中華民國第 59 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030413

2n 皇后問題規律之探討

學校名稱：臺中市立豐南國民中學

作者：	指導老師：
國二 王敬文 國二 陳筱薰 國二 張靖苓	蔡世雄

關鍵詞：2n 皇后、等差數列、正方形及正三角形棋盤

摘要

本作品在探討 2n 皇后棋子放置在正方形棋盤及正三角形棋盤的規律問題，在擺放規則限制下，先確定棋子應如何擺放才會有規律性的存在，並將棋子位置坐標化後，依其規律探討出通式。

n×n 階正方形棋盤依其規律可分成(6n-2)×(6n-2)階、(6n-1)×(6n-1)階、6n×6n 階、(6n+1)×(6n+1)階、(6n+2)×(6n+2)階(又將 n 分成奇數與偶數)、(6n+3)×(6n+3)階(又將 n 分成奇數與偶數，其中偶數又分為偶數 A 組($n=4m-2, m\ge 1, m\in N$)、偶數 B 組($n=4m, m\ge 1, m\in N$)等六組型式 $(n\ge 1, n\in N)$。

n 階正三角形棋盤依其規律可分為 2n+2 階、2n+3 階棋盤型式$(n\ge 1, n\in N)$。

壹、研究動機

偶然間，在網路上看到一道利用程式語言編寫的問題，該問題叫 2n 皇后問題，該問題規定要在一個 n×n 格的棋盤上放入 n 個黑皇后及 n 個白皇后，使任意兩個黑或白皇后都不在同一行、同一列或同一條對角線上，問總共有多少種放法？

在上網查了些有關這方面的研究文獻後，發現該問題與八皇后問題及 n 后問題有所關聯性，因此決定以此為題材來加以探討。

經過討論後，本作品不探討總共有多少種放法，而改探討 n×n 階正方形棋盤及 n 階正三角形棋盤的黑及白皇后二種棋子位置應如何擺放才會有規律性存在。另外，因考慮將棋子位置用坐標化來表示，故將黑及白皇后的擺放位置改像圍棋放置在棋盤格線的交點上。

貳、研究目的

一、探討在正方形的棋盤中，其黑皇后與白皇后二種棋子在各自棋子總數與棋盤階數相同情況下，應如何擺放才會有規律產生及其規律情形。

二、探討在正三角形棋盤中，其黑皇后與白皇后二種棋子在每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子情況下，應如何擺放才會有規律產生及其規律情形。

三、探討在正三角形棋盤中，擺放黑皇后與白皇后二種棋子所需最少棋子數量。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、word 軟體、excel 軟體、MathType 軟體

肆、研究過程與方法

一、名詞定義與解釋：

(一) 八皇后及 n 后問題：是一個以西洋棋為背景的問題：如何能夠在 8×8 的西洋棋棋盤上放置八個皇后，使得任兩個皇后都不能處於同一條橫行、縱行或斜線上。

八個皇后在 8x8 棋盤上共有 4,426,165,368 種擺放方法，但只有 92 個互不相同的解。如果將旋轉和對稱的解歸為一種的話，則一共有 12 個獨立解。

1969 年霍夫曼(J. E. Hofman) 等證明：$n\ge 4$ 時，n 后問題總有解。具體的解的情況見下表：

n	4　5　6　7　8　9　10……
解的個數	2　10　4　40　92　352　724……

(二) nxn 階棋盤（n≥4）：用於正方形棋盤，如圖 1-1，稱為 4x4 階棋盤。

(三) (x,y)坐標：用於正方形棋盤，用直角坐標系觀念來表示黑或白皇后的位置，但棋盤格線左下角的坐標定義為(1,1)，如圖 1-1。

(四)日字放法：仿象棋中的「馬走日」，即沿「日」字的對角線從一點走向另一點，用於正方形棋盤的放法之一，如圖 1-2 所示，方式為 A□ A' 或 B□ B'。

(五)雙日字放法：為日字放法的變形，用於正方形棋盤的放法之一，如圖 1-3、1-4 所示(稱**雙日字放法型一**)，方式為 C□ C' 或 D□ D' 及圖 1-5 所示(稱**雙日字放法型二**)，方式為 E□ E' 或 F□ F'。

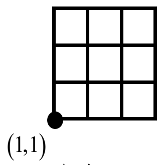


圖1-1

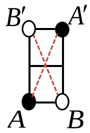


圖1-2

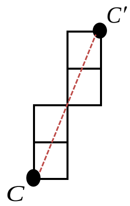


圖1-3

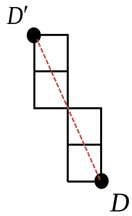


圖1-4

(六) n 階棋盤（n≥4）：用於正三角形棋盤，如圖 1-6，稱為 3 階棋盤。

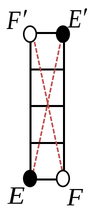


圖1-5

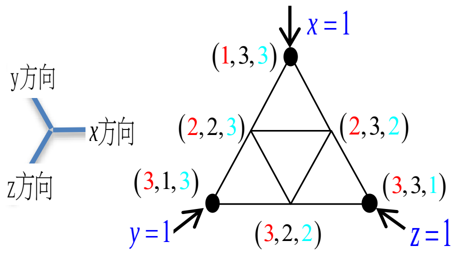


圖1-6

(七) (x,y,z)坐標：用於正三角形棋盤，用斜向坐標觀念表示黑或白皇后棋子的位置，如圖 1-6。

(八)等差數列：等差數列（又名算術數列）是數列的一種。如果一個等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則該等差數列第 n 項為： $a_n = a_1 + (n-1) \times d$

(九)斜率：用來量度斜坡的斜度。直線的斜率在任一處皆相等，是直線傾斜程度的量度。

斜率 $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$　(x_1, y_1)、(x_2, y_2)表直線上相異兩點坐標

已知相異兩點(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，則其直線方程式為：

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(十)三角函數：將直角三角形的內角和它的兩個邊的比值相關聯。給定一個銳角θ，可以做出一個直角三角形，使得其中的一個內角是θ。設這個三角形中，θ的對邊、鄰邊和斜邊長度分別是 a、b、h，如圖 1-7。

則 θ 的正切是對邊與鄰邊的比值：$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

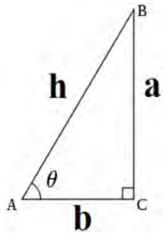


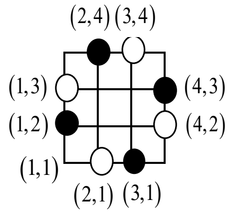
圖1-7

二、黑皇后、白皇后在正方形棋盤的放法探討：

(一)擺放規則：在 n×n 階正方形棋盤中，均可在每一條棋盤格線的交點上放上 n 個黑皇后或白皇后棋子，但同一直行、同一橫列和同一條對角線上皆不能同時有 2 個以上黑皇后或白皇后。

(二)黑皇后及白皇后棋子放法探討：

首先，我們先探討 4×4 階的棋盤，並先從黑皇后棋子的放法開始，再接著探討白皇后棋子的放法，最後，為能得到規律及產生通式，故決定如下放法步驟，結果如圖 2-1。



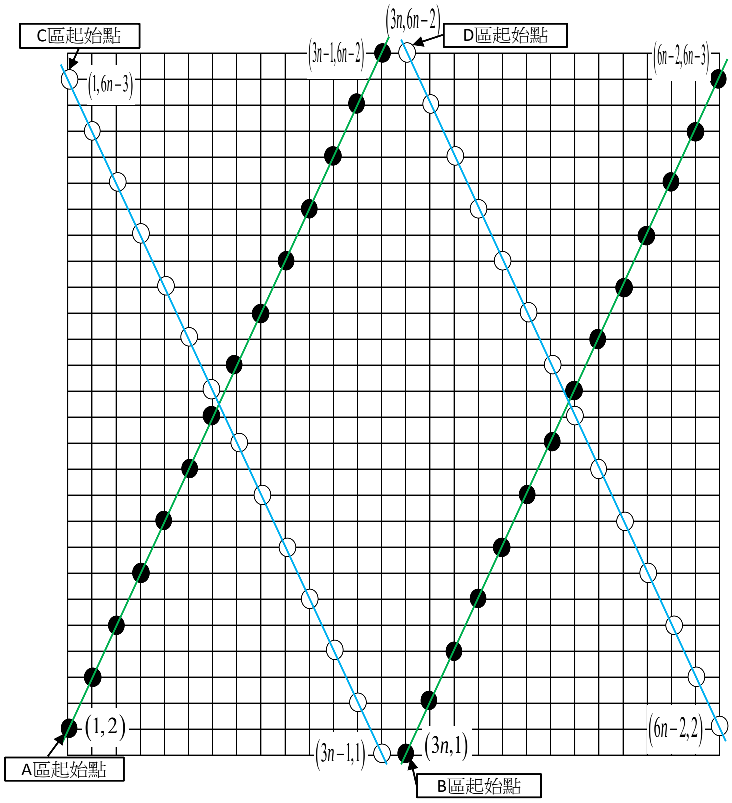
4×4階棋盤
圖2-1

4×4 階棋盤中黑皇后及白皇后棋子放法步驟：

1. 黑皇后先由最左下角(1,1)向上一位(1,2)開始，為避免直行、橫列及對角線會放到第二個黑皇后，故下一個黑皇后採用日字放法，放到(2,4)。
2. 當遇到棋盤最高點位置時，則從再右一行的最低點(3,1)再次開始，並以日字放法規律放黑皇后(4,3)。
3. 白皇后由(1,3)開始放，採用日字放法，放到(2,1)。
4. 當遇到棋盤最低點位置時，則從再右一行的最高點(3,4)再次開始，並以日字放法規律放白皇后(4,2)。

(三) n×n 階（$n \geq 4, n \in N$）正方形棋盤的分組及其通式探討：

初步完成 4×4 階後，接著繼續進行其他階數棋盤的放法探討，並依上述放法步驟來進行，當黑、白皇后棋子放到 7×7 階時，使用日字放法仍可以完成，但到 8×8 階時，有部分無法用日字放法完成，故使用雙日字放法，到 10×10 階，發現可再用 4×4 階放法完成，11×11 階亦可用 5×5 階放法完成，故從 4×4 階棋盤開始，將之分成六組，並依序探討如下。



(6n-2)×(6n-2)階
圖2-2

(四) (6n-2)×(6n-2)階棋盤型式：

當$n \geq 1, n \in N$時，可得 4×4 階、10×10 階、16×16 階、22×22 階……棋盤。

圖 2-2 的棋盤中，使用日字放法後，將黑皇后棋子放置位置分成 A 區

及 B 區，白皇后棋子放置位置分成 C 區及 D 區，各區棋子相連後可成為一直線。

性質一：(6n-2)×(6n-2)階棋盤採用「日字放法」的擺放方法，能符合擺放規則

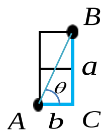


圖2-3

【證明】

圖 2-3 中為日字放法，2 個棋子分別作為 A、B 點，水平及垂直棋盤格線交於 C 點，則 ΔABC 為直角三角形，其中一夾角為 θ ，令每一正方格邊長為 1 單位長，則

$\tan\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{1}$ ，經查三角函數值表， $\theta \doteqdot 63^{\circ}$，表 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 夾角約為 63°，故在同一直行 (θ =90°)、同一橫列(θ =0°)及同一條對角線上(θ =45°)皆不會有 2 個以上黑皇后或白皇后。

性質二：(6n-2)×(6n-2)階棋盤，各區棋子相連後均可成為一直線

【證明】

A 區一開始放棋子的位置(稱為 A 區起始點)坐標為(1,2)，再依序為(2,4)、(3,6)、(4,8)、……、(3n-2,6n-4)、(3n-1,6n-2)

將 A 區起始點(1,2)及該區最後的點(3n-1,6n-2)代入到直線方程式 $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

得到 $y - 2 = \dfrac{(6n-2)-2}{(3n-1)-1}(x-1)$ 　計算結果，直線方程式為 y=2x

再分別將其他點(2,4)、(3,6)、(4,8)、……、(3n-2,6n-4)依序代入到直線方程式 y=2x

結果均為直線方程式的解，故將 A 區所有點連起來，為一條直線。

同理，B、C 及 D 等三區所有點連起來，亦可得到三條直線。

性質三：(6n-2)×(6n-2)階棋盤，各區棋子的放法符合擺放規則

【證明】

因黑皇后及白皇后在同一直行、同一橫列皆不能同時有 2 個以上黑皇后或白皇后，所以各區所有棋子位置所連成的直線不可在垂直棋盤格線上 (否則同一直行會有 2 個以上黑皇后或白皇后)及不可在水平棋盤格線上(否則同一橫列會有 2 個以上黑皇后或白皇后)，故所連成的直線必須為斜直線。

但儘管為斜直線，其直線斜率 m 不可為±1，否則所連成的直線會在棋盤格的對角線上，就會有 2 個以上黑皇后或白皇后。

(6n-2)×(6n-2)階棋盤，各區經計算而得到的直線方程式及其斜率，分別如下：

A 區直線方程式為 y=2x，其斜率 m=2　　B 區直線方程式為 y=2x+(1-6n)，其斜率 m=2

C 區直線方程式為 y=-2x+(6n-1)，其斜率 m=-2　　D 區直線方程式為 y=-2x+(12n-2)，其斜率 m=-2

故四條直線皆不會在棋盤格的對角線上。

研究一：(6n-2)×(6n-2)階棋盤中，黑及白皇后各自所放棋子數量是否等於棋盤階數

【說明】

當 n=1 代入到(6n-2)×(6n-2)，得到 4×4 階棋盤，其 A 區～D 區各有 2 個棋子。

當 n=2 代入到(6n-2)×(6n-2)，得到 10×10 階棋盤，其 A 區～D 區各有 5 個棋子。

當 n=3 代入到(6n-2)×(6n-2)，得到 16×16 階棋盤，其 A 區～D 區各有 8 個棋子。

⋮

由此可知，(6n-2)×(6n-2)階棋盤，其 A 區～D 區各有 $\frac{6n-2}{2}=3n-1$ 個棋子。

所以，黑皇后棋子共有 $(3n-1)+(3n-1)=6n-2$ 個棋子，白皇后棋子亦共有 $(6n-2)$ 個棋子。

依擺放規則，當為 n×n 階棋盤時，必只能各放 n 個黑及白皇后，亦即所放棋子數量須等於棋盤階數，同理，如為(6n-2)×(6n-2)階棋盤，亦應只能各放有(6n-2)個黑及白皇后棋子。故可說明黑及白皇后各自所放棋子數量等於棋盤階數。

當 n 為任意自然數時，上述各區棋子數量求法是否仍成立，以下將以數學歸納法加以探討：

性質四：(6n-2)×(6n-2)階棋盤中，當 n 為任意自然數時，A 區～D 區各有 $3n-1$ 個棋子

【證明】

(1)當 n=1 時，A 區棋子數為 3×1-1

(2)設 n=k 時，A 區棋子數為 3k-1 是成立的

則 n=k+1 時，A 區棋子數為(3k-1)+3=3(k+1)-1

所以 n=k+1 時，A 區棋子數為 3(k+1)-1 亦成立

故由數學歸納法可得知，當 n 為任意自然數時，A 區棋子共有 $3n-1$ 個。

同理，當 n 為任意自然數時，B 區～D 區棋子亦各有 $3n-1$ 個。

研究二：(6n-2)×(6n-2)階棋盤的通式建構

【說明】

以黑皇后為例：

A 區：

當 n=1 代入到(6n-2)×(6n-2)，得到 4×4 階棋盤，其棋子的坐標依序為(1,2)、(2,4)

當 n=2 代入到(6n-2)×(6n-2)，得到 10×10 階棋盤，其棋子的坐標依序為(1,2)、(2,4)、(3,6)、(4,8)、(5,10)

當 n=3 代入到(6n-2)×(6n-2)，得到 16×16 階棋盤，其棋子的坐標依序為(1,2)、(2,4)、(3,6)、(4,8)、(5,10)、(6,12)、(7,14)、(8,16)

⋮

令 x 坐標為 a，則 y 坐標為 $2a$，故坐標為 $(a,2a)$，並可求得第 a 個 $(1\le a\le 3n-1, a\in N)$ 的位置坐標

而欲求此區最後一個棋子所放位置的坐標，將 $a=3n-1$ 代入 $(a,2a)$，故此區最後一個棋子的坐標為(3n-1,6n-2)

所以 A 區可建立一通式：(1,2)、(2,4)、...、$(a,2a)$、...、(3n-1 , 6n-2)　$(1\le a\le 3n-1, a\in N)$

B 區：

4×4 階棋盤，其棋子的坐標依序為(3,1)、(4,3)

10×10 階棋盤，其棋子的坐標依序為(6,1)、(7,3)、(8,5)、(9,7)、(10,9)

16×16 階棋盤，其棋子的坐標依序為(9,1)、(10,3)、(11,5)、(12,7)、(13,9)、(14,11)、(15,13)、(16,15)

⋮

首先發現該區起始第一個棋子放置位置(稱為 B 區的起始點)，其 x 坐標為棋盤階數的一半再加 1，y 坐標則從 1 開始，故起始點坐標為($\frac{6n-2}{2}+1,1$)，再依序為($\frac{6n-2}{2}+2,3$)、($\frac{6n-2}{2}+3,5$)......。

針對 x 坐標部分，令 $a_1=1$ 、 $a_2=2$ 代入到 $a_2=a_1+(2-1)\times d$ ，求得 d=1，再代到 $a_n=a_1+(n-1)\times d$ ，求得 $a_n=n$ ，則 x 坐標為 $\frac{6n-2}{2}+b$

針對 y 坐標部分，令 $a_1=1$ 、 $a_2=3$ 代入到 $a_2=a_1+(2-1)\times d$ ，求得 d=2，再代到 $a_n=a_1+(n-1)\times d$ ，求得 $a_n=2n-1$ ，則 y 坐標為 $2b-1$

故坐標為($\frac{6n-2}{2}+b,2b-1$)，並可求得第 b 個 $(1\le b\le 3n-1,b\in N)$ 的位置坐標

而欲求此區最後一個棋子所放位置的坐標，將 $b=3n-1$ 代入($\frac{6n-2}{2}+b,2b-1$)，故此區最後一個棋子的坐標為 $(\frac{6n-2}{2}+(3n-1),2\times(3n-1)-1)$

所以 B 區可建立一通式：($\frac{6n-2}{2}+1,1$)、($\frac{6n-2}{2}+2,3$)、...、($\frac{6n-2}{2}+b,2b-1$)、...、 $(\frac{6n-2}{2}+(3n-1),2\times(3n-1)-1)$ $(1\le b\le 3n-1,b\in N)$

通式及棋子數量再次整理如下：

黑皇后部分：

A 區：(1,2)、(2,4)、...、 $(a,2a)$ 、...、(3n-1 , 6n-2) $(1\le a\le 3n-1,a\in N)$ 此區有 3n-1 個棋子

B 區：($\frac{6n-2}{2}+1,1$)、($\frac{6n-2}{2}+2,3$)、...、($\frac{6n-2}{2}+b,2b-1$)、...、 $(\frac{6n-2}{2}+(3n-1),2\times(3n-1)-1)$

=(3n,1)、(3n+1,3)、...、(3n-1+b,2b-1)、...、(6n-2 , 6n-3) $(1\le b\le 3n-1,b\in N)$

此區有 3n-1 個棋子

A 區及 B 區共有(3n-1)+ (3n-1)=6n-2 個棋子

白皇后部分：

C 區：(1,(6n-2)-1)、(2,(6n-2)-3)、...、(c , (6n-2)-(2c-1))、...、(3n-1 , (6n-2)-2×(3n-1)+1)

=(1,6n-3)、(2,6n-5)、...、(c , 6n-1-2c)、...、(3n-1 , 1) $(1\le c\le 3n-1,c\in N)$

此區有 3n-1 個棋子

D 區：($\frac{6n-2}{2}$ +1,6n-2)、($\frac{6n-2}{2}$ +2,(6n-2)-2)、...、($\frac{6n-2}{2}$ +d , (6n-2)-(2d-2))、...

…、($\dfrac{6n-2}{2}$ +(3n-1), (6n-2)-2×(3n-1)+2)

=(3n,6n-2)、(3n+1,6n-4)、…、(3n-1+d , 6n-2d)、…、(6n-2,2) $(1 \le d \le 3n-1, d \in N)$

此區有 3n-1 個棋子

C 區及 D 區共有(3n-1)+ (3n-1)=6n-2 個棋子

(五) (6n-1)×(6n-1)階棋盤型式：

當 $n \ge 1, n \in N$ 時，可得 5x5 階、11x11 階、17x17 階、23x23 階……棋盤。

圖 2-4 中，需將黑皇后棋子放置位置分成 A 區及 B 區，白皇后棋子放置位置分成 C 區及 D 區。

研究三：(6n-1)×(6n-1)階棋盤中，黑及白皇后各自所放棋子數量是否等於棋盤階數

【說明】

當 n=1 代入到(6n-1)×(6n-1)，得到 5x5 階棋盤，其 A 區～D 區分別有 2、3、3、2 個棋子。

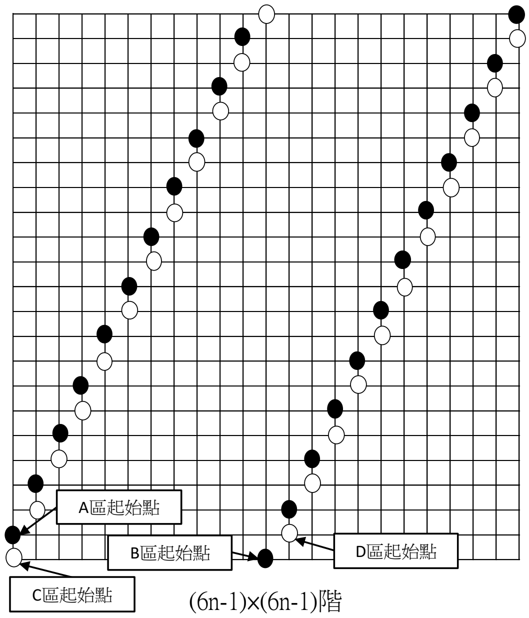
當 n=2 代入到(6n-1)×(6n-1)，得到 11x11 階棋盤，其 A 區～D 區分別有 5、6、6、5 個棋子。

當 n=3 代入到(6n-1)×(6n-1)，得到 17x17 階棋盤，其 A 區～D 區分別有 8、9、9、8 個棋子。

⋮

令 $a_1=2$ 、 $a_2=5$ 代入到 $a_2=a_1+(2-1)\times d$ ，求得 d=3，再次代到 $a_n=a_1+(n-1)\times d$ ，求得 $a_n=3n-1$ ，則 A 區棋子數有 $3n-1$ 個。

同理，B 區～D 區棋子數分別有 $3n$ 、 $3n$ 、 $3n-1$ 個。



(6n-1)×(6n-1)階
圖2-4

所以，黑皇后棋子共有 $(3n-1)+3n=6n-1$ 個棋子，白皇后棋子亦共有 $(6n-1)$ 個棋子。故黑及白皇后各自所放棋子數量等於棋盤階數。

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：(1,2)、(2,4)、…、$(a,2a)$、…、$\boxed{\text{(3n-1,2×(3n-1))=(3n-1,6n-2)}}$ $(1 \le a \le 3n-1, a \in N)$

此區有 3n-1 個棋子

B 區：($\dfrac{6n}{2}$,1)、($\dfrac{6n}{2}$ +1,3)、…、($\dfrac{6n}{2}$ +(b-1) , 2b-1)、…、($\dfrac{6n}{2}$ +(3n-1),2×3n-1)

=(3n,1)、(3n+1,3)、…、(3n+b-1,2b-1)、…、(6n-1,6n-1) $(1 \le b \le 3n, b \in N)$

此區有 3n 個棋子

A 區及 B 區共有(3n-1)+ 3n=6n-1 個棋子

白皇后部分：

C 區：(1,1)、(2,3)、…、(c,2c-1)、…、$\boxed{\text{(3n,2×3n-1)=(3n,6n-1)}}$ $(1 \le c \le 3n, c \in N)$

此區有 3n 個棋子

D 區：$(\frac{6n}{2}+1,2)$、$(\frac{6n}{2}+2,4)$、...、$(\frac{6n}{2}+d , 2d)$、...、$(\frac{6n}{2}+(3n-1) , 2\times(3n-1))$

=(3n+1,2)、(3n+2,4)、...、(3n+d , 2d)、...、(6n-1 , 6n-2)　$(1\le d\le 3n-1, d\in N)$

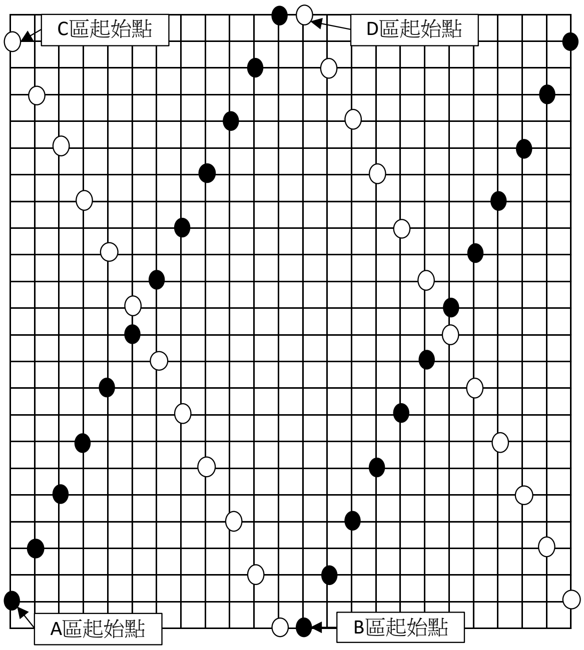
此區有 3n-1 個棋子

C 區及 D 區共有 3n+(3n-1) =6n-1 個棋子

(六) 6n×6n 階棋盤型式：

當 $n\ge 1, n\in N$ 時，可得 6x6 階、12x12 階、18x18 階、24x24 階……棋盤。

圖 2-5 的棋盤中，需將黑皇后棋子放置位置分成 A 區及 B 區，白皇后棋子放置位置分成 C 區及 D 區。



6n×6n階
圖2-5

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：(1,2)、(2,4)、...、$(a,2a)$、...、(3n , 6n)

$(1\le a\le 3n, a\in N)$　此區有 3n 個棋子

B 區：$(\frac{6n}{2}+1,1)$、$(\frac{6n}{2}+2,3)$、...、$(\frac{6n}{2}+b , 2b-1)$、...

...、$(\frac{6n}{2}+3n, 2\times 3n-1)$

=(3n+1,1)、(3n+2,3)、...、(3n+b , 2b-1)、...

...、(6n , 6n-1)　$(1\le b\le 3n, b\in N)$

此區有 3n 個棋子

A 區及 B 區共有 3n+3n =6n 個棋子

白皇后部分：

C 區：(1, 6n-1)、(2, 6n-3)、...、(c , 6n-2c+1)、...

...、$\boxed{(3n , 6n-2\times 3n+1)= (3n,1)}$　$(1\le c\le 3n, c\in N)$　此區有 3n 個棋子

D 區：$(\frac{6n}{2}+1,6n)$、$(\frac{6n}{2}+2,6n-2)$、...、$(\frac{6n}{2}+d , 6n-(2d-2))$、...、$(\frac{6n}{2}+3n, 6n-2\times 3n+2)$

=(3n+1,6n)、(3n+2, 6n-2)、...、(3n+d , 6n-2d+2)、...、(6n , 2)　$(1\le d\le 3n, d\in N)$

此區有 3n 個棋子

C 區及 D 區共有 3n+3n =6n 個棋子

(七) (6n+1)×(6n+1)階棋盤型式：

當 $n\ge 1, n\in N$ 時，可得 7x7 階、13x13 階、19x19 階、25x25 階……棋盤。

圖 2-6 的棋盤中，需將黑皇后棋子放置位置分成 A 區及 B 區，白皇后棋子放置位置分成 C 區及 D 區。

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：(1,2)、(2,4)、...、$(a,2a)$、...、(3n , 6n)　$(1\le a\le 3n, a\in N)$　此區共有 3n 個棋子

B 區：$(\frac{6n+2}{2},1)$、$(\frac{6n+2}{2}+1,3)$、...

...、$(\frac{6n+2}{2}+(b-1)\ ,\ 2b-1)$、...

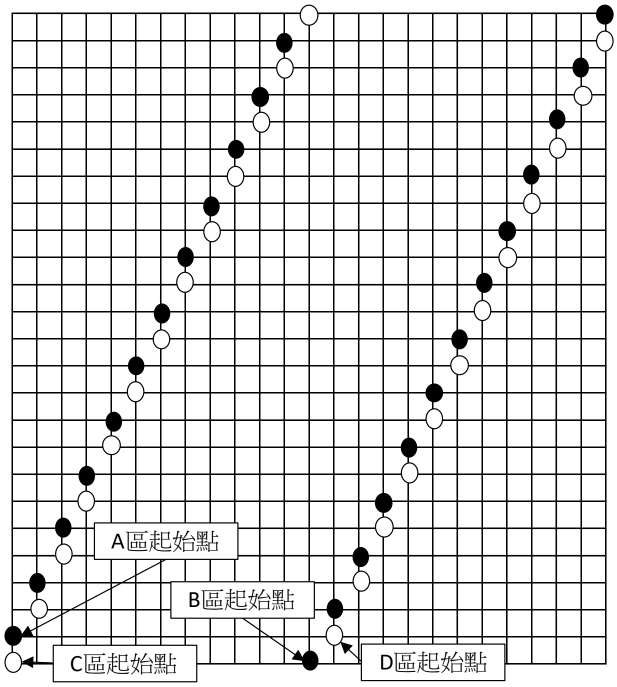
...、$(\frac{6n+2}{2}+(3n+1)-1\ ,\ 2\times(3n+1)-1)$

=(3n+1,1)、(3n+2,3)、...、(3n+b,2b-1)、

...、(6n+1,6n+1)　$(1\le b\le 3n+1, b\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

A 區及 B 區共有 3n+(3n+1) =6n+1 個棋子



(6n+1)x(6n+1)階

圖2-6

白皇后部分：

C 區：(1,1)、(2,3)、...、(c,2c-1)、...

...、$\boxed{(3n+1,2\times(3n+1)-1)= (3n+1,6n+1)}$

$(1\le c\le 3n+1, c\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

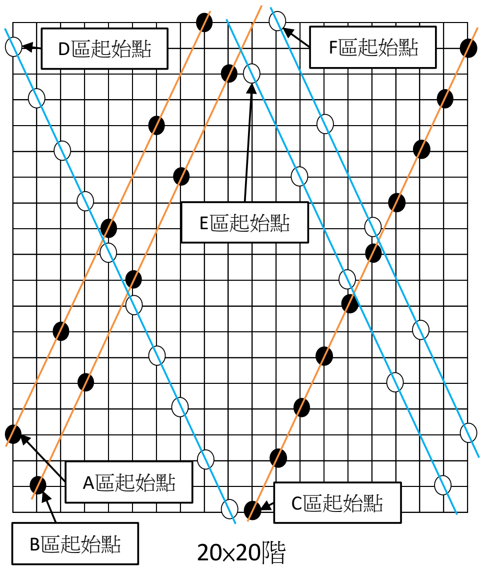
D 區：$(\frac{6n+2}{2}+1,2)$、$(\frac{6n+2}{2}+2,4)$、...

...、$(\frac{6n+2}{2}+d\ ,\ 2d)$、...、$(\frac{6n+2}{2}+3n\ ,\ 2\times 3n)$

=(3n+2,2)、(3n+3,4)、...、(3n+1+d,2d)、...、(6n+1 , 6n)　$(1\le d\le 3n, d\in N)$

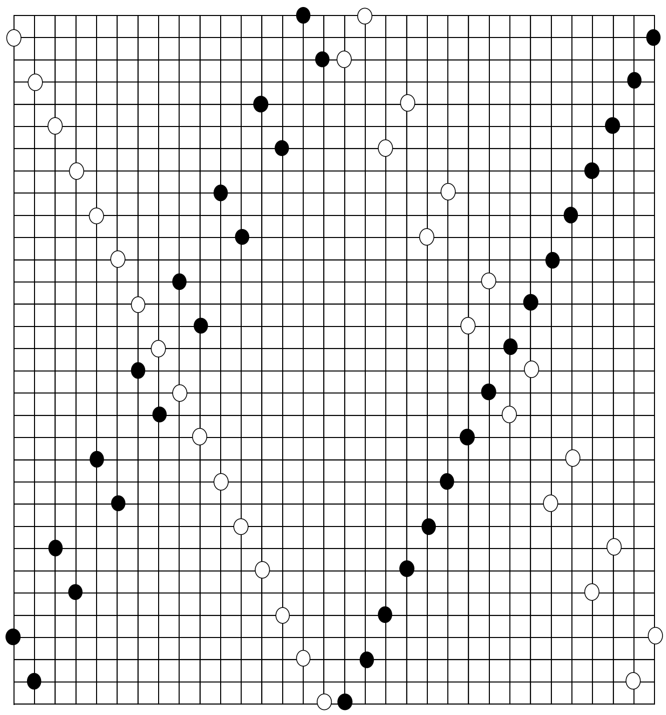
此區有 3n 個棋子

C 區及 D 區共有(3n+1) +3n =6n+1 個棋子



20x20階

圖2-7



(6n+2)x(6n+2)階　n≧1且為奇數

圖2-8

(八) (6n+2)×(6n+2)階棋盤型式：

此型式棋盤經過探討，須將 n 分為奇數或偶數二個部分，才會有規律性的存在。

1.當 $n \geq 1, n \in N$ 且為奇數時，可得 8x8 階、20x20 階、32x32 階、44x44 階……棋盤。

圖 2-7 及圖 2-8 的棋盤中，需將黑皇后棋子放置位置分成 A 區、B 區及 C 區，白皇后棋子放置位置分成 D 區、E 區及 F 區。

性質五：(6n+2)x(6n+2)階棋盤採用「雙日字放法型一」的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

此棋盤型式中，除 C、D 二區是採用**日字放法**外，其他區採用**雙日字放法型一**，即圖 2-9 所示，ΔABC 為直角三角形，其中一夾角為 θ，令每一正方格邊長為 1，則 $\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$，經查三角函數值表，$\theta \fallingdotseq 63^{\circ}$，表 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 夾角約為 63°，故在同一直行(θ=90°)、同一橫列(θ=0°)及同一條對角線上(θ=45°)皆不會有 2 個以上黑皇后或白皇后。

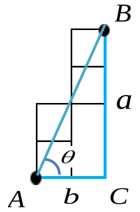


圖2-9

性質六：(6n+2)x(6n+2)階棋盤，當該區棋子放法採用「雙日字放法型一」時，將棋子相連後均可成為一直線

【證明】

A 區一開始放棋子的位置(稱為 A 區起始點)坐標為(1,4)，再依序為(3,8)、(5,12)、(7,16)、…、(3n-2,6n-2)、(3n,6n+2)

將 A 區起始點(1,4)及該區最後的點(3n,6n+2)代入到直線方程式 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

得到 $y - 4 = \frac{(6n+2)-4}{3n-1}(x-1)$　計算結果，直線方程式為 y=2x+2

再分別將其他點(3,8)、(5,12)、(7,16)、…、(3n-2,6n-2)依序代入到直線方程式 y=2x+2

結果均為直線方程式的解，故將 A 區所有點連起來，為一條直線。

同理，B、E 及 F 等三區所有點連起來，亦可得到三條直線。

性質七：(6n+2)x(6n+2)階棋盤，A、B、E 及 F 四區棋子的放法符合擺放規則

【證明】

(6n+2)x(6n+2)階棋盤，四區經計算而得到的直線方程式及其斜率，分別如下：

A 區直線方程式為 y=2x+2，其斜率 m=2　　B 區直線方程式為 y=2x-2，其斜率 m=2

E 區直線方程式為 y=-2x+(12n+4)，其斜率 m=-2　F 區直線方程式為 y=-2x+(12n+8)，其斜率 m=-2

故四區均符合擺放規則

研究四：(6n+2)x(6n+2)階棋盤，當該區棋子放法採用「雙日字放法型一」時的通式建構

【說明】

以黑皇后為例：

A 區：

當 n=1 代入到(6n+2)x(6n+2)，得到 8x8 階棋盤，其棋子的坐標依序為(1,4)、(3,8)

當 n=3 代入到(6n+2)x(6n+2)，得到 20x20 階棋盤，其棋子的坐標依序為(1,4)、(3,8)、(5,12)、

(7,16)、(9,20)

當 n=5 代入到(6n+2)×(6n+2)，得到 32×32 階棋盤，其棋子的坐標依序為(1,4)、(3,8)、(5,12)、(7,16)、(9,20)、(11,24)、(13,28)、(15,32)

⋮

針對 x 坐標部分，令 $a_1=1$ 、 $a_2=3$ 代入到 $a_2=a_1+\left(2-1\right)\times d$ ，求得 d=2，再次代到 $a_n=a_1+\left(n-1\right)\times d$ ，求得 $a_n=2n-1$，則 x 坐標為 $2a-1$

針對 y 坐標部分，令 $a_1=4$ 、 $a_2=8$ 代入到 $a_2=a_1+\left(2-1\right)\times d$ ，求得 d=4，再次代到 $a_n=a_1+\left(n-1\right)\times d$ ，求得 $a_n=4n$ ，則 y 坐標為 $4a$

故坐標為 $(2a-1,4a)$ ，並可求得第 a 個 $(1\le a\le \frac{3n+1}{2},a\in N)$ 的位置坐標。

而欲求此區最後一個棋子所放位置的坐標，將 $a=\frac{3n+1}{2}$ 代入 $(2a-1,4a)$ ，故此區最後一個棋子的坐標為(3n,6n+2)。

所以 A 區可建立一通式：(1,4)、(3,8)、...、$(2a-1,4a)$ 、...、(3n,6n+2) $(1\le a\le \frac{3n+1}{2},a\in N)$

B 區：

8×8 階棋盤，其棋子的坐標依序為(2,2)、(4,6)

20×20 階棋盤，其棋子的坐標依序為(2,2)、(4,6)、(6,10)、(8,14)、(10,18)

32×32 階棋盤，其棋子的坐標依序為(2,2)、(4,6)、(6,10)、(8,14)、(10,18)、(12,22)、(14,26)、(16,30)

⋮

針對 x 坐標部分，令 $a_1=2$ 、 $a_2=4$ 代入到 $a_2=a_1+\left(2-1\right)\times d$ ，求得 d=2，再次代到 $a_n=a_1+\left(n-1\right)\times d$ ，求得 $a_n=2n$ ，則 x 坐標為 $2b$

針對 y 坐標部分，令 $a_1=2$ 、 $a_2=6$ 代入到 $a_2=a_1+\left(2-1\right)\times d$ ，求得 d=4，再次代到 $a_n=a_1+\left(n-1\right)\times d$ ，求得 $a_n=4n-2$ ，則 y 坐標為 $4b-2$

故坐標為 $(2b,4b-2)$ ，並可求得第 b 個 $(1\le b\le \frac{3n+1}{2},b\in N)$ 的位置坐標

而欲求此區最後一個棋子所放位置的坐標，將 $b=\frac{3n+1}{2}$ 代入 $(2b,4b-2)$ ，故此區最後一個棋子的坐標為(3n+1,6n)

所以 B 區可建立一通式：(2,2)、(4,6)、...、$(2b,4b-2)$ 、...、(3n+1,6n) $(1\le b\le \frac{3n+1}{2},b\in N)$

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：(1,4)、(3,8)、...、$(2a-1,4a)$ 、...、$\boxed{(2\times\frac{3n+1}{2}\text{-}1,4\times\frac{3n+1}{2})\text{=(3n,6n+2)}}$ $(1\le a\le \frac{3n+1}{2},a\in N)$

此區有 $\frac{3n+1}{2}$ 個棋子

B 區：(2,2)、(4,6)、...、$(2b,4b-2)$、...、$\boxed{(2\times\frac{3n+1}{2},4\times\frac{3n+1}{2}-2)=(3n+1,6n)}$ $(1\le b\le\frac{3n+1}{2},b\in N)$

此區有 $\frac{3n+1}{2}$ 個棋子

C 區：$(\frac{6n+2}{2}+1,1)$、$(\frac{6n+2}{2}+2,3)$、...、$(\frac{6n+2}{2}+c,2c-1)$、...、$(\frac{6n+2}{2}+(3n+1),2\times(3n+1)-1)$

=(3n+2,1)、(3n+3,3)、...、(3n+1+c , 2c-1)、...、(6n+2 , 6n+1) $(1\le c\le 3n+1,c\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

A～C 區總共有 $\frac{3n+1}{2}+\frac{3n+1}{2}+(3n+1)=6n+2$ 個棋子

白皇后部分：

D 區：(1,(6n+2)-1)、(2, (6n+2)-3)、...、(d , (6n+2)-(2d-1))、...、(3n+1, (6n+2)-2×(3n+1)+1)

=(1,6n+1)、(2,6n-1)、...、(d,6n+3-2d)、...、(3n+1,1) $(1\le d\le 3n+1,d\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

E 區：$(\frac{6n+2}{2}+1,(6n+2)-2)$、$(\frac{6n+2}{2}+3,(6n+2)-6)$、...、$(\frac{6n+2}{2}+(2e-1),(6n+2)-(4e-2))$、...

...、$(\frac{6n+2}{2}+(2\times\frac{3n+1}{2}-1),(6n+2)-4\times\frac{3n+1}{2}+2)$

=(3n+2,6n)、(3n+4,6n-4)、...、(3n+2e,6n+4-4e)、...、(6n+1,2) $(1\le e\le\frac{3n+1}{2},e\in N)$

此區有 $\frac{3n+1}{2}$ 個棋子

F 區：$(\frac{6n+2}{2}+2,6n+2)$、$(\frac{6n+2}{2}+4,(6n+2)-4)$、...、$(\frac{6n+2}{2}+2f,(6n+2)-(4f-4))$、...

...、$(\frac{6n+2}{2}+2\times\frac{3n+1}{2},(6n+2)-4\times\frac{3n+1}{2}+4)$

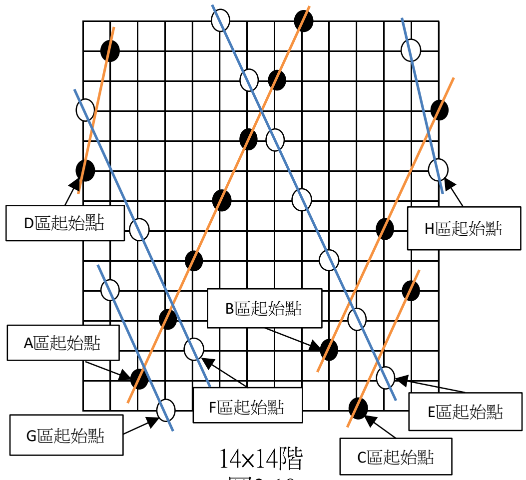
=(3n+3,6n+2)、(3n+5,6n-2)、...、(3n+1+2f,6n+6-4f)、...、(6n+2,4) $(1\le f\le\frac{3n+1}{2},f\in N)$

此區有 $\frac{3n+1}{2}$ 個棋子

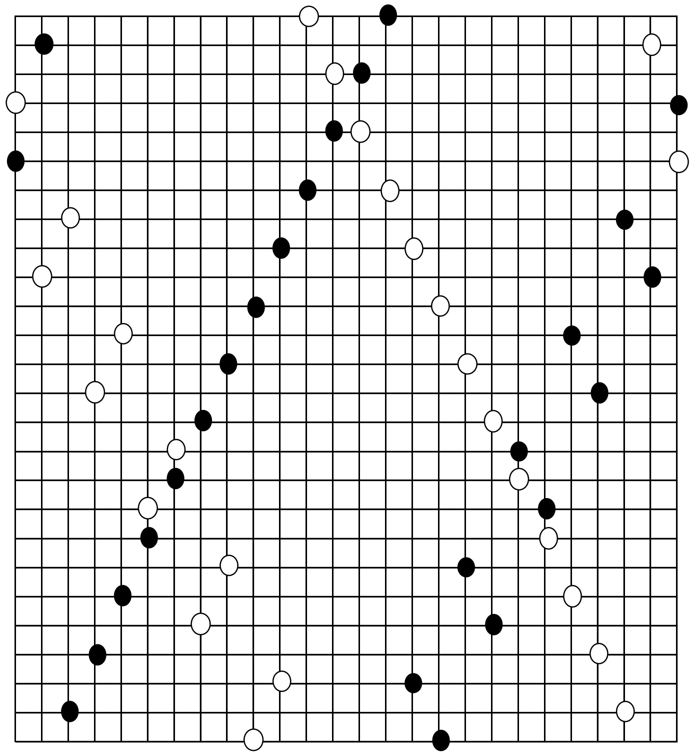
D～F 區總共有 $(3n+1)+\frac{3n+1}{2}+\frac{3n+1}{2}=6n+2$ 個棋子

2.當 $n\ge 1,n\in N$ 且為偶數時，可得 14×14 階、26×26 階、38×38 階、50×50 階……棋盤。

從圖 2-10 及圖 2-11 的棋盤中，需將黑皇后棋子放置位置分成 A～D 區，白皇后棋子放置位置分成 E～H 區。



14×14階
圖2-10



(6n+2)×(6n+2)階　n≧1且為偶數
圖2-11

性質八：(6n+2)×(6n+2)階棋盤採用「雙日字放法型二」的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

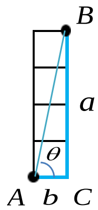


圖2-12

此棋盤型式中，D 及 H 二區是採用雙日字放法型二。圖 2-12 中，ΔABC 為直角三角形，其中一夾角為 θ ，令每一正方格邊長為 1，則 $\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{4}{1}$ ，經查三角函數值表， $\theta\doteqdot 76^{\circ}$，表 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 夾角約為 76°，故在同一直行(θ =90°)、同一橫列(θ =0°)及同一條對角線上(θ =45°)皆不會有 2 個以上黑皇后或白皇后。

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：(3,2)、(4,4)、...、$(a+2,2a)$、...、$\boxed{((3n+1)+2,2\times(3n+1))=(3n+3,6n+2)}$　$(1\leq a\leq 3n+1, a\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

B 區：$(\frac{6n+2}{2}+3,3)$、$(\frac{6n+2}{2}+5,7)$、...、$(\frac{6n+2}{2}+(2b+1),4b-1)$、...

...、$(\frac{6n+2}{2}+(2\times\frac{3}{2}n+1)\ ,\ 4\times\frac{3}{2}n-1)$

=(3n+4,3)、(3n+6,7)、...、(3n+2+2b , 4b-1)、...、(6n+2,6n-1)　$(1\leq b\leq \frac{3}{2}n, b\in N)$

此區有 $\frac{3}{2}$n 個棋子

C 區：$(\frac{6n+2}{2}+4,1)$、$(\frac{6n+2}{2}+6,5)$、…、$(\frac{6n+2}{2}+(2c+2),4c-3)$、…

…、$(\frac{6n+2}{2}+2\times(\frac{3}{2}n-1)+2\ ,\ 4\times(\frac{3}{2}n-1)-3)$

=(3n+5,1)、(3n+7,5)、…、(3n+3+2c , 4c-3)、…、(6n+1,6n-7)　$(1\le c\le\frac{3}{2}n-1, c\in N)$

此區有$\frac{3}{2}$n-1 個棋子

D 區：(1, (6n+2)-5)、(2 , (6n+2)-1) =(1 , 6n-3)、(2 , 6n+1)　此區有 2 個棋子

A～D 區總共有(3n+1)+$\frac{3}{2}n$+($\frac{3}{2}n$-1)+2=6n+2 個棋子

白皇后部分：

E 區：((6n+2)-2 , 2)、((6n+2)-3 , 4)、…、((6n+2)-(e+1),2e)、…、((6n+2)-(3n+1)-1,2×(3n+1))
=(6n,2)、(6n-1,4)、…、(6n+1-e,2e)、…、(3n , 6n+2)　$(1\le e\le 3n+1, e\in N)$
此區有 3n+1 個棋子

F 區：$(\frac{6n+2}{2}-2,3)$、$(\frac{6n+2}{2}-4,7)$、…、$(\frac{6n+2}{2}-2f\ ,\ 4f-1)$、…、$(\frac{6n+2}{2}-2\times\frac{3}{2}n, 4\times\frac{3}{2}n-1)$

=(3n-1,3)、(3n-3,7)、…、(3n+1-2f , 4f-1)、…、(1 , 6n-1)　$(1\le f\le\frac{3}{2}n, f\in N)$

此區有$\frac{3}{2}$n 個棋子

G 區：$(\frac{6n+2}{2}-3,1)$、$(\frac{6n+2}{2}-5,5)$、…、$(\frac{6n+2}{2}-(2g+1)\ ,\ 4g-3)$、…

…、$(\frac{6n+2}{2}-2\times(\frac{3}{2}n-1)-1\ ,\ 4\times(\frac{3}{2}n-1)-3)$

=(3n-2,1)、(3n-4,5)、…、(3n-2g , 4g-3)、…、(2 , 6n-7)　$(1\le g\le\frac{3}{2}n-1, g\in N)$

此區有$\frac{3}{2}n-1$個棋子

H 區：(6n+2, (6n+2)-5)、((6n+2)-1 , (6n+2)-1)=(6n+2 , 6n-3)、(6n+1 , 6n+1)　此區有 2 個棋子

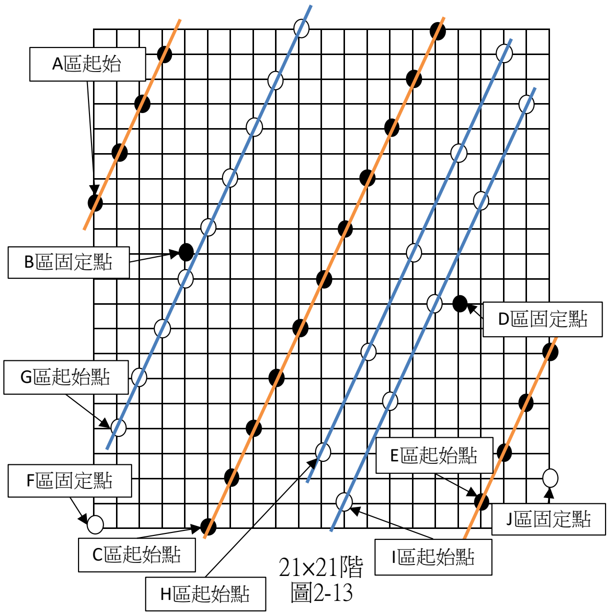
E～H 區總共有(3n+1)+$\frac{3}{2}n$+($\frac{3}{2}n-1$)+2=6n+2 個棋子

(九) (6n+3)×(6n+3)階棋盤型式：

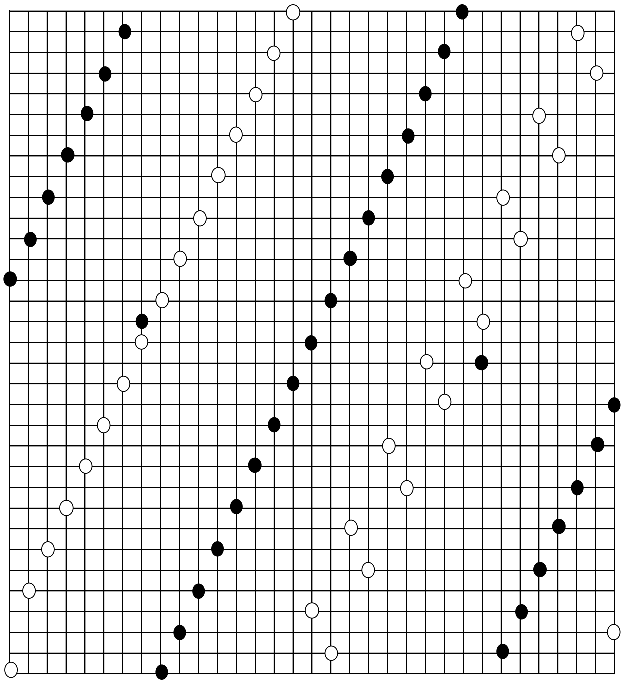
此型式棋盤經過探討，初步與(6n+2)×(6n+2)階棋盤型式一樣，須將 n 分為奇數或偶數二個部分，才會有規律性的存在。

1.當 $n\ge1, n\in N$ 且為奇數時，可得 9×9 階、21×21 階、33×33 階、45×45 階……棋盤。

圖 2-13 及圖 2-14 的棋盤中，此型式棋盤，經過反覆試放，才得以成功，最終需將黑皇后棋子放置位置分成 A～E 區，白皇后棋子放置位置分成 F～J 區，而這些區中，B、D、F、J 區僅只放一個棋子，為固定點。



21×21階
圖2-13


(6n+3)×(6n+3)階 n≧1且為奇數
圖2-14

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：$(1,\frac{6n+4}{2}+3)$、$(2,\frac{6n+4}{2}+5)$、…、$(a,\frac{6n+4}{2}+2a+1)$、…、$(\frac{3n-1}{2},\frac{6n+4}{2}+2\times\frac{3n-1}{2}+1)$

=(1,3n+5)、(2,3n+7)、…、$(a$,3n+3+2$a)$、…、$(\frac{3n-1}{2}$, 6n+2) $(1\le a\le\frac{3n-1}{2},a\in N)$

此區有 $\frac{3n-1}{2}$ 個棋子

B 區：$(\frac{6n+2}{4}\ ,\ \frac{6n+4}{2}+1)=(\frac{3n+1}{2}$, 3n+3) 此區只有 1 個棋子

C 區：$(\frac{6n+6}{4},1)$、$(\frac{6n+6}{4}+1,3)$、…、$(\frac{6n+6}{4}$+(c-1) , 2c-1)、…、$(\frac{6n+6}{4}$+(3n+2)-1 , 2×(3n+2)-1)

=$(\frac{3n+3}{2},1)$、$(\frac{3n+5}{2},3)$、…、$(\frac{3n+1}{2}$+c , 2c-1)、…、$(\frac{9n+5}{2}$, 6n+3) $(1\le c\le 3n+2,c\in N)$

此區有 3n+2 個棋子

D 區：$(\frac{18n+10}{4}+1,\frac{6n+4}{2}-1)=(\frac{9n+7}{2}$,3n+1) 此區只有 1 個棋子

E 區：$(\frac{18n+10}{4}+2,2)$、$(\frac{18n+10}{4}+3,4)$、…、$(\frac{18n+10}{4}$+(e+1) , 2e)、…

…、$(\frac{18n+10}{4}+(\frac{3n-1}{2}+1)\ ,\ 2\times\frac{3n-1}{2})$

=$(\frac{9n+9}{2},2)$、$(\frac{9n+11}{2},4)$、…、$(\frac{9n+7}{2}$+e , 2e)、…、(6n+3 , 3n-1) $(1\le e\le\frac{3n-1}{2},e\in N)$

此區有$\frac{3n-1}{2}$個棋子

A～E 區總共有($\frac{3n-1}{2}$)+1+(3n+2)+1+($\frac{3n-1}{2}$)=6n+3 個棋子

白皇后部分：

F 區：(1,1)　只有一個棋子

G 區：(2,5)、(3,7)、...、(g+1,2g+3)、...、$\boxed{(3n+1\ ,\ 2\times 3n+3)=(3n+1\ ,\ 6n+3)}$　$(1 \le g \le 3n, g \in N)$

此區有 3n 個棋子

H 區：($\frac{6n+4}{2}$,4)、($\frac{6n+4}{2}$+2,8)、...、($\frac{6n+4}{2}$+(2h-2) , 4h)、...、($\frac{6n+4}{2}$+2×$\frac{3n+1}{2}$ -2 , 4×$\frac{3n+1}{2}$)

=(3n+2,4)、(3n+4,8)、...、(3n+2h,4h)、...、(6n+1,6n+2)　$(1 \le h \le \frac{3n+1}{2}, h \in N)$

此區有$\frac{3n+1}{2}$個棋子

I 區：($\frac{6n+4}{2}$+1,2)、($\frac{6n+4}{2}$+3,6)、..、($\frac{6n+4}{2}$+(2i-1),4i-2)、..、($\frac{6n+4}{2}$+2×$\frac{3n+1}{2}$ -1,4×$\frac{3n+1}{2}$ -2)

=(3n+3,2)、(3n+5,6)、...、(3n+1+2i ,4i-2)、...、(6n+2 , 6n)　$(1 \le i \le \frac{3n+1}{2}, i \in N)$

此區有$\frac{3n+1}{2}$個棋子

J 區：(6n+3,3)　只有一個棋子

F～J 區總共有 1+3n+$\frac{3n+1}{2}+\frac{3n+1}{2}$+1=6n+3 個棋子

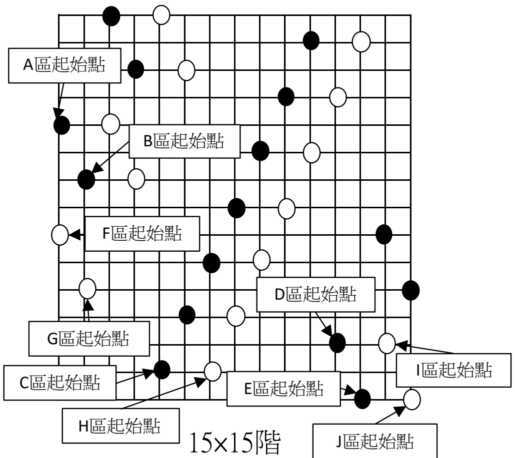
2.當$n \ge 1, n \in N$且為偶數時，可得 15×15 階、27×27 階、39×39 階、51×51 階……棋盤。

一開始從黑皇后棋子開始推導其放法，推導結果，確定此階數的棋盤只需使用到日字放法及雙日字放法型一，但卻遲遲無法找到規律性的存在，所以無法得到通式。後來因清楚需透過等差數列來得到規律性的通式，經反覆嘗試，最後終於確定此型式的棋盤需再分成 A、B 二組，才能找到規律性。

首先，下表是 15×15 階、27×27 階……75×75 階中，使用日字放法及雙日字放法型一後分別得到的棋子數，因雙日字放法型一所放棋子的位置需在日字放法這區的左右二側，觀察單一側所需數量為偶數或奇數，就成為分成 A 組及 B 組的依據。

編號	棋盤階數	用**日字放法**所放棋子數	用**雙日字放法型一單一側**所放棋子數	組別
1	15×15 階	7 個	左右二側各 4，共 8 個	A
2	27×27 階	13 個	左右二側各 7，共 14 個	B
3	39×39 階	19 個	左右二側各 10，共 20 個	A
4	51×51 階	25 個	左右二側各 13，共 26 個	B
5	63×63 階	31 個	左右二側各 16，共 32 個	A
6	75×75 階	37 個	左右二側各 19，共 38 個	B

(1)**偶數 A 組：** $n=4m-2(m\ge 1,m\in N)$，得到 15×15 階、39×39 階、63×63 階……棋盤。



15×15階
圖2-15

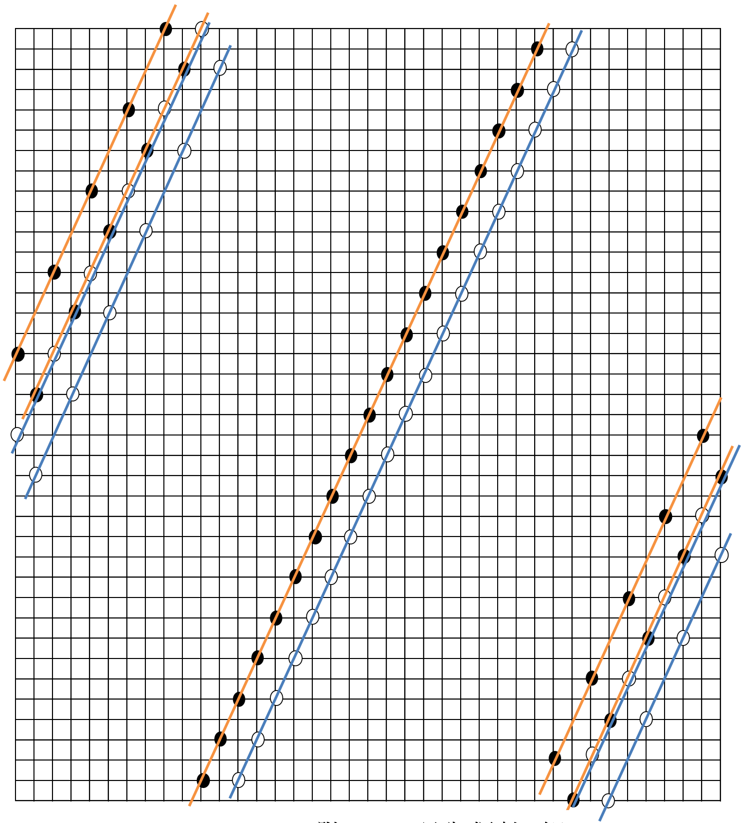

(6n+3)×(6n+3)階　n≧1且為偶數A組
圖2-16

圖 2-15 及圖 2-16 的棋盤中，黑皇后棋子放置位置分成 A～E 區，白皇后棋子放置位置分成 F～J 區。

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：$(1,\frac{6n+4}{2}+3)$、$(3,\frac{6n+4}{2}+7)$、...、$(2a-1\ ,\frac{6n+4}{2}+(4a-1))$、...

...、$(2\times\frac{3n+2}{4}-1,\frac{6n+4}{2}+(4\times\frac{3n+2}{4}-1))$

$=(1,3n+5)$、$(3,3n+9)$、...、$(2a-1,3n+1+4a)$、...、$(\frac{3n}{2},6n+3)$　$(1\le a\le\frac{3n+2}{4},a\in N)$

此區有 $\frac{3n+2}{4}$ 個棋子

B 區：$(2,\frac{6n+4}{2}+1)$、$(4,\frac{6n+4}{2}+5)$、...、$(2b,\frac{6n+4}{2}+(4b-3))$、...、$(2\times\frac{3n+2}{4},\frac{6n+4}{2}+(4\times\frac{3n+2}{4}-3))$

$=(2,3n+3)$、$(4,3n+7)$、...、$(2b,3n-1+4b)$、...、$(\frac{3n+2}{2},6n+1)$　$(1\le b\le\frac{3n+2}{4},b\in N)$

此區有 $\frac{3n+2}{4}$ 個棋子

C 區：$(\frac{6n+4}{4}+1,2)$、$(\frac{6n+4}{4}+2,4)$、…、$(\frac{6n+4}{4}+c\,,2c)$、…、$(\frac{6n+4}{4}+(3n+1), 2\times(3n+1))$

$=(\frac{3n+4}{2},2)$、$(\frac{3n+6}{2},4)$、…、$(\frac{3n+2}{2}+c\,,2c)$、…、$(\frac{9n+4}{2}, 6n+2)$ $(1\le c\le 3n+1, c\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

D 區：$(\frac{18n+8}{4}+1,3)$、$(\frac{18n+8}{4}+3,7)$、…、$(\frac{18n+8}{4}+(2d-1)\,, 4d-1)$、…

…、$(\frac{18n+8}{4}+(2\times\frac{3n+2}{4}-1)\,, 4\times\frac{3n+2}{4}-1)$

$=(\frac{9n+6}{2},3)$、$(\frac{9n+10}{2},7)$、…、$(\frac{9n+2}{2}+2d\,, 4d-1)$、…、$(6n+2\,, 3n+1)$ $(1\le d\le\frac{3n+2}{4}, d\in N)$

此區有$\frac{3n+2}{4}$個棋子

E 區：$(\frac{18n+8}{4}+2,1)$、$(\frac{18n+8}{4}+4,5)$、…、$(\frac{18n+8}{4}+2e,4e-3)$、…、$(\frac{18n+8}{4}+2\times\frac{3n+2}{4},4\times\frac{3n+2}{4}-3)$

$=(\frac{9n+8}{2},1)$、$(\frac{9n+12}{2},5)$、…、$(\frac{9n+4}{2}+2e,4e-3)$、…、$(6n+3\,, 3n-1)$ $(1\le e\le\frac{3n+2}{4}, e\in N)$

此區有$\frac{3n+2}{4}$個棋子

A～E 區總共有$\frac{3n+2}{4}+\frac{3n+2}{4}+(3n+1)+\frac{3n+2}{4}+\frac{3n+2}{4}=6n+3$ 個棋子

白皇后部分：

F 區：$(1,\frac{6n+4}{2}-1)$、$(3,\frac{6n+4}{2}+3)$、…、$(2f-1\,,\frac{6n+4}{2}+(4f-5))$、…、$(2\times\frac{3n+6}{4}-1\,,\frac{6n+4}{2}+(4\times\frac{3n+6}{4}-5))$

$=(1,3n+1)$、$(3,3n+5)$、…、$(2f-1\,, 3n-3+4f)$、…、$(\frac{3n+4}{2},6n+3)$ $(1\le f\le\frac{3n+6}{4}, f\in N)$

此區有$\frac{3n+6}{4}$個棋子

G 區：$(2\,,\frac{6n+4}{2}-3)$、$(4\,,\frac{6n+4}{2}+1)$、…、$(2g\,,\frac{6n+4}{2}+(4g-7))$、…、$(2\times\frac{3n+6}{4},\frac{6n+4}{2}+(4\times\frac{3n+6}{4}-7))$

$=(2,3n-1)$、$(4, 3n+3)$、…、$(2g,3n-5+4g)$、…、$(\frac{3n+6}{2}, 6n+1)$ $(1\le g\le\frac{3n+6}{4}, g\in N)$

此區有$\frac{3n+6}{4}$個棋子

H 區：$(\frac{6n+4}{4}+3\,, 2)$、$(\frac{6n+4}{4}+4\,, 4)$、…、$(\frac{6n+4}{4}+(h+2)\,, 2h)$、…、$(\frac{6n+4}{4}+(3n+1)+2\,, 2\times(3n+1))$

$=(\frac{3n+8}{2},2)$、$(\frac{3n+10}{2},4)$、…、$(\frac{3n+6}{2}+h\,, 2h)$、…、$(\frac{9n+8}{2}, 6n+2)$ $(1\le h\le 3n+1, h\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

I 區：$(\frac{18n+8}{4}+3 , 3)$、$(\frac{18n+8}{4}+5 , 7)$、...、$(\frac{18n+8}{4}+(2i+1) , 4i-1)$、...

...、$(\frac{18n+8}{4}+2\times\frac{3n-2}{4}+1,4\times\frac{3n-2}{4}-1)$

$=(\frac{9n+10}{2},3)$、$(\frac{9n+14}{2},7)$、...、$(\frac{9n+6}{2}+2i , 4i-1)$、...、$(6n+2 , 3n-3)$ $(1\le i\le\frac{3n-2}{4}, i\in N)$

此區有$\frac{3n-2}{4}$個棋子

J 區：$(\frac{18n+8}{4}+4 , 1)$、$(\frac{18n+8}{4}+6 , 5)$、...、$(\frac{18n+8}{4}+(2j+2) , 4j-3)$、...

...、$(\frac{18n+8}{4}+2\times\frac{3n-2}{4}+2 , 4\times\frac{3n-2}{4}-3)$

$=(\frac{9n+12}{2},1)$、$(\frac{9n+16}{2},5)$、...、$(\frac{9n+8}{2}+2j , 4j-3)$、...、$(6n+3 , 3n-5)$ $(1\le j\le\frac{3n-2}{4}, j\in N)$

此區有$\frac{3n-2}{4}$個棋子

F～J 區總共有$\frac{3n+6}{4}+\frac{3n+6}{4}+(3n+1)+\frac{3n-2}{4}+\frac{3n-2}{4}$ $=6n+3$ 個棋子

(2)偶數 B 組： $n=4m(m\ge 1, m\in N)$，得到 27×27 階、51×51 階、75×75 階……棋盤。

圖 2-17 為偶數 B 組棋盤，其黑皇后及白皇后的棋子放法與偶數 A 組相同。

通式及棋子數量整理如下：

黑皇后部分：

A 區：$(2,\frac{6n+4}{2}+5)$、$(4,\frac{6n+4}{2}+9)$、...

...、$(2a\ ,\frac{6n+4}{2}+(4a+1))$、...

...、$(2\times\frac{3}{4}n,\frac{6n+4}{2}+4\times\frac{3}{4}n+1)$

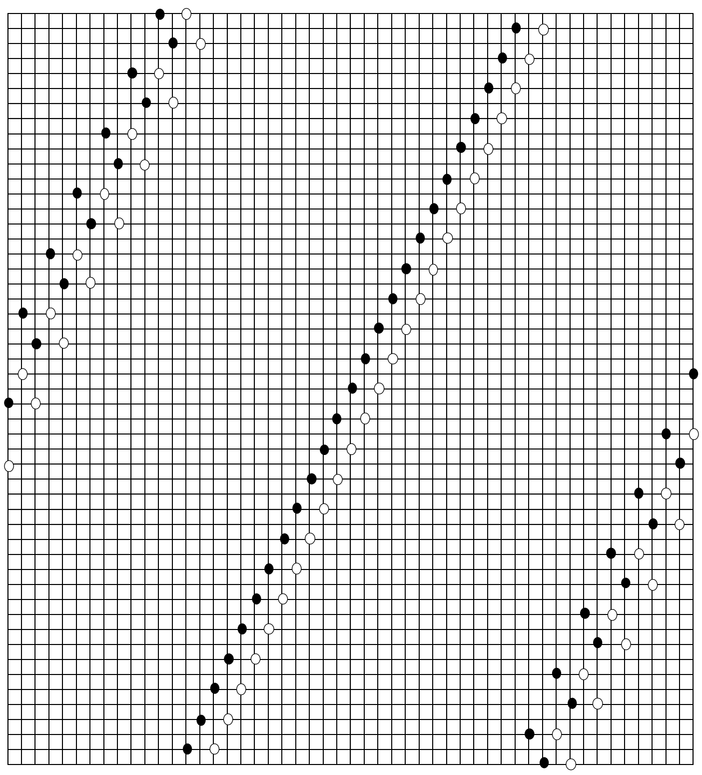
$=(2,3n+7)$、$(4, 3n+11)$、...

...、$(2a, 3n+3+4a)$、...

...、$(\frac{3}{2}n, 6n+3)$

$(1\le a\le\frac{3}{4}n, a\in N)$

此區有$\frac{3}{4}n$個棋子



(6n+3)×(6n+3)階　n≧1且為偶數B組

圖2-17

B 區：$(1,\frac{6n+4}{2}-1)$、$(3,\frac{6n+4}{2}+3)$、...、$(2b-1,\frac{6n+4}{2}+(4b-5))$、...、$(2\times\frac{3n+4}{4}-1,\frac{6n+4}{2}+4\times\frac{3n+4}{4}-5)$

$=(1,3n+1)$、$(3,3n+5)$、...、$(2b-1,3n-3+4b)$、...、$(\frac{3n+2}{2},6n+1)$ $(1\le b\le\frac{3n+4}{4},b\in N)$

此區有 $\frac{3n+4}{4}$ 個棋子

C 區：$(\frac{6n+4}{4}+1,2)$、$(\frac{6n+4}{4}+2,4)$、...、$(\frac{6n+4}{4}+c,2c)$、...、$(\frac{6n+4}{4}+(3n+1),2\times(3n+1))$

$=(\frac{3n+4}{2},2)$、$(\frac{3n+6}{2},4)$、...、$(\frac{3n+2}{2}+c,2c)$、...、$(\frac{9n+4}{2},6n+2)$ $(1\le c\le 3n+1,c\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

D 區：$(\frac{18n+8}{4}+1,3)$、$(\frac{18n+8}{4}+3,7)$、...、$(\frac{18n+8}{4}+(2d-1),4d-1)$、...

...、$(\frac{18n+8}{4}+(2\times\frac{3n+4}{4}-1),4\times\frac{3n+4}{4}-1)$

$=(\frac{9n+6}{2},3)$、$(\frac{9n+10}{2},7)$、...、$(\frac{9n+2}{2}+2d,4d-1)$、...、$(6n+3,3n+3)$

$(1\le d\le\frac{3n+4}{4},d\in N)$ 此區有 $\frac{3n+4}{4}$ 個棋子

E 區：$(\frac{18n+8}{4}+2,1)$、$(\frac{18n+8}{4}+4,5)$、...、$(\frac{18n+8}{4}+2e,4e-3)$、...、$(\frac{18n+8}{4}+2\times\frac{3}{4}n,4\times\frac{3}{4}n-3)$

$=(\frac{9n+8}{2},1)$、$(\frac{9n+12}{2},5)$、...、$(\frac{9n+4}{2}+2e,4e-3)$、...、$(6n+2,3n-3)$ $(1\le e\le\frac{3}{4}n,e\in N)$

此區有 $\frac{3}{4}n$ 個棋子

A～E 區總共有 $\frac{3}{4}n+\frac{3n+4}{4}+(3n+1)+\frac{3n+4}{4}+\frac{3}{4}n=6n+3$ 個棋子

白皇后部分：

F 區：$(2,\frac{6n+4}{2}+1)$、$(4,\frac{6n+4}{2}+5)$、...、$(2f,\frac{6n+4}{2}+(4f-3))$、...、$(2\times\frac{3n+4}{4},\frac{6n+4}{2}+(4\times\frac{3n+4}{4}-3))$

$=(2,3n+3)$、$(4,3n+7)$、...、$(2f,3n-1+4f)$、...、$(\frac{3n+4}{2},6n+3)$ $(1\le f\le\frac{3n+4}{4},f\in N)$

此區有 $\frac{3n+4}{4}$ 個棋子

G 區：$(1,\frac{6n+4}{2}-5)$、$(3,\frac{6n+4}{2}-1)$、...、$(2g-1,\frac{6n+4}{2}-(-4g+9))$、...

...、$(2\times\frac{3n+8}{4}-1,\frac{6n+4}{2}-(-4\times\frac{3n+8}{4}+9))$

$=(1,3n-3)$、$(3,3n+1)$、…、$(2g-1,3n-7+4g)$、…、$(\frac{3n+6}{2},6n+1)$ $(1\le g\le\frac{3n+8}{4},g\in N)$

此區有 $\frac{3n+8}{4}$ 個棋子

H 區：$(\frac{6n+4}{4}+3,2)$、$(\frac{6n+4}{4}+4,4)$、…、$(\frac{6n+4}{4}+(h+2),2h)$、…、$(\frac{6n+4}{4}+(3n+1)+2,2\times(3n+1))$

$=(\frac{3n+8}{2},2)$、$(\frac{3n+10}{2},4)$、…、$(\frac{3n+6}{2}+h,2h)$、…、$(\frac{9n+8}{2},6n+2)$ $(1\le h\le 3n+1,h\in N)$

此區有 3n+1 個棋子

I 區：$(\frac{18n+8}{4}+3,3)$、$(\frac{18n+8}{4}+5,7)$、…、$(\frac{18n+8}{4}+(2i+1),4i-1)$、…

…、$(\frac{18n+8}{4}+(2\times\frac{3}{4}n+1),4\times\frac{3}{4}n-1)$

$=(\frac{9n+10}{2},3)$、$(\frac{9n+14}{2},7)$、…、$(\frac{9n+6}{2}+2i,4i-1)$、…、$(6n+3,3n-1)$ $(1\le i\le\frac{3}{4}n,i\in N)$

此區有 $\frac{3}{4}n$ 個棋子

J 區：$(\frac{18n+8}{4}+4,1)$、$(\frac{18n+8}{4}+6,5)$、…、$(\frac{18n+8}{4}+(2j+2),4j-3)$、…

…、$(\frac{18n+8}{4}+(2\times\frac{3n-4}{4}+2),4\times\frac{3n-4}{4}-3)$

$=(\frac{9n+12}{2},1)$、$(\frac{9n+16}{2},5)$、…、$(\frac{9n+8}{2}+2j,4j-3)$、…、$(6n+2,3n-7)$ $(1\le j\le\frac{3n-4}{4},j\in N)$

此區有 $\frac{3n-4}{4}$ 個棋子

F～J 區共有 $\frac{3n+4}{4}+\frac{3n+8}{4}+(3n+1)+\frac{3}{4}n+\frac{3n-4}{4}=6n+3$ 個棋子

※本作品將六組正方形棋盤型式各自完成 12 個不同階棋盤的排法，因篇幅限制在三十頁內，故所完成的共 108 個不同階棋盤放法結果作為附本，置放於展覽會場中。

三、黑皇后、白皇后在正三角形棋盤的放法探討：

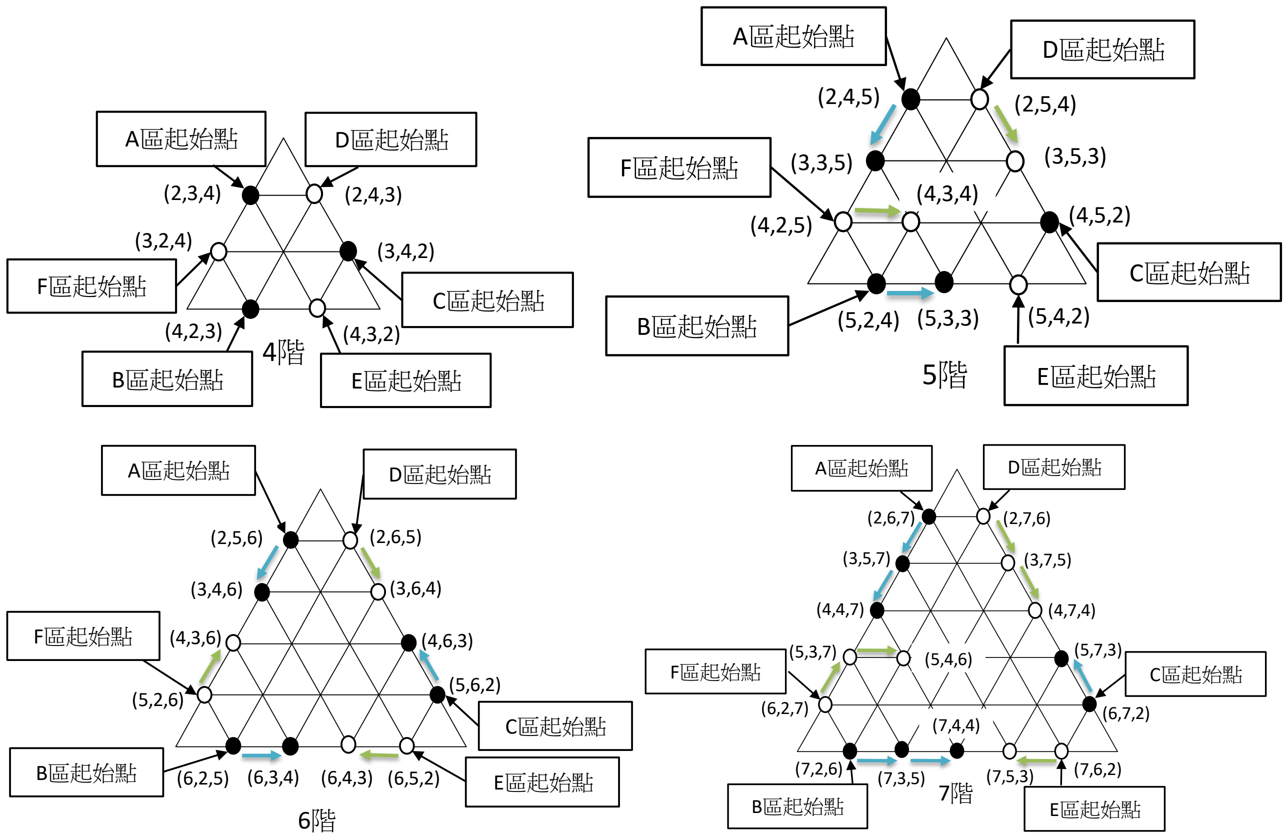
(一)擺放規則：在 n 階正三角形棋盤中，每一條棋盤格線的交點上，均可放上黑皇后或白皇后棋子，使得 X、Y、Z 三個方向的每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子，那黑皇后及白皇后棋子各要如何用最少棋子數來擺放，才會有規律產生。

(二)正三角形棋盤中黑皇后及白皇后棋子放法探討：

首先，正三角形棋盤為 3 階時，無法符合擺放規則，故從 4 階開始探討，並且先從黑皇后棋子的放法開始探討，再接著探討白皇后棋子的放法。

從下面 4～7 階棋盤圖形中，正三角形棋盤的黑與白皇后棋子的擺放分別分成 A、B、C 三區(順時針擺放)及 D、E、F 三區(逆時針擺放)。各區均標示起始點位置及用箭頭標示各區每

一個棋子放置的位置及方向。



下表為 4～17 階棋盤按照上圖擺放方式擺放棋子後，其黑皇后及白皇后所放的棋子總數，發現黑皇后及白皇后二種棋子在相同階數時，可以使其棋子總數相等，另外，將其分成偶數階及奇數階二部分，初步可得到規律性的存在。

編號	棋盤階數	黑皇后棋子總數	白皇后棋子總數	備註
1	4 階	3	3	
2	5 階	5	5	
3	6 階	6	6	
4	7 階	8	8	
5	8 階	9	9	
6	9 階	11	11	
7	10 階	12	12	
8	11 階	14	14	
9	12 階	15	15	
10	13 階	17	17	
11	14 階	18	18	
12	15 階	20	20	
13	16 階	21	21	
14	17 階	23	23	

(三)n 階正三角形棋盤的分組及其通式探討：

從上表歸納結果，可將 n 階正三角形棋盤分為 2n+2 階及 2n+3 階 $(n \ge 1, n \in N)$ 棋盤型式。

研究五：n 階正三角形棋盤的通式建構

【說明】

以 2n+2 階黑皇后為例：

A 區：

當 n=1 代入到 2n+2，得到 4 階棋盤，其棋子的坐標依序為(2,3,4)

當 n=2 代入到 2n+2，得到 6 階棋盤，其棋子的坐標依序為(2,5,6)、(3,4,6)

當 n=3 代入到 2n+2，得到 8 階棋盤，其棋子的坐標依序為(2,7,8)、(3,6,8)、(4,5,8)

⋮

觀察其規律情形，棋子的坐標表示，依序為(2 , 2n+1 , 2n+2)、(3 , 2n , 2n+2)、(4 , 2n-1 , 2n+2)、… …。

針對 x 坐標部分，令 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 3$ 代入到 $a_2 = a_1 + (2-1) \times d$ ，求得 d=1，再次代到 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$ ，求得 $a_n = n+1$，則 x 坐標為 $a+1$ 。

針對 y 坐標部分，令 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 0$ 代入到 $a_2 = a_1 + (2-1) \times d$ ，求得 d=-1，再次代到 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$ ，求得 $a_n = -n+2$ ，則 y 坐標為 2n+$(-a+2)$ 。

針對 z 坐標部分，令 $a_1 = 4$ 、 $a_2 = 6$ 代入到 $a_2 = a_1 + (2-1) \times d$ ，求得 d=2，再次代到 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$ ，求得 $a_n = 2n+2$ ，則 z 坐標為 $2n+2$ 。

故 A 區坐標通式為($a+1$, 2n+$(-a+2)$, 2n+2)，並可求得第 a 個 $(1 \le a \le n, a \in N)$ 的位置坐標。

而欲求此區最後一個棋子所放位置的坐標，將 $a = n$ 代入($a+1$, 2n+$(-a+2)$, 2n+2)，故此區最後一個棋子的坐標為(n+1 , n+2 , 2n+2)

所以 A 區可建立一通式：(2 , 2n+1 , 2n+2)、(3 , 2n , 2n+2)、(4 , 2n-1 , 2n+2)、…、

…、($a+1$, 2n+$(-a+2)$, 2n+2)、…(n+1 , n+2 , 2n+2)　$(1 \le a \le n, a \in N)$

1. 2n+2 階棋盤型式：

當 $n \ge 1, n \in N$ 時，時，可得 4 階、6 階、8 階……棋盤。

黑皇后部分：

A 區：(2 , 2n+1 , 2n+2)、(3 , 2n , 2n+2)、(4 , 2n-1 , 2n+2)、…、($a+1$, 2n+$(-a+2)$, 2n+2)、…

…、(n+1 , n+2 , 2n+2)　$(1 \le a \le n, a \in N)$　有 n 個棋子

B 區：(2n+2 , 2 , 2n+1)、(2n+2 , 3 , 2n)、(2n+2 , 4 , 2n-1)、…、(2n+2 , b+1 , 2n+(-b+2))、…

…、(2n+2 , n+1 , n+2)　$(1 \le b \le n, b \in N)$　有 n 個棋子

C 區：(2n+1 , 2n+2 , 2)、(2n , 2n+2 , 3)、(2n-1 , 2n+2 , 4)、…、(2n+(-c+2) , 2n+2 , c+1)、…

…、(n+2 , 2n+2 , n+1)　$(1 \le c \le n, c \in N)$　有 n 個棋子

A～C 區總共有 3n 個棋子

白皇后部分：

D 區：(2 , 2n+2 , 2n+1)、(3 , 2n+2 , 2n)、(4 , 2n+2 , 2n-1)、…、(d+1, 2n+2 , 2n+(-d+2))、…

…、(n+1 , 2n+2 , n+2)　$(1 \le d \le n, d \in N)$　有 n 個棋子

E 區：(2n+2 , 2n+1 , 2)、(2n+2 , 2n , 3)、(2n+2 , 2n-1 , 4)、…、(2n+2 , 2n+(-e+2) , e+1)、…

…、(2n+2 , n+2 , n+1)　$(1 \le e \le n, e \in N)$　有 n 個棋子

F 區：(2n+1 , 2 , 2n+2)、(2n , 3 , 2n+2)、(2n-1 , 4 , 2n+2)、…、(2n+(-f+2) , f+1 , 2n+2)、…

…、(n+2 , n+1 , 2n+2)　$(1 \le f \le n, f \in N)$　有 n 個棋子

D～F 區總共有 3n 個棋子

性質九：2n+2 階 $(n \ge 1, n \in N)$ 棋盤型式的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

1.先證明 X 方向每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

(1)首先觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+1 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n , 2n+2)、($\boxed{4}$, 2n-1 , 2n+2)、…、($\boxed{n+1}$, n+2 , 2n+2)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+1)、($\boxed{3}$, 2n+2 , 2n)、($\boxed{4}$, 2n+2 , 2n-1)、…、($\boxed{n+1}$, 2n+2 , n+2)

由上可得 X=2,3,4,⋯,n+1 棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

(2)再觀察 C 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

C 區：($\boxed{2n+1}$, 2n+2 , 2)、($\boxed{2n}$, 2n+2 , 3)、($\boxed{2n-1}$, 2n+2 , 4)、…、($\boxed{n+2}$, 2n+2 , n+1)

F 區：($\boxed{2n+1}$, 2 , 2n+2)、($\boxed{2n}$, 3 , 2n+2)、($\boxed{2n-1}$, 4 , 2n+2)、…、($\boxed{n+2}$, n+1 , 2n+2)

由上可得 X=n+2,n+3,⋯,2n,2n+1 棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

(3)最後觀察 B 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

B 區：($\boxed{2n+2}$, 2 , 2n+1)、($\boxed{2n+2}$, 3 , 2n)、($\boxed{2n+2}$, 4 , 2n-1)、…、($\boxed{2n+2}$, n+1 , n+2)

E 區：($\boxed{2n+2}$, 2n+1 , 2)、($\boxed{2n+2}$, 2n , 3)、($\boxed{2n+2}$, 2n-1 , 4)、…、($\boxed{2n+2}$, n+2 , n+1)

由上可得 X=2n+2 棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知在 X=2,3,⋯,2n+2 的棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子；我們留意到 X=1 沒有棋盤格線。同理，亦可以證明在 Y、Z 二方向的每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

2、接著我們證明上述的排法符合擺放規則中使用最少的棋子數。

(1)觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+1 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n , 2n+2)、($\boxed{4}$, 2n-1 , 2n+2)、…、($\boxed{n+1}$, n+2 , 2n+2)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+1)、($\boxed{3}$, 2n+2 , 2n)、($\boxed{4}$, 2n+2 , 2n-1)、…、($\boxed{n+1}$, 2n+2 , n+2)

若 A 區少放其中一顆棋子，則對應的 X 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放($\boxed{3}$, 2n , 2n+2)這個棋子，X=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(2)觀察 B 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

B 區：(2n+2 , $\boxed{2}$, 2n+1)、(2n+2 , $\boxed{3}$, 2n)、(2n+2 , $\boxed{4}$, 2n-1)、…、(2n+2 , $\boxed{n+1}$, n+2)

F 區：(2n+1 , $\boxed{2}$, 2n+2)、(2n , $\boxed{3}$, 2n+2)、(2n-1 , $\boxed{4}$, 2n+2)、…、(n+2 , $\boxed{n+1}$, 2n+2)

若 B 區少放其中一顆棋子，則對應的 Y 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n+2 , $\boxed{3}$, 2n)這個棋子，Y=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(3)觀察 C 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

C 區：(2n+1 , 2n+2 , $\boxed{2}$)、(2n , 2n+2 , $\boxed{3}$)、(2n-1 , 2n+2 , $\boxed{4}$)、…、(n+2 , 2n+2 , $\boxed{n+1}$)

E 區：(2n+2 , 2n+1 , $\boxed{2}$)、(2n+2 , 2n , $\boxed{3}$)、(2n+2 , 2n-1 , $\boxed{4}$)、…、(2n+2 , n+2 , $\boxed{n+1}$)

若 C 區少了其中一顆棋子，則對應的 Z 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放

$(2n, 2n+2, \boxed{3})$這個棋子，Z=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知：若 A 區、B 區或 C 區少放一個棋子，則將會使 X、Y 或 Z 三個方向的某一條棋盤格線少了黑皇后棋子，如此就無法符合擺放規則。同理，亦可以證明 D 區、E 區或 F 區無法再減少任何白皇后棋子。所以得證上述排法符合擺放規則且使用最少的棋子數。

2. 2n+3 階棋盤型式：

當 $n \geq 1, n \in N$ 時，時，可得 5 階、7 階、9 階……棋盤。

黑皇后部分：

A 區：(2 , 2n+2 , 2n+3)、(3 , 2n+1 , 2n+3)、(4 , 2n , 2n+3)、...、($a+1$, 2n+$(-a+3)$, 2n+3)、...
... 、(n+2 , n+2 , 2n+3) $(1 \leq a \leq n+1, a \in N)$ 有 n+1 個棋子

B 區：(2n+3 , 2 , 2n+2)、(2n+3 , 3 , 2n+1)、(2n+3 , 4 , 2n)、... 、(2n+3 , b+1 , 2n+(-b+3))、...
... 、(2n+3 , n+2 , n+2) $(1 \leq b \leq n+1, b \in N)$ 有 n+1 個棋子

C 區：(2n+2 , 2n+3 , 2)、(2n+1 , 2n+3 , 3)、(2n , 2n+3 , 4)、... 、(2n+(-c+3) , 2n+3 , c+1)、...
... 、(n+3 , 2n+3 , n+1) $(1 \leq c \leq n, c \in N)$ 有 n 個棋子

A～C 區總共有(n+1)+ (n+1)+ n =3n+2 個棋子

白皇后部分：

D 區：(2, 2n+3 , 2n+2)、(3, 2n+3 , 2n+1)、(4 , 2n+3 , 2n)、... 、(d+1, 2n+3 , 2n+(-d+3))、...
... 、(n+2 , 2n+3 , n+2) $(1 \leq d \leq n+1, d \in N)$ 有 n+1 個棋子

E 區：(2n+3 , 2n+2 , 2)、(2n+3 , 2n+1 , 3)、(2n+3 , 2n , 4)、... 、(2n+3 , 2n+(-e+3) , e+1)、...
... 、(2n+3 , n+3 , n+1) $(1 \leq e \leq n, e \in N)$ 有 n 個棋子

F 區：F_1：(2n+2 , 2 , 2n+3)、(2n+1 , 3 , 2n+3)、(2n , 4 , 2n+3)、...、(2n+$(-f_1$+3) , f_1+1 , 2n+3)、...
... 、(n+3 , n+1 , 2n+3) $(1 \leq f_1 \leq n, f_1 \in N)$ 有 n 個棋子

F_2：(n+3 , n+2 , 2n+2) 有 1 個棋子

此區共有 n+1 個棋子

D～F 區總共有(n+1)+n+(n+1)=3n+2 個棋子

性質十：2n+3 階 $(n \geq 1, n \in N)$ 棋盤型式的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

1.先證明 X 方向每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

(1)首先觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：$(\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+3)、$(\boxed{3}$, 2n+1 , 2n+3)、$(\boxed{4}$, 2n , 2n+3)、... 、$(\boxed{n+2}$, n+2 , 2n+3)

D 區：$(\boxed{2}$, 2n+3 , 2n+2)、$(\boxed{3}$, 2n+3 , 2n+1)、$(\boxed{4}$, 2n+3 , 2n)、... 、$(\boxed{n+2}$, 2n+3 , n+2)

由上可得 X=2,3,4,⋯,n+2 棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

(2)再觀察 C 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

C 區：$(\boxed{2n+2}$, 2n+3 , 2)、$(\boxed{2n+1}$, 2n+3 , 3)、$(\boxed{2n}$, 2n+3 , 4)、... 、$(\boxed{n+3}$, 2n+3 , n+1)

F 區：F_1：$(\boxed{2n+2}$, 2 , 2n+3)、$(\boxed{2n+1}$, 3 , 2n+3)、$(\boxed{2n}$, 4 , 2n+3)、... 、$(\boxed{n+3}$, n+1 , 2n+3)

F_2：$(\boxed{n+3}$, n+2 , 2n+2)

由上可得 X=n+3,n+4,⋯,2n+1,2n+2 棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

(3)最後觀察 B 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

B 區：($\boxed{2n+3}$, 2 , 2n+2)、($\boxed{2n+3}$, 3 , 2n+1)、($\boxed{2n+3}$, 4 , 2n)、...、($\boxed{2n+3}$, n+2 , n+2)

E 區：($\boxed{2n+3}$, 2n+2 , 2)、($\boxed{2n+3}$, 2n+1 , 3)、($\boxed{2n+3}$, 2n , 4)、...、($\boxed{2n+3}$, n+3 , n+1)

由上可得 X=2n+3 棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知在 X=2,3,⋯,2n+3 的棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子；我們留意到 X=1 沒有棋盤格線。同理，亦可以證明在 Y、Z 二方向的每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子。

2、接著我們證明上述的排法符合擺放規則中使用最少的棋子數。

(1)觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+3)、($\boxed{3}$, 2n+1 , 2n+3)、($\boxed{4}$, 2n , 2n+3)、...、($\boxed{n+2}$, n+2 , 2n+3)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+3 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n+3 , 2n+1)、($\boxed{4}$, 2n+3 , 2n)、...、($\boxed{n+2}$, 2n+3 , n+2)

若 A 區少放其中一顆棋子，則對應的 X 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放($\boxed{3}$, 2n+1 , 2n+3)這個棋子，X=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(2)觀察 B 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

B 區：(2n+3 , $\boxed{2}$, 2n+2)、(2n+3 , $\boxed{3}$, 2n+1)、(2n+3 , $\boxed{4}$, 2n)、...、(2n+3 , $\boxed{n+2}$, n+2)

F 區：F_1：(2n+2 , $\boxed{2}$, 2n+3)、(2n+1 , $\boxed{3}$, 2n+3)、(2n , $\boxed{4}$, 2n+3)、...、(n+3 , $\boxed{n+1}$, 2n+3)

F_2：(n+3 , $\boxed{n+2}$, 2n+2)

若 B 區少放其中一顆棋子，則對應的 Y 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n+3 , $\boxed{3}$, 2n+1)這個棋子，Y=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(3)觀察 C 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

C 區：(2n+2 , 2n+3 , $\boxed{2}$)、(2n+1 , 2n+3 , $\boxed{3}$)、(2n , 2n+3 , $\boxed{4}$)、...、(n+3 , 2n+3 , $\boxed{n+1}$)

E 區：(2n+3 , 2n+2 , $\boxed{2}$)、(2n+3 , 2n+1 , $\boxed{3}$)、(2n+3 , 2n , $\boxed{4}$)、...、(2n+3 , n+3 , $\boxed{n+1}$)

若 C 區少了其中一顆棋子，則對應的 Z 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n+1 , 2n+3 , $\boxed{3}$)這個棋子，Z=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知：若 A 區、B 區或 C 區少放一個棋子，則將會使 X、Y 或 Z 三個方向的某一條棋盤格線少了黑皇后棋子，如此就無法符合擺放規則。同理，亦可以證明 D 區、E 區或 F 區無法再減少任何白皇后棋子。所以得證上述排法符合擺放規則且使用最少的棋子數。

※本作品將二組正三角形棋盤型式各自完成 12 個不同階棋盤的排法，因篇幅限制在三十頁內，故所完成的共 24 個不同階棋盤放法結果作為附本，置放於展覽會場中。

伍、研究結果

一、n×n 階正方形棋盤的黑及白皇后棋子需使用日字放法、雙日字放法型一、雙日字放法型二等特定擺放方式，才會有規律性產生。

二、n×n 階正方形棋盤的黑及白皇后棋子的放法依其規律可分成(6n-2)×(6n-2)階、(6n-1)×(6n-1)階、6n×6n 階、(6n+1)×(6n+1)階、(6n+2)×(6n+2)階(又將 n 分成奇數與偶數)、(6n+3)×(6n+3)階(又將 n 分成奇數與偶數，其中偶數又分為偶數 A 組($n=4m-2, m\ge 1, m\in N$)、偶數 B 組($n=4m, m\ge 1, m\in N$))等六組型式($n\ge 1, n\in N$)。

三、n×n 階正方形棋盤棋子放法依其規律分成六組型式時，能進一步將通式建立而成。此通式可作為當探討任意 n×n 階(n≥4)正方形棋盤時，可得到黑皇后或白皇后棋子的放置位置(包括可得到指定的第幾個棋子位置)，其簡化後可得到指定的第幾個棋子位置的通式整理如下。

(一) (6n-2)×(6n-2)階型式：

黑皇后部分：A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n-1)$；B 區：(3n-1+b,2b-1) $(1\le b\le 3n-1)$

A～B 區共有 6n-2 個棋子

白皇后部分：C 區：(c , 6n-1-2c) $(1\le c\le 3n-1)$；D 區：(3n-1+d , 6n-2d) $(1\le d\le 3n-1)$

C～D 區共有 6n-2 個棋子

(二) (6n-1)×(6n-1)階型式：

黑皇后部分：A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n-1)$；B 區：(3n+b-1,2b-1) $(1\le b\le 3n)$

A～B 區共有 6n-1 個棋子

白皇后部分：C 區：(c,2c-1) $(1\le c\le 3n)$；D 區：(3n+d , 2d) $(1\le d\le 3n-1)$

C～D 區共有 6n-1 個棋子

(三) 6n×6n 階型式：

黑皇后部分：A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n)$；B 區：(3n+b , 2b-1) $(1\le b\le 3n)$

A～B 區共有 6n 個棋子

白皇后部分：C 區：(c , 6n-2c+1) $(1\le c\le 3n)$；D 區：(3n+d , 6n-2d+2) $(1\le d\le 3n)$

C～D 區共有 6n 個棋子

(四) (6n+1)×(6n+1)階型式：

黑皇后部分：A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n)$；B 區：(3n+b,2b-1) $(1\le b\le 3n+1)$

A～B 區共有 6n+1 個棋子

白皇后部分：C 區：(c,2c-1) $(1\le c\le 3n+1)$；D 區：(3n+1+d,2d) $(1\le d\le 3n)$

C～D 區共有 6n+1 個棋子

(五) (6n+2)×(6n+2)階型式：

1.當 $n\ge 1, n\in N$ 且為奇數：

黑皇后部分：A 區：$(2a-1,4a)$ $(1\le a\le \frac{3n+1}{2})$；B 區：$(2b,4b-2)$ $(1\le b\le \frac{3n+1}{2})$

C 區：(3n+1+c , 2c-1) $(1\le c\le 3n+1)$

A～C 區總共有 6n+2 個棋子

白皇后部分：D 區：(d,6n+3-2d) $(1\le d\le 3n+1)$；E 區：(3n+2e,6n+4-4e) $(1\le e\le \frac{3n+1}{2})$

F 區：(3n+1+2f,6n+6-4f) $(1\le f\le \frac{3n+1}{2})$

D～F 區總共有 6n+2 個棋子

2. 當 $n\ge 1, n\in N$ 且為偶數：

黑皇后部分：A 區：$(a+2,2a)$ $(1\le a\le 3n+1)$；B 區：(3n+2+2b , 4b-1) $(1\le b\le \frac{3}{2}n)$

C 區：(3n+3+2c , 4c-3) $(1 \le c \le \frac{3}{2}n-1)$；D 區：(1 , 6n-3)、(2 , 6n+1)

A～D 四個區總共有 6n+2 個棋子

白皇后部分：E 區：(6n+1-e , 2e) $(1 \le e \le 3n+1)$；F 區：(3n+1-2f , 4f-1) $(1 \le f \le \frac{3}{2}n)$

G 區：(3n-2g , 4g-3) $(1 \le g \le \frac{3}{2}n-1)$；H 區：(6n+2 , 6n-3)、(6n+1 , 6n+1)

E～H 等四區總共有 6n+2 個棋子

(六) (6n+3)×(6n+3)階型式：

1. 當 $n \ge 1, n \in N$ 且為奇數：

黑皇后部分：A 區：(a,3n+3+2a) $(1 \le a \le \frac{3n-1}{2})$；B 區： ($\frac{3n+1}{2}$, 3n+3)

C 區：($\frac{3n+1}{2}$+c , 2c-1) $(1 \le c \le 3n+2)$；D 區：($\frac{9n+7}{2}$, 3n+1)

E 區：($\frac{9n+7}{2}$+e , 2e) $(1 \le e \le \frac{3n-1}{2})$

A～E 區總共有 6n+3 個棋子

白皇后部分：F 區：(1,1)；G 區：(g+1,2g+3) $(1 \le g \le 3n)$；H 區：(3n+2h,4h) $(1 \le h \le \frac{3n+1}{2})$

I 區：(3n+1+2i ,4i-2) $(1 \le i \le \frac{3n+1}{2})$；J 區：(6n+3,3)

F～J 區總共有 6n+3 個棋子

2.偶數 A 組($n = 4m-2, m \ge 1, m \in N$)：

黑皇后部分：A 區：($2a-1$,3n+1+$4a$) $(1 \le a \le \frac{3n+2}{4})$；B 區：($2b$,3n-1+$4b$) $(1 \le b \le \frac{3n+2}{4})$

C 區：($\frac{3n+2}{2}$+c ,2c) $(1 \le c \le 3n+1)$；D 區：($\frac{9n+2}{2}$+2d , 4d-1) $(1 \le d \le \frac{3n+2}{4})$

E 區：($\frac{9n+4}{2}$+2e,4e-3) $(1 \le e \le \frac{3n+2}{4})$

A～E 區總共有 6n+3 個棋子

白皇后部分：F 區：(2f-1 , 3n-3+4f) $(1 \le f \le \frac{3n+6}{4})$；G 區：(2g,3n-5+4g) $(1 \le g \le \frac{3n+6}{4})$

H 區：($\frac{3n+6}{2}$+h , 2h) $(1 \le h \le 3n+1)$；I 區：($\frac{9n+6}{2}$+2i , 4i-1) $(1 \le i \le \frac{3n-2}{4})$

J 區：($\frac{9n+8}{2}$+2j , 4j-3) $(1 \le j \le \frac{3n-2}{4})$

F～J 區總共有 6n+3 個棋子

3.偶數 B 組($n=4m, m\geq 1, m\in N$)

黑皇后部分：A 區：($2a$, 3n+3+ $4a$) $(1\leq a\leq \frac{3}{4}n)$ ；B 區：(2b-1 , 3n-3+4b) $(1\leq b\leq \frac{3n+4}{4})$

C 區：($\frac{3n+2}{2}$ +c ,2c) $(1\leq c\leq 3n+1)$ ；D 區：($\frac{9n+2}{2}$ +2d,4d-1) $(1\leq d\leq \frac{3n+4}{4})$

E 區：($\frac{9n+4}{2}$ +2e , 4e-3) $(1\leq e\leq \frac{3}{4}n)$

A～E 區總共有 6n+3 個棋子

白皇后部分：F 區：(2f ,3n-1+4f) $(1\leq f\leq \frac{3n+4}{4})$ ；G 區：(2g-1 ,3n-7+4g) $(1\leq g\leq \frac{3n+8}{4})$

H 區：($\frac{3n+6}{2}$ +h , 2h) $(1\leq h\leq 3n+1)$ ；I 區：($\frac{9n+6}{2}$ +2i , 4i-1) $(1\leq i\leq \frac{3}{4}n)$

J 區：($\frac{9n+8}{2}$ +2j , 4j-3) $(1\leq j\leq \frac{3n-4}{4})$

F～J 區共有 6n+3 個棋子

四、n 階正三角形棋盤的黑及白皇后棋子經特定擺放方式，會有規律性產生。且依其規律可分為 2n+2 階及 2n+3 階 $(n\geq 1, n\in N)$ 二組棋盤型式。

五、n 階正三角形棋盤棋子放法依其規律分成二組型式時，能進一步將通式建立而成。此通式可作為當探討任意 n 階(n≥4)正三角形棋盤時，可得到黑皇后或白皇后棋子的放置位置(包括可得到指定的第幾個棋子位置)，其簡化後可得到指定的第幾個棋子位置的通式整理如下。

(一) 2n+2 階 $(n\geq 1, n\in N)$ 棋盤型式：

黑皇后部分：

A 區：($a+1$, 2n+ $(-a+2)$, 2n+2) $(1\leq a\leq n)$ 有 n 個棋子

B 區：(2n+2 , b+1 , 2n+(-b+2)) $(1\leq b\leq n)$ 有 n 個棋子

C 區：(2n+(-c+2) , 2n+2 , c+1) $(1\leq c\leq n)$ 有 n 個棋子

A～C 區總共有 3n 個棋子

白皇后部分：

D 區：(d+1, 2n+2 , 2n+(-d+2)) $(1\leq d\leq n)$ 有 n 個棋子

E 區：(2n+2 , 2n+(-e+2) , e+1) $(1\leq e\leq n)$ 有 n 個棋子

F 區：(2n+(-f+2) , f+1 , 2n+2) $(1\leq f\leq n)$ 有 n 個棋子

D～F 區總共有 3n 個棋子

(二) 2n+3 階 $(n\geq 1, n\in N)$ 棋盤型式：

黑皇后部分：

A 區：($a+1$, 2n+ $(-a+3)$, 2n+3) $(1\leq a\leq n+1)$ 有 n+1 個棋子

B 區：(2n+3 , b+1 , 2n+(-b+3)) $(1\leq b\leq n+1)$ 有 n+1 個棋子

C 區：(2n+(-c+3) , 2n+3 , c+1) $(1\leq c\leq n)$ 有 n 個棋子

A～C 區總共有 3n+2 個棋子

白皇后部分：

D 區：(d+1, 2n+3 , 2n+(-d+3)) $(1 \le d \le n+1)$ 有 n+1 個棋子

E 區：(2n+3 , 2n+(-e+3) , e+1) $(1 \le e \le n)$ 有 n 個棋子

F 區：F_1：(2n+($-f_1$+3) , f_1+1 , 2n+3) $(1 \le f_1 \le n)$ 有 n 個棋子

F_2：(n+3 , n+2 , 2n+2) 有 1 個棋子

D～F 區總共有 3n+2 個棋子

陸、未來研究方向

一、n×n 階正方形棋盤可探討是否尚有其他規律下的分組型式。

二、n 階正三角形棋盤可探討是否尚有其他規律下的分組型式。

柒、參考資料及其他

一、維基百科。八皇后問題。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%AB%E7%9A%87%E5%90%8E%E9%97%AE%E9%A2%98。

二、吳振奎(2003)。數學中的巧合、聯繫與統一。數學傳播。

三、黃品翰、陳毓笙、林政勛、洪翊倫、王柏鈞，2008年，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會國小組數學科「當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」」。

四、劉怡欣、高紹瑜、黃雅琳、張際雲，2008年，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會國中組數學科「天馬行空--- n 后問題規律之探討」。

五、李威締、賴冠錡，2012年，中華民國第五十二屆中小學科學展覽會國中組數學科「當皇后遇上小三ー正三角形棋盤上的皇后互不侵犯問題」。

六、李威締、王執雋、賴亮宇，2015年，中華民國第五十五屆中小學科學展覽會高中組數學科「斜向坐標上皇后之研究」。

七、林福來主編(2014)。高級中學數學課本第三冊。南一出版社。

八、洪有情等(2018)。國民中學數學課本第二冊及第四冊。康軒出版社。

【評語】030413

8 皇后問題的一類延伸問題：在 n×n 的棋盤上放置 n 個白皇后與 n 個黑皇后。在限定同顏色的皇后不可放在同一列、同一行與同一條對角線的前提下，滿足限定條件的棋子的擺放方式是否存在的問題。針對這個問題，給出了解答。對於在三角格點圖上一個相關問題，也做了一些討論。跳脫原始的問題，轉而考慮兩種顏色下滿足條件的棋子放置的可能性，想法頗具創意，值得嘉許。作者們所考慮的變形的 n 后問題其實還有許多值得探討的內容，例如：如何藉由一些特性來構造解（對稱、平移…）、新問題的解與原本問題的解的關連性、解的個數等等，這些都是有趣而且值得深入研究的。如果能在作品中針對這些內容做更多的闡述會更好。

作品海報

摘要

本作品在探討 2n 皇后棋子放置在正方形棋盤及正三角形棋盤的規律問題，並依其規律探討出通式。

nxn 階正方形棋盤依其規律可分成(6n-2)x(6n-2)階、(6n-1)x(6n-1)階、6nx6n 階、(6n+1)x(6n+1)階、(6n+2)x(6n+2)階(n 分成奇、偶數)、(6n+3)x(6n+3 階)(n 分成奇、偶數，其中偶數又分為偶數 A 組($n=4m-2, m\ge 1, m\in N$)、偶數 B 組($n=4m, m\ge 1, m\in N$)等六組型式($n\ge 1, n\in N$)。

n 階正三角形棋盤依其規律可分為 2n+2 階、2n+3 階棋盤型式($n\ge 1, n\in N$)。

壹、研究動機

在網路上看到一道利用程式語言編寫的 2n 皇后問題，在上網查了些有關這方面的研究文獻後，發現該問題與八皇后問題及 n 后問題有所關聯性，因此決定以此為題材來加以探討。

本作品探討 nxn 階正方形棋盤及 n 階正三角形棋盤的黑及白皇后二種棋子位置應如何擺放才會有規律性存在。

貳、研究目的

一、探討在正方形的棋盤中，其黑皇后與白皇后二種棋子在各自棋子總數與棋盤階數相同情況下，應如何擺放才會有規律產生及其規律情形。

二、探討在正三角形棋盤中，其黑皇后與白皇后二種棋子在每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子情況下，應如何擺放才會有規律產生及其規律情形。

三、探討在正三角形棋盤中，擺放黑皇后與白皇后二種棋子所需最少棋子數量。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、word 軟體、excel 軟體、MathType 軟體

肆、研究過程或方法

一、名詞定義與解釋：

(一) 八皇后及n后問題：在8x8的西洋棋棋盤上放置八個皇后，使得任兩個皇后都不能處於同一條橫行、縱行或斜線上。

1969 年霍夫曼等證明：$n\ge 4$ 時，n 后問題總有解。

(二) nxn 階棋盤（n≥4）：用於正方形棋盤，如圖 1-1。

(三) (x,y)坐標：用於正方形棋盤，如圖 1-1。

(四)日字放法：用於正方形棋盤的放法，如圖 1-2。

(五)雙日字放法：用於正方形棋盤的放法，如圖 1-3、1-4(稱雙日字放法型一)及圖 1-5(稱雙日字放法型二)。

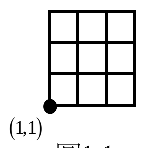


圖1-1

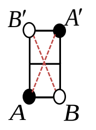


圖1-2

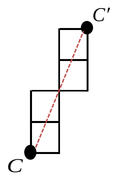


圖1-3

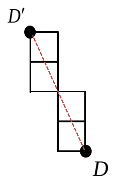


圖1-4

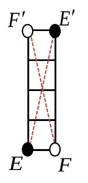


圖1-5

(六) n 階棋盤（n≥4）：用於正三角形棋盤，如圖 1-6。

(七) (x,y,z)坐標：用於正三角形棋盤，如圖 1-6。

(八)等差數列：$a_n=a_1+(n-1)\times d$

(九)斜率：

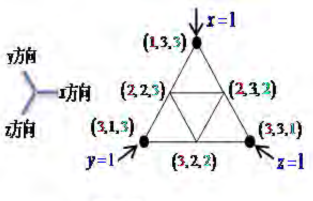


圖1-6

斜率 $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

則其直線方程式為：$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(十)三角函數：如圖 1-7。$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$

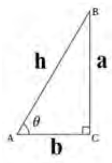
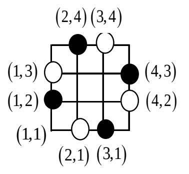


圖1-7

二、黑皇后、白皇后在正方形棋盤的放法探討：

(一)擺放規則：在 nxn 階正方形棋盤中，放上 n 個黑、白皇后，但同一直行、橫列和對角線上不能有 2 個以上黑、白皇后。

(二)黑皇后及白皇后棋子放法探討：如圖 2-1。



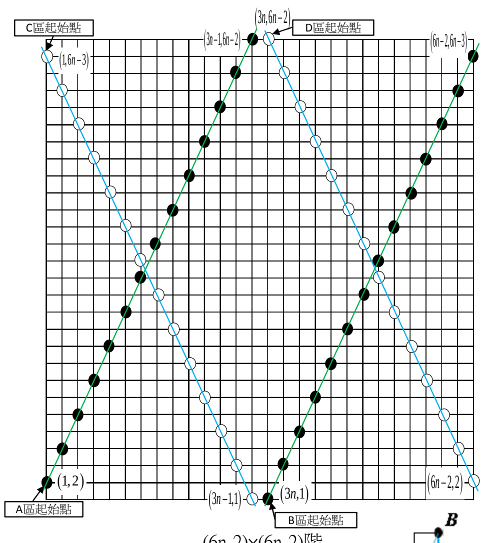
4x4階棋盤
圖2-1

(三) nxn 階（$n\ge 4, n\in N$）正方形棋盤的分組及其通式探討：

到 10x10 階，可再用 4x4 階放法完成，11x11 階亦可用 5x5 階放法完成，故從 4x4 階棋盤開始，將之分成六組，並依序探討如下。

(四) (6n-2)x(6n-2)階棋盤型式：

如圖 2-2。



(6n-2)x(6n-2)階
圖2-2

性質一：(6n-2)x(6n-2)階棋盤採用「日字放法」的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

圖 2-3 中，ΔABC 為直角三角形，則 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{1}$，

$\theta\doteq 63^\circ$，故符合擺放規則。

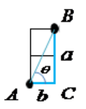


圖2-3

性質二：(6n-2)x(6n-2)階棋盤，各區棋子相連後均可成為一直線

【證明】

A 區坐標為(1,2)、(2,4)、(3,6)、(4,8)、……、(3n-2,6n-4)、(3n-1,6n-2)

將起始點(1,2)及最後的點(3n-1,6n-2)代入到直線方程式，得到直線方程式 y=2x，再分別將(2,4)、(3,6)、(4,8)、…、(3n-2,6n-4)依序代入到 y=2x，結果均為解，故將 A 區所有點連起來為一條直線。

同理，B、C 及 D 等三區所有點連起來，亦可得到三條直線。

性質三：(6n-2)x(6n-2)階棋盤，各區棋子的放法符合擺放規則

【證明】

A 區直線方程式為 y=2x，其斜率 m=2；B 區直線方程式為 y=2x+(1-6n)，其斜率 m=2；C 區直線方程式為 y=-2x+(6n-1)，其斜率 m=-2； D 區直線方程式為 y=-2x+(12n-2)，其斜率 m=-2

故四條直線都不會在棋盤格的對角線上。

研究一：(6n-2)x(6n-2)階棋盤中，黑及白皇后各自所放棋子數量是否等於棋盤階數

【說明】

4x4 階棋盤，其 A～D 區各有 2 個棋子；10x10 階棋盤，其 A～D 區各有 5 個棋子；……。

由此可知，其 A～D 區各有 $\dfrac{6n-2}{2}=3n-1$個棋子。

所以，黑、白皇后棋子各共有$(3n-1)+(3n-1)=6n-2$個棋子。

依擺放規則，如為(6n-2)x(6n-2)階棋盤，只能各放有(6n-2)個黑及白皇后棋子。故黑及白皇后各自所放棋子數量等於棋盤階數。

性質四：(6n-2)x(6n-2)階棋盤中，當 n 為任意自然數時，A 區～D 區各有 $3n-1$ 個棋子

【證明】

(1)當 n=1 時，A 區棋子數為 3x1-1

(2)設 n=k 時，A 區棋子數為 3k-1 是成立的

則 n=k+1 時，A 區棋子數為(3k-1)+3=3(k+1)-1

所以 n=k+1 時，A 區棋子數為 3(k+1)-1 亦成立

故由數學歸納法可得知，當 n 為任意自然數時，A 區棋子共有$3n-1$個。

同理，當 n 為任意自然數時，B～D 區棋子亦各有$3n-1$個。

研究二：(6n-2)x(6n-2)階棋盤的通式建構

【說明】以黑皇后為例：

A 區：

4x4 階棋盤，其棋子的坐標為(1,2)、(2,4)；10x10 階棋盤，其棋子的坐標為(1,2)、(2,4)、(3,6)、(4,8)、(5,10)；……。

故坐標為$(a,2a)$，並可求得第a個$(1\le a\le 3n-1, a\in N)$的位置坐標。

B 區：

4x4 階棋盤，其棋子的坐標為(3,1)、(4,3)；10x10 階棋盤，其棋子的坐標為(6,1)、(7,3)、(8,5)、(9,7)、(10,9)；……。

故坐標為$(\dfrac{6n-2}{2}+b, 2b-1)$，並可求得第$b$個$(1\le b\le 3n-1, b\in N)$的坐標。

黑皇后部分

A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n-1, a\in N)$

B 區： (3n-1+b,2b-1) $(1\le b\le 3n-1, b\in N)$

A、B 區共有 6n-2 個棋子

白皇后部分

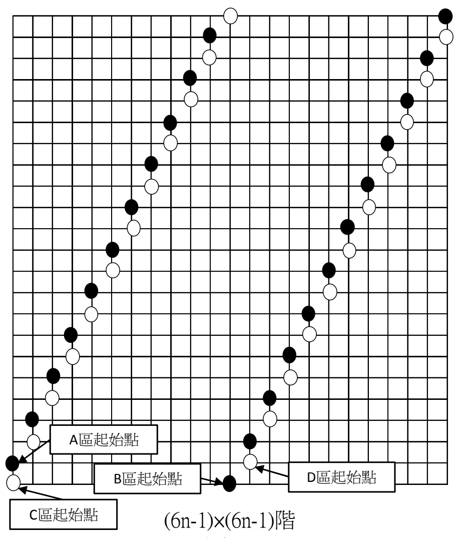
C 區：(c, 6n-1-2c) $(1\le c\le 3n-1, c\in N)$

D 區：(3n-1+d , 6n-2d) $(1\le d\le 3n-1, d\in N)$

C、D 區共有 6n-2 個棋子

(五) (6n-1)x(6n-1)階棋盤型式：

如圖 2-4。



(6n-1)x(6n-1)階
圖2-4

研究三：(6n-1)x(6n-1)階棋盤中，黑及白皇后各自所放棋子數量是否等於棋盤階數

【說明】

5x5 階棋盤，其 A～D 區分別有 2、3、3、2 個棋子；11x11 階棋盤，其 A～D 區分別有 5、6、6、5 個棋子；……。

由$a_n=a_1+(n-1)\times d$，求得 A 區棋子數有$3n-1$個。同理，B～D 區棋子數分別有$3n$、$3n$、$3n-1$個。故黑及白皇后各自所放棋子數量等於棋盤階數。

黑皇后部分

A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n-1, a\in N)$

B 區：(3n+b-1,2b-1) $(1\le b\le 3n, b\in N)$

A、B 區共有 6n-1 個棋子

白皇后部分

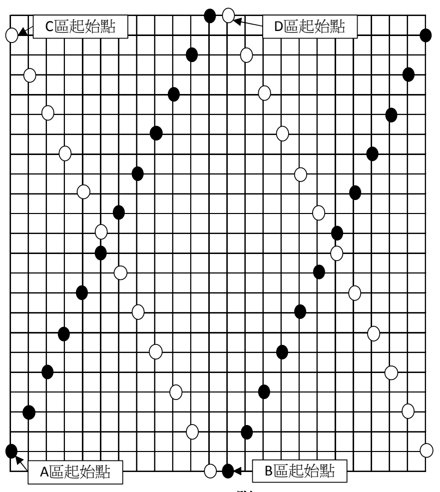
C 區：(c,2c-1) $(1\le c\le 3n, c\in N)$

D 區：(3n+d , 2d) $(1\le d\le 3n-1, d\in N)$

C、D 區共有 6n-1 個棋子

(六) 6nx6n 階棋盤型式：

如圖 2-5。



6nx6n階
圖2-5

黑皇后部分

A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n, a\in N)$

B 區：(3n+b , 2b-1) $(1\le b\le 3n, b\in N)$

A、B 區共有 6n 個棋子

白皇后部分

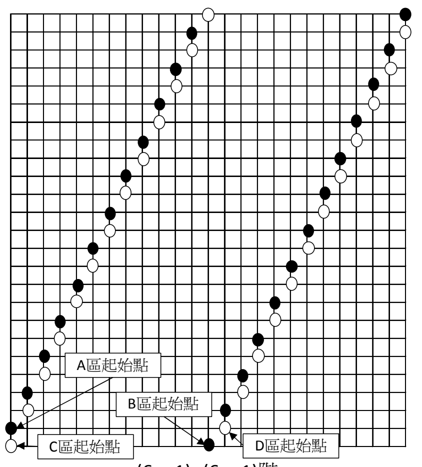
C 區：(c,6n-2c+1) $(1\le c\le 3n, c\in N)$

D 區：(3n+d , 6n-2d+2) $(1\le d\le 3n, d\in N)$

C、D 區共有 6n 個棋子

(七) (6n+1)x(6n+1)階棋盤型式：

如圖 2-6。



(6n+1)x(6n+1)階
圖2-6

黑皇后部分

A 區：$(a,2a)$ $(1\le a\le 3n, a\in N)$

B 區：(3n+b,2b-1) $(1\le b\le 3n+1, b\in N)$ A、B 區共有 6n+1 個棋子

白皇后部分

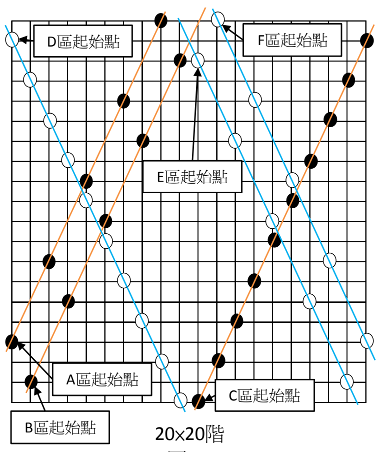
C 區：(c,2c-1) $(1\le c\le 3n+1, c\in N)$

D 區：(3n+1+d,2d) $(1\le d\le 3n, d\in N)$ C、D 區共有 6n+1 個棋子

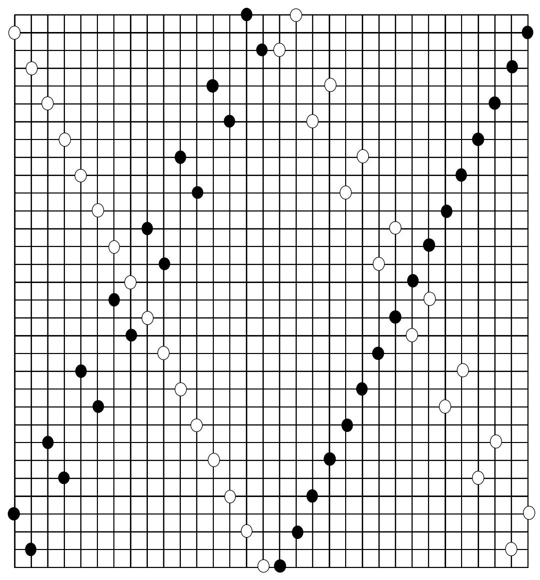
(八) (6n+2)×(6n+2)階棋盤型式：

1.當 $n\ge 1, n\in N$ 且為奇數時：

如圖 2-7 及圖 2-8。



20x20階
圖2-7


(6n+2)x(6n+2)階　n≧1且為奇數
圖2-8

性質五：(6n+2)×(6n+2)階棋盤採用「雙日字放法型一」的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

圖 2-9 所示，ΔABC 為直角三角形，則 $\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$，經查三角函數值表，$\theta$ ≒63°，故符合擺放規則。

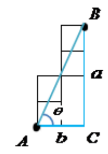


圖2-9

性質六：(6n+2)×(6n+2)階棋盤，當該區棋子放法採用「雙日字放法型一」時，將棋子相連後均可成為一直線

【證明】

A 區坐標為(1,4)、(3,8)、(5,12)、(7,16)、⋯、(3n-2,6n-2)、(3n,6n+2)

將起始點(1,4)及最後的點(3n,6n+2)代入到直線方程式，得到直線方程式為 y=2x+2，再分別將(3,8)、(5,12)、(7,16)、⋯、(3n-2,6n-2)依序代入到 y=2x+2，結果均為解，故將 A 區所有點連起來為一條直線。

同理，B、E 及 F 等三區所有點連起來，亦可得到三條直線。

性質七：(6n+2)×(6n+2)階棋盤，A、B、E 及 F 四區棋子的放法符合擺放規則

【證明】

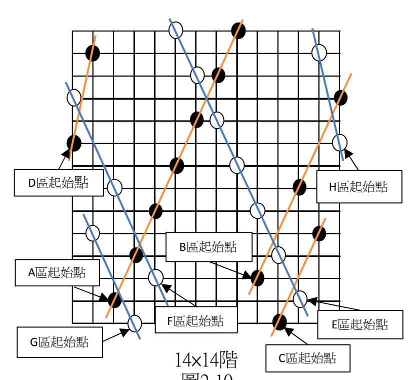
A 區直線方程式為 y=2x+2，其斜率 m=2；B 區直線方程式為 y=2x-2，其斜率 m=2；E 區直線方程式為 y=-2x+(12n+4)，其斜率 m=-2； F 區直線方程式為 y=-2x+(12n+8)，其斜率 m=-2。故四區均符合擺放規則

研究四：(6n+2)×(6n+2)階棋盤，當該區棋子放法採用「雙日字放法型一」時的通式建構

【說明】以黑皇后 A 區為例：

8x8 階棋盤，其棋子的坐標為(1,4)、(3,8)；20x20 階棋盤，其棋子的坐標為(1,4)、(3,8)、(5,12)、(7,16)、(9,20)；⋯⋯。

故坐標為 $(2a-1,4a)$，並可求得第 a 個 $(1\le a\le \frac{3n+1}{2}, a\in N)$ 的位置坐標。



14x14階
圖2-10

黑皇后部分

A 區：$(2a-1,4a)$　$(1\le a\le \frac{3n+1}{2}, a\in N)$

B 區：$(2b,4b-2)$　$(1\le b\le \frac{3n+1}{2}, b\in N)$

C 區：(3n+1+c , 2c-1)　$(1\le c\le 3n+1, c\in N)$

A～C 區總共有 6n+2 個棋子

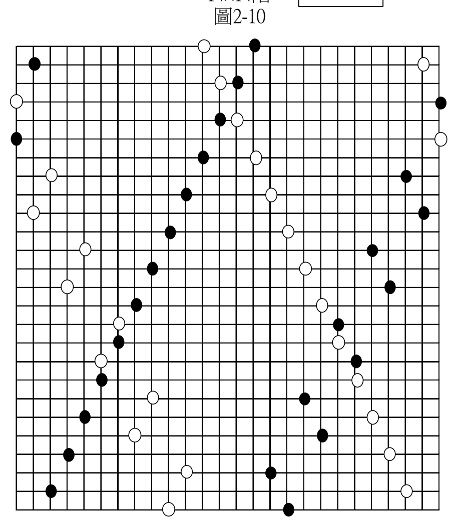
白皇后部分

D 區：(d,6n+3-2d)　$(1\le d\le 3n+1, d\in N)$

E 區：(3n+2e,6n+4-4e)　$(1\le e\le \frac{3n+1}{2}, e\in N)$

F 區：(3n+1+2f,6n+6-4f)　$(1\le f\le \frac{3n+1}{2}, f\in N)$

D～F 區總共有 6n+2 個棋子


(6n+2)x(6n+2)階　n≧1且為偶數
圖2-11

2.當 $n\ge 1, n\in N$ 且為偶數時：

如圖 2-10 及圖 2-11。

性質八：(6n+2)×(6n+2)階棋盤採用「雙日字放法型二」的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

圖 2-12 中，ΔABC 為直角三角形，則 $\tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{4}{1}$，$\theta$ ≒76°，故符合擺放規則。

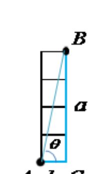


圖2-12

黑皇后部分

A 區：$(a+2,2a)$　$(1\le a\le 3n+1, a\in N)$　B 區：(3n+2+2b , 4b-1)　$(1\le b\le \frac{3}{2}n, b\in N)$

C 區：(3n+3+2c,4c-3)　$(1\le c\le \frac{3}{2}n-1, c\in N)$　D 區：(1 , 6n-3)、(2 , 6n+1)

A～D 區總共有 6n+2 個棋子

白皇后部分

E 區：(6n+1-e,2e)　$(1\le e\le 3n+1, e\in N)$　F 區：(3n+1-2f , 4f-1)　$(1\le f\le \frac{3}{2}n, f\in N)$

G 區：(3n-2g , 4g-3)　$(1\le g\le \frac{3}{2}n-1, g\in N)$

H區：(6n+2 , 6n-3)、(6n+1 , 6n+1)　　E～H 區總共有 6n+2 個棋子

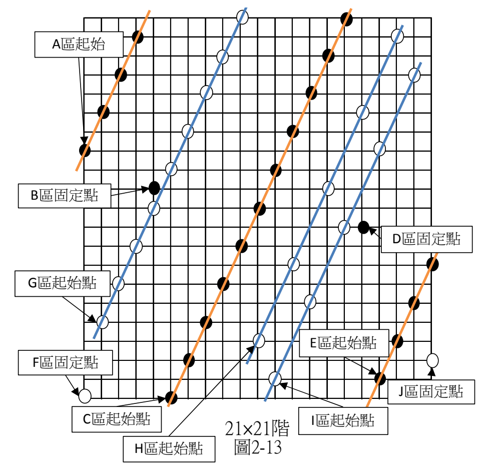
(九) (6n+3)×(6n+3)階棋盤型式：

1.當 $n\ge 1, n\in N$ 且為奇數時：如圖 2-13 及圖 2-14。

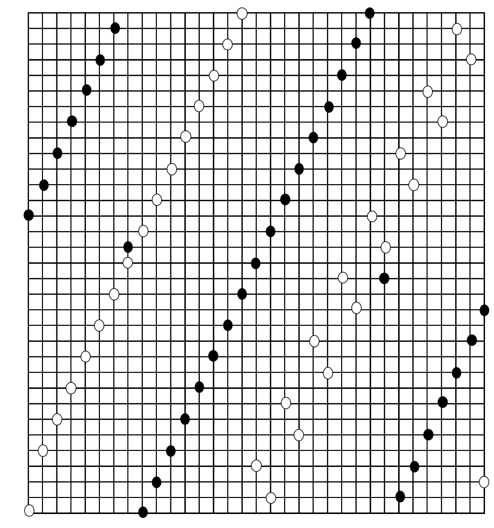
黑皇后部分

A 區：$(a$,3n+3+2$a)$　$(1\le a\le \frac{3n-1}{2}, a\in N)$

B 區：$(\frac{3n+1}{2}$, 3n+3)　　C 區：$(\frac{3n+1}{2}$+c , 2c-1)　$(1\le c\le 3n+2, c\in N)$



21×21階
圖2-13


(6n+3)x(6n+3)階　n≧1且為奇數
圖2-14

D 區：$(\frac{9n+7}{2}$,3n+1)

E 區：$(\frac{9n+7}{2}$+e , 2e)　$(1\le e\le \frac{3n-1}{2}, e\in N)$　　A～E 區總共有 6n+3 個棋子

白皇后部分

F 區：(1,1)　　G 區：(g+1,2g+3)　$(1\le g\le 3n, g\in N)$

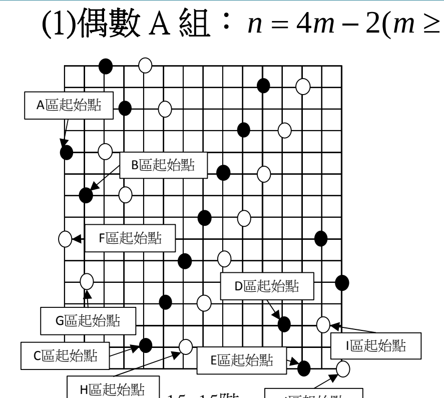
H 區：(3n+2h,4h)　$(1\le h\le \frac{3n+1}{2}, h\in N)$　　I 區：(3n+1+2i ,4i-2)　$(1\le i\le \frac{3n+1}{2}, i\in N)$

J 區：(6n+3,3)　　F～J 區總共有 6n+3 個棋子

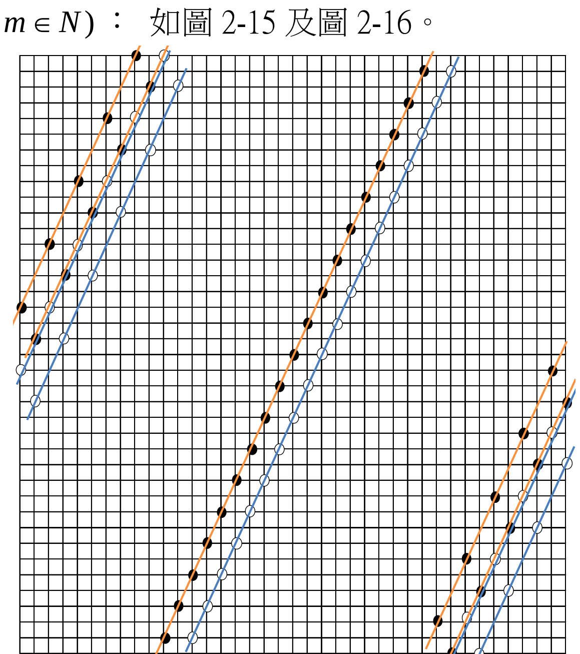
2.當 $n\ge 1, n\in N$ 且為偶數時：

編號	棋盤階數	日字放法所放棋子數	雙日字放法型一單一側所放棋子數	組別
1	15x15 階	7 個	左右二側各 4，共 8 個	A
2	27x27 階	13 個	左右二側各 7，共 14 個	B
3	39x39 階	19 個	左右二側各 10，共 20 個	A
4	51x51 階	25 個	左右二側各 13，共 26 個	B

(1)偶數 A 組：$n=4m-2(m\ge 1, m\in N)$：　如圖 2-15 及圖 2-16。



15x15階
圖2-15


(6n+3)x(6n+3)階　n≧1且為偶數A組
圖2-16

黑皇后部分

A 區：$(2a-1$,3n+1+$4a)$　$(1\le a\le \frac{3n+2}{4}, a\in N)$

B 區：$(2b$,3n-1+$4b)$　$(1\le b\le \frac{3n+2}{4}, b\in N)$

C 區：$(\frac{3n+2}{2}$+c ,2c)　$(1\le c\le 3n+1, c\in N)$

D 區：$(\frac{9n+2}{2}$+2d , 4d-1)　$(1\le d\le \frac{3n+2}{4}, d\in N)$

E 區：$(\frac{9n+4}{2}$+2e,4e-3)　$(1\le e\le \frac{3n+2}{4}, e\in N)$　　A～E 區總共有 6n+3 個棋子

白皇后部分

F 區：(2f-1,3n-3+4f)　$(1\le f\le \frac{3n+6}{4}, f\in N)$

G 區：(2g,3n-5+4g)　$(1\le g\le \frac{3n+6}{4}, g\in N)$

H 區：$(\frac{3n+6}{2}$+h,2h)　$(1\le h\le 3n+1, h\in N)$

I 區：$(\frac{9n+6}{2}$+2i , 4i-1)　$(1\le i\le \frac{3n-2}{4}, i\in N)$

J 區：$(\frac{9n+8}{2}$+2j , 4j-3)　$(1\le j\le \frac{3n-2}{4}, j\in N)$　　F～J 區總共有 6n+3 個棋子

(2)偶數 B 組：$n=4m(m\ge 1, m\in N)$，如圖 2-17。

黑皇后部分

A 區：$(2a$,3n+3+$4a)$　$(1\le a\le \frac{3}{4}n, a\in N)$

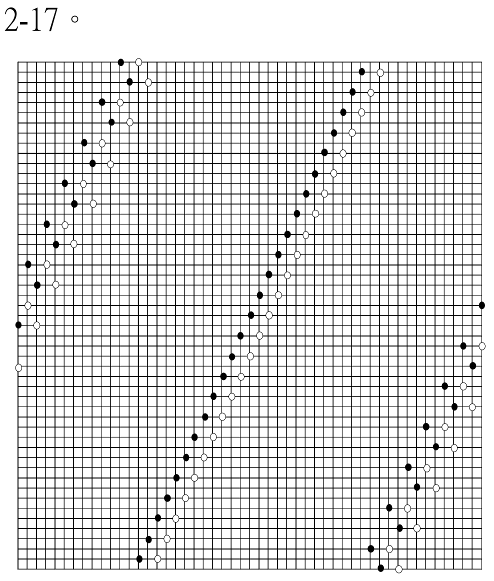
B 區：(2b-1 , 3n-3+4b)　$(1\le b\le \frac{3n+4}{4}, b\in N)$

C 區：$(\frac{3n+2}{2}$+c ,2c)　$(1\le c\le 3n+1, c\in N)$

D 區：$(\frac{9n+2}{2}$+2d,4d-1)　$(1\le d\le \frac{3n+4}{4}, d\in N)$

E 區：$(\frac{9n+4}{2}$+2e,4e-3)　$(1\le e\le \frac{3}{4}n, e\in N)$

A～E 區總共有 6n+3 個棋子


(6n+3)x(6n+3)階　n≧1且為偶數B組
圖2-17

白皇后部分

F 區：(2f,3n-1+4f)　$(1 \le f \le \frac{3n+4}{4}, f \in N)$

G 區：(2g-1 ,3n-7+4g)　$(1 \le g \le \frac{3n+8}{4}, g \in N)$

H 區：($\frac{3n+6}{2}$+h , 2h)　$(1 \le h \le 3n+1, h \in N)$

I 區：($\frac{9n+6}{2}$+2i , 4i-1)　$(1 \le i \le \frac{3}{4}n, i \in N)$

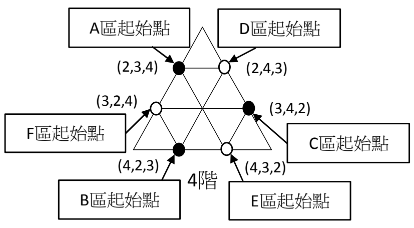
J 區：($\frac{9n+8}{2}$+2j , 4j-3)　$(1 \le j \le \frac{3n-4}{4}, j \in N)$　F~J 區有 6n+3 個棋子

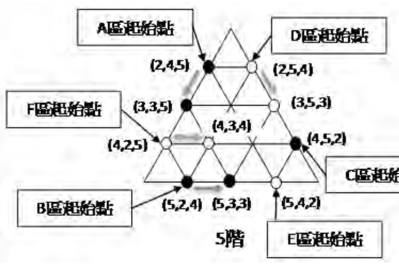
三、黑皇后、白皇后在正三角形棋盤的放法探討：

(一)擺放規則：在 n 階正三角形棋盤中，每一條棋盤格線的交點上，均可放上黑皇后或白皇后棋子，使得 X、Y、Z 三個方向的每一條棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子，那黑皇后及白皇后棋子各要如何用最少棋子數來擺放，才會有規律產生。

(二)正三角形棋盤中黑皇后及白皇后棋子放法探討：

下面 4、5 階棋盤圖形中，正三角形棋盤的黑與白皇后棋子的擺放分別分成 A~C 三區(順時針擺放)及 D~F 三區(逆時針擺放)。





下表為 4~9 階棋盤，其黑及白皇后所放的棋子總數，發現黑及白皇后棋子在相同階數時，棋子總數相等，另外，將其分成偶數階及奇數階二部分。

編號	棋盤階數	黑皇后棋子總數	白皇后棋子總數	備註
1	4 階	3	3	
2	5 階	5	5	
3	6 階	6	6	
4	7 階	8	8	
5	8 階	9	9	
6	9 階	11	11	

(三)n 階正三角形棋盤的分組及其通式探討：

研究五：n 階正三角形棋盤的通式建構

【說明】以 2n+2 階 A 區黑皇后為例：

4 階棋盤，其棋子的坐標為(2,3,4)；6 階棋盤，其棋子的坐標為(2,5,6)、(3,4,6)；……。觀察其規律情形，棋子的坐標依序為(2 , 2n+1 , 2n+2)、(3 , 2n , 2n+2)、(4 , 2n-1 , 2n+2)、... ...。

故 A 區坐標通式為($a+1$, 2n+$(-a+2)$, 2n+2)，並可求得第 a 個$(1 \le a \le n, a \in N)$的位置坐標。

1. 2n+2 階棋盤型式：

黑皇后部分

A 區：($a+1$, 2n+$(-a+2)$, 2n+2)　$(1 \le a \le n, a \in N)$

B 區：(2n+2 , b+1 , 2n+(-b+2))　$(1 \le b \le n, b \in N)$

C 區：(2n+(-c+2),2n+2,c+1)　$(1 \le c \le n, c \in N)$　A~C 區共有 3n 個棋子

白皇后部分

D 區：(d+1, 2n+2 , 2n+(-d+2))　$(1 \le d \le n, d \in N)$

E 區：(2n+2 , 2n+(-e+2) , e+1)　$(1 \le e \le n, e \in N)$

F 區：(2n+(-f+2),f+1,2n+2)　$(1 \le f \le n, f \in N)$　D~F 區共有 3n 個棋子

性質九：2n+2 階棋盤型式的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

1. (1)首先觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+1 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n , 2n+2)、... 、($\boxed{n+1}$, n+2 , 2n+2)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+1)、($\boxed{3}$, 2n+2 , 2n)、... 、($\boxed{n+1}$, 2n+2 , n+2)

X=2,3,⋯,n+1 棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

(2)再觀察 C 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

C 區：($\boxed{2n+1}$, 2n+2 , 2)、($\boxed{2n}$, 2n+2 , 3)、... 、($\boxed{n+2}$, 2n+2 , n+1)

F 區：($\boxed{2n+1}$, 2 , 2n+2)、($\boxed{2n}$, 3 , 2n+2)、... 、($\boxed{n+2}$, n+1 , 2n+2)

X=n+2,⋯,2n,2n+1 棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

(3)最後觀察 B 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

B 區：($\boxed{2n+2}$, 2 , 2n+1)、($\boxed{2n+2}$, 3 , 2n)、... 、($\boxed{2n+2}$, n+1 , n+2)

E 區：($\boxed{2n+2}$, 2n+1 , 2)、($\boxed{2n+2}$, 2n , 3)、... 、($\boxed{2n+2}$, n+2 , n+1)

X=2n+2 棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知在 X=2,3,⋯,2n+2 的棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子；而 X=1 沒有棋盤格線。同理，亦可以證明在 Y、Z 二方向的每一條棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

2、(1)觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+1 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n , 2n+2)、... 、($\boxed{n+1}$, n+2 , 2n+2)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+1)、($\boxed{3}$, 2n+2 , 2n)、... 、($\boxed{n+1}$, 2n+2 , n+2)

若 A 區少放其中一顆棋子，則對應的 X 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放($\boxed{3}$, 2n , 2n+2)這個棋子，X=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(2)觀察 B 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

B 區：(2n+2 , $\boxed{2}$, 2n+1)、(2n+2 , $\boxed{3}$, 2n)、... 、(2n+2 , $\boxed{n+1}$, n+2)

F 區：(2n+1 , $\boxed{2}$, 2n+2)、(2n , $\boxed{3}$, 2n+2)、... 、(n+2 , $\boxed{n+1}$, 2n+2)

若 B 區少放其中一顆棋子，則對應的 Y 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n+2 , $\boxed{3}$, 2n)這個棋子，Y=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(3)觀察 C 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

C 區：(2n+1 , 2n+2 , $\boxed{2}$)、(2n , 2n+2 , $\boxed{3}$)、... 、(n+2 , 2n+2 , $\boxed{n+1}$)

E 區：(2n+2 , 2n+1 , $\boxed{2}$)、(2n+2 , 2n , $\boxed{3}$)、... 、(2n+2 , n+2 , $\boxed{n+1}$)

若 C 區少了其中一顆棋子，則對應的 Z 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n , 2n+2 , $\boxed{3}$)這個棋子，Z=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知：若 A~C 區少放一個棋子，則將會使 X、Y 或 Z 三個方向的某一條棋盤格線少了黑皇后棋子，如此就無法符合擺放規則。同理，亦可以證明 D~F 區無法再減少任何白皇后棋子。所以得證上述排法符合擺放規則且使用最少的棋子數。

2. 2n+3 階棋盤型式：

黑皇后部分

A 區：($a+1$, 2n+$(-a+3)$, 2n+3)　$(1 \le a \le n+1, a \in N)$

B 區：(2n+3 , b+1 , 2n+(-b+3))　$(1 \le b \le n+1, b \in N)$

C 區：(2n+(-c+3),2n+3,c+1)　$(1 \le c \le n, c \in N)$　A~C 區有 3n+2 個棋子

白皇后部分

D 區：(d+1, 2n+3 , 2n+(-d+3))　$(1 \le d \le n+1, d \in N)$

E 區：(2n+3 , 2n+(-e+3) , e+1)　$(1 \le e \le n, e \in N)$

F 區：F_1：(2n+($-f_1$+3) , f_1+1 , 2n+3)　$(1 \le f_1 \le n, f_1 \in N)$

F_2：(n+3 , n+2 , 2n+2)　D~F 區總共有 3n+2 個棋子

性質十：2n+3 階棋盤型式的擺放方法，能符合擺放規則

【證明】

1. (1)首先觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+3)、($\boxed{3}$, 2n+1 , 2n+3)、... 、($\boxed{n+2}$, n+2 , 2n+3)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+3 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n+3 , 2n+1)、... 、($\boxed{n+2}$, 2n+3 , n+2)

X=2,3,⋯,n+2 棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

(2)再觀察 C 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

C 區：($\boxed{2n+2}$, 2n+3 , 2)、($\boxed{2n+1}$, 2n+3 , 3)、... 、($\boxed{n+3}$, 2n+3 , n+1)

F 區：F_1：($\boxed{2n+2}$, 2 , 2n+3)、($\boxed{2n+1}$, 3 , 2n+3)、... 、($\boxed{n+3}$, n+1 , 2n+3)

F_2：($\boxed{n+3}$, n+2 , 2n+2)

X=n+3,⋯,2n+1,2n+2 棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

(3)最後觀察 B 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

B 區：($\boxed{2n+3}$, 2 , 2n+2)、($\boxed{2n+3}$, 3 , 2n+1)、... 、($\boxed{2n+3}$, n+2 , n+2)

E 區：($\boxed{2n+3}$, 2n+2 , 2)、($\boxed{2n+3}$, 2n+1 , 3)、... 、($\boxed{2n+3}$, n+3 , n+1)

X=2n+3 棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知在 X=2,3,⋯,2n+3 的棋盤格線都至少放一個黑皇后及白皇后棋子；而 X=1 沒有棋盤格線。同理，亦可以證明在 Y、Z 二方向的每一條棋盤格線都至少放一個黑及白皇后棋子。

2、(1)觀察 A 區（黑皇后部分）、D 區（白皇后部分）可得：

A 區：($\boxed{2}$, 2n+2 , 2n+3)、($\boxed{3}$, 2n+1 , 2n+3)、... 、($\boxed{n+2}$, n+2 , 2n+3)

D 區：($\boxed{2}$, 2n+3 , 2n+2)、($\boxed{3}$, 2n+3 , 2n+1)、... 、($\boxed{n+2}$, 2n+3 , n+2)

若 A 區少放其中一顆棋子，則對應的 X 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放($\boxed{3}$, 2n+1 , 2n+3)這個棋子，X=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(2)觀察 B 區（黑皇后部分）、F 區（白皇后部分）可得：

B 區：(2n+3 , $\boxed{2}$, 2n+2)、(2n+3 , $\boxed{3}$, 2n+1)、... 、(2n+3 , $\boxed{n+2}$, n+2)

F 區：F_1：(2n+2 , $\boxed{2}$, 2n+3)、(2n+1 , $\boxed{3}$, 2n+3)、... 、(n+3 , $\boxed{n+1}$, 2n+3)

F_2：(n+3 , $\boxed{n+2}$, 2n+2)

若 B 區少放其中一顆棋子，則對應的 Y 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n+3 , $\boxed{3}$, 2n+1)這個棋子，Y=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

(3)觀察 C 區（黑皇后部分）、E 區（白皇后部分）可得：

C 區：(2n+2 , 2n+3 , $\boxed{2}$)、(2n+1 , 2n+3 , $\boxed{3}$)、... 、(n+3 , 2n+3 , $\boxed{n+1}$)

E 區：(2n+3 , 2n+2 , $\boxed{2}$)、(2n+3 , 2n+1 , $\boxed{3}$)、... 、(2n+3 , n+3 , $\boxed{n+1}$)

若 C 區少了其中一顆棋子，則對應的 Z 方向棋盤格線將沒有黑皇后棋子，例如少放(2n+1 , 2n+3 , $\boxed{3}$)這個棋子，Z=3 的棋盤格線將沒有黑皇后棋子。

綜合(1)(2)(3)可知：若 A~ C 區少放一個棋子，則使 X、Y 或 Z 三個方向的某一條棋盤格線少了黑皇后棋子，如此就無法符合擺放規則。同理，亦可以證明 D~F 區無法再減少任何白皇后棋子。所以得證上述排法符合擺放規則且使用最少的棋子數。

伍、研究結果

一、n×n 階正方形棋盤的黑及白皇后棋子需使用日字放法、雙日字放法型一、型二等特定擺放方式，才會有規律性產生。

二、n×n 階正方形棋盤的黑及白皇后棋子的放法依其規律可分成(6n-2)×(6n-2)階、(6n-1)×(6n-1)階、6n×6n 階、(6n+1)×(6n+1)階、(6n+2)×(6n+2)階(又將 n 分成奇數與偶數)、(6n+3)×(6n+3)階(又將 n 分成奇數與偶數，其中偶數又分為偶數 A 組($n=4m-2, m \ge 1, m \in N$)、偶數 B 組($n=4m, m \ge 1, m \in N$))等六組型式($n \ge 1, n \in N$)。

三、n×n 階正方形棋盤棋子放法依其規律分成六組型式時，能進一步將通式建立而成。此通式可作為當探討任意 n×n 階(n≥4)正方形棋盤時，可得到黑皇后或白皇后棋子的放置位置(包括可得到指定的第幾個棋子位置)。

四、n 階正三角形棋盤的黑及白皇后棋子經特定擺放方式，會有規律性產生。且依其規律可分為 2n+2 階及 2n+3 階($n \ge 1, n \in N$)二組棋盤型式。

五、n 階正三角形棋盤棋子放法依其規律分成二組型式時，能進一步將通式建立而成。此通式可作為當探討任意 n 階(n≥4)正三角形棋盤時，可得到黑皇后或白皇后棋子的放置位置(包括可得到指定的第幾個棋子位置)。

陸、未來研究方向

一、n×n 階正方形棋盤可探討是否尚有其他規律下的分組型式。

二、n 階正三角形棋盤可探討是否尚有其他規律下的分組型式。

柒、參考資料及其他

一、維基百科。八皇后問題。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%AB%E7%9A%87%E5%90%8E%E9%97%AE%E9%A2%98。

二、吳振奎(2003)。數學中的巧合、聯繫與統一。數學傳播。

三、黃品翰、陳毓笙、林政助、洪翊倫、王柏鈞，2008年，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會國小組數學科「當「月曆縱橫冊」遇上「八皇后棋」」。

四、劉怡欣、高紹瑜、黃雅琳、張際雲，2008年，中華民國第四十八屆中小學科學展覽會國中組數學科「天馬行空--- n 后問題規律之探討」。

五、李威締、賴冠錡，2012年，中華民國第五十二屆中小學科學展覽會國中組數學科「當皇后遇上小三一正三角形棋盤上的皇后互不侵犯問題」。

六、李威締、王執雋、賴亮宇，2015年，中華民國第五十五屆中小學科學展覽會高中組數學科「斜向坐標上皇后之研究」。

七、林福來主編(2014)。高級中學數學課本第三冊。南一出版社。

八、洪有情等(2018)。國民中學數學課本第二、四冊。康軒出版社。