中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030415

一棍定江山?

學校名稱：臺中市私立弘文高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國三 陳冠廷	曾立行
國三 黃鈞揚	張書莉
國三 余佳穎	

關鍵詞：面積差、面積比值

摘要

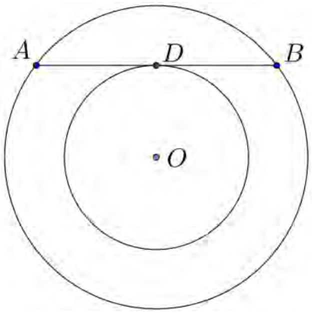
國中三年級的習作題中，有一個題目是說在固定一個條件之下，兩個無限縮放的同心圓面積差居然會成定值。因此我們探討在同樣的條件之下三角形是否也存在一個作圖方式使得多邊形也能有此性質。所以我們使用 GGB 來繪製相關圖形，經由在 GGB 中圖形的可變動性與可被計算性來驗證面積差，並給予每個可變動圖形的面積差證明來說明不成定值的原因。

接著因為三角形無此性質，所以我們轉往探討橢圓是否也有此性質。最後做個統整性的討論與說明。

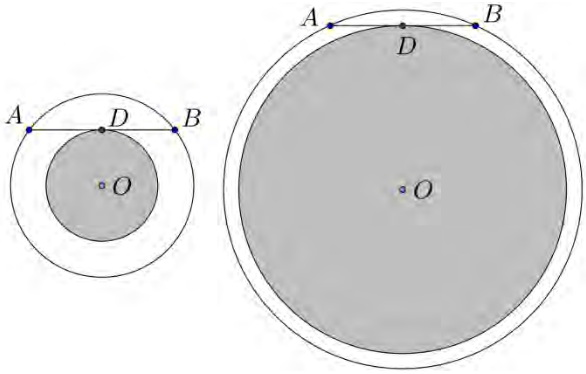
壹、 研究動機

在上學期末檢討數學習作時，老師在講解一個數學題目時給大家一個機會說說看此題有什麼特別的地方。題目的敘述如下：

如下圖，有兩個同心圓，其中$\overline{AB}=50$為大圓的一弦，D 為$\overline{AB}$中點，小圓切$\overline{AB}$於 D 點，則大圓與小圓的面積差為何？



當時雖然有許多人都有算出此題的答案，可是卻沒有人發現其中的奧妙。後來我們才知道原來這個面積差只跟$\overline{AB}$長度有關，也就表示當此圓心O遠離$\overline{AB}$(定值)時，兩個同心圓的面積差是固定的。如下圖



其中兩個環狀的面積會是相同。

這當下讓我們覺得非常有意思，因此下課後就問老師還有其他類似圖形在固定$\overline{AB}$（棍長)長度後還有這樣的性質嗎？老師只回說他也不知道，所以我們就跟老師提出想做個研究看看！而我們的初步想法是當多邊形的邊數越多時，其形狀會越來越趨近於圓形。那麼多邊形是否也具有相似的性質？因此我們想找出符合此性質的多邊形作圖法。

貳、　研究目的

一、正三角形同外心、內心、重心的面積差性質

二、頂角可變動之等腰三角形同內心、重心的面積差性質

三、棍長可變動之正三角形同重心的面積差性質。

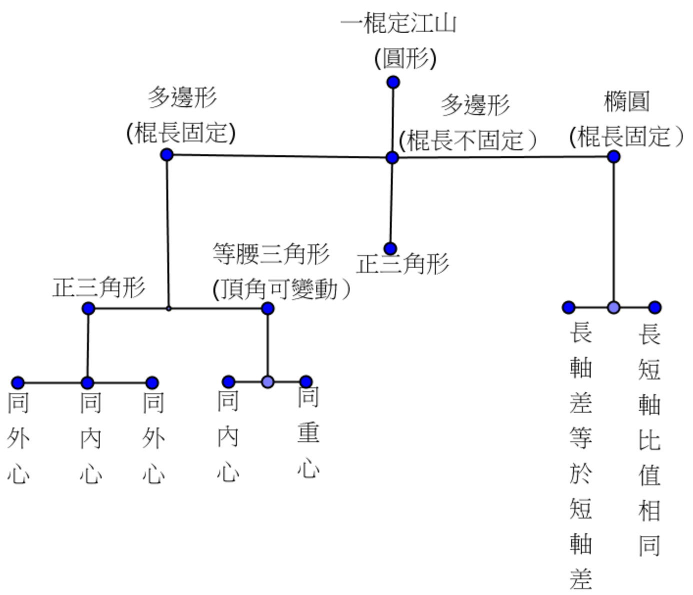
四、橢圓面積差性質

參、　研究設備及器材

紙、筆、電腦、GGB 軟體。

肆、　研究過程或方法

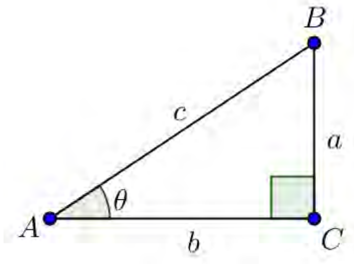
一、研究架構圖



二、文獻探討

(一)三角函數

三角函數定義是在直角三角形中針對θ而言，a為對邊、b為鄰邊、c為斜邊。



$\sin\theta = \frac{對}{斜}$ 正弦函數

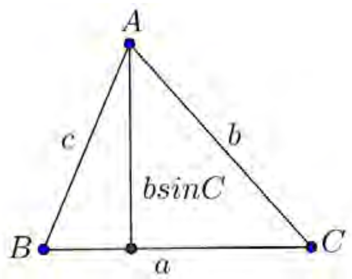
$\cos\theta = \frac{鄰}{斜}$ 餘弦函數

$\tan\theta = \frac{對}{鄰}$ 正切函數

若要用c來表示三角形其他邊長，可以透過其定義經由移項得到，比如說：

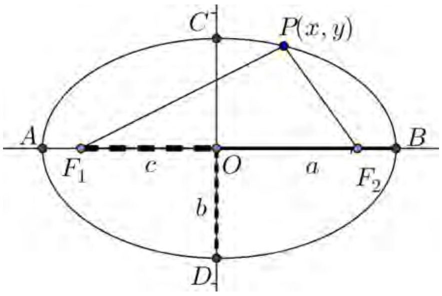
$\sin\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{c} \Rightarrow \overline{BC} = c \times \sin\theta$，同理可以得到$\overline{AC} = c \times \cos\theta$。

其中較常使用到的三角形公式如下：

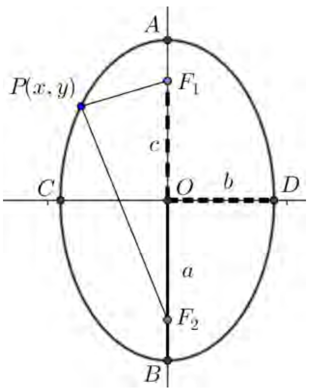
二倍角公式	
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.........(1)	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.........(2)
$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.........(3)	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.........(4)
任意三角形面積公式	
三角形面積$= \frac{1}{2}ab\sin C$ $= \frac{1}{2}ac\sin B$ $= \frac{1}{2}bc\sin A$	

(二)橢圓

設橢圓的兩焦點為$F_1(0,c)$、$F_2(0,-c)$、$a > b > 0$、$c > 0$，且其長軸長為$2a$、短軸長為$2b$，又橢圓的中心為原點O，則其圖形如下：



圖(一)



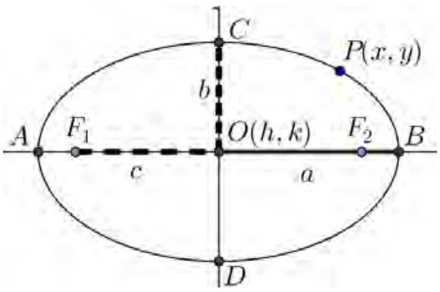
圖(二)

其中方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$……圖(一)與 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$……圖(二)統稱為橢圓的標準式。

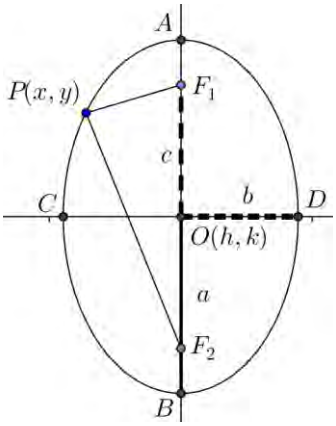
若橢圓的中心不在原點而是在 (h,k) ，則公式如下：設 $a>b>0$

(1)橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 平移 (h,k) 後，可得橢圓方程式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$……圖(三)

(2)橢圓 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 平移 (h,k) 後，可得橢圓方程式為 $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$……圖(四)



圖(三)



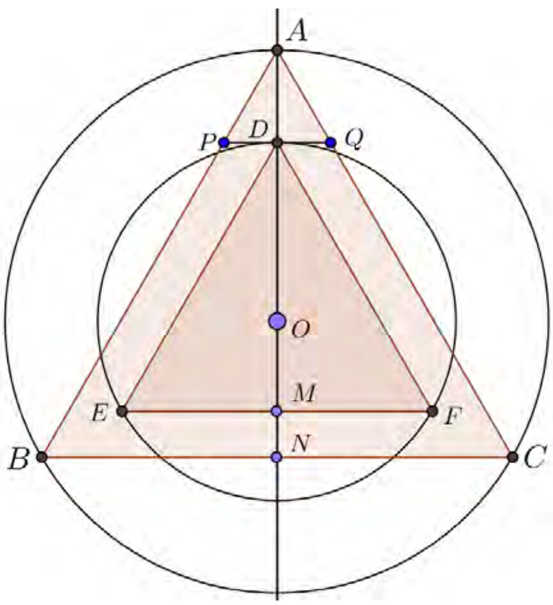
圖(四)

由維基百科可知道橢圓所包圍的面積是 πab ，這裡的 a 和 b 是半長軸和半短軸。在圓的情況下，表達式簡化為 πa^2 。所以橢圓面積公式為 $\pi\times a\times b$ 。

三、研究方法

(一)正三角形同外心、內心、重心的面積差性質

1. 正三角形、同外心

圖形(正三角形、同外心)	圖形作法
	1. 做線段 $\overline{PQ}$ 中垂線。 2. 以 $\overline{AP}$ 為邊長做正三角形 APQ 3. 在 $\overline{PQ}$ 中垂線上找一點 O 4. 以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫圓 5. 做 $\overrightarrow{AP}$ 交圓 O 於 B 點，做 $\overrightarrow{AQ}$ 交圓 O 於 C 點，得 ΔABC 。 6. 過 D 點分別做直線平行 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 。 7. 重複第 4、5 步驟，得 ΔDEF 。

外心證明： 由步驟 4、5 可知ΔABC三頂點都在以O為圓心的圓上，所以O為ΔABC的外心，同理O也為ΔDEF 的外心。

ΔABC 面積：

設$\overline{AB}$=a，$\overline{PQ}$=n，則 ΔABC 面積=$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

ΔDEF 面積：

$\overline{AN}=\overline{AB}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 、 $\overline{AO}=\overline{AN}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 、 $\overline{AD}=\overline{PQ}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}n$

$\overline{DO}=\overline{AO}-\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}n \Rightarrow \overline{DM}=\dfrac{3}{2}\overline{DO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}n$

$\overline{DE}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{DM}=a-\dfrac{3}{2}n$

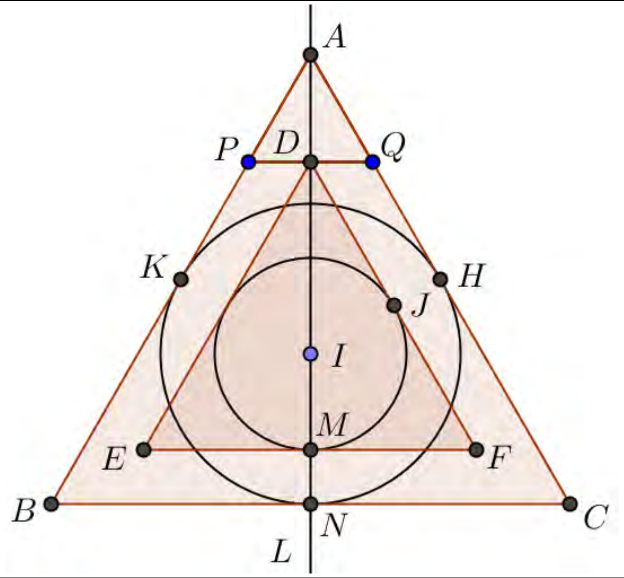
ΔDEF 面積=$(a-\dfrac{3}{2}n)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=(a^2-3an+\dfrac{9}{4}n^2)\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}an+\dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2$

ΔABC 面積 － ΔDEF 面積$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}an-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}an-\dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\frac{3}{4}n)$$

由上述證明可知道正三角形且同外心的面積差會與n跟三角形邊長a有關，並不是一個定值。其面積差會隨著外心O遠離$\overline{PQ}$而跟著變大。

2. 正三角形、同內心

圖形(正三角形、同內心)	圖形作法
	1. 先做$\overline{PQ}$線段，以$\overline{PQ}$為底做正三角形ΔAPQ 。 2. 在$\overline{PQ}$上做中垂線L 。 3. 利用 A 點與 P、Q 兩點做出射線$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$。 4. 在中垂線L上取一點I ，做過I點且與$\overrightarrow{AQ}$垂直的直線，交$\overrightarrow{AQ}$於H 。 5. 以$\overline{IH}$為半徑畫圓交L於N 。 6. 做過N點且與$\overline{PQ}$平行直線交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B 、C兩點，得ΔABC 。

	7. 做$\overrightarrow{DF}$、$\overrightarrow{DE}$平行$\overline{AC}$、$\overline{AB}$。 8. 重複第 5、6 步驟，得ΔDEF
內心證明：（圓 I 與 ΔABC 只交於一點 K 且 $\overline{IK} \perp \overline{AB}$ 垂直） $\because \overline{AI}$ 為 $\angle A$ 的角平分線 $\therefore \overline{IH} = \overline{IK}$ 、 $\overline{IH} \perp \overrightarrow{AQ}$ 且 $\overline{IK} \perp \overrightarrow{AP}$ 。 又 N 由作圖法可知只會與 $\overline{BC}$ 交於一點，所以 I 為 ΔABC 內心。 由步驟 7、8 同理可證 I 為 ΔDEF 內心。	

ΔABC 面積：

設$\overline{AB}$=a，$\overline{PQ}$=n，則 ΔABC 面積=$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

ΔDEF 面積：

設 r_1 為 ΔABC 內切圓半徑、r_2 為 ΔDEF 內切圓半徑、s 為 ΔABC 周長的一半

ΔABC 面積=$r_1 \times s \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = r_1 \cdot s \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = r_1 \cdot \dfrac{3a}{2} \Rightarrow r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$

$\overline{IH} = r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ ，$\overline{DQ} = \dfrac{n}{2}$ ，$\overline{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}n$ ，$\overline{AQ} = n$ ，$d(D, \overline{AC}) = \dfrac{n}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}n \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}n$

$r_2 = \overline{IJ} = \overline{IH} - \overline{JH} = \overline{IH} - d(D, \overline{AC}) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a - \dfrac{\sqrt{3}}{4}n$

$\overline{MN} = \overline{IN} - \overline{IM} = \overline{IH} - \overline{IJ} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a - (\dfrac{\sqrt{3}}{6}a - \dfrac{\sqrt{3}}{4}n) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}n$

$\overline{AN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ ，$\overline{DM} = \overline{AN} - \overline{AD} - \overline{MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}n - \dfrac{\sqrt{3}}{4}n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}n$

$\overline{DF} = \overline{DM} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}n) \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = a - \dfrac{3}{2}n$

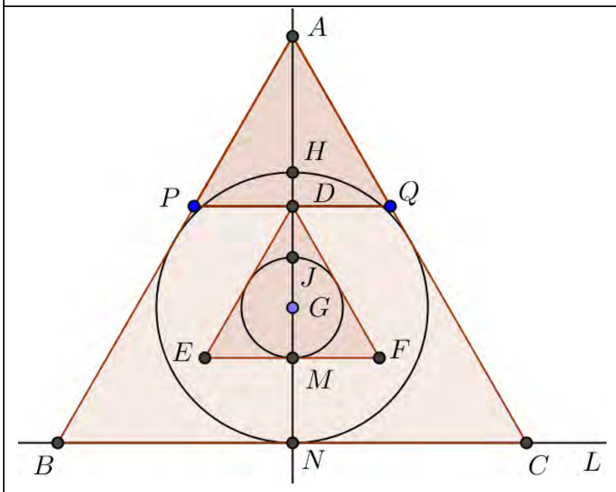
ΔDEF 面積=$(a - \dfrac{3}{2}n)^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = (a^2 - 3an + \dfrac{9}{4}n^2) \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}an + \dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2$

ΔABC 面積 － ΔDEF 面積$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}an - \dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}an - \dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}n(a - \frac{3}{4}n)$$

由上述證明可知道正三角形且同內心的面積差會與n跟三角形邊長a有關，並不是一個定值，且結果跟正三角形同外心的結果一致。

3.正三角形、同重心

<table>
<tr><td>圖形(正三角形、同重心)</td><td>圖形作法</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1. 先做$\overline{PQ}$線段，再以$\overline{PQ}$為邊長做正三角形，得 ΔAPQ 。
2. 做$\overline{PQ}$的中垂線。
3. 在中垂線上找一點G 。
4. 做G和A的中點H 。
5. 以$\overline{GH}$為半徑畫圓交中垂線於N 。
6. 做過N且平行$\overline{PQ}$的平行線L 。
7. L交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B 、C兩點，得ΔABC 。
8. 重複第 4、5、6、7 步驟，得ΔDEF 。</td></tr>
<tr><td colspan="2">重心證明：($\overline{AG}:\overline{GN}=2:1$)

由步驟 4、5 可得 $\overline{AH}=\overline{HG}=\overline{GN}$ ，所以 $\overline{AG}:\overline{GN}=2:1$，同理 $\overline{DJ}=\overline{JG}=\overline{GM}$ ，所以

$\overline{DG}:\overline{GM}=2:1$，因此$G$為$\Delta ABC$ 、ΔDEF 重心。</td></tr>
</table>

ΔABC 面積：

設$\overline{AB}$=a，$\overline{PQ}$=n，則 ΔABC 面積=$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

ΔDEF 面積：

$\overline{AN}=\overline{AB}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 、 $\overline{AD}=\overline{PQ}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}n$

$\because \overline{AG}:\overline{AN}=2:3 \;\Rightarrow\; \overline{AG}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2:3 \;\Rightarrow\; \sqrt{3}a=3\times\overline{AG} \;\Rightarrow\; \overline{AG}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{DG}=\overline{AG}-\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}n$

$\overline{DM}=\overline{DG}\times\dfrac{3}{2}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}n)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}n$

$\overline{DE}=\overline{DM}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}n)\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=a-\dfrac{3}{2}n$

ΔDEF 面積$==\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(a-\dfrac{3}{2}n)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}an+\dfrac{9\sqrt{3}}{16}n^2$

ΔABC 面積 － ΔDEF 面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}an-\frac{9\sqrt{3}}{16}n^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}an-\frac{9\sqrt{3}}{16}n^2$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\frac{3}{4}n)$$

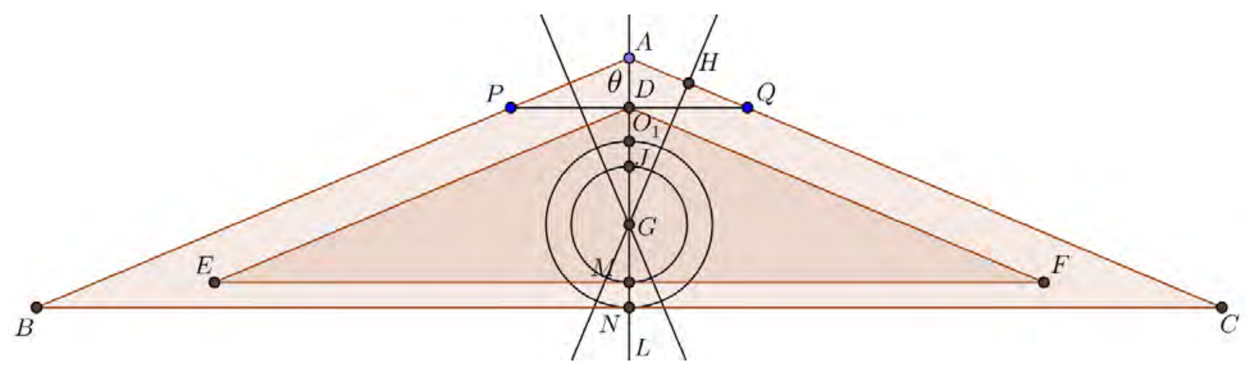
由上述三個證明可知正三角形不管是在同外心、內心、重心的情況下，面積差 $\frac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\frac{3}{4}n)$ 都會受到其大正三角形邊長影響，當邊長 a 越大則面積差越大。

在上述三個作圖法裡當我們移動中心時，發現其面積差無法固定的原因應為一旦頂角固定 60°、$\overline{PQ}$ 固定為 n 時，其 ΔAPQ 面積已被固定而無法縮小。所以我們下一步驟就是想辦法讓 ΔAPQ 面積可以隨著中心的遠離而跟著縮小。而且頂角越大時整個三角形也隨著變大，其中大三角形與小三角形邊長之間的距離也會越來越近，這樣的情況也比較符合圖形為圓形時的特徵。

（二）頂角可變動之等腰三角形重心、內心的面積差性質

1. 等腰三角形頂角改變、同重心

圖形(頂角改變、同重心)



圖形作法：

1. 先做 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{PQ}$ 中垂線 L。
2. **在 L 上取一點 A，分別做 $\overline{AQ}$、$\overline{AP}$ 中垂線交 L 於 G。**
3. 做 A、G 中點 O_1，以 G 為圓心 $\overline{GO_1}$ 長為半徑畫圓交 L 於 N。
4. 過 N 做直線平行 $\overline{PQ}$，交 $\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$ 於 B、C 兩點，得 ΔABC。
5. 過 D 點分別做直線平行 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$。

6. 重複第 4、5 步驟，得 ΔDEF 。
重心證明：（ $\overline{AG}:\overline{GN}=2:1$ ） 由步驟 3 可得 $\overline{AO_1}=\overline{O_1G}=\overline{GN}$ ，所以 $\overline{AG}:\overline{GN}=2:1$，同理 $\overline{O_1J}=\overline{JG}=\overline{GM}$ ，所以 $\overline{O_1G}:\overline{GM}=2:1$，因此 G 為 ΔABC 、 ΔDEF 重心。

ΔABC 面積：

$\overline{AB}$=a，$\overline{PQ}$=n， $\angle BAC=\theta$

則 ΔABC 面積=$\frac{1}{2}a^2\sin\theta$

ΔDEF 面積：

在 ΔABC 裏 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\frac{n}{2}}{\overline{AQ}}\quad\Rightarrow\quad\overline{AQ}=\frac{\frac{n}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{n}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

依作圖法可知 $\overline{AH}=\overline{AQ}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}}$

$$\overline{AG}=\overline{AH}\times\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{DG}=\overline{AG}-\overline{AD}=\overline{AG}-\overline{AQ}\times\cos\frac{\theta}{2}=\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

又 ΔABC 面積： ΔDEF 面積=$\overline{AG}^2$ ： $\overline{DG}^2$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}a^2\sin\theta:\Delta DEF\text{ 面積}=\left(\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2:\left(\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\Delta DEF\text{ 面積}=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\times\left(\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\Bigg/\left(\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\times\left(1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\times(-\cos\theta)^2$$

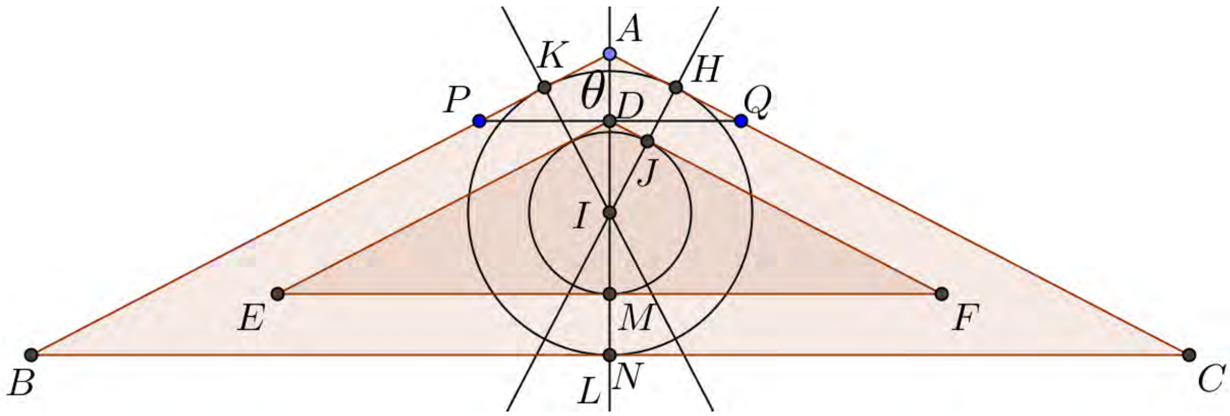
$$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\times\cos^2\theta$$

$$\Delta ABC\text{ 面積 }-\ \Delta DEF\text{ 面積}=\frac{1}{2}a^2\sin\theta-\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cdot\cos^2\theta=\frac{1}{2}a^2\sin\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}a^2\sin^3\theta$$

由上述的證明可知道頂角改變且同重心的三角形面積差只與邊長a跟頂角θ有關，這是讓人感到比較訝異的部份。

2. 等腰三角形頂角改變、同內心

圖形(頂角改變、同內心)

圖形作法： 1. 先做$\overline{PQ}$與$\overline{PQ}$中垂線L。 2. **在L上取一點A，分別做$\overline{AQ}$、$\overline{AP}$中垂線交L於I。** 3. 以I為圓心、$\overline{IH}$為半徑畫圓，交L於N。 4. 過N做直線平行$\overline{PQ}$，交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B、C兩點，得ΔABC。 5. 過D點分別做直線平行$\overline{AB}$、$\overline{AC}$。 6. 重複第3、4、5步驟，得ΔDEF
內心證明：(圓I與ΔABC只交於一點K且$\overline{IK}\perp\overline{AB}$垂直) $\because\overline{AI}$為$\angle A$的角平分線 $\therefore\overline{IH}=\overline{IK}$、$\overline{IH}\perp\overrightarrow{AQ}$且$\overline{IK}\perp\overrightarrow{AP}$。 又$N$由作圖法可知只會與$\overline{BC}$交於一點，所以$I$為$\Delta ABC$內心。 由步驟7、8同理可證$I$為$\Delta DEF$內心。

證明：

因Δ三邊與圓相切，所以圓心到邊的垂直距離因為都是半徑，所以等長，推得Ｉ為Δ內心

ΔABC 面積：

設$\overline{AB}$為a，$\overline{PQ}$為n，$\angle BAC=\theta$

則 ΔABC 面積=$\frac{1}{2}a^2\sin\theta$

ΔDEF 面積：

在 ΔABC 裏 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\frac{n}{2}}{\overline{AQ}} \Rightarrow \overline{AQ}=\frac{\frac{n}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{n}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

依作圖法可知 $\overline{AH}=\overline{AQ}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}}$

在 ΔAIH 裏 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{IH}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{IH}}{\frac{n}{4\sin\frac{\theta}{2}}} \Rightarrow \overline{IH}=\frac{n\tan\frac{\theta}{2}}{4\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{n}{4\cos\frac{\theta}{2}}$

ΔADQ 裏 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{AD}}{\frac{n}{2\sin\frac{\theta}{2}}} \Rightarrow \overline{AD}=\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

$$\Rightarrow d(D,\overline{AC})=\frac{\overline{AD}\times\overline{DQ}}{\overline{AQ}}=\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{n}{2}\times\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{n}=\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2}$$

$$\overline{IJ}=\overline{IH}-\overline{JH}=\overline{IH}-d(D,\overline{AC})=\frac{n}{4\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2}$$

又 ΔABC 面積：ΔDEF 面積=ΔABC 內切圓半徑平方：ΔDEF 內切圓半徑平方

$=\overline{IH}^2:\overline{IJ}^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a^2\sin\theta:\Delta DEF$ 面積=$\left(\frac{n}{4\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2:\left(\frac{n}{4\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \Delta DEF\text{ 面積}=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cdot\left(\frac{n}{4\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{n\cos\frac{\theta}{2}}{2}\right)^2\Bigg/\left(\frac{n}{4\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cdot\left(1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a^2\sin\theta(-\cos\theta)^2$$

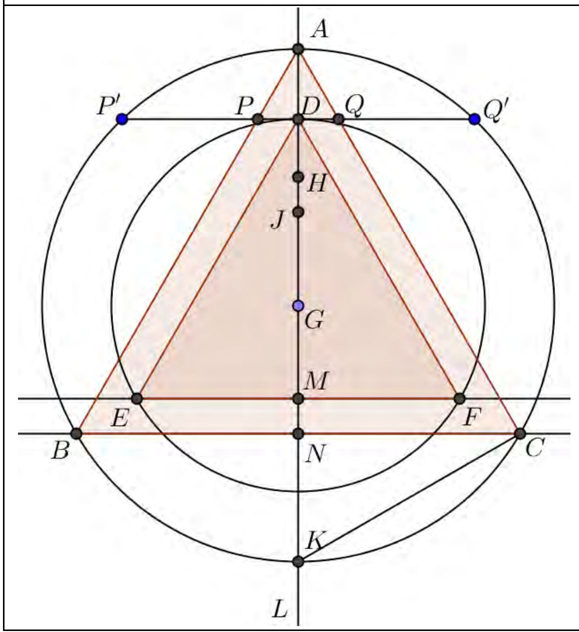
$$=\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\Delta ABC\text{ 面積 － }\Delta DEF\text{ 面積}=\frac{1}{2}a^2\sin\theta-\frac{1}{2}a^2\sin\theta\cdot\cos^2\theta=\frac{1}{2}a^2\sin\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}a^2\sin^3\theta$$

由上述證明可知其結果居然與同重心的三角形面積差結果一樣，這也是一個令人感到特別的地方，畢竟兩個圖的作圖法不太一樣，其最後圖形也長得不一樣，但結果面積差的公式確都一樣！（因為都沒有好的性質，我們想試試做出面積差相同的Δ）

（三）棍長可變動之正三角形同重心的面積差性質

圖形(正三角形、同重心)	圖形作法
	1. 先做 $\overline{P'Q'}$ 與 $\overline{P'Q'}$ 中垂線 L，交點 D。 2. 在 L 上取一點 G，分別以 $\overline{GA}$、$\overline{GD}$ 為半徑畫圓。 3. 分別做 $\overline{GA}$、$\overline{GD}$ 中點，得 H、J。 4. 分別以 $\overline{GH}$、$\overline{GJ}$ 為半徑畫圓，交 L 於 N、M 兩點。 5. 分別做平行 $\overline{P'Q'}$ 且過 N、M 直線，分別交兩圓於 $\overline{BC}$、$\overline{EF}$。 6. 連接 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 交 $\overline{P'Q'}$ 於 P、Q。 7. 連接 $\overline{DE}$、$\overline{DF}$，得 ΔDEF。

證明：

ΔABC 面積：

設大圓半徑為 R、小圓半徑為 r、$\overline{P'Q'}=n$

在 ΔCAK（直角三角形）中，

$\overline{CA}^2 = \overline{AN} \times \overline{AK}$　　（子母定理）

$$= \frac{3}{2}R \times 2R = 3R^2 \quad \Rightarrow \overline{CA} = \sqrt{3}R$$

$\because \overline{CA} : \overline{AN} = \sqrt{3}R : \frac{3}{2}R = 2 : \sqrt{3} \quad \Rightarrow \angle CAN = 30^\circ$

$\therefore \Delta ABC$ 為正三角形

又 $\overline{GA} = R$ 、 $\overline{AN} = \frac{3}{2}R$ ， $\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{AN} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}R = \sqrt{3}R$

則 ΔABC 面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}R\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

ΔDEF 面積：

$\overline{GD} = r$ 、 $\overline{DM} = \frac{3}{2}r$ ， $\overline{DE} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{DM} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}r = \sqrt{3}r$

ΔDEF 面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{DE}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}r\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

ΔABC 面積 － ΔDEF 面積 $= \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(R^2 - r^2)$

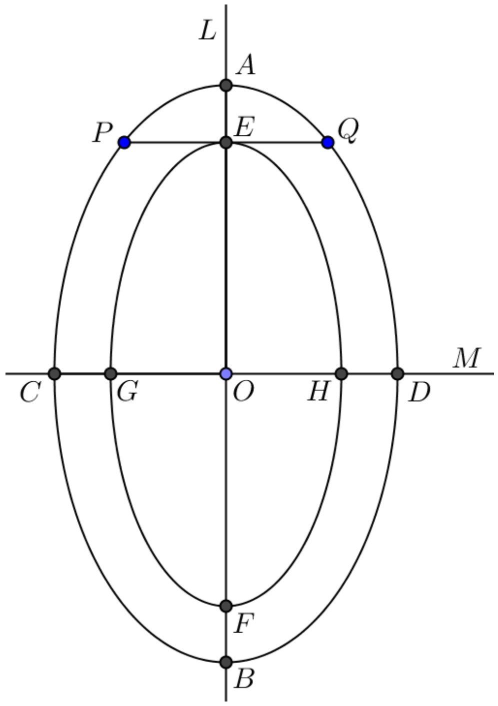
$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{n^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}n^2}{16}$$

由上述證明可知兩個三角形的面積差只與 n 有關，但當 G 遠離 $\overline{P'Q'}$ 時，$\overline{PQ}$ 也會跟著縮短，因此雖然這樣的作圖方式能讓兩個三角形面積差成定值，但那根棍子卻不在固定。所以接下我們方向轉換到與圓形更接近的橢圓來思考。

(四)橢圓面積差性質

1. 大小橢圓長軸差=短軸差(環狀同寬)

圖形(長、短軸比值相同)	圖形作法

 	1. 先做$\overline{PQ}$的中垂線L，與$\overline{PQ}$交點E（大橢圓焦點）。 2. 在L取一點O為中心，以$\overline{OE}$為半徑畫圓，交L於F點。 3. 以E、F為焦點、P為橢圓上一點畫橢圓$ACBD$。(GGB功能) 4. 以$\overline{OE}=c$為小橢圓的a'，則小橢圓的 $b'=\overline{OC}-(a-c)$。 5. 直接輸入橢圓方程式 $\frac{(x-x(O))^2}{b'^2}+\frac{(y-y(O))^2}{a'^2}=1$ 6. 得橢圓$EGFH$

證明：

橢圓$ACBD$面積：

令$\overline{PQ}=n$、$\overline{OE}=c$、a為橢圓$ACBD$長軸長一半、b為橢圓$ACBD$短軸長一半，其中n、c為已知，a、b為未知數。

因橢圓$ACBD$的正交弦長為$\frac{2b^2}{a}$且$b^2=a^2-c^2$

$$\frac{2b^2}{a}=n \;\Rightarrow\; na=2(a^2-c^2) \;\Rightarrow\; 2a^2-na-2c^2=0 \;\Rightarrow\; a=\frac{n\pm\sqrt{n^2+16c^2}}{4}$$（負不合）

$$\Rightarrow\; b^2=\left(\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}\right)^2-c^2 \;\Rightarrow\; b^2=\frac{n^2+2n\sqrt{n^2+16c^2}+n^2+16c^2}{16}-c^2$$

$$\Rightarrow\; b^2=\frac{2n^2+2n\sqrt{n^2+16c^2}}{16}=\frac{n^2+n\sqrt{n^2+64c^2}}{8}$$

$$\Rightarrow\; b=\pm\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}$$（負不合）

橢圓$ACBD$面積$=\pi\times\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}\times\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}$

$$=\pi\times\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}\times\frac{\sqrt{n}\times\sqrt{n+\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}=\pi\times\frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times\left(n+\sqrt{n^2+16c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

橢圓 $EGFH$ 面積：

令橢圓 $EGFH$ 長軸長一半 $a'=c$ 、短軸長一半 $b'=b-(a-c)$

則橢圓 $EGFH$ 面積 $=\pi\times a'\times b'=\pi\times c\times\left[b-(a-c)\right]=\pi\times c\times(b-a+c)$

$$=\pi\times a'\times b'=\pi\times c\times(\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}-\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}+c)$$

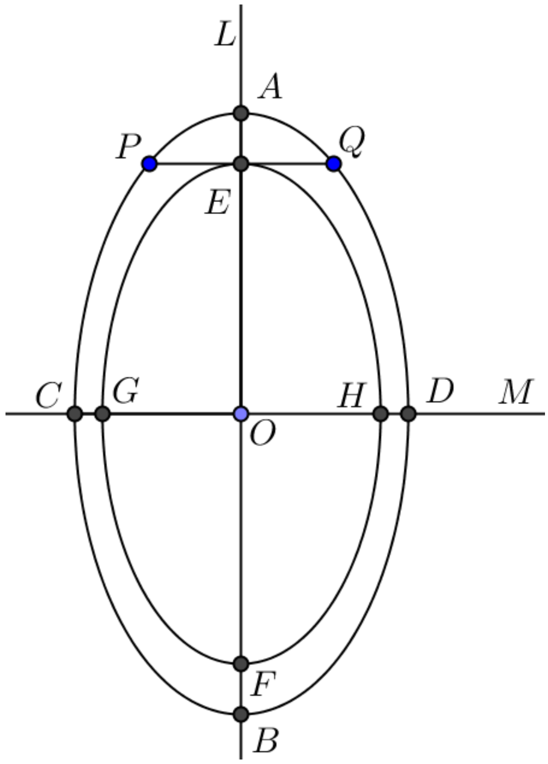
橢圓 $ACBD$ 面積−則橢圓 $EGFH$ 面積

$$=\pi\times\frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}-\pi\times c\times(\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}-\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}+c)$$

由上述推導出的公式可知其面積差還是會隨著 c（$\overline{OE}$ 長)的變動而跟著改變，因此並無好性質出現。

接著我們就思考環狀同寬並不是真的相似，若要符合相似的定義，那麼應該要讓同中心大小橢圓的長、短軸比值相同，因此就有接下來的作圖與證明。

2. 大小橢圓之長、短軸比值相同

圖形(長、短軸比值相同)	圖形作法
	1. 先做 $\overline{PQ}$ 的中垂線 L ，與 $\overline{PQ}$ 交點 E（大橢圓焦點）。 2. 在 L 取一點 O 為中心，以 $\overline{OE}$ 為半徑畫圓，交 L 於 F 點。 3. 以 E 、 F 為焦點、 P 為橢圓上一點畫橢圓 $ACBD$ 。(GGB 功能) 4. 以 $\overline{OE}=c$ 為小橢圓的 a' ，則小橢圓的 $b'=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}\times\overline{OC}$ 。 5. 直接輸入橢圓方程式 $\frac{(x-x(O))^2}{b'^2}+\frac{(y-y(O))^2}{a'^2}=1$ 得橢圓 $EGFH$

證明：

橢圓 $ACBD$ 面積：同 1.

橢圓 $ACBD$ 面積 $=\pi\times\frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}$

橢圓 $EGFH$ 面積：

令橢圓 $EGFH$ 長軸長一半 $a'=c$ 、短軸長一半 $b'=\frac{c}{a}\times b$

則橢圓 $EGFH$ 面積 $=\pi\times a'\times b'=\pi\times c\times\frac{c}{a}\times b$

$$=\pi\times c^2\times\frac{\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}}{\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}}$$

$$=\pi\times c^2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{n+\sqrt{n^2+16c^2}}$$

$$=\pi\times c^2\times\sqrt{2}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

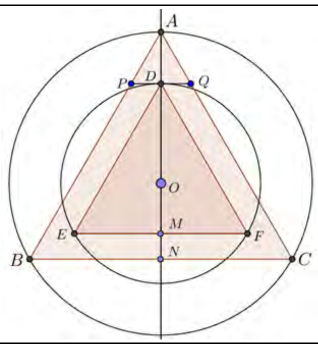
則橢圓 $ACBD$ 面積−則橢圓 $EGFH$ 面積

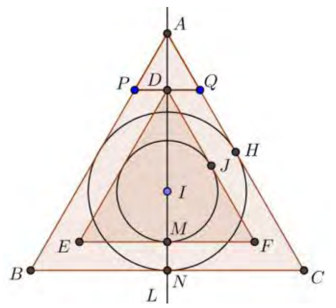
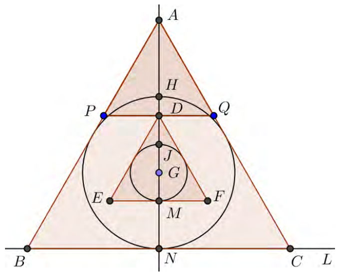
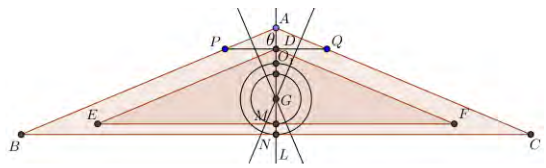
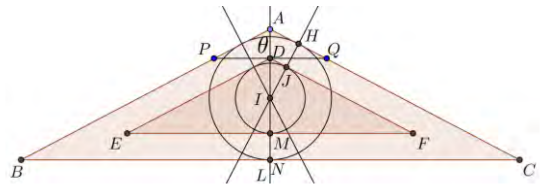
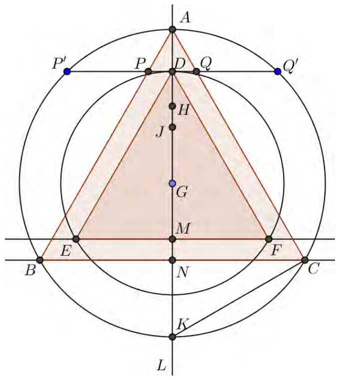
$$=\pi\times\frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}-\pi\times c^2\times\sqrt{2}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

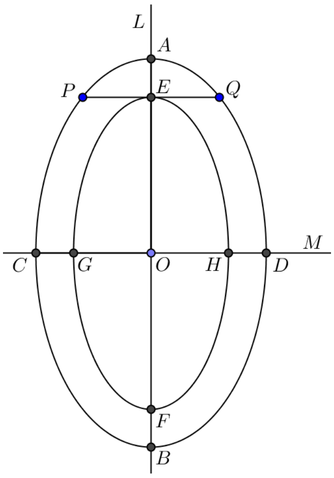
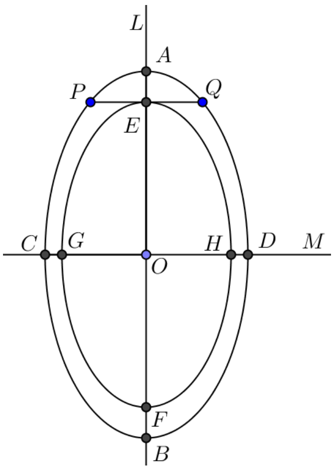
$$=\pi\times\frac{1}{8\sqrt{2}}\times\left[\sqrt{n}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}-16c^2(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{-\frac{1}{2}}\right]$$

由上述證明可知道橢圓之長、短軸比值相同的情況下，面積差不會是定值，依然會跟 n 、$\overline{OE}$ 長度有關。

伍、研究結果、討論與結論

三角形		
定義	圖形	面積差公式
1. 正三角形、 同外心		ΔABC 面積 － ΔDEF 面積 $=\frac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\frac{3}{4}n)$

<table>
<tr><td>2.
正三角形、
同內心</td><td>
</td><td>ΔABC 面積 － ΔDEF 面積
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\dfrac{3}{4}n)$</td></tr>
<tr><td>3.
正三角形、
同重心</td><td>
</td><td>ΔABC 面積 － ΔDEF 面積
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\dfrac{3}{4}n)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. 等腰三角形頂角改變、同重心</td><td rowspan="2">ΔABC 面積 － ΔDEF 面積
$=\dfrac{1}{2}a^2\sin^3\theta$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. 等腰三角形頂角改變、同內心</td><td rowspan="2">ΔABC 面積 － ΔDEF 面積
$=\dfrac{1}{2}a^2\sin^3\theta$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>6.
棍長可變動
之正三角形
同重心</td><td>
</td><td>ΔABC 面積 － ΔDEF 面積
$=\dfrac{3\sqrt{3}n^2}{16}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">橢圓</td></tr>
<tr><td>定義</td><td>圖形</td><td>面積差公式</td></tr>
</table>

7. 大小橢圓 長軸差=短軸差		橢圓 $ACBD$ 面積−則橢圓 $EGFH$ 面積 $=\pi\times\frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}$ $-\pi\times c\times(\frac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}-\frac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}+c)$
8. 大小橢圓之長、短軸比值相同		橢圓 $ACBD$ 面積−則橢圓 $EGFH$ 面積 $=\pi\times\frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}-$ $\pi\times c^2\times\sqrt{2}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{-\frac{1}{2}}$

由上述表格中可以看到這 8 種畫法都沒能滿足一棍定江山的現象，其中第 1 到第 3 點應該是因為在正三角形 APQ 中 $\overline{PQ}$ 已固定，導致 ΔAPQ 的面積已被固定無法縮小，加上大小三角形的邊寬並無縮減，所以面積差當然只會越來越大。

第 4、第 5 點就是針對前面 ΔAPQ 的面積無法縮小而改良的方式，其中兩個三角形邊寬會因為三角形越大而越接近，另外頂角越大頂點越接近棍子的特性也跟圓形符合，只是經由證明之後會發現面積差 $\frac{1}{2}a^2\sin^3\theta$ 跟頂角角度(角度越大，中心離棍子越遠)有關而不是只有棍長，其中 a 應該是 n 的函數。在這部份裏之所以沒有做外心的圖形，其原因是若依照我們製圖的想法把 $\overline{AQ}$、$\overline{AP}$ 的中垂線交點當做外心，那麼這個大三角形就是 ΔAPQ 本身，而無法經由做圖延伸成 ΔABC 。

第 6 點則是在把思考方向拉回圓形本身去做發想，做出來的面積差經由證明居然是固定值，但棍長卻無法固定。因此也沒有滿足一棍定江山的性質。

第 7、第 8 點的想法是多邊形要趨近於圓形必需要透過無限多個邊才行，但實質上並沒

有無限多個邊的多邊形，因此我們轉往曲線方向思考，想出了兩個製圖法，透過證明可知面積差還是隨著c(中心到棍子距離)值的變化而跟著邊變化。其中我們觀察到因為把棍子中心當做焦點，導致頂點A要碰到棍子變成了比較緩慢甚至不可能，這跟圓形的性質不太一樣，因此才無法有好結果出現。

因此我們目前得到的結論是三角形應該沒有一棍定江山的性質，而橢圓若是其中一個焦點在棍子上的相關圖形也是無法出現好性質。

陸、參考資料及其他

1. 張幼賢 (2013)。國中數學第五冊習作。翰林出版社，107 年 6 月 3 版
2. 游森棚 (2013)。高中數學第三冊。翰林出版社，106 年 2 月 4 版。
3. 游森棚 (2013)。高中數學第四冊。翰林出版社，106 年 2 月 4 版。
4. 維基百科，自由的百科全書. (2018 年 11 月 1 日) •「橢圓」

   ・取自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A4%AD%E5%9C%86

【評語】030415

由同心圓的一個特性（作小圓的一條切線交大圓於兩點，兩點所成的弦長決定了兩圓的面積差）所引出的一個問題。針對三角形或橢圓是否具有類似的性質作了討論與分析。由同心圓聯想到具有相同心的多邊形，想法很有意思，值得鼓勵，而適當的調整研究的方向，應該可以得出更多有趣的結果。

作品海報

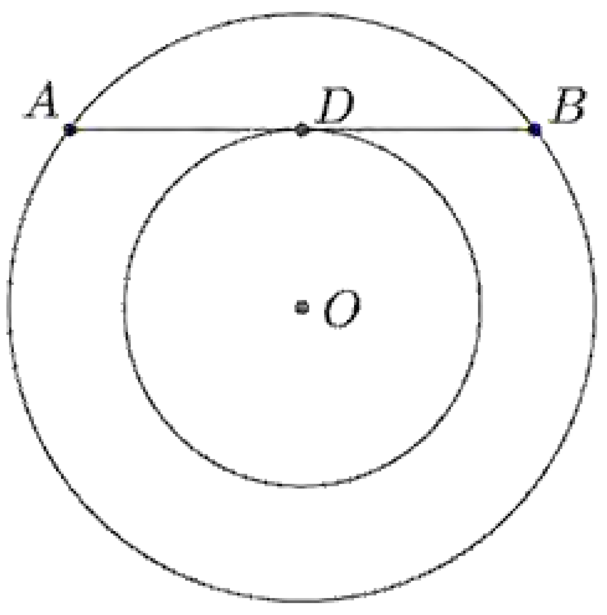
摘要

國中三年級的習作題中，有一個題目是說在固定一個條件之下，兩個無限縮放的同心圓面積差居然會成定值。因此我們探討在同樣的條件之下三角形是否也存在一個作圖方式使得多邊形也能有此性質。所以我們使用GGB來繪製相關圖形，經由在GGB中圖形的可變動性與可被計算性來驗證面積差，並給予每個可變動圖形的面積差證明來說明不成定值的原因。接著因為三角形無此性質，所以我們轉往探討橢圓是否也有此性質。最後做個統整性的討論與說明。

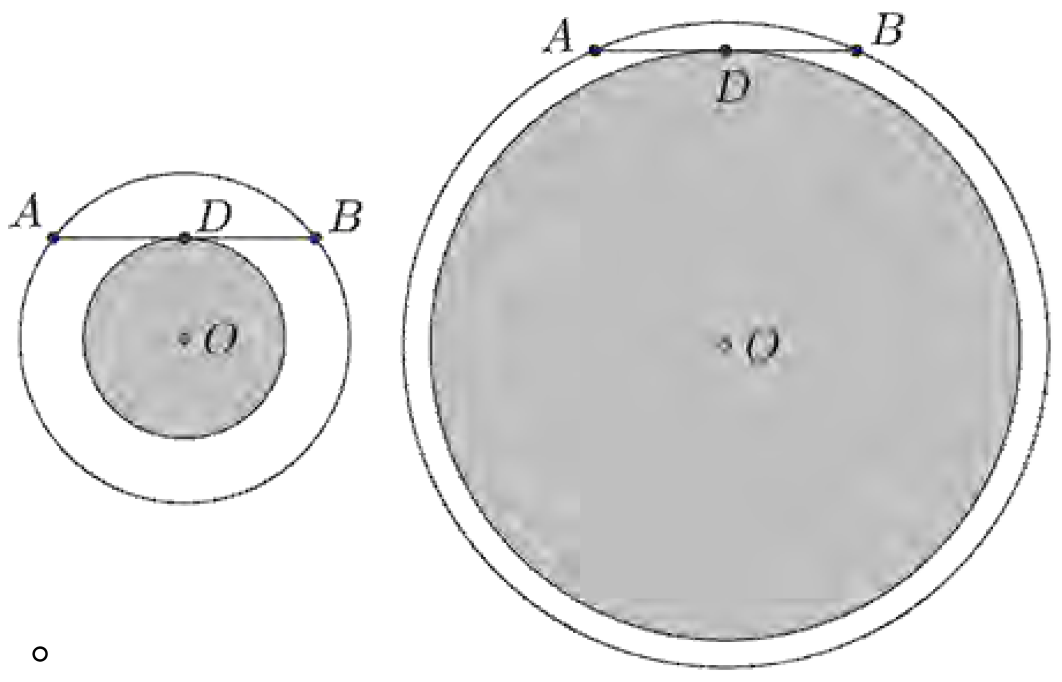
研究動機

在上學期末檢討數學習作時，老師在講解一個數學題目時給大家一個機會說說看此題有什麼特別的地方。題目的敘述如下：

如下圖，有兩個同心圓，其中$\overline{AB}=50$為大圓的一弦，D為$\overline{AB}$中點，小圓切$\overline{AB}$於D點，則大圓與小圓的面積差為何？



當時雖然有許多人都有算出此題的答案，可是卻沒有人發現其中的奧妙。後來我們才知道原來這個面積差只跟$\overline{AB}$長度有關，也就表示當此圓心遠離$\overline{AB}$（定值）時，兩個同心圓的面積差是固定的。如下圖



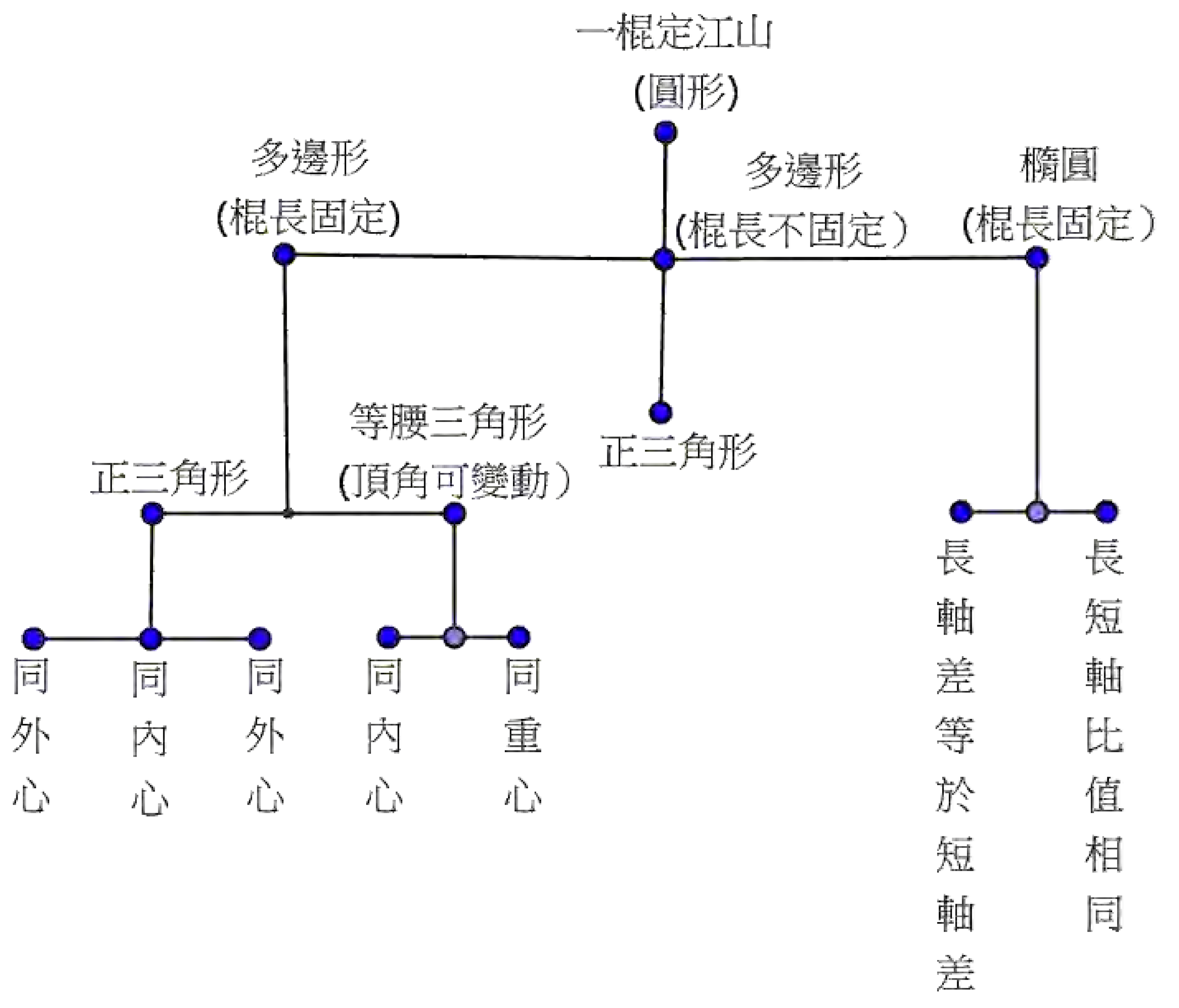
其中兩個環狀的面積會是相同。

這當下讓我們覺得非常有意思，因此下課後就問老師還有其他類似圖形在固定$\overline{AB}$（棍長）長度後還有這樣的性質嗎？老師只回說他也不知道，所以我們就跟老師提出想做個研究看看！而我們的初步想法是當正多邊形的邊數越多時，其形狀會越來越趨近於圓形。那麼多邊形是否也具有相似的性質？因此我們想找出符合此性質的多邊形作圖法。

研究目的

一、 正三角形同外心、內心、重心的面積差性質
二、 頂角可變動之等腰三角形同內心、重心的面積差性質
三、 棍長可變動之正三角形同重心的面積差性質。
四、 橢圓面積差性質

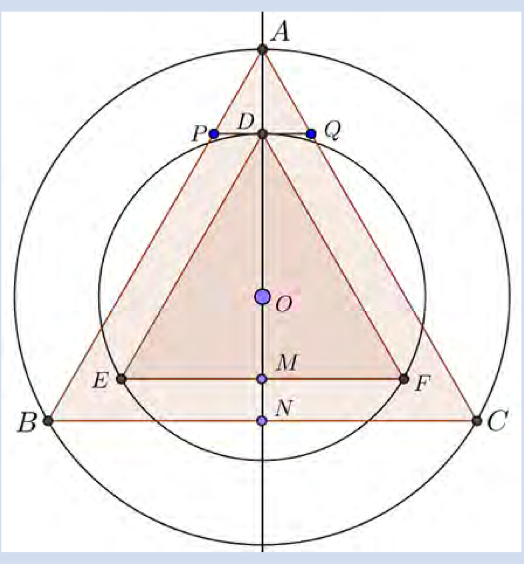
研究架構圖



內容探討

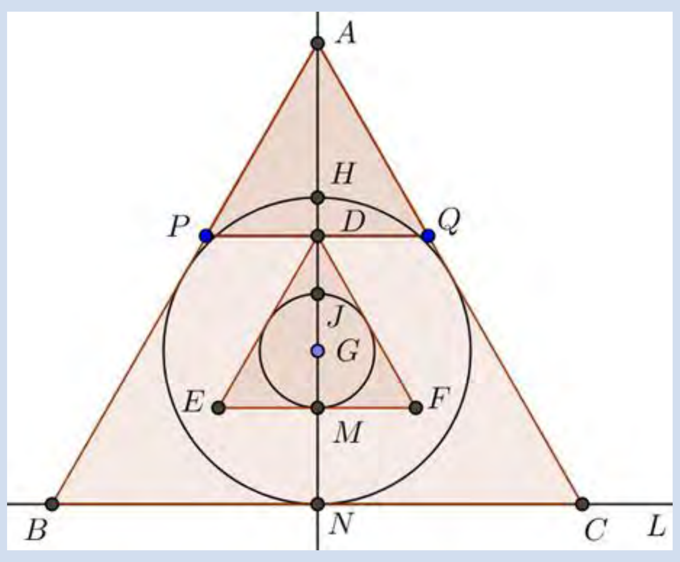
一、正三角形

1. 同外心



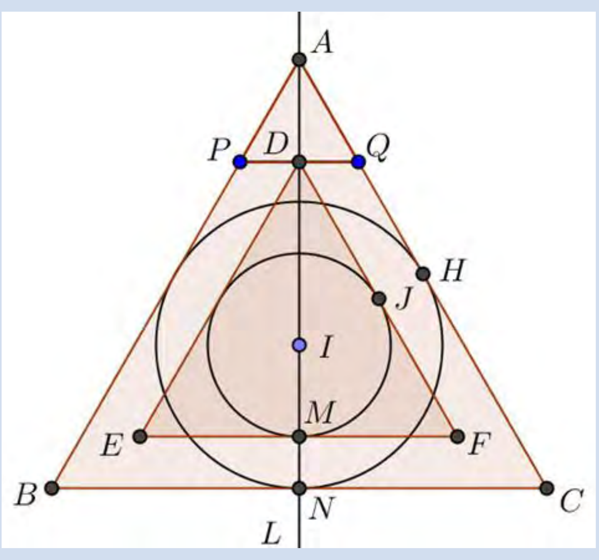
1. 先做$\overline{PQ}$線段，再以$\overline{PQ}$為邊長做正三角形，得$\triangle APQ$
2. 在$\overline{PQ}$中垂線上找一點O
3. 以O為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓
4. 做$\overrightarrow{AP}$交圓O於B點，做$\overrightarrow{AQ}$交圓O於C點，得$\triangle ABC$。
5. 過D點分別做直線平行$\overline{AB}$、$\overline{AC}$。
6. 重複第3、4步驟，得$\triangle DEF$

2.同重心



1. 先做$\overline{PQ}$線段，再以$\overline{PQ}$為邊長做正三角形，得$\triangle APQ$。
2. 做$\overline{PQ}$的中垂線。
3. 在中垂線上找一點G。
4. 做G和A的中點H。
5. 以$\overline{GH}$為半徑畫圓交中垂線於N。
6. 做過N且平行$\overline{PQ}$的平行線L。
7. L交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B、C兩點，得$\triangle ABC$
8. 重複第4、5、6、7步驟，得$\triangle DEF$

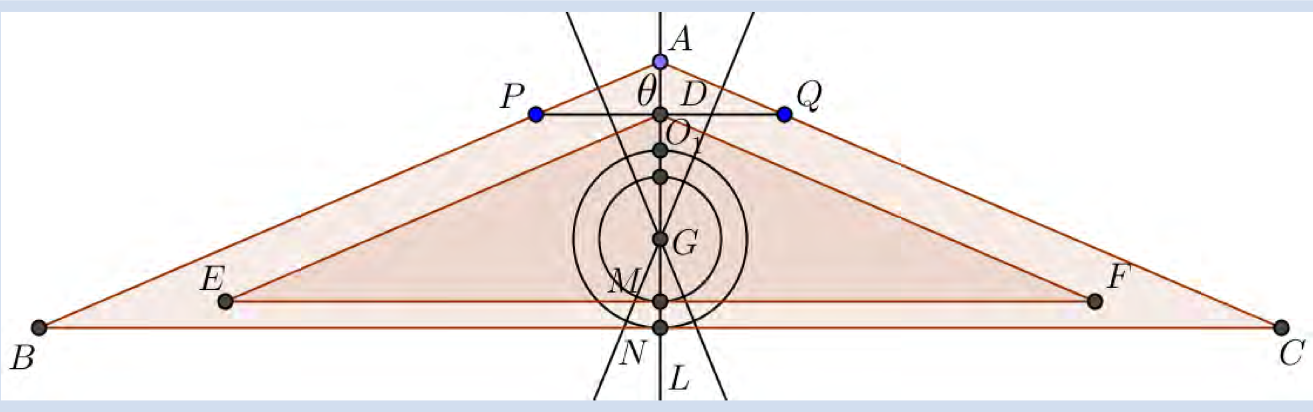
3.同內心



1. 先做$\overline{PQ}$線段，以$\overline{PQ}$為底做正三角形$\triangle$APQ。
2. 在$\overline{PQ}$上做中垂線L。
3. 利用A點與P、Q兩點做出射線$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$。
4. 在中垂線L上取一點I，做過I點且與$\overrightarrow{AQ}$垂直的直線，交$\overrightarrow{AQ}$於H。
5. 以$\overline{IH}$為半徑畫圓交L於N。
6. 做過N點且與$\overline{PQ}$平行直線交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B、C兩點，得$\triangle ABC$。
7. 做$\overline{DF}$、$\overline{DE}$平行$\overline{AC}$、$\overline{AB}$。
8. 重複第5、6、7步驟，得$\triangle DEF$

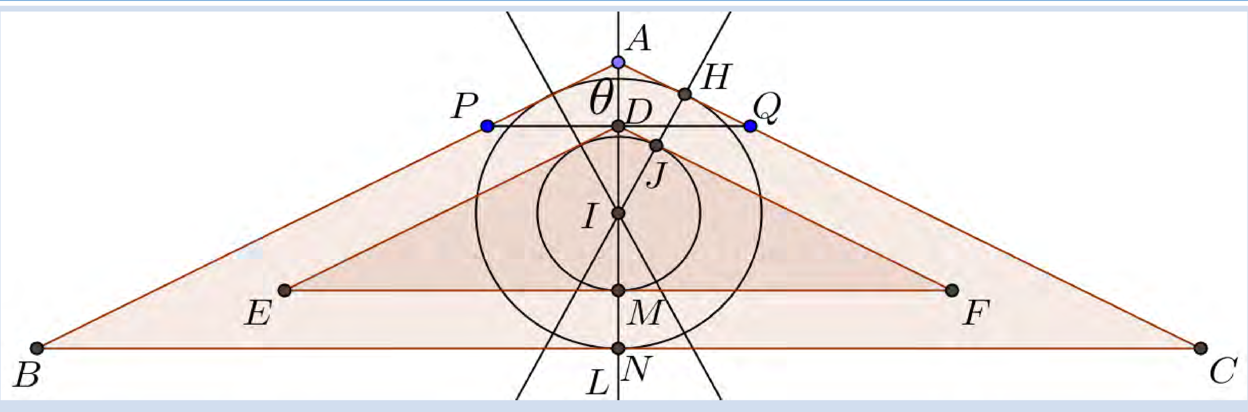
二、等腰三角形(頂角可改變)

4. 同重心



1. 先做$\overline{PQ}$與$\overline{PQ}$中垂線L。
2. **在L上取一點A，分別做$\overline{AQ}$、$\overline{AP}$中垂線交L於G。**
3. 做A、G中點O_1，以G為圓心$\overline{GO_1}$長為半徑畫圓交L於N。
4. 過N做直線平行$\overline{PQ}$，交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B、C兩點，得$\triangle ABC$
5. 過D點分別做直線平行$\overline{AB}$、$\overline{AC}$。
6. 重複第4、5步驟，得$\triangle DEF$。

5. 同內心

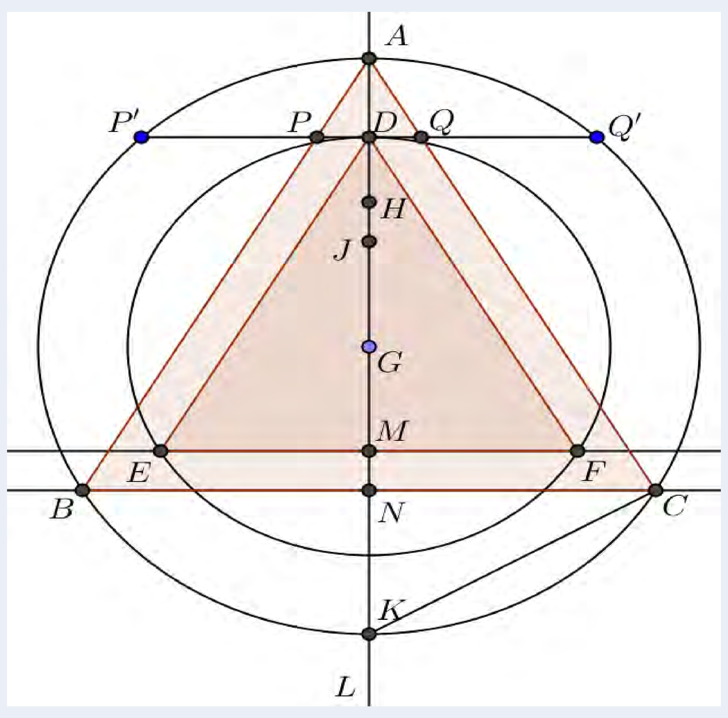


1. 先做$\overline{PQ}$與$\overline{PQ}$中垂線L。
2. **在L上取一點A，分別做$\overline{AQ}$、$\overline{AP}$中垂線交L於I。**
3. 以I為圓心、$\overline{IH}$ 為半徑畫圓，交L於N。
4. 過N做直線平行$\overline{PQ}$，交$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$於B、C兩點，得$\triangle ABC$。
5. 過D點分別做直線平行$\overline{AB}$、$\overline{AC}$。
6. 重複第3、4、5步驟，得$\triangle DEF$

三、棍長可變動

6. 棍長可變動之正三角形

同重心

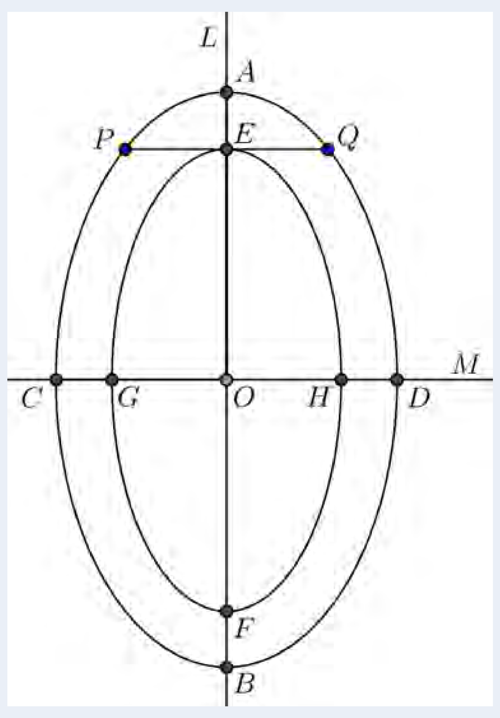


1. 先做$\overline{P'Q'}$與$\overline{P'Q'}$中垂線L，交點D。
2. 在L上取一點G，分別以$\overline{GP'}$、$\overline{GD}$為半徑畫圓，交L於A點。
3. 分別做$\overline{GA}$、$\overline{GD}$中點，得H、J。
4. 分別以$\overline{GH}$、$\overline{GJ}$為半徑畫圓，交L於N、M兩點。
5. 分別做平行$\overline{P'Q'}$且過N、M直線，分別交兩圓於$\overline{BC}$、$\overline{EF}$。
6. 連接$\overline{AB}$、$\overline{AC}$交$\overline{P'Q'}$於P、Q。
7. 連接$\overline{DE}$、$\overline{DF}$，得$\triangle DEF$。

四、橢圓

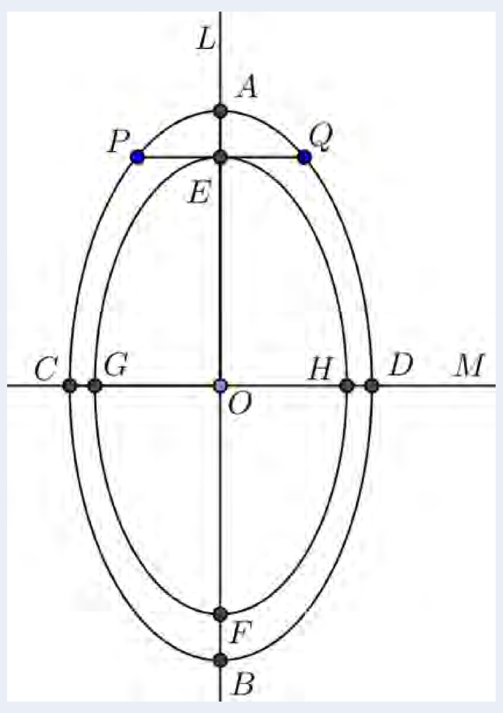
7. 橢圓

長軸差=短軸差



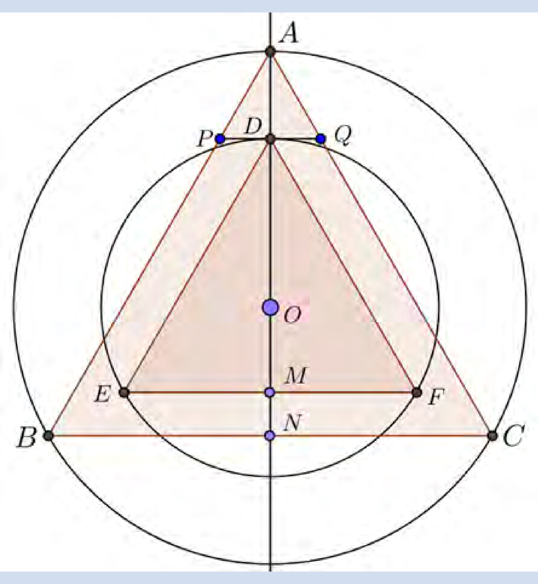
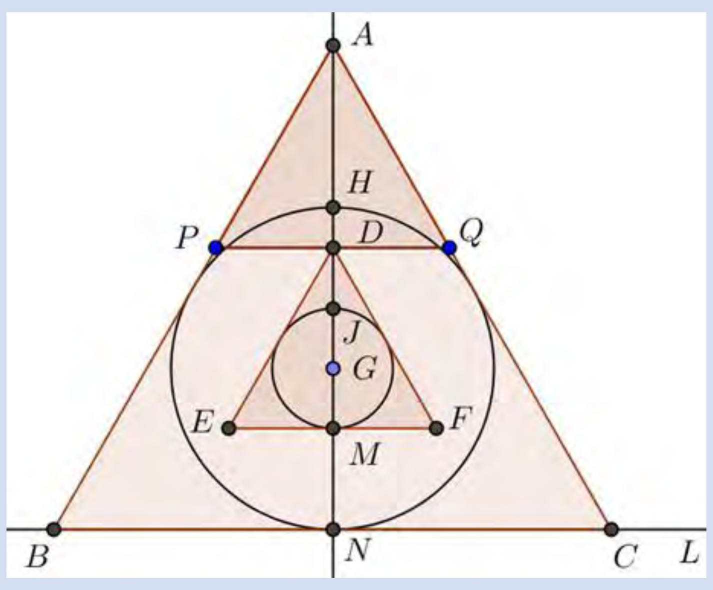
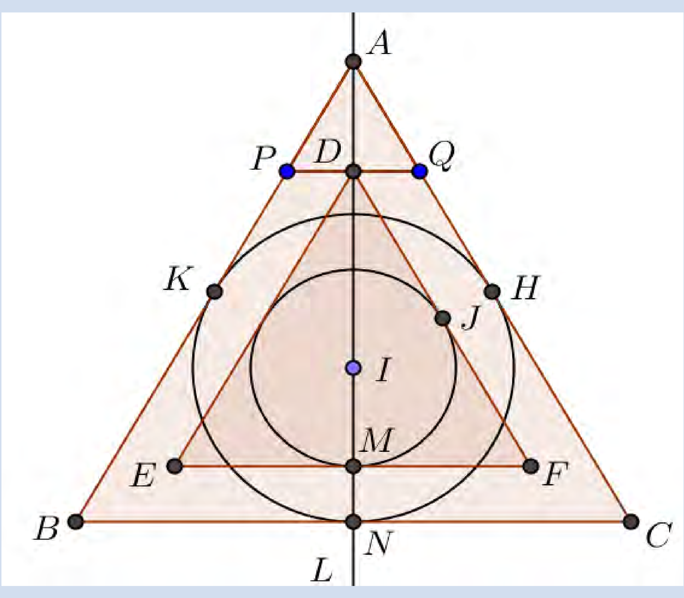
1. 先做$\overline{PQ}$的中垂線L，與$\overline{PQ}$交點E(大橢圓焦點)。
2. 在L取一點O為中心，以$\overline{OE}$為半徑畫圓，交L於F點。
3. 以E、F為焦點、P為橢圓上一點畫橢圓ACBD。(GGB功能)
4. 以$\overline{EO}$=c為小橢圓的a'，則小橢圓的b'=$\overline{OC}$-(a-c)。
5. 直接輸入橢圓方程式$\frac{(x-x(O))^2}{b'^2}+\frac{(y-y(O))^2}{a'^2}$=1
6. 得橢圓EGFH

長短軸比值相同

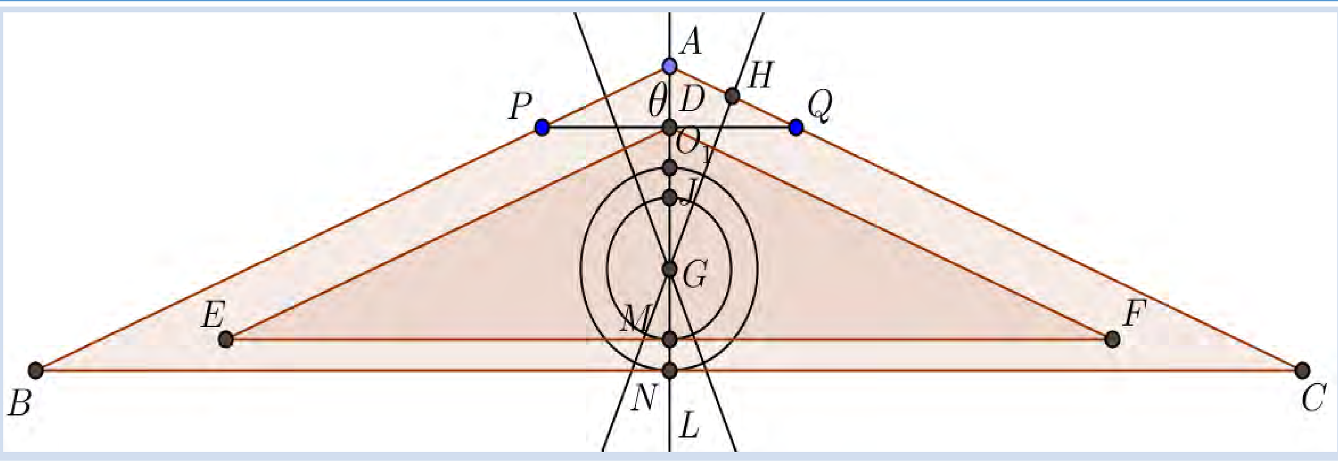
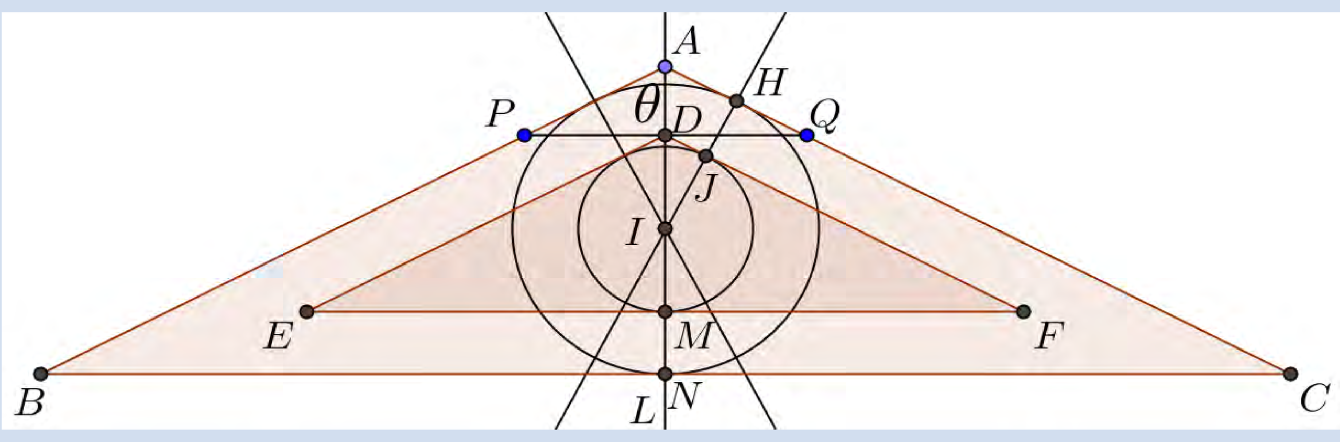


1. 先做$\overline{PQ}$的中垂線L，與$\overline{PQ}$交點E(大橢圓焦點)。
2. 在L取一點O為中心，以$\overline{OE}$為半徑畫圓，交L於F點。
3. 以E、F為焦點、P為橢圓上一點畫橢圓ACBD。(GGB功能)
4. 以$\overline{OE}$=c為小橢圓的a'，則小橢圓的b'=$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}\times\overline{OC}$。
5. 直接輸入橢圓方程式$\frac{(x-x(O))^2}{b'^2}+\frac{(y-y(O))^2}{a'^2}$=1
6. 得橢圓EGFH

研究結果、討論與結論

1. 同外心	2.同重心	3.同內心
		

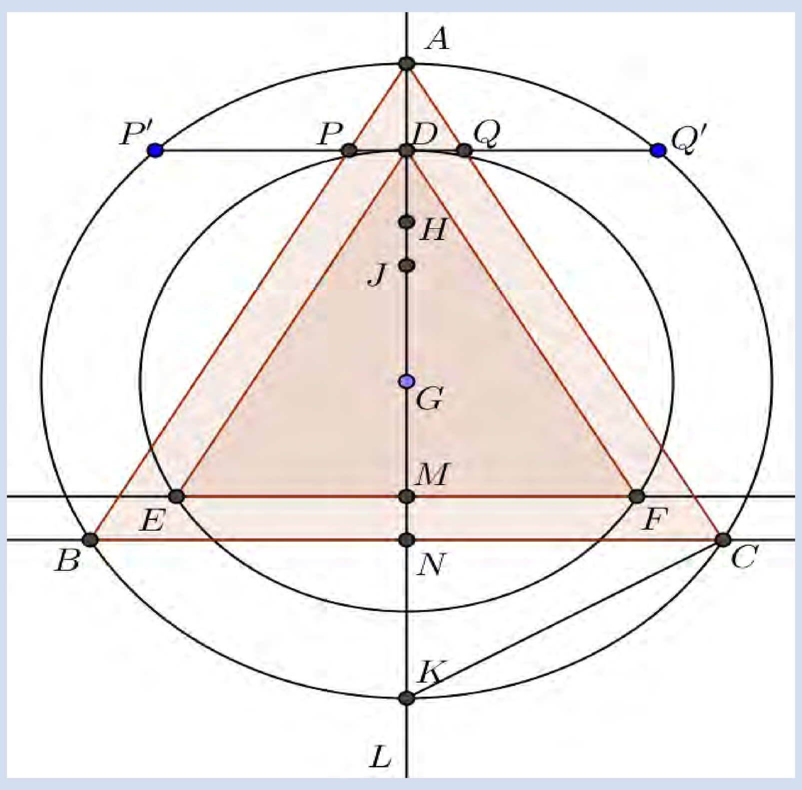
面積$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}n(a-\dfrac{3}{4}n)$　　面積 $n)$　　面積 $n)$

4. 同重心	5. 同內心
	

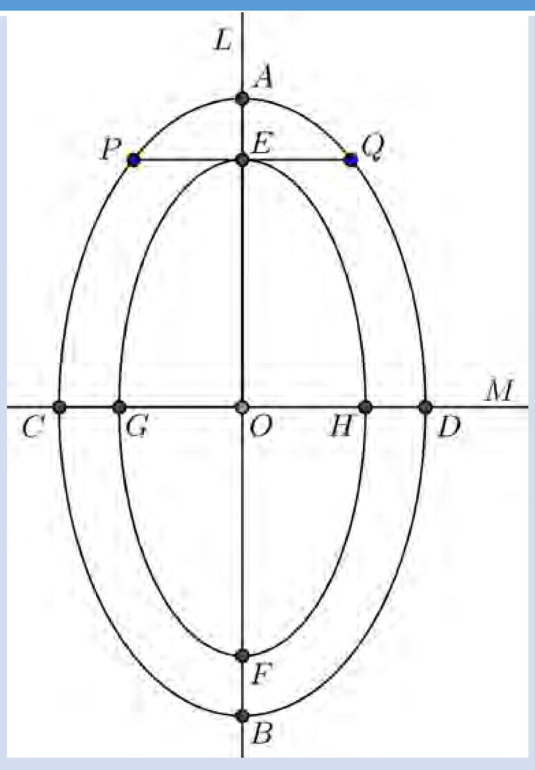
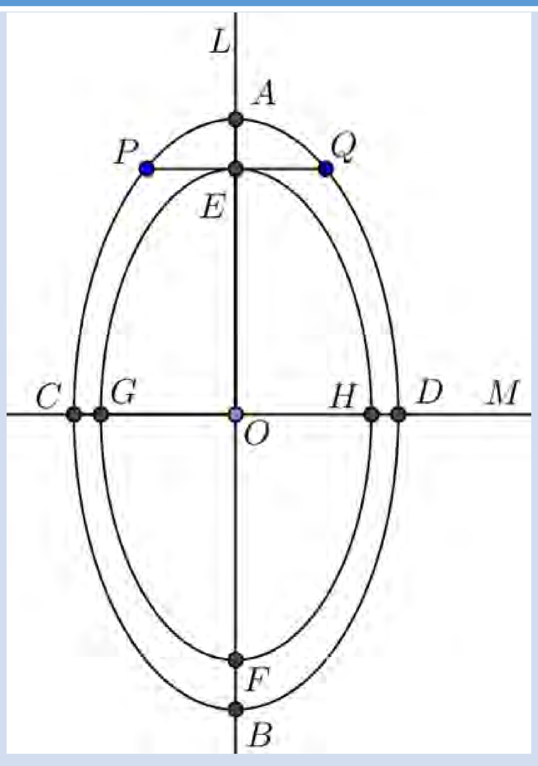
面積 θ　　面積$=\dfrac{1}{2}a^2\sin^3\theta$

由上述表格中可以知道這些畫法都沒能滿足一棍定江山的現象，其中第1到第3點應該是因為在正三角形APQ中$\overline{PQ}$已固定，導致$\triangle APQ$的面積已被固定無法縮小，加上大小三角形的邊寬並無縮減，所以面積差當然只會越來越大。第4、第5點是針對前面$\triangle APQ$的面積無法縮小而改良的方式，其中兩個三角形邊寬會因為三角形越大而越接近，另外頂角越大頂點越接近棍子的特性也跟圓形符合，只是經由證明之後會發現面積差$\frac{1}{2}a^2\sin^3\theta$跟頂角角度(角度越大，中心離棍子越遠)有關而不是只有棍長，其中a應該是n的函數。在這部份裏之所以沒有做外心的圖形，其原因是若依照我們製圖的想法把$\overline{AQ}$、$\overline{AP}$的中垂線交點當做外心，那麼這個大三角形就是△APQ本身，而無法經由做圖延伸成△ABC。

6. 同重心



面積$=\dfrac{3\sqrt{3}n^2}{16}$

7.長軸差=短軸差	8.長短軸比值相同
	

7.　面積$=\pi\times\dfrac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2}}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}-\pi\times c\times(\dfrac{\sqrt{n^2+n\sqrt{n^2+16c^2}}}{2\sqrt{2}}-\dfrac{n+\sqrt{n^2+16c^2}}{4}+c)$

8.　面積$=\pi\times\dfrac{1}{8\sqrt{2}}\times\left[\sqrt{n}\times(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{\frac{3}{2}}-16c^2(n+\sqrt{n^2+16c^2})^{-\frac{1}{2}}\right]$

第6點則是在把思考方向拉回圓形本身去做發想，做出來的面積差經由證明居然是固定值，但棍長卻無法固定。因此也沒有滿足一棍定江山的性質。

第7、第8點的想法是多邊形要趨近於圓形必需要透過無限多個邊才行，但實質上並沒有無限多個邊的多邊形，因此我們轉往曲線方向思考，想出了兩個製圖法，透過證明可知面積差還是隨著 c（中心到棍子距離)值的變化而跟著變化。其中我們觀察到因為把棍子中心當做焦點，導致頂點A要碰到棍子變成了比較緩慢甚至不可能，這跟圓形的性質不太一樣，因此才無法有好結果出現。

參考資料

1. 張幼賢（2013)。國中數學第五冊習作。翰林出版社，107年6月3版
2. 游森棚（2013)。高中數學第三冊。翰林出版社，106年2月4版。
3. 游森棚（2013)。高中數學第四冊。翰林出版社，106年2月4版。
4. 維基百科，自由的百科全書.（2018年11月1日）．「橢圓」
   ・取自：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A4%AD%E5%9C%86