	0	→	15	→	12

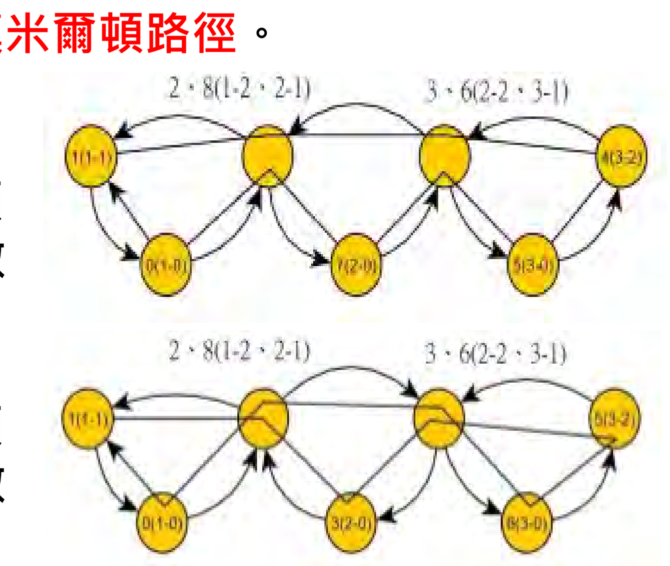
(三)不斷換向-三組邊形-以遞增數列作跳的距離-等差數列：

在每個Z值中，由特定的i點開始跳特定的等差數列，所成的落點數列有漢米爾頓路徑，找出符合漢米爾頓路徑等差數列中的首項和公差再加上正整數倍的Z值(不一定要同加減)也會有漢米爾頓路徑。

【舉例說明】：

M型走法中，當Z=9時，由1開始跳首項=1、公差=5的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由1開始跳首項=10、公差=5的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑；

S型走法中，當Z=9時，由6開始跳首項=1、公差=5的等差數列所成落點數列有漢米爾頓路徑，由6開始跳首項=10、公差=5的等差數列所成落點數列也有漢米爾頓路徑。



	A	B	C	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
S型走法	3	3	3	=	9	6	3-0	→	2-2	→	1-1	→	2-0	→	3-2	→	1-2	→	1-0	→	2-2
M型走法	3	3	3	=	9	1	1-1	→	1-2	→	3-0	→	2-0	→	1-0	→	2-2	→	3-2	→	1-2
	3	3	3	=	9	1	1	→	2	→	5	→	7	→	0	→	3	→	4	→	8
	3	3	4	=	10	1	1	→	2	→	6	→	7	→	1	→	2	→	6	→	7
	3	4	4	=	11	1	1	→	2	→	7	→	7	→	2	→	1	→	8	→	6
	4	4	4	=	12	1	1	→	2	→	8	→	7	→	3	→	0	→	10	→	5
	4	4	5	=	13	1	1	→	2	→	9	→	7	→	4	→	12	→	12	→	4
	4	5	5	=	14	1	1	→	2	→	10	→	7	→	5	→	12	→	0	→	3
	5	5	5	=	15	1	1	→	2	→	11	→	7	→	6	→	12	→	1	→	2
	5	5	6	=	16	1	1	→	2	→	12	→	7	→	7	→	12	→	2	→	1

四、在我們有限的資源下，僅發現某情況下有一個可符合漢米爾頓問題，分別有三種情形討論：

(一)定向-一組邊形-以遞增數列作跳的距離-費氏數列：

A為3時，有漢米爾頓路徑。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8
3	1	1	→	2	→	0	→	2	→	2	→	1	→	0	→	1
4	1	1	→	2	→	3	→	1	→	0	→	1	→	1	→	2
5	1	1	→	2	→	3	→	0	→	3	→	3	→	1	→	4
6	1	1	→	2	→	3	→	5	→	2	→	1	→	3	→	4
7	1	1	→	2	→	3	→	5	→	1	→	6	→	0	→	6
8	1	1	→	2	→	3	→	5	→	0	→	5	→	5	→	2
9	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	4	→	3	→	7
10	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	3	→	1	→	4
11	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	2	→	10	→	1
12	1	1	→	2	→	3	→	5	→	8	→	1	→	9	→	10

(二)不斷換向-：

1. 一組邊形-以遞增數列作跳的距離-盧卡斯數列：

A為3時，有漢米爾頓路徑。

A	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6	→	7	→	8	→	9	→	10	→	11
3	1	1	→	0	→	2	→	2	→	1	→	2	→	0	→	0	→	1	→	0	→	2
4	1	1	→	3	→	2	→	1	→	1	→	0	→	1	→	3	→	2	→	1	→	1
5	1	1	→	3	→	2	→	0	→	1	→	3	→	2	→	0	→	1	→	3	→	2
6	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	2	→	3	→	3	→	4	→	3	→	5
7	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	1	→	4	→	1	→	0	→	5	→	6
8	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	0	→	5	→	7	→	2	→	1	→	5
9	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	8	→	6	→	6	→	4	→	6	→	2
10	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	8	→	7	→	5	→	6	→	3	→	7
11	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	8	→	8	→	4	→	8	→	0	→	1
12	1	1	→	3	→	2	→	5	→	1	→	8	→	9	→	3	→	10	→	9	→	5

2.二組邊形-以遞增數列作跳的距離-質數數列：

當Z=6，i=1或4時，有漢米爾頓路徑。

	A	B	=	Z	i	1	→	2	→	3	→	4	→	5	→	6
S型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-0	→	1-0	→	1-2	→	2-2	→	2-0
M型走法	3	3	=	6	1	1-1	→	2-2	→	1-0	→	1-2	→	2-0	→	2-2
	3	3	=	6	1	1	→	3	→	0	→	5	→	4	→	3
	4	4	=	8	1	1	→	3	→	0	→	5	→	6	→	1
	4	5	=	9	1	1	→	3	→	0	→	5	→	7	→	0
	5	5	=	10	1	1	→	3	→	0	→	5	→	8	→	9
	5	6	=	11	1	1	→	3	→	0	→	5	→	9	→	9
	6	6	=	12	1	1	→	3	→	0	→	5	→	10	→	9
	6	7	=	13	1	1	→	3	→	0	→	5	→	11	→	9
	7	7	=	14	1	1	→	3	→	0	→	5	→	12	→	9

柒、討論

雖然我們更深入地探究、發掘並解決相當部分的問題，而還未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、關於擴充到更多組邊形(>3組)有漢米爾頓問題但目前尚未發現規律，則是否存在特殊性？或與邊形組數相關聯性？

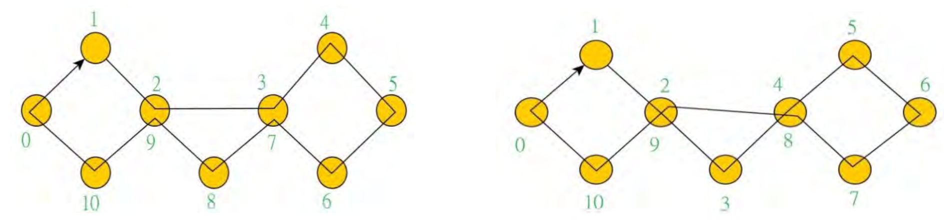
二、邊形組數的規律是否有出現漢米爾頓問題和重疊荷葉的數量奇偶性是否有關？

三、可再增加更多種類的數列，來加以探討是否有出現漢米爾頓問題？

四、從兩片重疊荷葉探討更多重疊荷葉時，最前、最後一組邊形為任意邊形，固定距離為1(狀況較明顯)，以中間的邊形數不同之狀況，探討是否有特殊規律存在？在下圖中，左邊皆為M型走法，而右邊皆為S型走法

(一)皆為三角形或皆為四邊形：

1.三組荷葉呈現：

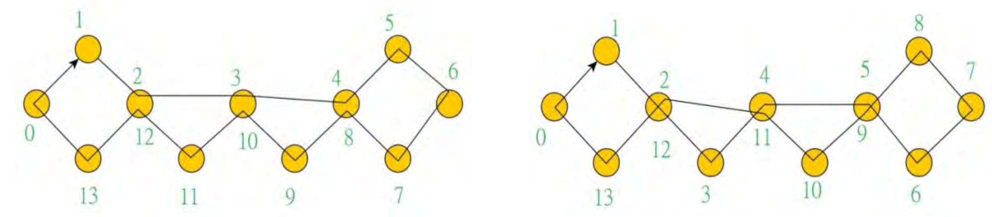


(三角形換為四邊形狀況相同)

M型走法時，i在最後一個邊形的第二片荷葉會有漢米爾頓路徑。

S型走法時，i為第一組與第二組的重疊荷葉在第一組中的下一荷葉，有漢米爾頓路徑。

2.四組荷葉呈現：



(任意三角形換為四邊形狀況相同)

M型走法時，i在最後一個邊形的第二片荷葉會有漢米爾頓路徑。

S型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

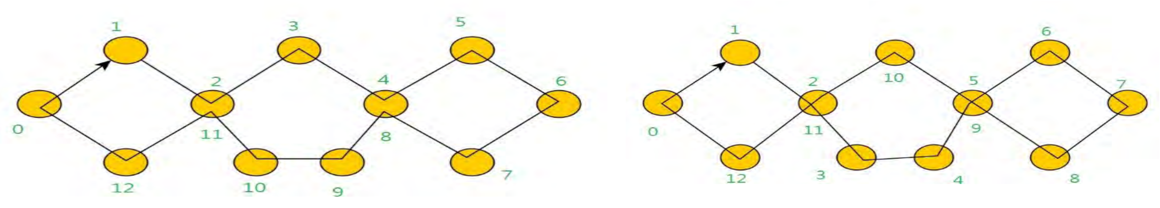
(二)有出現三角形或出現四邊形或兩者皆出現(有三角形、四邊形以外的邊形)：

1.四組荷葉呈現：

無論M、S型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

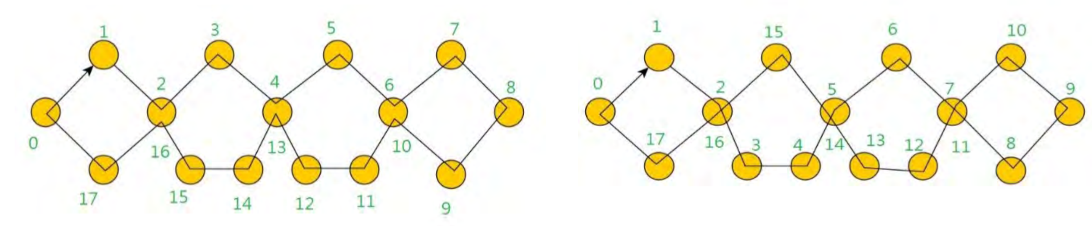
(三)無三角形且無四邊形：

1.三組荷葉呈現：



無論M、S型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

2.四組荷葉呈現：



無論M、S型走法時，沒有發現漢米爾頓問題。

對於上述我們察覺各類情形所呈現的規律性，尚未研究完善，目前我們仍持續推導它，並且去尋找有沒有其它種情形，試著驗證其存在性，同時就有漢米爾頓問題的狀況，以不同的特性討論說明其唯一性。綜合以上的討論，將是我們日後繼續研究精進其完備的方向。

捌、結論

就不同的條件及其狀況，做出的表格統整如下：

定向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	每一次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	有漢米爾頓迴路
					不互質	無漢米爾頓問題
			以遞增數列作跳的距離	以等差數列		符合等差數列中的首項值與A互質，公差為nA值(n為正整數)，有漢米爾頓迴路
						等差數列中的首項值與A互質且A值為某數的次方(除了2的次方)，等差數列中的首項值與A互質，公差為此某數的正整數倍數，有漢米爾頓路徑
						等差數列中的首項值與A互質且A值為2的次方，公差值與等差數列中的首項相同，而公差值去加減正整數倍的A值，或公差值為4的正整數倍數，有漢米爾頓路徑
				以費氏數列		存在特例
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		存在特例
		兩組(重疊於一片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	i為a+y或a+B+y時，有漢米爾頓迴路
					不互質	無漢米爾頓問題
			以遞增數列作跳的距離	以等差數列		存在特例
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		i為a+1或a+B+1，且跳nZ+1(n為非負整數)次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑
		三組(重疊於兩片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	存在特例
					不互質	無漢米爾頓問題
			以遞增數列作跳的距離	以等差數列		存在特例
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		S型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三或四邊形，若i=0，跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑
						M型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三或四邊形，i=a+2，在跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列時，有漢米爾頓路徑
回頭	組的數量	一組(無重疊荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	y為奇數，有漢米爾頓迴路
					不互質	無漢米爾頓問題
			以遞增數列作跳的距離	以等差數列		符合研究結果中的回頭一組等差數列之表格的規律，即有漢米爾頓問題
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		nA+1(n為偶數或0)的次方所組成的數列時，有漢米爾頓迴路
						A=3，在跳3的奇數倍時次方所組成的數列時，有漢米爾頓迴路
		兩組(重疊於一片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	y為奇數，i為a+y或a+B+y，有漢米爾頓路徑
					不互質	無漢米爾頓問題
			以遞增數列作跳的距離	以等差數列		存在特例
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		i為a+1或a+B+1，跳nZ+1(n為偶數或0)次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑。
		三組(重疊於兩片荷葉)	每次跳的距離相同	跳的距離與邊形數	互質	存在特例
					不互質	無漢米爾頓問題
			以遞增數列作跳的距離	以等差數列		存在特例
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		S型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三邊形，i=(a+C+4)/2的餘數，跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列，有漢米爾頓路徑
						M型走法，第一組以及最後一組邊形之外的邊形數皆要為三邊形，i=a+1 (幾組邊形-1)，在跳nZ+1(n為非負整數)的次方所組成的數列時，有漢米爾頓路徑
不斷換向	組的數量	一組(無重疊荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以等差數列		首項=公差且首項和公差皆與A互質，首項和公差可以去加減正整數倍的A值(不一定要同加減)，有漢米爾頓路徑
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		存在特例
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		在A為某數的次方時，此某數的正整數倍數減一(若某數為2則為4的倍數-1)的次方數列有漢米爾頓迴路
		兩組(重疊於一片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以等差數列		Z為奇數，i為a或a+B-1，等差數列中的首項和公差皆為nZ+1(n為非負整數)時，有漢米爾頓迴路
						Z為偶數，i為a或a+B，等差數列中的首項和公差皆為nZ+1(n為非負整數)時，有漢米爾頓迴路
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		存在特例
				以某數的次方形成之數列		存在特例
		三組(重疊於兩片荷葉)	以遞增數列作跳的距離	以等差數列		存在特例
				以費氏數列		無漢米爾頓問題
				以盧卡斯數列		無漢米爾頓問題
				以質數數列		無漢米爾頓問題
				以某數的次方形成之數列		存在特例

就參考文獻及我們所研究的作品，將研究範疇與貢獻統整如下表格：

全國科展 or 台灣國際科展	組別	作品名稱	研究範疇與貢獻
2005年 台灣國際科展	高中	停車場就是彈硬幣	研究停車場問題和彈硬幣遊戲之間有趣的關連。
第57屆	國中	八隻青蛙與停車場的邂逅	給出「有幾片荷葉有青蛙」與落點的一般式，並定義新的「停車場問題」，找到Cycle的一般式和落點的快速演算法，更發現停車場問題 Cycle 和巴斯卡三角形的關係！
第57屆	國中	從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析	以總杯數及翻杯數的奇偶性將其分成四類，以及初始向上杯數不等於總杯數的情形來作探討
第59屆	國中	【軌跡密碼】─從青蛙環繞跳荷葉落點探究漢米爾頓問題之解析 (本作品是我們所研究的)	(1)在定向、回頭和不斷換向三種狀況下，推廣到$A(\geq3)$邊形與$B(\geq3)$邊形的和為$Z(\geq6)$，甚至推廣到$A(\geq3)$邊形與$B(\geq3)$邊形與$C(\geq3)$邊形的和為$Z(\geq9)$，在每種狀況有些有獨特的規律，可找出漢米爾頓問題；有些有漢米爾頓問題卻沒有獨特的規律；有些是沒有漢米爾頓問題。 (2)除質數數列外，以其他數列做跳的距離，都會重複落點數列。 (3)在跳固定距離時，距離和邊形數(總和邊形數)互質為前提，才可能有漢米爾頓問題。 (4)在一組荷葉邊形中，i值並不會影響到是否有漢米爾頓問題，但在兩組、三組荷葉邊形時，只有特定 i 值才會有漢米爾頓問題。 (5)在兩組荷葉邊形，以S型走法和M型走法中，當跳相同定距或數列時，若S型走法有漢米爾頓問題，則M型走法也會有，且 i 值相同，在三組荷葉邊形有漢米爾頓的狀況中，則 i 值不同。 (6)使用我們所研發的青蛙的落點荷葉之樹枝狀演算法轉化成漢米爾頓問題，運用數學邏輯，寫出程式並執行之。

玖、參考資料及其他

一、游森棚(2016)，八隻青蛙，科學研習月刊，No.55-12，pp.61

二、連亮凱、胡和維、吳懿宸，第五十七屆全國科展國中組數學科第三名「從翻杯問題探究漢米爾頓路徑解析」

三、陳姿妤，第五十七屆全國科展國中組數學科佳作「八隻青蛙與停車場的邂逅」

四、賴俊儒，2005台灣國際科展數學科第一名「停車場就是彈硬幣」

五、馬榮喜、陳世易，國中數學第四冊，康軒文教事業股份有限公司，2015

六、許志農 主編，高中數學第二冊，龍騰文化事業股份有限公司，2011

七、徐力行 著，沒有數字的數學，天下文化，2003