中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030416

走進『股股差』的漩渦中

學校名稱：宜蘭縣立冬山國民中學

作者：	指導老師：
國二 林詩芮	陳建淳
國二 黃亭毓	

關鍵詞：畢氏定理、畢氏數、衍生數對

摘　　要

『畢氏定理』，一個在國中數學裡幾乎每日必見的定理，原稱『畢達哥拉斯定理』、簡稱『畢氏定理』，文獻中亦有人稱『勾股定理』、『商高定理』，好多好多的名稱，但卻都掩飾不了『畢氏定理』在數學上的重要性，而關於此定理的討論與延伸出去的美，真的數都數不盡，如果這時候的你已被我們吸引了，不要猶豫，跟我們一起進入『畢氏』的世界裏吧！

壹、研究動機

二年級時，我們首度接觸到『畢氏定理』，一個看似簡單的定理，卻讓我們幾個調皮的學生走進數學的噩夢中，每天有的是算不完的練習題，只因數學老師說此定理非常非常的重要啊！此外，老師更要求我們記住幾組常用的畢氏定理正整數解，**如：$(3,4,5)$、$(5,12,13)$、$(6,8,10)$、$(7,24,25)$、$(8,15,17)$、$(9,12,15)$、$(9,40,41)$、$(20,21,29)\cdots$，這些是常用的組數，數學上稱為『畢達哥拉斯數』**，但是我們都知道畢氏定理的正整數解事實上有好多好多，於是我們一頭栽進了這條找尋『畢達哥拉斯數』的道路裡…。

二年前學姐們從每組畢達哥拉斯數的斜邊與較大的股之間的差來找尋出畢達哥拉斯原始三元數(primitive Pythagorean triples)的通則，得到了下列的結果：

(一)畢達哥拉斯數的通則：

1、斜邊與較大的股恰差 1：畢氏數的通則：$(2k+3, 2k^2+6k+4, 2k^2+6k+5)$，$k \ge 0$

2、斜邊與較大的股恰差 2：畢氏數的通則：$(2(k+3), k^2+6k+8, k^2+6k+10)$，$k \ge 0$

3、斜邊與較大的股恰差 3：畢氏數的通則：$(3(2k+3), 3(2k^2+6k+4), 3(2k^2+6k+5))$，$k \ge 0$

4、斜邊與較大的股恰差 4：畢氏數的通則：$(4(k+3), 2(k^2+6k+8), 2(k^2+6k+10))$，$k \ge 0$

5、若斜邊與較大的股恰差 t：當 $t \ne 2n^2$，$n = 2$、3、4…，即 $t \ne 8$、18、32…時

若 t 為奇數，其畢氏數的通則：$\left(t(2k+3), t(2k^2+6k+4), t(2k^2+6k+5)\right)$，$k \ge 0$

若 t 為偶數，其畢氏數的通則：$\left(t(k+3), \frac{t}{2}(k^2+6k+8), \frac{t}{2}(k^2+6k+10)\right)$，$k \ge 0$

(二)畢達哥拉斯原始三元數的通則：

1、對所有的正整數 k，$k \ge 1$，$(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$ 為畢氏原始三元數

2、對所有的正整數 h，$h \ge 2$，$(4h, 4h^2-1, 4h^2+1)$ 為畢氏原始三元數

3、對所有的正整數 u，$u \ge 2$，$(8u+4, 4u^2+4u-3, 4u^2+4u+5)$ 為畢氏原始三元數

4、對所有的正整數 v，$v \ge 1$，$(36v+12, 36v^2+24v-5, 36v^2+24v+13)$ 為畢氏原始三元數

5、對所有的正整數 v，$v \ge 1$，$(36v+24, 36v^2+48v+7, 36v^2+48v+25)$ 畢氏原始三元數

6、對所有的正整數 r，$r \ge 4$，$(16r+24, 4r^2+12r-7, 4r^2+12r+25)$ 為畢氏原始三元數

7、畢達哥拉斯數中，若能寫成$a^2+b^2=c^2$，a、b、c兩兩互質且$a<b<c$的形式時，斜邊與較大的股之差，也就是$c-b$只可能為 1、2、8、18、32、50、72……

即斜邊與較大股之差$c-b=1$之外，其餘均形如$c-b=2n^2$，n為正整數

由上述(一)(二)結果我們知道都是利用斜邊與較大的股之間的差來找尋出畢達哥拉斯原始三元數，於是我們想由最大股與斜邊差的討論轉變為兩股差的討論，尋找不一樣的“畢氏”世界。

貳、研究目的

一、兩股差為 1 的畢氏原始三元數之間有什麼關係？是否可將所有兩股差為 1 的畢氏原始三元數找出來？

二、要產生畢氏原始三元數，其兩股差的數值有何限制？

三、若股差t滿足上面條件，是否可將所有的股差t都找出來？而不同股差t_1與t_2間是否也有關聯性存在？

參、走自己的路

<表一>：第 54 屆、55 屆全國科展作品名稱及摘要

屆別	作品名稱	摘　　　要
54	代代相傳─迭代勾股數之猜想	探討『勾股數迭代公式』的問題，並驗證「由『勾股形』可得到三個相似的矩陣來生成『勾股數迭代公式』」的猜想。研究的結果是以『勾股形』得到不同的勾股數關係式，接著以這些不同的勾股數關係式做迭代運算，得到了 78 個不同的勾股數矩陣迭代公式，再將具有相似矩陣的公式歸為同一類，則這 78 個公式共可分成 26 類，每類皆有 3 個公式，由此證明了勾股數迭代公式的猜想。在研究過程中我得到了一般的勾股數矩陣迭代公式。
55	分進合擊─分解勾股數	探討素勾股數家族的產生，研究方法是以『最簡真分數數列』產生素勾股數家族，研究結果是由最簡真分數數列產生股弦定差、勾弦定差及勾股定差之素勾股數家族，更進一步由最簡真分數數列產生素勾股數三元樹。

<表二>：刊登於中央研究院數學所數學傳播季刊第 150 和 151 期的數學文章摘要

期別	文章名稱	摘　　　要
150	畢氏三元數生成公式之研究與發展	本研究不同於以往的畢氏三元數生成公式之產生方式，從連續奇數和的公式，延伸至圓點方陣的點數和的公式後，進一步產生了畢氏三元數的生成公式。

151	勾股數迭代公式之研究與發展	清代數學家劉彝程由勾股數為邊長所構作的幾何圖形，以迭代的方式，產生了一組的勾股數迭代公式，此公式類似於貝格倫以及普萊斯的畢氏三元數迭代公式。本研究由勾股數為邊長所構作的幾何圖形之性質，以迭代的公式，找到了劉彝程的另外兩組公式，以及重新產生了貝格倫和普萊斯的公式。

當我們決定去深入討論畢氏原始三元數時，就決定從最大股與斜邊差的情形開始出發，而把學姐的作品用自己的認知去探討、去了解後，當我們要進入兩股差的討論，第一次做科展的我們找到了賴昱維於 103 年開始參加全國科展針對素勾股數陸續提出的作品，但在一次又一次的研讀後，我們兩個人卻陷入掙扎的困境，對於有著熱誠卻數學程度不算頂尖的我們，似乎找不到方向，也深深佩服賴昱維竟然對素勾股數有著如此精闢的見解。就在我們快要放棄的時候，老師跟我們說：『孩子，用你對畢氏的喜歡去做你想做的事；用你本身的數學能力去突破自己的極限』。就這樣…，我們倆決定為自己好好拚一次…。

肆、研究過程(一)

之前的研究，學姐從每組畢達哥拉斯數的斜邊與較大的股之間的差來找尋出畢達哥拉斯原始三元數(primitive Pythagorean triples)的通則，但是充滿好奇心的我們心中在想，若是從兩股的差來討論是否會有不一樣的美妙體會，如：$(3,4,5)$、$(20,21,29)$…等，於是我們用『畢氏定理』的通則：$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$，$m>n$，$(m,n)=1$，找到我們所要的正整數解，所以(m,n)真得非常的重要，如：當$(m,n)=(2,1)$時，$(a,b,c)=(4,3,5)$；或者是當$(m,n)=(4,1)$時，$(a,b,c)=(8,15,17)$，在這，我們稱(m,n)為畢氏三元數(a,b,c)的衍生數對，為此，我們進行了以下的幾點討論：

一、討論 I ：

觀察所背的八組中$(3,4,5)$、$(20,21,29)$這二組畢氏數，它們的股差都為 1，為了方便討論，我們先做了以下的討論：

我們假設一直角三角形三邊長為$(x, x+1, y)$，

由畢氏定理可列出 $x^2+(x+1)^2=y^2 \rightarrow y=\sqrt{x^2+(x+1)^2}$

我們利用 excel 試算表，找到了一些 y 的整數值，以及直角三角形三邊長$(x, x+1, y)$的正整數解，接著，我們將其結果以(a,b,c)的形式表示，並尋找其衍生數對(m,n)，再觀察彼此間是否有規律產生。

(a,b,c) $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$	(m,n)	n的值
$(4,3,5)$	$(2,1)$	1

$(20,21,29)$	$(5,2)$	2
$(120,119,169)$	$(12,5)$	5
$(696,697,985)$	$(29,12)$	12
$(4060,4059,5741)$	$(70,29)$	29
$(23660,23661,33461)$	$(169,70)$	70
……	……	……

由表格中的 n 值，我們看到了一條有規律的數列 1,2,5,12,29,70,⋯⋯

它滿足了 $5=1+2\times 2 \rightarrow a_3=a_1+2a_2$

$12=2+5\times 2 \rightarrow a_4=a_2+2a_3$

$29=5+12\times 2 \rightarrow a_5=a_3+2a_4$

$70=12+29\times 2 \rightarrow a_6=a_4+2a_5$

老師說這就是所謂的遞迴關係：$\boxed{a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}\text{，}n\geq 1}$

從上述的表格關係，我們發現這條數列的 a_{n+1} 及 a_n 項都可當作一組衍生數對 (m,n)，進而產生一組兩股差為 1 的直角三角形。

我們利用歸納法進行下列的驗證：

若 (a_{n+1},a_n) 為一組畢氏原始三元數衍生數對，且 $|b-a|=\left|\left(a_{n+1}{}^2-a_n{}^2\right)-2a_{n+1}a_n\right|=1$

則由下一組衍生數對 (a_{n+2},a_{n+1}) 所求之畢氏原始三元數其股差

$$\begin{aligned}|b'-a'|&=\left|\left(a_{n+2}{}^2-a_{n+1}{}^2\right)-2a_{n+2}a_{n+1}\right|\\&=\left|(a_n+2a_{n+1})^2-a_{n+1}{}^2-2(a_n+2a_{n+1})a_{n+1}\right|\\&=\left|a_n{}^2+4a_na_{n+1}+4a_{n+1}{}^2-a_{n+1}{}^2-2a_na_{n+1}-4a_{n+1}{}^2\right|\\&=\left|a_n{}^2-a_{n+1}{}^2+2a_na_{n+1}\right|\\&=\left|a_{n+1}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}a_n\right|=1\end{aligned}$$

所以我們可以透過此數列，進而找到無窮多個兩股差為 1 的直角三角形，此時我們的心是愉悅的，原來畢氏三元數竟然有那麼多豐富的寶藏等著我們去挖掘⋯⋯。

二、討論 II：

既然可以找到兩股差為 1 的結果，現在我們試著討論：兩股差為一般正整數，是否有類似討論 I 遞迴數列般的規則，我們用了 excel 找尋兩股差為 2、3、4、5、6 時，它所產生的三元數有些不是畢氏原始三元數，或者是其衍生數對沒有規律，最後在股差為 7 時，似乎給了我們一點希望：

(a,b,c) $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$	(m,n)	n的值
$(12,5,13)$	$(3,2)$	2
$(8,15,17)$	$(4,1)$	1
$(48,55,73)$	$(8,3)$	3
$(72,65,97)$	$(9,4)$	4
$(304,297,425)$	$(19,8)$	8
$(396,403,565)$	$(22,9)$	9
……	……	……

在表格中我們看到了兩條數列：

第一條數列：2,3,8,19,……

第二條數列：1,4,9,22,……

而這兩條數列亦滿足遞迴規則：$\boxed{a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}\text{，}n\geq 1}$

我們依舊利用歸納法進行下列的驗證：

若(a_{n+1},a_n)為一組畢氏原始三元數衍生數對，且 $|b-a|=\left|\left(a_{n+1}{}^2-a_n{}^2\right)-2a_{n+1}a_n\right|=7$

則由下一組衍生數對(a_{n+2},a_{n+1})所求之畢氏原始三元數其股差

$$\begin{aligned}
|b'-a'| &= \left|\left(a_{n+2}{}^2-a_{n+1}{}^2\right)-2a_{n+2}a_{n+1}\right| \\
&= \left|(a_n+2a_{n+1})^2-a_{n+1}{}^2-2(a_n+2a_{n+1})a_{n+1}\right| \\
&= \left|a_n{}^2+4a_na_{n+1}+4a_{n+1}{}^2-a_{n+1}{}^2-2a_na_{n+1}-4a_{n+1}{}^2\right| \\
&= \left|a_n{}^2-a_{n+1}{}^2+2a_na_{n+1}\right| \\
&= \left|a_{n+1}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}a_n\right|=7
\end{aligned}$$

然而當兩股差為 17、23 時，我們也發現了類似的情形，討論如下：

➩當兩股差為 17 時，發現 3,4,11,26,……及 2,7,16,39,……兩條數列。

➩當兩股差為 23 時，發現 4,7,18,43,……及 1,6,13,32,……兩條數列。

同樣的我們利用了歸納法確認此數列一樣可以無限延伸，而其衍生出的衍生數對一樣可以產生無數個同股差的畢式原始三元數。這個時候，我們深深的感受到兩股差及最大股與斜邊差的探討情形又有好多不同的地方，在這，我們可利用衍生數對的特性，例如：我們想求$(1748,1755,2477)$時，我們可由衍生數對去轉換進而求出所要的畢氏原始三元數。

$(3,2)\rightarrow(8,3)\rightarrow(19,8)\rightarrow(46,19)\rightarrow$將其轉換回畢氏原始三元數$(1748,1755,2477)$即可得之。

三、討論Ⅲ：(互質的重要性)

學姐參加宜蘭縣 106 年中小學科展的推論：(探討斜邊與較大的股之間的差)

衍生數對$(m,n)=1 \Leftrightarrow (2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質

我們針對此推論做修正並加以驗證：(探討兩股差)

(1)衍生數對$(m,n)=1$，m，n中有一個是奇數，一個是偶數$\Leftrightarrow (2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質　　　**(沈康身；歷史數學名題賞析 2)**

(2)數列中的一組衍生數對$(a_{n+1}, a_n)=1 \Leftrightarrow$下一組衍生數對$(a_{n+2}, a_{n+1})=1$

(3)衍生數對$(m,n)=1 \Leftrightarrow (m-n, n)=1$

驗證(1)：

〈1〉若衍生數對$(m,n)=1$，m，n中有一個是奇數，一個是偶數，則：

$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質

因為衍生數對$(m,n)=1$，m，n中有一個是奇數，一個是偶數

為了方便討論，設$m=2x+1$，$n=2y$，則：

$$
\begin{aligned}
(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) &= (2(2x+1)(2y), (2x+1)^2-(2y)^2, (2x+1)^2+(2y)^2) \\
&= (2(2x+1)(2y), 4x^2+4x+1-4y^2, 4x^2+4x+1+4y^2) \\
&= (2(4xy+2y), 2(2x^2+2x-2y^2)+1, 2(2x^2+2x+2y^2)+1)
\end{aligned}
$$

由結果可知$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$其中的兩股與斜邊會兩兩互質，即為畢氏原始三元數

〈2〉若$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質，則衍生數對$(m,n)=1$，且m，n中有一個是奇數，一個是偶數

① 假設$(m,n)=d$，$d\neq 1$

則令$m=dh$，$n=dk$，$(h,k)=1$，且$h>k$

$$(2mn, m^2-n^2) = (2\cdot dh\cdot dk, (dh)^2-(dk)^2) = (2d^2hk, d^2h^2-d^2k^2) = d^2 \neq 1 \text{矛盾}$$

$$(2mn, m^2+n^2) = (2\cdot dh\cdot dk, (dh)^2+(dk)^2) = (2d^2hk, d^2h^2+d^2k^2) = d^2 \neq 1 \text{矛盾}$$

$$
\begin{aligned}
(m^2-n^2, m^2+n^2) &= ((dh)^2-(dk)^2, (dh)^2+(dk)^2) = (d^2(h^2-k^2), d^2(h^2+k^2)) \\
&= d^2 \neq 1 \text{矛盾}
\end{aligned}
$$

故$(m,n)=1$

② 再驗證m，n中有一個是奇數，一個是偶數

如果m，n都為偶數，與$(m,n)=1$產生矛盾

如果m，n都為奇數，設$m=2x+1$，$n=2y+1$，則：

$$\left(2mn,m^2-n^2,m^2+n^2\right)=\left(2(2x+1)(2y+1),(2x+1)^2-(2y+1)^2,(2x+1)^2+(2y+1)^2\right)$$

$$=\left(2(2x+1)(2y+1),(2x+2y+2)(2x-2y),4x^2+4y^2+4x+4y+2\right)$$

必含有公因數 2，與$\left(2mn,m^2-n^2,m^2+n^2\right)$為畢氏原始三元數產生矛盾

由以上討論，可知衍生數對$(m,n)=1$，m，n中有一個是奇數，一個是偶數

$\Leftrightarrow\left(2mn,m^2-n^2,m^2+n^2\right)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質。

驗證(2)：

〈1〉若數列中的一組衍生數對$(a_{n+1},a_n)=1$，則下一組衍生數對$(a_{n+2},a_{n+1})=1$

假設$(a_{n+2},a_{n+1})=d$，$d\neq1$

則令$a_{n+2}=dh$，$a_{n+1}=dk$，$(h,k)=1$，$h>k$

$a_n=a_{n+2}-2a_{n+1}=dh-2dk=d(h-2k)$ 又$a_{n+1}=dk$

由上述討論可知$(a_{n+1},a_n)\neq1$和已知矛盾，故$(a_{n+2},a_{n+1})=1$

〈2〉若數列中的一組衍生數對$(a_{n+2},a_{n+1})=1$，則前一組衍生數對$(a_{n+1},a_n)=1$

假設$(a_{n+1},a_n)=d$，$d\neq1$

則令$a_{n+1}=dh$，$a_n=dk$，$(h,k)=1$，$h>k$

$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}=dk+2dh=d(k+2h)$ 又$a_{n+1}=dh$

由上述討論可知$(a_{n+2},a_{n+1})\neq1$和已知矛盾，故$(a_{n+1},a_n)=1$

驗證(3)：

〈1〉若衍生數對$(m,n)=1$，則$(m-n,n)=1$

假設$(m-n,n)=d$，$d\neq1$

則令$m-n=dh$，$n=dk$，$(h,k)=1$，$h>k$ 即$m=n+dh$

$\Rightarrow(m,n)=(n+dh,n)=(dk+dh,dk)=(d(k+h),dk)=d\neq1$和已知矛盾

故$(m-n,n)=1$

〈2〉若$(m-n,n)=1$，則衍生數對$(m,n)=1$

假設$(m,n)=d$，$d\neq1$

則令$m=dh$，$n=dk$，$(h,k)=1$，$h>k$

$\Rightarrow(m-n,n)=(dh-dk,dk)=(d(h-k),dk)=d\neq1$和已知矛盾，故$(m,n)=1$

四、討論Ⅳ：(股差的規則性)

經過 excel 的初步驗算，我們將會產生畢氏原始三元數的兩股差數字列成一數列：
1,7,17,23,31,41,47,49,71,73,79,89,97,103,113,119,127,137,151,161,343……
故似乎得到一個結果：**能產生畢氏原始三元數的兩股差能寫成$|8k\pm1|$的形式，k 為整數**

驗證：

由$|b-a|=\left|\left(m^2-n^2\right)-2mn\right|$且$m$，$n$中有一個是奇數，一個是偶數，驗證如下：

〈1〉若m為奇數，n為偶數，設$m=2x+1$，$n=2y$，則：

$$\begin{aligned}|b-a|=\left|\left(m^2-n^2\right)-2mn\right|&=\left|(2x+1)^2-(2y)^2-2(2x+1)(2y)\right|\\&=\left|4x^2+4x+1-4y^2-8xy-4y\right|\\&=\left|4x^2+4x-(4y^2+4y)-8xy+1\right|\\&=\left|4x(x+1)-4y(y+1)-8xy+1\right|\end{aligned}$$

而$x(x+1)$、$y(y+1)$為連續整數乘積必為 2 的倍數，$4x(x+1)$、$4y(y+1)$必為 8 的倍數，

故$|b-a|=\left|4x(x+1)-4y(y+1)-8xy+1\right|=|8k+1|$，$k$ 為整數

〈2〉若m為偶數，n為奇數，設$m=2x$，$n=2y+1$，則：

$$\begin{aligned}|b-a|=\left|\left(m^2-n^2\right)-2mn\right|&=\left|(2x)^2-(2y+1)^2-2(2x)(2y+1)\right|\\&=\left|4x^2-4y^2-4y-1-8xy-4x\right|\\&=\left|4x^2-4x-(4y^2+4y)-8xy-1\right|\\&=\left|4x(x-1)-4y(y+1)-8xy-1\right|\end{aligned}$$

而$x(x-1)$、$y(y+1)$為連續整數乘積必為 2 的倍數，$4x(x-1)$、$4y(y+1)$必為 8 的倍數，

故$|b-a|=\left|4x(x-1)-4y(y+1)-8xy-1\right|=|8k-1|$，$k$ 為整數

五、討論Ⅴ：(股差的合成性)

儘管我們可以找到當兩股差為 1,7,17,23 的時候，它們所產生的數列當轉換回衍生數對後都可求出所需要的畢氏三元數(Pythagorean triples)，但是除了用 excel 軟體去嘗試所有可能性外，是否有其他方法可以求出後面的股差數字，現在我們進行以下的討論：

若兩股差為 7 時，是否$7\times7=49$此數字是我們要找尋的股差呢？

⇨用 excel 軟體試算後，兩股差為 49 時，竟符合我們的要求！

若兩股差為 7 和 17 時，是否$7\times17=119$此數字是我們要找尋的股差呢？

⇨用 excel 軟體試算後，兩股差為 119 時，竟符合我們的要求！

若兩股差為 7 和 23 時，是否$7\times23=161$此數字是我們要找尋的股差呢？

⇨用 excel 軟體試算後，兩股差為 161 時，竟符合我們的要求！

若兩股差為 7 和 49 時，是否$7\times 49=343$此數字是我們要找尋的股差呢？

⇨用 excel 軟體試算後，兩股差為 343 時，竟符合我們的要求！

由上述討論我們發現當兩股差為t_1和t_2時，$t_1\times t_2$竟也是我們所要找尋的股差。為了去驗證它，我們試著去分析 t 的特性，

由 $t=|b-a|=\left|\left(m^2-n^2\right)-2mn\right|$

設$m-n=\Delta n$

則 $t=|b-a|=\left|\left(m^2-n^2\right)-2mn\right|=\left|m^2-2mn+n^2-2n^2\right|=\left|(m-n)^2-2n^2\right|=\left|\Delta n^2-2n^2\right|$

嘗試將其分解：

則 $t=|b-a|=\left|\Delta n^2-2n^2\right|=\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|$

現在我們將兩股差為 7,17,23 所產生的畢氏原始三元數做以下的分析：

t	(a,b,c)	(m,n)	分解式	備註
7	$(12,5,13)$	$(3,2)$	$7=\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(2\sqrt{2}-1\right)$	
17	$(24,7,25)$	$(4,3)$	$17=\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(3\sqrt{2}-1\right)$	
23	$(12,35,37)$	$(6,1)$	$23=\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)$	
t_1	……	……	$t_1=\left\|\Delta n_1+\sqrt{2}n_1\right\|\times\left\|\Delta n_1-\sqrt{2}n_1\right\|$	$\Delta n_1, n_1$為正整數
t_2	……	……	$t_2=\left\|\Delta n_2+\sqrt{2}n_2\right\|\times\left\|\Delta n_2-\sqrt{2}n_2\right\|$	$\Delta n_2, n_2$為正整數
……	……	……	……	……

(1)我們試著取股差為 7 時的$2\sqrt{2}+1$自乘 2 次

⇨$\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)=4\sqrt{2}+9$ 可知所得的新股差為$\left|9^2-2\times 4^2\right|=49=7\times 7$

(2)我們試著取股差為 7 時的$2\sqrt{2}+1$和股差為 17 時的$3\sqrt{2}+1$相乘

⇨$\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(3\sqrt{2}+1\right)=5\sqrt{2}+13$ 可知所得的新股差為$\left|13^2-2\times 5^2\right|=119=7\times 17$

(3)我們試著取股差為 7 時的$2\sqrt{2}+1$和股差為 23 時的$\sqrt{2}+5$相乘

⇨$\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+5\right)=11\sqrt{2}+9$ 可知所得的新股差為$\left|9^2-2\times 11^2\right|=161=7\times 23$

(4)我們試著取股差為 7 時的$2\sqrt{2}+1$和股差為 49 時的$4\sqrt{2}+9$相乘

⇨$\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(4\sqrt{2}+9\right)=22\sqrt{2}+25$ 可知所得的新股差為$\left|25^2-2\times 22^2\right|=343=7\times 49$

(5)我們試著取股差為t_1時的$\Delta n_1+\sqrt{2}n_1$和股差為t_2時的$\Delta n_2+\sqrt{2}n_2$相乘

⇨$\left(\Delta n_1+\sqrt{2}n_1\right)\left(\Delta n_2+\sqrt{2}n_2\right)$

$=\Delta n_1\Delta n_2+\sqrt{2}\Delta n_1 n_2+\sqrt{2}n_1\Delta n_2+2n_1 n_2$

$=\left(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1 n_2\right)+\sqrt{2}\left(n_1\Delta n_2+\Delta n_1 n_2\right)$

可知所得的新股差

$$
\begin{aligned}
t &= \left|\left(\Delta n_1\Delta n_2 + 2n_1n_2\right)^2 - 2\times\left(n_1\Delta n_2 + \Delta n_1 n_2\right)^2\right| \\
&= \left|\Delta n_1^2\Delta n_2^2 + 4n_1^2n_2^2 + 4\Delta n_1\Delta n_2 n_1 n_2 - 2\times\left(n_1^2\Delta n_2^2 + \Delta n_1^2 n_2^2 + 2n_1\Delta n_2\Delta n_1 n_2\right)\right| \\
&= \left|\Delta n_1^2\Delta n_2^2 + 4n_1^2n_2^2 + 4\Delta n_1\Delta n_2 n_1 n_2 - 2n_1^2\Delta n_2^2 - 2\Delta n_1^2 n_2^2 - 4n_1\Delta n_2\Delta n_1 n_2\right| \\
&= \left|\Delta n_1^2\Delta n_2^2 + 4n_1^2n_2^2 - 2n_1^2\Delta n_2^2 - 2\Delta n_1^2 n_2^2\right| \\
&= \left|4n_1^2n_2^2 - 2\Delta n_1^2 n_2^2 - \left(2n_1^2\Delta n_2^2 - \Delta n_1^2\Delta n_2^2\right)\right| \\
&= \left|2n_2^2\left(2n_1^2 - \Delta n_1^2\right) - \Delta n_2^2\left(2n_1^2 - \Delta n_1^2\right)\right| \\
&= \left|\left(2n_1^2 - \Delta n_1^2\right)\times\left(2n_2^2 - \Delta n_2^2\right)\right| \\
&= t_1\times t_2
\end{aligned}
$$

由上面的討論我們可以得到藉由已知的股差，可利用其乘積的結果得到更多的股差進而求出其餘的畢氏原始三元數(primitive Pythagorean triples)，在這裡我們將使用的 $\Delta n+\sqrt{2}n$ ，$(\Delta n,n)=1$ 的這種根式稱它為結構式，那可否利用 2 條股差的遞迴數列去創造出其乘積所得股差的遞迴數列？是我們要去嘗試的！

六、討論 VI：(股差所成數列的形成性)

我們嘗試用股差為 7 的一條遞迴數列 2,3,8,19,46……，所產生的衍生數對 $(3,2)$、$(8,3)$、$(19,8)$、$(46,19)$、……，與股差為 17 的一條遞迴數列 3,4,11,26,63……，所產生的衍生數對 $(4,3)$、$(11,4)$、$(26,11)$、$(63,26)$、……，來做合成的動作，看是否有其相關的法則。

(1)若挑股差為 7 的第 1 組衍生數對 $(3,2)$，和股差為 17 的第 1 組衍生數對 $(4,3)$ 進行合成：

⇨ $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(1+3\sqrt{2}\right)=13+5\sqrt{2}$ 可知所得為新股差 119 的第 1 組衍生數對 $(18,5)$

(2)若挑股差為 7 的第 1 組衍生數對 $(3,2)$，和股差為 17 的第 2 組衍生數對 $(11,4)$ 進行合成：

⇨ $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(7+4\sqrt{2}\right)=23+18\sqrt{2}$ 可知所得為新股差 119 的第 2 組衍生數對 $(41,18)$

(3)若挑股差為 7 的第 2 組衍生數對 $(8,3)$，和股差為 17 的第 1 組衍生數對 $(4,3)$ 進行合成：

⇨ $\left(5+3\sqrt{2}\right)\left(1+3\sqrt{2}\right)=23+18\sqrt{2}$ 可知所得為新股差 119 的第 2 組衍生數對 $(41,18)$

(4)若挑股差為 7 的第 1 組衍生數對 $(3,2)$，和股差為 17 的第 3 組衍生數對 $(26,11)$ 進行合成：

⇨ $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(15+11\sqrt{2}\right)=59+41\sqrt{2}$ 可知所得為新股差 119 的第 3 組衍生數對 $(100,41)$

(5)若挑股差為 7 的第 3 組衍生數對 $(19,8)$，和股差為 17 的第 1 組衍生數對 $(4,3)$ 進行合成：

⇨ $\left(11+8\sqrt{2}\right)\left(1+3\sqrt{2}\right)=59+41\sqrt{2}$ 可知所得為新股差 119 的第 3 組衍生數對 $(100,41)$

(6)若挑股差為 7 的第 2 組衍生數對 $(8,3)$，和股差為 17 的第 2 組衍生數對 $(11,4)$ 進行合成：

⇨ $\left(5+3\sqrt{2}\right)\left(7+4\sqrt{2}\right)=59+41\sqrt{2}$ 可知所得為新股差 119 的第 3 組衍生數對 $(100,41)$

(7)若挑股差為t_1的第 m 組衍生數對$\left(a_{m+1},a_m\right)$，和股差為t_2的第 n 組衍生數對$\left(b_{n+1},b_n\right)$進行合成，看是否得到股差為$t_1\times t_2$的第$m+n-1$組衍生數對$\left(c_{m+n},c_{m+n-1}\right)$？

➩要證明$\left(a_{m+1},a_m\right)$與$\left(b_{n+1},b_n\right)$會合成$\left(c_{m+n},c_{m+n-1}\right)$

也就是要證$\left((a_{m+1}-a_m)+a_m\sqrt{2}\right)\cdot\left((b_{n+1}-b_n)+b_n\sqrt{2}\right)=(c_{m+n}-c_{m+n-1})+c_{m+n-1}\sqrt{2}$

亦即證明$\begin{cases}2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)=c_{m+n}-c_{m+n-1}\\ a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)=c_{m+n-1}\end{cases}$

驗證(1)：

假設$2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)=c_{m+n}-c_{m+n-1}$成立

且$a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)=c_{m+n-1}$成立

先證第一式：

〈1〉 $2a_{m+1}b_{n+1}+(a_{m+2}-a_{m+1})(b_{n+2}-b_{n+1})$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+2}b_{n+2}-a_{m+2}b_{n+1}-a_{m+1}b_{n+2}+a_{m+1}b_{n+1}$

$=3a_{m+1}b_{n+1}+(2a_{m+1}+a_m)(2b_{n+1}+b_n)-(2a_{m+1}+a_m)b_{n+1}-a_{m+1}(2b_{n+1}+b_n)$

$=3a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+1}b_n+a_mb_{n+1}+a_mb_n$

〈2〉 $c_{(m+1)+(n+1)}-c_{(m+1)+(n+1)-1}$

$=c_{m+n+2}-c_{m+n+1}=(2c_{m+n+1}+c_{m+n})-c_{m+n+1}=c_{m+n+1}+c_{m+n}$

$=(2c_{m+n}+c_{m+n-1})+c_{m+n}=3c_{m+n}+c_{m+n-1}=3(c_{m+n}-c_{m+n-1})+4c_{m+n-1}$

$=3[2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)]+4[a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)]$

$=3a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+1}b_n+a_mb_{n+1}+a_mb_n$

$\therefore 2a_{m+1}b_{n+1}+(a_{m+2}-a_{m+1})(b_{n+2}-b_{n+1})=c_{m+n+2}-c_{m+n+1}$亦成立

驗證(2)：

假設$2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)=c_{m+n}-c_{m+n-1}$成立

且$a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)=c_{m+n-1}$成立

再證第二式：

〈1〉 $a_{m+1}(b_{n+2}-b_{n+1})+b_{n+1}(a_{m+2}-a_{m+1})$

$=a_{m+1}b_{n+2}-a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+2}b_{n+1}-a_{m+1}b_{n+1}$

$=a_{m+1}(2b_{n+1}+b_n)-a_{m+1}b_{n+1}+(2a_{m+1}+a_m)b_{n+1}-a_{m+1}b_{n+1}$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+1}b_n-a_{m+1}b_{n+1}+2a_{m+1}b_{n+1}+a_mb_{n+1}-a_{m+1}b_{n+1}$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n$

〈2〉 $c_{(m+1)+(n+1)-1}$

$=c_{m+n+1}=2c_{m+n}+c_{m+n-1}=2(c_{m+n}-c_{m+n-1})+3c_{m+n-1}$

$=2[2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)]+3[a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)]$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n$

$\therefore a_{m+1}(b_{n+2}-b_{n+1})+b_{n+1}(a_{m+2}-a_{m+1})=c_{m+n+1}$ 亦成立

由上述討論，我們看到兩條衍生數對在進行合成時，若其中一條衍生數對往後移動一組，則合成後新的衍生數對亦會同時向後移動到下一組。因此我們可藉由兩條衍生數對去創造出所需要的任何一組新衍生數對的組數。

伍、研究過程(二)

在研究過程(一)中，我們利用衍生數對所產生的遞迴數列去創造更多的數列情形，進而轉換回衍生數對再求出畢達哥拉斯原始三元數(primitive Pythagorean triples)，而在過程中，我們都利用股差分解式中的結構式($\Delta n+n\sqrt{2}$，$(\Delta n,n)=1$)來創造，反之，其股差分解式中($\Delta n-n\sqrt{2}$ 或$-\Delta n+n\sqrt{2}$ ，$(\Delta n,n)=1$)對找出畢達哥拉斯原始三元數有何幫助？為此，我們進行了以下的幾點討論：(為了討論的方便，我們稱形如$\Delta n-n\sqrt{2}$ 或$-\Delta n+n\sqrt{2}$ 為共軛式)

一、討論 I ：

由股差 7 的分解$7=\left|2\sqrt{2}+1\right|\cdot\left|2\sqrt{2}-1\right|$中，我們都知道可由結構式$1+2\sqrt{2}$ 產生遞迴數列：
⇨ $1+2\sqrt{2}$ ⇨ 衍生數對$(3,2)$ ⇨ 遞迴數列 2,3,8,19,46……，現在我們利用共軛式$-1+2\sqrt{2}$ 或$1-2\sqrt{2}$ (取正數)，即$-1+2\sqrt{2}$ ，發現它亦可產生一組衍生數對$(1,2)$，但它卻不滿足畢氏數，因為三邊長為$(4,-3,5)$！不過它的股差亦滿足$4-(-3)=7$ 的情形。現在我們將$(1,2)$利用前面衍生的特性將它轉變為數列赫然發現數列為 $\boxed{2}$,1,4,9,22,53……，若取 1,4,9,22,53……，則此數列竟為股差 7 的另一條遞迴數列。

為了更了解結構式與共軛式產生的結果，做了以下討論：

股差	結構式	遞迴數列	共軛式	遞迴數列
7	$1+2\sqrt{2}$	2,3,8,19,46……	$-1+2\sqrt{2}$	2,1,4,9,22,53……
17	$1+3\sqrt{2}$	3,4,11,26,63……	$-1+3\sqrt{2}$	3,2,7,16,39,94……

	7 結構式*17 結構式	遞迴數列	7 結構式*17 共軛式	遞迴數列
7×17	$(1+2\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})$ $=13+5\sqrt{2}$	5,18,41,100,241……	$(1+2\sqrt{2})(-1+3\sqrt{2})$ $=11+\sqrt{2}$	1,12,25,62,149……
	7 共軛式*17 結構式	遞迴數列	7 共軛式*17 共軛式	遞迴數列
7×17	$(-1+2\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})$ $=11-\sqrt{2}$	-1,10,19,48,115……	$(-1+2\sqrt{2})(-1+3\sqrt{2})$ $=13-5\sqrt{2}$	-5,8,11,30,71……

從上面的表格我們看到股差為 t_1 的結構式與共軛式搭配股差為 t_2 的結構式與共軛式，可組合出 4 組遞迴數列，也就是我們可以創造出更多的畢氏數的法則。而我們亦可以發現，若 S 表結構式產生之一遞迴數列，而 $\overline{S}$ 表共軛式產生之一遞迴數列，$S_1\times S_2$ 表示利用 S_1 與 S_2 結構式合成的遞迴數列，會有下列結果：$\boxed{(1)\ S\neq\overline{S}\quad (2)\ S_1\times S_2\neq\overline{S_1}\times S_2\quad (3)\ \overline{S_1}\times\overline{S_2}=\overline{S_1\times S_2}}$

二、討論 II：(同一遞迴數列上的行進規則)

股差 7 的衍生數對 $(3,2)\to(8,3)\to(19,8)\to(46,19)\to\cdots\cdots$

結構式 $1+2\sqrt{2}\to5+3\sqrt{2}\to11+8\sqrt{2}\to27+19\sqrt{2}\ \cdots\cdots$

我們發現 $5+3\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$$11+8\sqrt{2}=(5+3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2$$

$$27+19\sqrt{2}=(11+8\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^3$$

所以我們得到在同一條遞迴數列上的數，其形成之衍生數對必能由 $(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n$ 運算而產生。

➩若衍生數對 (a_{n+1},a_n) 的下一組為 (a_{n+2},a_{n+1})，我們可由結構式的驗證得到：

$$\left((a_{n+1}-a_n)+a_n\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=a_{n+1}-a_n+a_{n+1}\sqrt{2}-a_n\sqrt{2}+a_n\sqrt{2}+2a_n$$
$$=a_{n+1}+a_n+a_{n+1}\sqrt{2}=a_{n+1}+(a_{n+2}-2a_{n+1})+a_{n+1}\sqrt{2}$$
$$=(a_{n+2}-a_{n+1})+a_{n+1}\sqrt{2}$$

三、討論 III：(驗證討論 I 的結果)

若 S 表結構式產生之一遞迴數列，而 $\overline{S}$ 表共軛式產生之一遞迴數列，$S_1\times S_2$ 表示利用 S_1 與 S_2 結構式合成的遞迴數列，會有結果：(1) $S\neq\overline{S}$　(2) $S_1\times S_2\neq\overline{S_1}\times S_2$　(3) $\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\overline{S_1\times S_2}$

(1) 若 $\Delta n+n\sqrt{2}$ 為一股差不為 1 所形成之結構式，則由 $\Delta n+n\sqrt{2}$ 及 $\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}$ 會產生出不同的遞迴數列。

驗證：

假設 $\Delta n+n\sqrt{2}$ 及 $\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}$ 會產生出相同的遞迴數列，表示 $\Delta n+n\sqrt{2}$ 經過 r 次移動後會

等於$\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}$，也就是

$$(\Delta n+n\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^r=\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}=\pm(\Delta n-n\sqrt{2})$$

$$(1+\sqrt{2})^r=\frac{\pm(\Delta n-n\sqrt{2})}{(\Delta n+n\sqrt{2})}=\pm\frac{(\Delta n-n\sqrt{2})\cdot(\Delta n-n\sqrt{2})}{(\Delta n+n\sqrt{2})\cdot(\Delta n-n\sqrt{2})}$$

$$=\pm\frac{\Delta n^2+2n^2-2n\Delta n\sqrt{2}}{\Delta n^2-2n^2}=\pm\frac{\Delta n^2+2n^2-2n\Delta n\sqrt{2}}{\pm t}$$

$$=\pm\frac{\Delta n^2+2n^2-2n\Delta n\sqrt{2}}{t}=\pm(\frac{\Delta n^2+2n^2}{t}-\frac{n\Delta n}{t}2\sqrt{2})$$

由上述知其不可能化為$(1+\sqrt{2})^r$的形式，所以兩者會產生不同遞迴數列。

(2) 若$\Delta n_1+n_1\sqrt{2}$及$\Delta n_2+n_2\sqrt{2}$為二股差不為 1 所形成之結構式，則我們似乎可以由$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出不同的遞迴數列。

驗證：

假設$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出相同的遞迴數列，表示$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$經過 r 次移動後會等於$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$，也就是

$$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^r=\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$$

$$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^r=\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}$$

$$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^r=\overline{\Delta n_1+n_1\sqrt{2}}=\pm(\Delta n_1-n_1\sqrt{2})$$

由驗證(1)的結果，知道其不可能化為$(1+\sqrt{2})^r$的形式，也就是

$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出不同的遞迴數列。

(3) 若$\Delta n_1+n_1\sqrt{2}$及$\Delta n_2+n_2\sqrt{2}$為二股差不為 1 所形成之結構式，則我們似乎可以由$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot\overline{(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$及$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出相同的遞迴數列。

驗證：

$$\because\ \overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot\overline{(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}=[\pm(\Delta n_1-n_1\sqrt{2})]\cdot[\pm(\Delta n_2-n_2\sqrt{2})]$$

$$=\pm(\Delta n_1\Delta n_2-n_2\Delta n_1\sqrt{2}-n_1\Delta n_2\sqrt{2}+2n_1n_2)$$

$$=\pm[(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1n_2)-(n_2\Delta n_1+n_1\Delta n_2)\sqrt{2}]$$

$$=\overline{(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1n_2)+(n_2\Delta n_1+n_1\Delta n_2)\sqrt{2}}$$

$$=\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$$

$\therefore\ \overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot\overline{(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$ 及 $\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$ 會產生出相同的遞迴數列。

四、討論Ⅳ：(如何創造出所謂的畢氏原始三元數)

由前面的合成性，我們知道結構式和共軛式是完成合成數列的重要法則，但是如何確保所合成後並經轉換成畢氏數後，其都為畢氏原始三元數，我們進行下面的檢測與討論：

(1)利用股差為 7 時，其兩條遞迴數列 2,3,8,19,46……及 1,4,9,22,53……

的第 1 結構式 $1+2\sqrt{2}$ 及 $3+\sqrt{2}$ 創造出股差為 49 的結構式 $(1+2\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})=7+7\sqrt{2}$

而其 $(\Delta n,n)=(7,7)\neq 1$，故轉換為畢氏數後 $(147,196,245)$ 並非畢氏原始三元數。

(2)利用股差為 7 時，其遞迴數列 2,3,8,19,46……的第 1 結構式 $1+2\sqrt{2}$

及股差為 49 時，其遞迴數列 5,6,17,40,97……的第 1 結構式 $1+5\sqrt{2}$

創造出股差為 343 的結構式 $(1+2\sqrt{2})\cdot(1+5\sqrt{2})=21+7\sqrt{2}$

而其 $(\Delta n,n)=(21,7)\neq 1$，故轉換為畢氏數後 $(392,735,833)$ 並非畢氏原始三元數。

由(1)(2)討論知股差的結構式在合成過程中，所產生的新結構式雖然不一定能創造畢氏原始三元數

為了解決這個問題，我們從股差的分解式中去探討，

因為 $t=|b-a|=\left|\Delta n^2-2n^2\right|=\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|$

要使 $(\Delta n,n)=1$，從股差 t 的情形去操作，得到下列一個結果：

當股差由可以產生畢氏原始三元數的質數所組合：

股差	7	7×17	$7\times17\times23$	$7\times17\times23\times31$
結構式	$1+2\sqrt{2}$	$13+5\sqrt{2}$	$75+38\sqrt{2}$	$379+338\sqrt{2}$
$(\Delta n,n)$	$(1,2)=1$	$(13,5)=1$	$(75,38)=1$	$(379,338)=1$

我們發現若合成後的股差可分解為數個質因數股差的一次方乘積，所產生的畢式三元數必為畢氏原始三元數。

驗證：

若合成後股差 $t=t_1\times t_2\times t_3\times\cdots\times t_r=\left|\Delta n^2-2n^2\right|$，其中 $t_1,t_2,t_3,\cdots,t_r$ 為可產生畢氏原始三元數的相異質數股差，則 $(\Delta n,n)=1$。

假設 $(\Delta n,n)=d$ ，$d\neq 1$

則令 $\Delta n = dh$ ， $n = dk$ ，$(h,k)=1$，$h>k$

$\Rightarrow \left|\Delta n^2 - 2n^2\right| = \left|(dh)^2 - 2(dk)^2\right| = \left|d^2h^2 - 2d^2k^2\right| = d^2 \cdot \left|h^2 - 2k^2\right|$

與 $\left|\Delta n^2 - 2n^2\right| = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \cdots \times t_r$ ， $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_r$ 為相異質數股差$\boxed{\text{矛盾}}$

$\therefore (\Delta n, n) = 1$

即由研究過程(一)的討論Ⅲ可得到：

$(\Delta n, n) = 1 \Leftrightarrow (m-n, n) = 1 \Leftrightarrow$ 衍生數對 $(m,n)=1$

$\Leftrightarrow \left(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2\right)$ 為畢氏原始三元數，即兩兩互質。

舉例如下：

❶每個可產生畢氏原始三元數的股差為單一質數⇨可產生 2 條遞迴數列。

如股差 t=7，有 2,3,8,19,‥‥‥及 1,4,9,22,‥‥‥兩條數列。

如股差 t=41，有 2,9,20,49,‥‥‥及 5,8,21,50,‥‥‥兩條數列。

❷若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之$\boxed{\text{一次方}}$乘積⇨可產生 2^r 條遞迴數列。

即 $t = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \cdots \times t_r$ ，其遞迴數列個數為 $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^r$ 條。

如股差 $t = 119 = 7 \times 17$ ，其遞迴數列個數為 $2 \times 2 = 2^2 = 4$ 條。

有 1,12,25,62,‥‥‥及 8,11,30,71,‥‥‥及 5,18,41,100,‥‥‥及 10,19,48,115,‥‥‥

共 4 條數列。

五、討論Ⅴ：(合成產生遞迴數列的推廣)

由討論Ⅳ，我們將其結果推廣至：

若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之冪次方乘積⇨可產生 2^r 條遞迴數列。

驗證：

若合成後股差 $t = t_1^{\sim_1} \times t_2^{\sim_2} \times t_3^{\sim_3} \times \cdots \times t_r^{\sim_r}$ ，其中 $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_r$ 為可產生畢氏原始三元數的相異質數股差，且 $\sim_1, \sim_2, \sim_3, \ldots\ldots, \sim_r$ 為正整數。則可產生 2^r 條遞迴數列。

為了解決這個問題，我們設法去驗證每個 $t_i^{\sim_i}$ ， $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, r$ ，可產生 2 條遞迴數列

(1)股差為 $t_i^{\,1}$ 時，可產生 2 條遞迴數列

(2)股差為 $t_i^{\,2}$ 時，則會有 $\left|\Delta n + \sqrt{2}n\right| \times \left|\Delta n + \sqrt{2}n\right|$ 及 $\left|\Delta n - \sqrt{2}n\right| \times \left|\Delta n - \sqrt{2}n\right|$ 會產生新的結構式或共軛式，可產生 2 條遞迴數列

(3)股差為 $t_i^{\,3}$ 時，則會有

❶ $\left|\Delta n + \sqrt{2}n\right| \times \left|\Delta n + \sqrt{2}n\right| \times \left|\Delta n + \sqrt{2}n\right|$ 及 $\left|\Delta n - \sqrt{2}n\right| \times \left|\Delta n - \sqrt{2}n\right| \times \left|\Delta n - \sqrt{2}n\right|$ 會產生新的結構式或共軛式

❷ $\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|=\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times t=\left|t\Delta n+tn\sqrt{2}\right|$，得到$\left(t\Delta n,tn\right)=t\neq 1$

故不會產生畢氏原始三元數

❸ $\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|=\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times t=\left|t\Delta n-tn\sqrt{2}\right|$，得到$\left(t\Delta n,tn\right)=t\neq 1$

故不會產生畢氏原始三元數

由❶、❷、❸結果可知會產生 2 條遞迴數列

(4)股差為$t_i^{\ j}$時，則會有

❶ $\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n+\sqrt{2}n)^j\right|$以及$\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times$ $\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n-\sqrt{2}n)^j\right|$會產生新的結構式或共軛式

❷ $\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n+\sqrt{2}n)^{j-2}\right|\times t$經展開整理可得

形如$\left|tp+tq\sqrt{2}\right|$，得到$\left(tp,tq\right)\geq t\neq 1$，故不會產生畢氏原始三元數

❸ $\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n-\sqrt{2}n)^{j-2}\right|\times t$經展開整理可得

形如$\left|tp-tq\sqrt{2}\right|$，得到$\left(tp,tq\right)\geq t\neq 1$，故不會產生畢氏原始三元數

由❶、❷、❸結果可知會產生 2 條遞迴數列

也就是若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之$\boxed{\text{冪次方}}$乘積⇨可產生 2^r 條遞迴數列。

即$t=t_1^{\sim_1}\times t_2^{\sim_2}\times t_3^{\sim_3}\times\cdots\times t_r^{\sim_r}$，其遞迴數列個數為$2\times 2\times\ldots\times 2=2^r$條。

陸、結論

由前面的推論及分析結果，我們幾個人對於『畢氏定理』的正整數解，有了更深的認識，除了課本上$\left(3,4,5\right)$、$\left(5,12,13\right)$、$\left(7,24,25\right)$、$\left(8,15,17\right)$、$\left(9,40,41\right)$等幾個常見的畢達哥拉斯數外，我們看到了好多不同的畢達哥拉斯數，而找到的幾個規則，也讓調皮的我們內心是如此的開心，只因從今天起我們不用死背了，或侷限於$\left(3,4,5\right)$、$\left(5,12,13\right)$、$\left(7,24,25\right)$等的整數倍，而我們也從之前斜邊與較大的股之間的差的討論轉變為兩股之間的差的討論而得到不同的體會。

一、經由研究過程(一)的討論Ⅰ、Ⅱ的結果，我們可以知道：

對於任何一組可形成畢氏原始三元數的股差，

⇨皆可找到一組的遞迴數列：$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$，$n\geq 1$，

⇨進而找到一衍生數對$\left(a_{n+1},a_n\right)$進而求出畢達哥拉斯原始三元數

二、經由研究過程(一)的討論Ⅲ的結果，我們可以知道：

1、衍生數對$\left(m,n\right)=1$，m，n中有一個是奇數，一個是偶數⇔$\left(2mn,m^2-n^2,m^2+n^2\right)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質。

2、數列中的一組衍生數對$\left(a_{n+1},a_n\right)=1$⇔下一組衍生數對$\left(a_{n+2},a_{n+1}\right)=1$。

3、衍生數對$(m,n)=1 \Leftrightarrow (m-n,n)=1$。

三、經由研究過程(一)的討論Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ的結果，我們可以知道：

1.能產生畢氏原始三元數的兩股差能寫成$|8k\pm1|$的形式，k為整數。

2.當可形成畢氏原始三元數的兩股差為t_1和t_2時，得到$t_1\times t_2$竟也是我們所要找尋的股差。

3.若挑股差為t_1的第 m 組衍生數對(a_{m+1},a_m)，和股差為t_2的第 n 組衍生數對(b_{n+1},b_n)進行合成，可以得到股差為$t_1\times t_2$的第 m+n-1 組衍生數對(c_{m+n},c_{m+n-1})。

四、經由研究過程(二)的討論Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的結果，我們可以知道：

1.我們可利用$\boxed{\text{股差為}t_1}$的衍生數對(m_1,n_1)所產生的<u>結構式</u>($\Delta n_1+n_1\sqrt{2}$，$(\Delta n_1,n_1)=1$)與其<u>共軛式</u>($\Delta n_1-n_1\sqrt{2}$或$-\Delta n_1+n_1\sqrt{2}$取正數者，$(\Delta n_1,n_1)=1$)，去和$\boxed{\text{股差為}t_2}$的衍生數對(m_2,n_2)所產生的<u>結構式</u>($\Delta n_2+n_2\sqrt{2}$，$(\Delta n_2,n_2)=1$)與其<u>共軛式</u>($\Delta n_2-n_2\sqrt{2}$或$-\Delta n_2+n_2\sqrt{2}$取正數者，$(\Delta n_2,n_2)=1$)，交叉合成產生更多的遞迴數列情形，進而轉換回衍生數對再求出畢達哥拉斯原始三元數(primitive Pythagorean triples)。

2.若在同一條遞迴數列上的衍生數對(a_{n+1},a_n)及(a_{n+r+1},a_{n+r})，我們可由結構式的驗證得到：$(a_{n+r+1},a_{n+r})=(a_{n+1},a_n)\cdot(1+\sqrt{2})^r$，

也就是(a_{n+r+1},a_{n+r})必由(a_{n+1},a_n)經過$(1+\sqrt{2})$的 r 次乘積運算後而得到。

3.若S表結構式產生之一遞迴數列，而$\overline{S}$表共軛式產生之一遞迴數列，$S_1\times S_2$表示利用S_1與S_2結構式合成的遞迴數列，則我們可以得到下列結果：

(1) $S\neq\overline{S}$ (2) $S_1\times S_2\neq\overline{S_1}\times S_2$ (3) $\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\overline{S_1\times S_2}$

五、經由研究過程(二)的討論Ⅳ、Ⅴ的結果，我們可以知道：

我們發現若合成後的股差可分解為數個質因數股差的一次方乘積，所產生的畢式三元數必為<u>畢氏原始三元數。</u>

1.若合成後股差為$t=t_1\times t_2\times t_3\times\cdots\times t_r=|\Delta n^2-2n^2|$，其中$t_1,t_2,t_3,\cdots,t_r$為可產生畢氏原始三元數的相異質數股差，則$(\Delta n,n)=1$

$\Leftrightarrow (m-n,n)=1$

$\Leftrightarrow$衍生數對$(m,n)=1$

$\Leftrightarrow (2mn,m^2-n^2,m^2+n^2)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質。

2.若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之$\boxed{\text{一次方}}$乘積➩可產生 2^r 條遞迴數列。

即 $t = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \cdots \times t_r$ ，其遞迴數列個數為 $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^r$ 條。

3.若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之$\boxed{\text{冪次方}}$乘積➩可產生 2^r 條遞迴數列。

即 $t = t_1^{\sim_1} \times t_2^{\sim_2} \times t_3^{\sim_3} \times \cdots \times t_r^{\sim_r}$ ，其遞迴數列個數為 $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^r$ 條。

事實上畢達哥拉斯數的通則和可探討的寶藏還很多很多，儘管我們只研究到此部份，卻已經讓我們深深的喜歡上『畢氏定理』囉…。

柒、『畢氏』的感動

這次我們挑了兩個規則來參加科展活動，不一樣的規則也給我們兩個不一樣的感動：

一、『斜邊與較大股的差』所吸引我們的地方…

原先我們所挑這個研究方法的原因是因為它可以從『等差級數：連續奇數總和』來控制斜邊與較大股的差，進而求出畢氏數的通則。然而在我們遇到困境而不停地變換推導方式下，卻發現原來『畢氏三元數』甚至『畢氏原始三元數』蘊含了那麼多美麗的現象，還記得在國二上學期…老師與我們提到畢氏三元數，當時我只覺得它是個很漂亮的直角三角形三正整數邊長，並沒有仔細的研究它，也藉由這次的科展，讓我更加認識了畢氏三元數。

二、『兩股的差』所吸引我們的地方…

與前者較大的不同是此部分的研究方法是由『遞迴數列』進而與畢氏原始三元數連結在一起，再由『兩股差的分解式』探討遞迴數列的合成性，而這個地方更是深深的吸引著我。在這兒我們發現它的規則居然與國二所學的數列與因式分解有所關聯，科展前數列與因式分解對我來說只是個課本上的名詞，也藉由這次的科展讓我更了解原來數學不只是數學，能將最為熟悉的運用在此，是再好不過了。

捌、自我的改變

原本就不大接觸研究類的我們，能有這個機會接觸到科展已感到非常榮幸，然而練習狀況一直不太好的我們，甚至會有自暴自棄的想法，但當看到老師依然很有耐心的繼續鼓勵著，此時的我們更因此而互相勉勵著…怎麼能夠因為一點挫折就放棄自己呢?

「不經一番寒澈苦，焉得梅花撲鼻香」…在完成作品的那一剎那，心中的那股感動，早已不是能用言語來形容了，也藉由這次的數學科展訓練，讓我們的口說能力、台風、以及膽量都大大的提升了不少，也更能體會到那種執著與屹立不搖的態度，然而我們所學習到的事物與課堂中所學的截然不同，我想…要是在那時放棄了，現在的我們也沒辦法與『畢氏』有更進一步的認識，是的，如果沒有先前辛苦的耕耘，又怎會知道豐收時的甜美呢！未來…或許

我們不一定會再碰觸到科學研究，但是這段時間的汗水與淚水將化作回憶與我們同在，再遇到困難時，會想起這段努力的過程，讓我渾身充滿幹勁，繼續奮鬥努力堅持下去。

玖、參考資料

一、凡異出版社(1990)。趣味代數。新竹市：凡異出版社。

二、念家興(1996)。數學教學方法。臺北市：九章出版社。

(譯自：Teaching Mathematics：a sourcebook of aids,activities,and strategies,2nd ed.)

三、單墫(2002)。趣味數論。台北市：九章出版社。

四、蔡聰明(2003)。數學拾貝。台北市：三民書局股份有限公司。

五、沈康身(2010)。數學歷史名題賞析(二)。台北縣：稻田出版有限公司。

六、國中數學第三、四冊。翰林出版社。

七、高中數學第一冊。龍騰出版社。

拾、附錄

t=1				
m	n	a	b	c
2	1	4	3	5
5	2	20	21	29
12	5	120	119	169
29	12	696	697	985
70	29	4060	4059	5741
169	70	23660	23661	33461
408	169	137904	137903	195025
985	408	803760	803761	1136689
2378	985	4684660	4684659	6625109
5741	2378	27304196	27304197	38613965
13860	5741	159140520	159140519	225058681
33461	13860	927538920	927538921	1311738121

t=7				
m	n	a	b	c
3	2	12	5	13
8	3	48	55	73
19	8	304	297	425
46	19	1748	1755	2477
111	46	10212	10205	14437
268	111	59496	59503	84145
647	268	346792	346785	490433
1562	647	2021228	2021235	2858453
3771	1562	11780604	11780597	16660285
9104	3771	68662368	68662375	97103257
21979	9104	400193632	400193625	565959257
53062	21979	2332499396	2332499403	3298652285

t=7				
m	n	a	b	c
4	1	8	15	17
9	4	72	65	97
22	9	396	403	565
53	22	2332	2325	3293
128	53	13568	13575	19193
309	128	79104	79097	111865
746	309	461028	461035	651997
1801	746	2687092	2687085	3800117
4348	1801	15661496	15661503	22148705
10497	4348	91281912	91281905	129092113
25342	10497	532029948	532029955	752403973
61181	25342	3100897804	3100897797	4385331725

t=17				
m	n	a	b	c
4	3	24	7	25
11	4	88	105	137
26	11	572	555	797
63	26	3276	3293	4645

t=17				
m	n	a	b	c
7	2	28	45	53
16	7	224	207	305
39	16	1248	1265	1777
94	39	7332	7315	10357

152	63	19152	19135	27073
367	152	111568	111585	157793
886	367	650324	650307	919685
2139	886	3790308	3790325	5360317
5164	2139	22091592	22091575	31242217
12467	5164	128759176	128759193	182092985
30098	12467	750463532	750463515	1061315693
72663	30098	4374021948	4374021965	6185801173
t=23				
m	n	a	b	c
6	1	12	35	37
13	6	156	133	205
32	13	832	855	1193
77	32	4928	4905	6953
186	77	28644	28667	40525
449	186	167028	167005	236197
1084	449	973432	973455	1376657
2617	1084	5673656	5673633	8023745
6318	2617	33068412	33068435	46765813
15253	6318	192736908	192736885	272571133
36824	15253	1123352944	1123352967	1588660985
88901	36824	6547380848	6547380825	9259394777
t=31				
m	n	a	b	c
5	4	40	9	41
14	5	140	171	221
33	14	924	893	1285
80	33	5280	5311	7489
193	80	30880	30849	43649
466	193	179876	179907	254405
1125	466	1048500	1048469	1482781
2716	1125	6111000	6111031	8642281
6557	2716	35617624	35617593	50370905
15830	6557	207594620	207594651	293583149
38217	15830	1209950220	1209950189	1711127989
92264	38217	7052106576	7052106607	9973184785
t=41				
m	n	a	b	c

227	94	42676	42693	60365
548	227	248792	248775	351833
1323	548	1450008	1450025	2050633
3194	1323	8451324	8451307	11951965
7711	3194	49257868	49257885	69661157
18616	7711	287095952	287095935	406014977
44943	18616	1673317776	1673317793	2366428705
108502	44943	9752810772	9752810755	13792557253
t=23				
m	n	a	b	c
7	4	56	33	65
18	7	252	275	373
43	18	1548	1525	2173
104	43	8944	8967	12665
251	104	52208	52185	73817
606	251	304212	304235	430237
1463	606	1773156	1773133	2507605
3532	1463	10334632	10334655	14615393
8527	3532	60234728	60234705	85184753
20586	8527	351073644	351073667	496493125
49699	20586	2046207228	2046207205	2893773997
119984	49699	11926169632	11926169655	16866150857
t=31				
m	n	a	b	c
10	3	60	91	109
23	10	460	429	629
56	23	2576	2607	3665
135	56	15120	15089	21361
326	135	88020	88051	124501
787	326	513124	513093	725645
1900	787	2990600	2990631	4229369
4587	1900	17430600	17430569	24650569
11074	4587	101592876	101592907	143674045
26735	11074	592126780	592126749	837393701
64544	26735	3451167680	3451167711	4880688161
155823	64544	20114879424	20114879393	28446735265
t=41				
m	n	a	b	c

9	2	36	77	85
20	9	360	319	481
49	20	1960	2001	2801
118	49	11564	11523	16325
285	118	67260	67301	95149
688	285	392160	392119	554569
1661	688	2285536	2285577	3232265
4010	1661	13321220	13321179	18839021
9681	4010	77641620	77641661	109801861
23372	9681	452528664	452528623	639972145
56425	23372	2637530200	2637530241	3730031009
136222	56425	15372652700	15372652659	21740213909

8	5	80	39	89
21	8	336	377	505
50	21	2100	2059	2941
121	50	12100	12141	17141
292	121	70664	70623	99905
705	292	411720	411761	582289
1702	705	2399820	2399779	3393829
4109	1702	13987036	13987077	19780685
9920	4109	81522560	81522519	115290281
23949	9920	475148160	475148201	671961001
57818	23949	2769366564	2769366523	3916475725
139585	57818	16141051060	16141051101	22826893349

t=47				
m	n	a	b	c
8	1	16	63	65
17	8	272	225	353
42	17	1428	1475	2053
101	42	8484	8437	11965
244	101	49288	49335	69737
589	244	287432	287385	406457
1422	589	1675116	1675163	2369005
3433	1422	9763452	9763405	13807573
8288	3433	56905408	56905455	80476433
20009	8288	331669184	331669137	469051025
48306	20009	1933109508	1933109555	2733829717
116621	48306	11266988052	11266988005	15933927277

t=47				
m	n	a	b	c
11	6	132	85	157
28	11	616	663	905
67	28	3752	3705	5273
162	67	21708	21755	30733
391	162	126684	126637	179125
944	391	738208	738255	1044017
2279	944	4302752	4302705	6084977
5502	2279	25078116	25078163	35465845
13283	5502	146166132	146166085	206710093
32068	13283	851918488	851918535	1204794713
77419	32068	4965344984	4965344937	7022058185
186906	77419	28940151228	28940151275	40927554397

t=49				
m	n	a	b	c
6	5	60	11	61
17	6	204	253	325
40	17	1360	1311	1889
97	40	7760	7809	11009
234	97	45396	45347	64165
565	234	264420	264469	373981
1364	565	1541320	1541271	2179721
3293	1364	8983304	8983353	12704345
7950	3293	52358700	52358651	74046349
19193	7950	305168700	305168749	431573749

t=49				
m	n	a	b	c
13	4	104	153	185
30	13	780	731	1069
73	30	4380	4429	6229
176	73	25696	25647	36305
425	176	149600	149649	211601
1026	425	872100	872051	1233301
2477	1026	5082804	5082853	7188205
5980	2477	29624920	29624871	41895929
14437	5980	172666520	172666569	244187369
34854	14437	1006374396	1006374347	1423228285

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
46336	19193	1778653696	1778653647	2515396145	84145	34854	5865579660	5865579709	8295182341
111865	46336	10366753280	10366753329	14660803121	203144	84145	34187103760	34187103711	48347865761

t=71					t=71				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
7	6	84	13	85	16	5	160	231	281
20	7	280	351	449	37	16	1184	1113	1625
47	20	1880	1809	2609	90	37	6660	6731	9469
114	47	10716	10787	15205	217	90	39060	38989	55189
275	114	62700	62629	88621	524	217	227416	227487	321665
664	275	365200	365271	516521	1265	524	1325720	1325649	1874801
1603	664	2128784	2128713	3010505	3054	1265	7726620	7726691	10927141
3870	1603	12407220	12407291	17546509	7373	3054	45034284	45034213	63688045
9343	3870	72314820	72314749	102268549	17800	7373	262478800	262478871	371201129
22556	9343	421481416	421481487	596064785	42973	17800	1529838800	1529838729	2163518729
54455	22556	2456573960	2456573889	3474120161	103746	42973	8916553716	8916553787	12609911245
131466	54455	14317962060	14317962131	20248656181	250465	103746	51969483780	51969483709	73495948741

t=73					t=73				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
11	2	44	117	125	12	7	168	95	193
24	11	528	455	697	31	12	744	817	1105
59	24	2832	2905	4057	74	31	4588	4515	6437
142	59	16756	16683	23645	179	74	26492	26565	37517
343	142	97412	97485	137813	432	179	154656	154583	218665
828	343	568008	567935	803233	1043	432	901152	901225	1274473
1999	828	3310344	3310417	4681585	2518	1043	5252548	5252475	7428173
4826	1999	19294348	19294275	27286277	6079	2518	30613844	30613917	43294565
11651	4826	112455452	112455525	159036077	14676	6079	178430808	178430735	252339217
28128	11651	655438656	655438583	926930185	35431	14676	1039970712	1039970785	1470740737
67907	28128	3820176192	3820176265	5402545033	85538	35431	6061393756	6061393683	8572105205
163942	67907	22265618788	22265618715	31488340013	206507	85538	35328391532	35328391605	49961890493

t=79					t=79				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
10	1	20	99	101	15	8	240	161	289
21	10	420	341	541	38	15	1140	1219	1669
52	21	2184	2263	3145	91	38	6916	6837	9725
125	52	13000	12921	18329	220	91	40040	40119	56681
302	125	75500	75579	106829	531	220	233640	233561	330361
729	302	440316	440237	622645	1282	531	1361484	1361563	1925485

1760	729	2566080	2566159	3629041	3095	1282	7935580	7935501	11222549
4249	1760	14956480	14956401	21151601	7472	3095	46251680	46251759	65409809
10258	4249	87172484	87172563	123280565	18039	7472	269574816	269574737	381236305
24765	10258	508078740	508078661	718531789	43550	18039	1571196900	1571196979	2222008021
59788	24765	2961299640	2961299719	4187910169	105139	43550	9157606900	9157606821	12950811821
144341	59788	17259719416	17259719337	24408929225	253828	105139	53374444184	53374444263	75482862905
t=89					t=89				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
10	7	140	51	149	15	4	120	209	241
27	10	540	629	829	34	15	1020	931	1381
64	27	3456	3367	4825	83	34	5644	5733	8045
155	64	19840	19929	28121	200	83	33200	33111	46889
374	155	115940	115851	163901	483	200	193200	193289	273289
903	374	675444	675533	955285	1166	483	1126356	1126267	1592845
2180	903	3937080	3936991	5567809	2815	1166	6564580	6564669	9283781
5263	2180	22946680	22946769	32451569	6796	2815	38261480	38261391	54109841
12706	5263	133743356	133743267	189141605	16407	6796	223003944	223004033	315375265
30675	12706	779513100	779513189	1102398061	39610	16407	1299762540	1299762451	1838141749
74056	30675	4543335600	4543335511	6425246761	95627	39610	7575570940	7575571029	10713475229
178787	74056	26480500144	26480500233	37449082505	230864	95627	44153663456	44153663367	62442709625
t=97					t=97				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
8	7	112	15	113	19	6	228	325	397
23	8	368	465	593	44	19	1672	1575	2297
54	23	2484	2387	3445	107	44	9416	9513	13385
131	54	14148	14245	20077	258	107	55212	55115	78013
316	131	82792	82695	117017	623	258	321468	321565	454693
763	316	482216	482313	682025	1504	623	1873984	1873887	2650145
1842	763	2810892	2810795	3975133	3631	1504	10922048	10922145	15446177
4447	1842	16382748	16382845	23168773	8766	3631	63658692	63658595	90026917
10736	4447	95485984	95485887	135037505	21163	8766	371029716	371029813	524715325
25919	10736	556532768	556532865	787056257	51092	21163	2162519992	2162519895	3058265033
62574	25919	3243711012	3243710915	4587300037	123347	51092	12604089848	12604089945	17824874873
151067	62574	18905732916	18905733013	26736743965	297786	123347	73462019484	73462019387	103890984205
t=103					t=103				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
14	3	84	187	205	13	8	208	105	233
31	14	868	765	1157	34	13	884	987	1325

76	31	4712	4815	6737	81	34	5508	5405	7717
183	76	27816	27713	39265	196	81	31752	31855	44977
442	183	161772	161875	228853	473	196	185416	185313	262145
1067	442	943228	943125	1333853	1142	473	1080332	1080435	1527893
2576	1067	5497184	5497287	7774265	2757	1142	6296988	6296885	8905213
6219	2576	32040288	32040185	45311737	6656	2757	36701184	36701287	51903385
15014	6219	186744132	186744235	264096157	16069	6656	213910528	213910425	302515097
36247	15014	1088424916	1088424813	1539265205	38794	16069	1246761572	1246761675	1763187197
87508	36247	6343804952	6343805055	8971495073	93657	38794	7266659316	7266659213	10276608085
211263	87508	36974405208	36974405105	52289705233	226108	93657	42353193912	42353194015	59896461313
t=113					t=113				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
13	2	52	165	173	16	9	288	175	337
28	13	728	615	953	41	16	1312	1425	1937
69	28	3864	3977	5545	98	41	8036	7923	11285
166	69	22908	22795	32317	237	98	46452	46565	65773
401	166	133132	133245	188357	572	237	271128	271015	383353
968	401	776336	776223	1097825	1381	572	1579864	1579977	2234345
2337	968	4524432	4524545	6398593	3334	1381	9208508	9208395	13022717
5642	2337	26370708	26370595	37293733	8049	3334	53670732	53670845	75901957
13621	5642	153699364	153699477	217363805	19432	8049	312816336	312816223	442389025
32884	13621	895825928	895825815	1266889097	46913	19432	1823226832	1823226945	2578432193
79389	32884	5221255752	5221255865	7383970777	113258	46913	10626545108	10626544995	15028204133
191662	79389	30431709036	30431708923	43036935565	273429	113258	61936043364	61936043477	87590792605
t=119					t=119				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
12	1	24	143	145	11	8	176	57	185
25	12	600	481	769	30	11	660	779	1021
62	25	3100	3219	4469	71	30	4260	4141	5941
149	62	18476	18357	26045	172	71	24424	24543	34625
360	149	107280	107399	151801	415	172	142760	142641	201809
869	360	625680	625561	884761	1002	415	831660	831779	1176229
2098	869	3646324	3646443	5156765	2419	1002	4847676	4847557	6855565
5065	2098	21252740	21252621	30055829	5840	2419	28253920	28254039	39957161
12228	5065	123869640	123869759	175178209	14099	5840	164676320	164676201	232887401
29521	12228	721965576	721965457	1021013425	34038	14099	959803524	959803643	1357367245
71270	29521	4207923340	4207923459	5950902341	82175	34038	5594145300	5594145181	7911316069
172061	71270	24525574940	24525574821	34684400621	198388	82175	32605067800	32605067919	46110529169

t=119				
m	n	a	b	c
18	5	180	299	349
41	18	1476	1357	2005
100	41	8200	8319	11681
241	100	48200	48081	68081
582	241	280524	280643	396805
1405	582	1635420	1635301	2312749
3392	1405	9531520	9531639	13479689
8189	3392	55554176	55554057	78565385
19770	8189	323793060	323793179	457912621
47729	19770	1887204660	1887204541	2668910341
115228	47729	10999434424	10999434543	15555549425
278185	115228	64109402360	64109402241	90664386209

t=119				
m	n	a	b	c
19	10	380	261	461
48	19	1824	1943	2665
115	48	11040	10921	15529
278	115	63940	64059	90509
671	278	373076	372957	527525
1620	671	2174040	2174159	3074641
3911	1620	12671640	12671521	17920321
9442	3911	73855324	73855443	104447285
22795	9442	430460780	430460661	608763389
55032	22795	2508908880	2508908999	3548133049
132859	55032	14622992976	14622992857	20680034905
320750	132859	85229048500	85229048619	120532076381

t=127				
m	n	a	b	c
9	8	144	17	145
26	9	468	595	757
61	26	3172	3045	4397
148	61	18056	18183	25625
357	148	105672	105545	149353
862	357	615468	615595	870493
2081	862	3587644	3587517	5073605
5024	2081	20909888	20910015	29571137
12129	5024	121872192	121872065	172353217
29282	12129	710322756	710322883	1004548165
70693	29282	4140064852	4140064725	5854935773
170668	70693	24130065848	24130065975	34125066473

t=127				
m	n	a	b	c
51	22	2244	2117	3085
124	51	12648	12775	17977
299	124	74152	74025	104777
722	299	431756	431883	610685
1743	722	2516892	2516765	3559333
4208	1743	14669088	14669215	20745313
10159	4208	85498144	85498017	120912545
24526	10159	498319268	498319395	704729957
59211	24526	2904417972	2904417845	4107467197
142948	59211	16928188056	16928188183	23940073225
345107	142948	98664710872	98664710745	139532972153
833162	345107	575060076668	575060076795	813257759693

t=137				
m	n	a	b	c
14	9	252	115	277
37	14	1036	1173	1565
88	37	6512	6375	9113
213	88	37488	37625	53113
514	213	218964	218827	309565
1241	514	1275748	1275885	1804277
2996	1241	7436072	7435935	10516097
7233	2996	43340136	43340273	61292305

t=137				
m	n	a	b	c
17	4	136	273	305
38	17	1292	1155	1733
93	38	7068	7205	10093
224	93	41664	41527	58825
541	224	242368	242505	342857
1306	541	1413092	1412955	1998317
3153	1306	8235636	8235773	11647045
7612	3153	48001272	48001135	67883953

17462	7233	252605292	252605155	357237733	18377	7612	279771448	279771585	395656673
42157	17462	1472291068	1472291205	2082134093	44366	18377	1630627964	1630627827	2306056085
101776	42157	8581141664	8581141527	12135566825	107109	44366	9503995788	9503995925	13440679837
245709	101776	50014558368	50014558505	70731266857	258584	107109	55393347312	55393347175	78338022937
t=151					t=151				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
16	3	96	247	265	17	10	340	189	389
35	16	1120	969	1481	44	17	1496	1647	2225
86	35	6020	6171	8621	105	44	9240	9089	12961
207	86	35604	35453	50245	254	105	53340	53491	75541
500	207	207000	207151	292849	613	254	311404	311253	440285
1207	500	1207000	1206849	1706849	1480	613	1814480	1814631	2566169
2914	1207	7034396	7034547	9948245	3573	1480	10576080	10575929	14956729
7035	2914	40999980	40999829	57982621	8626	3573	61641396	61641547	87174205
16984	7035	238964880	238965031	337947481	20825	8626	359272900	359272749	508088501
41003	16984	1392789904	1392789753	1969702265	50276	20825	2093995400	2093995551	2961356801
98990	41003	8117773940	8117774091	11480266109	121377	50276	12204700104	12204699953	17260052305
238983	98990	47313854340	47313854189	66911894389	293030	121377	71134204620	71134204771	100598957029
t=161					t=161				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
10	9	180	19	181	15	2	60	221	229
29	10	580	741	941	32	15	960	799	1249
68	29	3944	3783	5465	79	32	5056	5217	7265
165	68	22440	22601	31849	190	79	30020	29859	42341
398	165	131340	131179	185629	459	190	174420	174581	246781
961	398	764956	765117	1081925	1108	459	1017144	1016983	1438345
2320	961	4459040	4458879	6305921	2675	1108	5927800	5927961	8383289
5601	2320	25988640	25988801	36753601	6458	2675	34550300	34550139	48861389
13522	5601	151473444	151473283	214215685	15591	6458	201373356	201373517	284785045
32645	13522	882851380	882851541	1248540509	37640	15591	1173690480	1173690319	1659848881
78812	32645	5145635480	5145635319	7277027369	90871	37640	6840768880	6840769041	9674308241
190269	78812	29990960856	29990961017	42413623705	219382	90871	39870923444	39870923283	56386000565
t=161					t=161				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
25	8	400	561	689	51	20	2040	2201	3001
58	25	2900	2739	3989	122	51	12444	12283	17485
141	58	16356	16517	23245	295	122	71980	72141	101909
340	141	95880	95719	135481	712	295	420080	419919	593969

821	340	558280	558441	789641	1719	712	2447856	2448017	3461905
1982	821	3254444	3254283	4602365	4150	1719	14267700	14267539	20177461
4785	1982	18967740	18967901	26824549	10019	4150	83157700	83157861	117602861
11552	4785	110552640	110552479	156344929	24188	10019	484679144	484678983	685439705
27889	11552	644347456	644347617	911245025	58395	24188	2824916520	2824916681	3995035369
67330	27889	3755532740	3755532579	5311125221	140978	58395	16464820620	16464820459	23284772509
162549	67330	21888848340	21888848501	30955506301	340351	140978	95964006556	95964006717	135713599685
392428	162549	127577557944	127577557783	180421912585	821680	340351	559319219360	559319219199	790996825601
t=343					t=343				
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
22	3	132	475	493	29	16	928	585	1097
47	22	2068	1725	2693	74	29	4292	4635	6317
116	47	10904	11247	15665	177	74	26196	25853	36805
279	116	64728	64385	91297	428	177	151512	151855	214513
674	279	376092	376435	532117	1033	428	884248	883905	1250273
1627	674	2193196	2192853	3101405	2494	1033	5152604	5152947	7287125
3928	1627	12781712	12782055	18076313	6021	2494	30032748	30032405	42472477
9483	3928	74498448	74498105	105356473	14536	6021	175042512	175042855	247547737
22894	9483	434207604	434207947	614062525	35093	14536	1020223696	1020223353	1442813945
55271	22894	2530748548	2530748205	3579018677	84722	35093	5946298292	5946298635	8409335933
133436	55271	14750282312	14750282655	20860049537	204537	84722	34657567428	34657567085	49013201653
322143	133436	85970946696	85970946353	121581278545	493796	204537	201999104904	201999105247	285669873985

【評語】030416

考慮兩股差為定值的畢氏三數組的構造方式。針對什麼樣的數可能是畢氏三數組兩股的差、如何由已知的一組畢氏三數組構造同股差的另一組較大的畢氏三數組、以及由已知的兩組不同股差的畢氏三數組構造一組兩股差為前兩組股差乘積的一組畢氏三數組作了分析，給出了部分的結果。這是一個有趣的問題。有別於大多數相關的研究結果，作者們考慮的是兩股差為定值的畢氏三數組的構造問題。能夠看到股差相同的畢氏三數組彼此間的關連性，透過遞迴關係式的形式，針對如何由一組畢氏三數組出發，構造一序列同股差的畢氏三數組，以及由兩組不同股差的畢氏三數組構造一組兩股差為前兩組股差乘積的一組畢氏三數組，十分難得，值得嘉許。有部分的結果的說明稍嫌簡略了些（例如：如何保證由分解式的初始項合成所得出的分解式所產生的畢氏三數組是一組初始的畢氏三數組？），如果能給出更清楚的論述會更好。文章中的許多結果尚有很大的發展空間。

作品海報

壹、摘要

『畢氏定理』，原稱『畢達哥拉斯定理』，文獻中亦有人稱『勾股定理』、『商高定理』，關於此定理的討論與延伸出去的美，真的數都數不盡，跟我們一起進入『畢氏』的世界裏吧！

貳、研究動機

我們看到學姐從每組畢達哥拉斯數的斜邊與較大的股之間的差來找尋出畢達哥拉斯原始三元數（primitive Pythagorean triples）的通則，得到了下列的結果：

（一）畢達哥拉斯數的通則：

1、若斜邊與較大的股恰差 1：

其畢氏數的通則：$(2k+3, 2k^2+6k+4, 2k^2+6k+5)$，$k \ge 0$

2、若斜邊與較大的股恰差 2：

其畢氏數的通則：$(2(k+3), k^2+6k+8, k^2+6k+10)$，$k \ge 0$

3、若斜邊與較大的股恰差 3：

其畢氏數的通則：$(3(2k+3), 3(2k^2+6k+4), 3(2k^2+6k+5))$，$k \ge 0$

4、若斜邊與較大的股恰差 4：

其畢氏數的通則：$(4(k+3), 2(k^2+6k+8), 2(k^2+6k+10))$，$k \ge 0$

5、若斜邊與較大的股恰差 t：當 $t \ne 2n^2$，$n = 2、3、4\ldots$，即 $t \ne 8、18、32\ldots$ 時

若 t 為奇數，其畢氏數的通則：$(t(2k+3), t(2k^2+6k+4), t(2k^2+6k+5))$，$k \ge 0$

若 t 為偶數，其畢氏數的通則：$\left(t(k+3), \frac{t}{2}(k^2+6k+8), \frac{t}{2}(k^2+6k+10)\right)$，$k \ge 0$

（二）畢達哥拉斯原始三元數的通則：

1、對所有的正整數 k，$k \ge 1$，$(2k+1, 2k^2+2k, 2k^2+2k+1)$ 為一組畢氏原始三元數

2、對所有的正整數 h，$h \ge 2$，$(4h, 4h^2-1, 4h^2+1)$ 為一組畢氏原始三元數

3、對所有的正整數 u，$u \ge 2$，$(8u+4, 4u^2+4u-3, 4u^2+4u+5)$ 為一組畢氏原始三元數

4、對所有的正整數 v，$v \ge 1$，$(36v+12, 36v^2+24v-5, 36v^2+24v+13)$ 為一組畢氏原始三元數

5、對所有的正整數 v，$v \ge 1$，$(36v+24, 36v^2+48v+7, 36v^2+48v+25)$ 為一組畢氏原始三元數

6、對所有的正整數 r，$r \ge 4$，$(16r+24, 4r^2+12r-7, 4r^2+12r+25)$ 為一組畢氏原始三元數

7、畢達哥拉斯數中，若能寫成 $a^2+b^2=c^2$，a、b、c 兩兩互質且 $a<b<c$ 的形式時，斜邊與較大的股之差，也就是 $c-b$ 只可能為 1、2、8、18、32、50、72……即斜邊與較大股之差 $c-b=1$ 之外，其餘均形如 $c-b=2n^2$，n 為正整數

參、研究目的

一、兩股差為 1 的畢氏原始三元數之間有什麼關係？是否可將所有兩股差為 1 的畢氏原始三元數找出來？

二、要產生畢氏原始三元數，其兩股差的數有何限制？

三、若股差 t 滿足上面條件，是否可將所有的股差 t 都找出來？而不同股差 t_1 與 t_2 間是否也有關聯性存在？

肆、研究過程（一）

我們用『畢氏定理』的通則：$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$，$m>n$，$(m,n)=1$，找到我們所要的正整數解，所以 (m,n) 真得非常的重要，如：當 $(m,n)=(2,1)$ 時，$(a,b,c)=(4,3,5)$；或者是當 $(m,n)=(4,1)$ 時，$(a,b,c)=(8,15,17)$，在這，我們稱 (m,n) 為畢氏原始三元數 (a,b,c) 的衍生數對，為此，我們進行了以下的幾點討論：

一、討論 I

(a,b,c) $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$	(m,n)	n 的值
(4,3,5)	(2,1)	1
(20,21,29)	(5,2)	2
(120,119,169)	(12,5)	5
(696,697,985)	(29,12)	12
(4060,4059,5741)	(70,29)	29
(23660,23661,33461)	(169,70)	70
……	……	……

若 (a_{n+1}, a_n) 為一組畢氏原始三元數的衍生數對，且 $|b-a| = |(a_{n+1}^2 - a_n^2) - 2a_{n+1}a_n| = 1$

則由下一組衍生數對 (a_{n+2}, a_{n+1}) 所求之畢氏原始三元數其股差

$$\begin{aligned}|b'-a'| &= |(a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2) - 2a_{n+2}a_{n+1}| \\ &= |(a_n+2a_{n+1})^2 - a_{n+1}^2 - 2(a_n+2a_{n+1})a_{n+1}| \\ &= |a_n^2 + 4a_na_{n+1} + 4a_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 - 2a_na_{n+1} - 4a_{n+1}^2| \\ &= |a_n^2 - a_{n+1}^2 + 2a_na_{n+1}| \\ &= |a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}a_n| = 1\end{aligned}$$

二、討論 II

(a,b,c) $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$	(m,n)	n 的值
(12,5,13)	(3,2)	2
(8,15,17)	(4,1)	1
(48,55,73)	(8,3)	3
(72,65,97)	(9,4)	4
(304,297,425)	(19,8)	8
(396,403,565)	(22,9)	9
……	……	……

在表格中我們看到了兩條數列：

第一條數列：2,3,8,19, ……

第二條數列：1,4,9,22, ……

若 (a_{n+1}, a_n) 為一組畢氏原始三元數的衍生數對

，且 $|b-a| = |(a_{n+1}^2 - a_n^2) - 2a_{n+1}a_n| = 7$

則由下一組衍生數對 (a_{n+2}, a_{n+1}) 所求之畢氏原始三元數其股差

$$\begin{aligned}|b'-a'| &= |(a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2) - 2a_{n+2}a_{n+1}| \\ &= |(a_n+2a_{n+1})^2 - a_{n+1}^2 - 2(a_n+2a_{n+1})a_{n+1}| \\ &= |a_n^2 + 4a_na_{n+1} + 4a_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 - 2a_na_{n+1} - 4a_{n+1}^2| \\ &= |a_n^2 - a_{n+1}^2 + 2a_na_{n+1}| \\ &= |a_{n+1}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}a_n| = 7\end{aligned}$$

然而當兩股差為 17、23 時，我們也發現了類似的情形，討論如下：

⇨當兩股差為 17 時，發現 3,4,11,26, ……及 2,7,16,39, ……兩條數列。

⇨當兩股差為 23 時，發現 4,7,18,43, ……及 1,6,13,32, ……兩條數列。

三、討論 III（互質的重要性）

(1) 衍生數對 $(m,n)=1$，m，n 中有一個是奇數，一個是偶數

$\Leftrightarrow (2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 為畢氏原始三元數，即兩兩互質

(2) 數列中的一組衍生數對 $(a_{n+1}, a_n)=1 \Leftrightarrow$ 下一組衍生數對 $(a_{n+2}, a_{n+1})=1$

(3) 衍生數對 $(m,n)=1 \Leftrightarrow (m-n, n)=1$

驗證 1

〈1〉若衍生數對 $(m,n)=1$，m，n 中有一個是奇數，一個是偶數，則：

$(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 為畢氏原始三元數，即兩兩互質

因為衍生數對 $(m,n)=1$，m，n 中有一個是奇數，一個是偶數

為了方便討論，設 $m=2x+1$，$n=2y$，則：

$$\begin{aligned}(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) &= (2(2x+1)(2y), (2x+1)^2-(2y)^2, (2x+1)^2+(2y)^2) \\ &= (2(2x+1)(2y), 4x^2+4x+1-4y^2, 4x^2+4x+1+4y^2) \\ &= (2(4xy+2y), 2(2x^2+2x-2y^2)+1, 2(2x^2+2x+2y^2)+1)\end{aligned}$$

由結果可知 $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 其中的兩股與斜邊會兩兩互質，即為畢氏原始三元數

〈2〉若 $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 為畢氏原始三元數，即兩兩互質，則衍生數對 $(m,n)=1$，且 m，n 中有一個是奇數，一個是偶數

① 假設 $(m,n)=d$，$d \ne 1$

則令 $m=dh$，$n=dk$，$(h,k)=1$，且 $h>k$

$(2mn, m^2-n^2) = (2\cdot dh\cdot dk, (dh)^2-(dk)^2) = (2d^2hk, d^2h^2-d^2k^2) = d^2 \ne 1$ 矛盾

$(2mn, m^2+n^2) = (2\cdot dh\cdot dk, (dh)^2+(dk)^2) = (2d^2hk, d^2h^2+d^2k^2) = d^2 \ne 1$ 矛盾

$(m^2-n^2, m^2+n^2) = ((dh)^2-(dk)^2, (dh)^2+(dk)^2) = (d^2(h^2-k^2), d^2(h^2+k^2))$

$= d^2 \ne 1$ 矛盾

故 $(m,n)=1$

② 再驗證 m，n 中有一個是奇數，一個是偶數

如果 m，n 都為偶數，與 $(m,n)=1$ 產生矛盾

如果 m，n 都為奇數，設 $m=2x+1$，$n=2y+1$，則：

$$\begin{aligned}(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2) &= (2(2x+1)(2y+1), (2x+1)^2-(2y+1)^2, (2x+1)^2+(2y+1)^2) \\ &= (2(2x+1)(2y+1), (2x+2y+2)(2x-2y), 4x^2+4y^2+4x+4y+2)\end{aligned}$$

必含有公因數 2，與 $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 為畢氏原始三元數產生矛盾

由以上討論，可知衍生數對 $(m,n)=1$，m，n 中有一個是奇數，一個是偶數

$\Leftrightarrow (2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ 為畢氏原始三元數，即兩兩互質。

驗證 2

〈1〉若數列中的一組衍生數對 $(a_{n+1},a_n)=1$，則下一組衍生數對 $(a_{n+2},a_{n+1})=1$

假設 $(a_{n+2},a_{n+1})=d$ ，$d\neq 1$

則令 $a_{n+2}=dh$ ，$a_{n+1}=dk$ ，$(h,k)=1$，$h>k$

$a_n=a_{n+2}-2a_{n+1}=dh-2dk=d(h-2k)$ 又 $a_{n+1}=dk$

由上述討論可知 $(a_{n+1},a_n)\neq 1$ 和已知矛盾，故 $(a_{n+2},a_{n+1})=1$

〈2〉若數列中的一組衍生數對 $(a_{n+2},a_{n+1})=1$，則前一組衍生數對 $(a_{n+1},a_n)=1$

假設 $(a_{n+1},a_n)=d$ ，$d\neq 1$

則令 $a_{n+1}=dh$ ，$a_n=dk$ ，$(h,k)=1$，$h>k$

$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}=dk+2dh=d(k+2h)$ 又 $a_{n+1}=dh$

由上述討論可知 $(a_{n+2},a_{n+1})\neq 1$ 和已知矛盾，故 $(a_{n+1},a_n)=1$

驗證 3

〈1〉若衍生數對 $(m,n)=1$，則 $(m-n,n)=1$

假設 $(m-n,n)=d$ ，$d\neq 1$

則令 $m-n=dh$ ，$n=dk$ ，$(h,k)=1$，$h>k$ 即 $m=n+dh$

$\Rightarrow (m,n)=(n+dh,n)=(dk+dh,dk)=(d(k+h),dk)=d\neq 1$ 和已知矛盾

故 $(m-n,n)=1$

〈2〉若 $(m-n,n)=1$，則衍生數對 $(m,n)=1$

假設 $(m,n)=d$ ，$d\neq 1$

則令 $m=dh$ ，$n=dk$ ，$(h,k)=1$，$h>k$

$\Rightarrow (m-n,n)=(dh-dk,dk)=(d(h-k),dk)=d\neq 1$ 和已知矛盾，故 $(m,n)=1$

四、討論IV（股差的規則性）

經過 excel 的初步驗算，我們將會產生畢氏原始三元數的兩股差數字列成一數列：

1,7,17,23,31,41,47,49,71,73,79,89,97,103,113,119,127,137,151,161,343...

故似乎得到一個結果：能產生畢氏原始三元數的兩股差能寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式，k 為整數

驗證

由 $|b-a|=\left|(m^2-n^2)-2mn\right|$ 且 m，n 中有一個是奇數，一個是偶數，驗證如下：

〈1〉若 m 為奇數，n 為偶數，設 $m=2x+1$ ，$n=2y$ ，則：

$$\begin{aligned}|b-a|=\left|(m^2-n^2)-2mn\right|&=\left|(2x+1)^2-(2y)^2-2(2x+1)(2y)\right|\\&=\left|4x^2+4x+1-4y^2-8xy-4y\right|\\&=\left|4x^2+4x-(4y^2+4y)-8xy+1\right|\\&=\left|4x(x+1)-4y(y+1)-8xy+1\right|\end{aligned}$$

而 $x(x+1)$ 、$y(y+1)$ 為連續整數乘積必為 2 的倍數，$4x(x+1)$ 、$4y(y+1)$ 必為 8 的倍數，

故 $|b-a|=\left|4x(x+1)-4y(y+1)-8xy+1\right|=|8k+1|$，k 為整數

〈2〉若 m 為偶數，n 為奇數，設 $m=2x$ ，$n=2y+1$ ，則：

$$\begin{aligned}|b-a|=\left|(m^2-n^2)-2mn\right|&=\left|(2x)^2-(2y+1)^2-2(2x)(2y+1)\right|\\&=\left|4x^2-4y^2-4y-1-8xy-4x\right|\\&=\left|4x^2-4x-(4y^2+4y)-8xy-1\right|\\&=\left|4x(x-1)-4y(y+1)-8xy-1\right|\end{aligned}$$

而 $x(x-1)$ 、$y(y+1)$ 為連續整數乘積必為 2 的倍數，$4x(x-1)$ 、$4y(y+1)$ 必為 8 的倍數，

故 $|b-a|=\left|4x(x-1)-4y(y+1)-8xy-1\right|=|8k-1|$，k 為整數

五、討論V（股差的合成性）

若兩股差為 7 時，是否 $7\times 7=49$ 此數字是我們要找尋的股差呢？

⇨用 excel 軟體試算後，兩股差為 49 時，竟符合我們的要求！

若兩股差為 7 和 17 時，是否 $7\times 17=119$ 此數字是我們要找尋的股差呢？

⇨用 excel 軟體試算後，兩股差為 119 時，竟符合我們的要求！

由上述討論我們發現當兩股差為 t_1 和 t_2 時，$t_1\times t_2$ 竟也是我們所要找尋的股差。

為了去驗正它，我們試著去分析 t 的特性由 $t=|b-a|=\left|(m^2-n^2)-2mn\right|$

設 $m-n=\Delta n$

則 $t=|b-a|=\left|(m^2-n^2)-2mn\right|=\left|m^2-2mn+n^2-2n^2\right|=\left|(m-n)^2-2n^2\right|=\left|\Delta n^2-2n^2\right|$

嘗試將其分解：

則 $t=|b-a|=\left|\Delta n^2-2n^2\right|=\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|$

現在我們將兩股差為 7,17,23 所產生的畢氏原始三元數做以下的分析：

t	(a,b,c)	(m,n)	分解式	備註
7	(12,5,13)	(3,2)	$7=(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)$	
17	(24,7,25)	(4,3)	$17=(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)$	
23	(12,35,37)	(6,1)	$23=(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$	
t_1	……	……	$t_1=\left\lvert\Delta n_1+\sqrt{2}n_1\right\rvert\times\left\lvert\Delta n_1-\sqrt{2}n_1\right\rvert$	Δn_1, n_1 為正整數
t_2	……	……	$t_2=\left\lvert\Delta n_2+\sqrt{2}n_2\right\rvert\times\left\lvert\Delta n_2-\sqrt{2}n_2\right\rvert$	Δn_2, n_2 為正整數
……	……	……	……	……

(1) 我們試著取股差為 7 時的 $2\sqrt{2}+1$ 自乘 2 次

⇨ $(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}+1)=4\sqrt{2}+9$ 可知所得的新股差為 $\left|9^2-2\times 4^2\right|=49=7\times 7$

(2) 我們試著取股差為 7 時的 $2\sqrt{2}+1$ 和股差為 17 時的 $3\sqrt{2}+1$ 相乘

⇨ $(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}+1)=5\sqrt{2}+13$ 可知所得的新股差為 $\left|13^2-2\times 5^2\right|=119=7\times 17$

(3) 我們試著取股差為 t_1 時的 $\Delta n_1+\sqrt{2}n_1$ 和股差為 t_2 時的 $\Delta n_2+\sqrt{2}n_2$ 相乘

$$\begin{aligned}\Rightarrow(\Delta n_1+\sqrt{2}n_1)(\Delta n_2+\sqrt{2}n_2)&=\Delta n_1\Delta n_2+\sqrt{2}\Delta n_1n_2+\sqrt{2}n_1\Delta n_2+2n_1n_2\\&=(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1n_2)+\sqrt{2}(n_1\Delta n_2+\Delta n_1n_2)\end{aligned}$$

可知所得的新股差

$$\begin{aligned}t&=\left|(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1n_2)^2-2\times(n_1\Delta n_2+\Delta n_1n_2)^2\right|\\&=\left|\Delta n_1^2\Delta n_2^2+4n_1^2n_2^2+4\Delta n_1\Delta n_2n_1n_2-2\times(n_1^2\Delta n_2^2+\Delta n_1^2n_2^2+2n_1\Delta n_2\Delta n_1n_2)\right|\\&=\left|\Delta n_1^2\Delta n_2^2+4n_1^2n_2^2+4\Delta n_1\Delta n_2n_1n_2-2n_1^2\Delta n_2^2-2\Delta n_1^2n_2^2-4n_1\Delta n_2\Delta n_1n_2\right|\\&=\left|\Delta n_1^2\Delta n_2^2+4n_1^2n_2^2-2n_1^2\Delta n_2^2-2\Delta n_1^2n_2^2\right|\\&=\left|4n_1^2n_2^2-2\Delta n_1^2n_2^2-(2n_1^2\Delta n_2^2-\Delta n_1^2\Delta n_2^2)\right|\\&=\left|2n_2^2(2n_1^2-\Delta n_1^2)-\Delta n_2^2(2n_1^2-\Delta n_1^2)\right|\\&=\left|(2n_1^2-\Delta n_1^2)\times(2n_2^2-\Delta n_2^2)\right|\\&=t_1\times t_2\end{aligned}$$

六、討論VI（股差所成數列的形成性）

若挑股差為 t_1 的第 m 組衍生數對 (a_{m+1},a_m)，和股差為 t_2 的第 n 組衍生數對 (b_{n+1},b_n) 進行合成，看是否得到股差為 $t_1\times t_2$ 的第 m+n-1 組衍生數對 (c_{m+n},c_{m+n-1})？

⇨要證明 (a_{m+1},a_m) 與 (b_{n+1},b_n) 會合成 (c_{m+n},c_{m+n-1})

也就是要證 $\left((a_{m+1}-a_m)+a_m\sqrt{2}\right)\cdot\left((b_{n+1}-b_n)+b_n\sqrt{2}\right)=(c_{m+n}-c_{m+n-1})+c_{m+n-1}\sqrt{2}$

亦即證明 $\begin{cases}2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)=c_{m+n}-c_{m+n-1}\\a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)=c_{m+n-1}\end{cases}$

驗證 1

假設 $2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)=c_{m+n}-c_{m+n-1}$ 成立

且 $a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)=c_{m+n-1}$ 成立

先證第一式：〈1〉 $2a_{m+1}b_{n+1}+(a_{m+2}-a_{m+1})(b_{n+2}-b_{n+1})$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+2}b_{n+2}-a_{m+2}b_{n+1}-a_{m+1}b_{n+2}+a_{m+1}b_{n+1}$

$=3a_{m+1}b_{n+1}+(2a_{m+1}+a_m)(2b_{n+1}+b_n)-(2a_{m+1}+a_m)b_{n+1}-a_{m+1}(2b_{n+1}+b_n)$

$=3a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+1}b_n+a_mb_{n+1}+a_mb_n$

〈2〉 $c_{(m+1)+(n+1)}-c_{(m+1)+(n+1)-1}$

$=c_{m+n+2}-c_{m+n+1}=(2c_{m+n+1}+c_{m+n})-c_{m+n+1}=c_{m+n+1}+c_{m+n}$

$=(2c_{m+n}+c_{m+n-1})+c_{m+n}=3c_{m+n}+c_{m+n-1}=3(c_{m+n}-c_{m+n-1})+4c_{m+n-1}$

$=3[2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)]+4[a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)]$

$=3a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+1}b_n+a_mb_{n+1}+a_mb_n$

$\therefore 2a_{m+1}b_{n+1}+(a_{m+2}-a_{m+1})(b_{n+2}-b_{n+1})=c_{m+n+2}-c_{m+n+1}$ 亦成立

驗證 2

假設 $2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)=c_{m+n}-c_{m+n-1}$ 成立

且 $a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)=c_{m+n-1}$ 成立

再證第二式：〈1〉 $a_{m+1}(b_{n+2}-b_{n+1})+b_{n+1}(a_{m+2}-a_{m+1})$

$=a_{m+1}b_{n+2}-a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+2}b_{n+1}-a_{m+1}b_{n+1}$

$=a_{m+1}(2b_{n+1}+b_n)-a_{m+1}b_{n+1}+(2a_{m+1}+a_m)b_{n+1}-a_{m+1}b_{n+1}$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_{m+1}b_n-a_{m+1}b_{n+1}+2a_{m+1}b_{n+1}+a_mb_{n+1}-a_{m+1}b_{n+1}$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n$

〈2〉 $c_{(m+1)+(n+1)-1}$

$=c_{m+n+1}=2c_{m+n}+c_{m+n-1}=2(c_{m+n}-c_{m+n-1})+3c_{m+n-1}$

$=2[2a_mb_n+(a_{m+1}-a_m)(b_{n+1}-b_n)]+3[a_m(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{m+1}-a_m)]$

$=2a_{m+1}b_{n+1}+a_mb_{n+1}+a_{m+1}b_n$

$\therefore a_{m+1}(b_{n+2}-b_{n+1})+b_{n+1}(a_{m+2}-a_{m+1})=c_{m+n+1}$ 亦成立

由上述討論，我們看到兩條衍生數對在進行合成時，若其中一條衍生數對往後移動一組，則合成後新的衍生數對亦會同時向後移動到下一組。因此我們可藉由兩條衍生數對去創造出所需要的任何一組新衍生數對的組數。

伍、研究過程(二)

在研究過程(一)中，我們利用衍生數對所產生的遞迴數列去創造更多的數列情形，進而轉換回衍生數對再求出畢達哥拉斯原始三元數(primitive Pythagorean triples)，而在過程中，我們都利用股差分解式中的結構式($\Delta n+n\sqrt{2}$，$(\Delta n,n)=1$)來創造，反之，其股差分解式中($\Delta n-n\sqrt{2}$ 或 $-\Delta n+n\sqrt{2}$，$(\Delta n,n)=1$)對找出畢達哥拉斯原始三元數有何幫助？

為此，我們進行了以下的幾點討論：

(為了討論的方便，我們稱形如 $\Delta n-n\sqrt{2}$ 或 $-\Delta n+n\sqrt{2}$ 為共軛式)

一、討論 I

由股差7的分解 $7=\left|2\sqrt{2}+1\right|\cdot\left|2\sqrt{2}-1\right|$ 中，我們都知道可由結構式 $1+2\sqrt{2}$ 產生遞迴數列：⇨ $1+2\sqrt{2}$ ⇨ 衍生數對(3,2) ⇨ 遞迴數列2,3,8,19,46……，現在我們利用共軛式 $-1+2\sqrt{2}$ 或 $1-2\sqrt{2}$(取正數)，即 $-1+2\sqrt{2}$，發現它亦可產生一組衍生數對(1,2)，但它卻不滿足畢氏數，因為三邊長為(4,−3,5)！不過它的股差亦滿足4−(−3)=7的情形。現在我們將(1,2)利用前面衍生的特性將它轉變為數列赫然發現數列為 $\boxed{2}$,1,4,9,22,53……，若取 1,4,9,22,53……，則此數列竟為股差 7 的另一條遞 迴數列。為了更了解結構式與共軛式產生的結果，做了以下討論：

股差	結構式	遞迴數列	共軛式	遞迴數列
7	$1+2\sqrt{2}$	2,3,8,19,46 ……	$-1+2\sqrt{2}$	2, 1,4,9,22,53 ……
17	$1+3\sqrt{2}$	3,4,11,26,63 ……	$-1+3\sqrt{2}$	3, 2,7,16,39,94 ……
	7 結構式*17 結構式	遞迴數列	7 結構式*17 共軛式	遞迴數列
7×17	$(1+2\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})$ $=13+5\sqrt{2}$	5,18,41,100,241 ……	$(1+2\sqrt{2})(-1+3\sqrt{2})$ $=11+\sqrt{2}$	1,12,25,62,149 ……
	7 共軛式*17 結構式	遞迴數列	7 共軛式*17 共軛式	遞迴數列
7×17	$(-1+2\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})$ $=11-\sqrt{2}$	-1,10,19,48,115……	$(-1+2\sqrt{2})(-1+3\sqrt{2})$ $=13-5\sqrt{2}$	-5,8,11,30,71,72……

從上面的表格我們看到股差為t_1的結構式與共軛式搭配股差為t_2的結構式與共軛式，可組合出 4組遞迴數列，也就是我們可以創造出更多的畢氏數的法則。

而我們亦可以發現，若S表結構式產生之一遞迴數列，而$\overline{S}$表共軛式產生之一遞迴數列，$S_1\times S_2$表示利用S_1與S_2結構式合成的遞迴數列，會有下列結果：

(1) $S\neq\overline{S}$ (2) $S_1\times S_2\neq\overline{S_1}\times S_2$ (3) $\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\overline{S_1\times S_2}$

二、討論 II (同一遞迴數列上的行進規則)

股差 7 的衍生數對 $(3,2)\rightarrow(8,3)\rightarrow(19,8)\rightarrow(46,19)\rightarrow$ ……

結構式$1+2\sqrt{2}\rightarrow5+3\sqrt{2}\rightarrow11+8\sqrt{2}\rightarrow27+19\sqrt{2}$ ……

我們發現 $5+3\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$11+8\sqrt{2}=(5+3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2$

$27+19\sqrt{2}=(11+8\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})=(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^3$

所以我們得到在同一條遞迴數列上的數，其形成之衍生數對必能由$(1+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n$運算而產生。

⇨若衍生數對(a_{n+1},a_n)的下一組為(a_{n+2},a_{n+1})，我們可由結構式的驗證得到：

$$\begin{aligned}\left((a_{n+1}-a_n)+a_n\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)&=a_{n+1}-a_n+a_{n+1}\sqrt{2}-a_n\sqrt{2}+a_n\sqrt{2}+2a_n\\&=a_{n+1}+a_n+a_{n+1}\sqrt{2}=a_{n+1}+(a_{n+2}-2a_{n+1})+a_{n+1}\sqrt{2}\\&=(a_{n+2}-a_{n+1})+a_{n+1}\sqrt{2}\end{aligned}$$

三、討論 III (驗證討論 I 的結果)

若S表結構式產生之一遞迴數列，而$\overline{S}$表共軛式產生之一遞迴數列，$S_1\times S_2$表示利用S_1與S_2結構式合成的遞迴數列，會有結果：

(1) $S\neq\overline{S}$ (2) $S_1\times S_2\neq\overline{S_1}\times S_2$ (3) $\overline{S_1}\times\overline{S_2}=\overline{S_1\times S_2}$

驗證 1

(1)若 $\Delta n+n\sqrt{2}$ 為一股差不為 1 所形成之結構式，則由 $\Delta n+n\sqrt{2}$ 及 $\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}$ 會產生出不同的遞迴數列。

假設$\Delta n+n\sqrt{2}$及$\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}$會產生出相同的遞迴數列，表示$\Delta n+n\sqrt{2}$經過 r 次移動後會等於$\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}$，也就是

$$(\Delta n+n\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^r=\overline{\Delta n+n\sqrt{2}}=\pm(\Delta n-n\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^r&=\frac{\pm(\Delta n-n\sqrt{2})}{(\Delta n+n\sqrt{2})}=\pm\frac{(\Delta n-n\sqrt{2})\cdot(\Delta n-n\sqrt{2})}{(\Delta n+n\sqrt{2})\cdot(\Delta n-n\sqrt{2})}\\&=\pm\frac{\Delta n^2+2n^2-2n\Delta n\sqrt{2}}{\Delta n^2-2n^2}=\pm\frac{\Delta n^2+2n^2-2n\Delta n\sqrt{2}}{\pm t}\\&=\pm\frac{\Delta n^2+2n^2-2n\Delta n\sqrt{2}}{t}=\pm\left(\frac{\Delta n^2+2n^2}{t}-\frac{n\Delta n}{t}2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

由上述知其不可能化為$(1+\sqrt{2})^r$的形式，所以兩者會產生不同遞迴數列。

驗證 2

(2) 若$\Delta n_1+n_1\sqrt{2}$及$\Delta n_2+n_2\sqrt{2}$為二股差不為1所形成之結構式，則我們似乎可以由$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出不同的遞迴數列。

假設$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出相同的遞迴數列，表示$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$經過r次移動後會等於$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$，也就是

$$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^r=\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$$

$$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^r=\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}$$

$$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^r=\overline{\Delta n_1+n_1\sqrt{2}}=\pm(\Delta n_1-n_1\sqrt{2})$$

由驗證(1) 的結果，知道其不可能化為$(1+\sqrt{2})^r$的形式，也就是

$(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})$會產生出不同的遞迴數列。

驗證 3

(3) 若$\Delta n_1+n_1\sqrt{2}$ 及$\Delta n_2+n_2\sqrt{2}$為二股差不為1所形成之結構式，則由$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot\overline{(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$ 及 $\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$ 會產生出相同的遞迴數列。

$$\begin{aligned}\because\ \overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot\overline{(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}&=[\pm(\Delta n_1-n_1\sqrt{2})]\cdot[\pm(\Delta n_2-n_2\sqrt{2})]\\&=\pm(\Delta n_1\Delta n_2-n_2\Delta n_1\sqrt{2}-n_1\Delta n_2\sqrt{2}+2n_1n_2)\\&=\pm[(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1n_2)-(n_2\Delta n_1+n_1\Delta n_2)\sqrt{2}]\\&=\overline{(\Delta n_1\Delta n_2+2n_1n_2)+(n_2\Delta n_1+n_1\Delta n_2)\sqrt{2}}\\&=\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}\end{aligned}$$

$\therefore\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})}\cdot\overline{(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$ 及$\overline{(\Delta n_1+n_1\sqrt{2})\cdot(\Delta n_2+n_2\sqrt{2})}$ 會產生出相同的遞迴數列。

四、討論 IV (如何創造出所謂的畢氏原始三元數)

(1) 利用股差為 7 時，其兩條遞迴數列 2,3,8,19,46 ……及 1,4,9,22,53 ……
的第 1 結構式$1+2\sqrt{2}$ 及$3+\sqrt{2}$ 創造出股差為 49 的結構式$(1+2\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})=7+7\sqrt{2}$
而其$(\Delta n,n)=(7,7)\neq1$，故轉換為畢氏數後$(147,196,245)$並非畢氏原始三元數。

(2) 利用股差為 7 時，其遞迴數列 2,3,8,19,46 ……的第 1 結構式$1+2\sqrt{2}$
及股差為 49 時，其遞迴數列 5,6,17,40,97 ……的第 1 結構式$1+5\sqrt{2}$
創造出股差為 343 的結構式$(1+2\sqrt{2})\cdot(1+5\sqrt{2})=21+7\sqrt{2}$
而其$(\Delta n,n)=(21,7)\neq1$，故轉換為畢氏數後$(392,735,833)$並非畢氏原始三元數。

由(1)(2)討論知股差的結構式在合成過程中，所產生的新結構式雖然不一定能創造畢氏原始三元數為了解決這個問題，我們從股差的分解式中去探討，因為$t=\left|b-a\right|=\left|\Delta n^2-2n^2\right|=\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|$ 要使$(\Delta n,n)=1$，從股差t的情形去操作，得到下列一個結果：

當股差由可以產生畢氏原始三元數的質數所組合：

股差	7	7×17	7×17×23	7×17×23×31
結構式	$1+2\sqrt{2}$	$13+5\sqrt{2}$	$75+38\sqrt{2}$	$379+338\sqrt{2}$
$(\Delta n,n)$	$(1,2)=1$	$(13,5)=1$	$(75,38)=1$	$(379,338)=1$

我們發現若合成後的股差可分解為數個質因數股差的一次方乘積，所產生的畢式三元數必為畢氏原始三元數。

驗證

若合成後股差 $t=t_1\times t_2\times t_3\times\cdots\times t_r=\left|\Delta n^2-2n^2\right|$，其中$t_1,t_2,t_3,\cdots,t_r$為可產生畢氏原始三元數的相異質數股差，則$(\Delta n,n)=1$。

假設$(\Delta n,n)=d$，$d\neq1$ 則令$\Delta n=dh$，$n=dk$，$(h,k)=1$，$h>k$

⇨$\left|\Delta n^2-2n^2\right|=\left|(dh)^2-2(dk)^2\right|=\left|d^2h^2-2d^2k^2\right|=d^2\cdot\left|h^2-2k^2\right|$

與$\left|\Delta n^2-2n^2\right|=t_1\times t_2\times t_3\times\cdots\times t_r$，$t_1,t_2,t_3,\cdots,t_r$為相異質數股差$\boxed{\text{矛盾}}$

$\therefore(\Delta n,n)=1$

即由研究過程(一) 的討論 III 可得到：$(\Delta n,n)=1\Leftrightarrow$衍生數對$(m,n)=1$
$\Leftrightarrow(2mn,m^2-n^2,m^2+n^2)$為畢氏原始三元數，即兩兩互質。

舉例如下：

❶每個可產生畢氏原始三元數的股差為單一質數⇨可產生 2 條遞迴數列。
如股差 t=7，有 2,3 ,8,19, ……及 1,4,9,22, ……兩條數列。
如股差 t=41，有 2,9,20,49, ……及 5,8,21,50, ……兩條數列。

❷若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之$\boxed{\text{一次方}}$乘積⇨可產生2^r條遞迴數列。
即$t=t_1\times t_2\times t_3\times\cdots\times t_r$，其遞迴數列個數為$2\times2\times\ldots\times2=2^r$條。
如股差$t=119=7\times17$，其遞迴數列個數為$2\times2=2^2=4$條。
有 1,12,25,62, ……及 8,11,30,71, ……及 5,18,41,100, ……及 10,19,48,115, ……
共 4 條數列。

五、討論 V (合成產生遞迴數列的推廣)

由討論 IV，我們將其結果推廣至：

若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之冪次方乘積⇨可產生2^r條遞迴數列。

驗證

若合成後股差$t=t_1^{\alpha_1}\times t_2^{\alpha_2}\times t_3^{\alpha_3}\times\cdots\times t_r^{\alpha_r}$，其中$t_1,t_2,t_3,\cdots,t_r$為可產生畢氏原始三元數的相異質數股差，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\ldots,\alpha_r$為正整數。則可產生$2^r$條遞迴數列。

為了解決這個問題，我們設法去驗證每個$t_i^{\alpha_i}$，$i=1,2,3,\ldots\ldots,r$，可產生 2 條遞迴數列

(1) 股差為t_i^1時，可產生 2 條遞迴數列

(2) 股差為t_i^2時，則會有$\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|$及$\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|$會產生新的結構式或共軛式，可產生 2 條遞迴數列

(3) 股差為t_i^3時，則會有

❶$\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|$及$\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|$會產生新的結構式或共軛式

❷$\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|=\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times t=\left|t\Delta n+tn\sqrt{2}\right|$
，得到$(t\Delta n,tn)=t\neq1$ 故不會產生畢氏原始三元數

❸$\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|=\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times t=\left|t\Delta n-tn\sqrt{2}\right|$
，得到$(t\Delta n,tn)=t\neq1$ 故不會產生畢氏原始三元數

由❶、❷、❸結果可知會產生 2 條遞迴數列

(4) 股差為$t_i^{\,j}$時，則會有

❶$\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n+\sqrt{2}n)^j\right|$以及$\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n-\sqrt{2}n)^j\right|$會產生新的結構式或共軛式

❷$\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n+\sqrt{2}n)^{j-2}\right|\times t$經展開整理可得形如$\left|tp+tq\sqrt{2}\right|$，得到$(tp,tq)\geq t\neq1$，故不會產生畢氏原始三元數

❸$\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\ldots\times\left|\Delta n-\sqrt{2}n\right|\times\left|\Delta n+\sqrt{2}n\right|=\left|(\Delta n-\sqrt{2}n)^{j-2}\right|\times t$經展開整理可得形如$\left|tp-tq\sqrt{2}\right|$，得到$(tp,tq)\geq t\neq1$，故不會產生畢氏原始三元數

由❶、❷、❸結果可知會產生 2 條遞迴數列

也就是若股差為可產生畢氏原始三元數的質數股差之$\boxed{\text{冪次方}}$乘積
⇨可產生2^r條遞迴數列。即$t=t_1^{\alpha_1}\times t_2^{\alpha_2}\times t_3^{\alpha_3}\times\cdots\times t_r^{\alpha_r}$
其遞迴數列個數為$2\times2\times\ldots\times2=2^r$條。