中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030412

放石頭問題的探討

學校名稱：臺北市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國一 廖亮瑜	莊　燕 楊宗穎

關鍵詞：方格圖、遞迴關係、費氏數列

摘要

在一個n列m行的方格圖中，每一行都必須擺放一顆石頭，共計有m顆石頭，其中擺放石頭的限制條件為『每一顆石頭的左上角方向一路延伸都不可以有其他石頭』。本文研究是在限制條件下計算放石頭可能的方法數，我們利用多項式以及費氏數列求得以下三個主要結論：（1）對於一般的n，求得$m=1,2,3,4$的放石頭方法數；（2）對於一般的m，求得$n=1,2,3$的放石頭方法數；（3）對於一般的m，建立$n=4$的放石頭方法數的遞迴關係。

壹、研究動機

『科學研習月刊』為國立臺灣科學教育館每個月固定出版之刊物，透過網頁電子書的方式，提供線上瀏覽刊物內容。其中國立臺灣師範大學數學系游森棚教授固定在此月刊開闢『森棚教官的數學題』專欄，身為國中生的我們，藉由閱讀專欄，接觸了『放石頭』這個有趣的問題。問題的原文如下（擷取自科學研習月刊第 56 卷第 11 期）：

小志在如圖 1 的表格中玩放石頭的遊戲，他要在每一直行放一個石頭，且從左側第一行開始放。

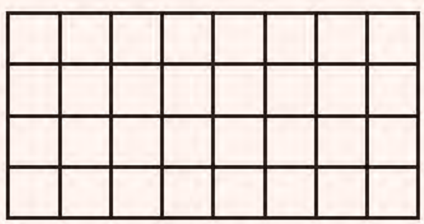


圖 1. 玩放石頭的表格

但是有一個特殊的規定，就是新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭。比如說，前四行已經放好了石頭，則現在要在第五行放新的石頭，只剩下兩格可以放（打叉的兩格不能放），如圖 2。

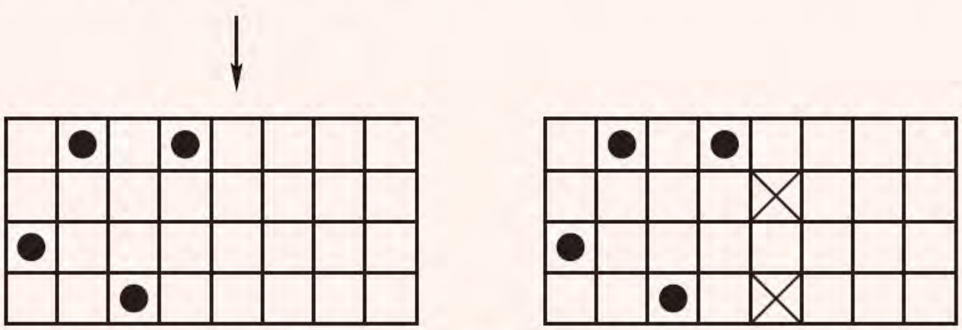


圖 2. 前四行已經放好石頭的情形

如果八個直行都必須有石頭，共有幾種放法？

看似不需要太多的先備知識，就可以著手玩這個淺顯易懂的數學遊戲，在四列八行的方格圖中，要精確算出所有符合規則的放石頭可能性困擾了我們許久，但也燃起了我們對於數學現象的求知渴望，因此我們決定投入此研究，先從較小的行數與列數進行研究，希望可以從動手實做的過程中探究出擺放石頭的策略與規律，進一步得出具有一般性的結論。研究過程中我們運用第二冊聯立方程式、第三冊多項式與第四冊數列與級數等單元的概念。

貳、研究目的

在方格圖中，我們用『直行橫列』的方式來描述方格圖的大小，直的稱為『行』，橫的稱為『列』。若方格圖的列數為n、行數為m，則我們將此方格圖的格局大小記為『$n\times m$』，對於方格圖中不同的位置，我們將第i列第j行的位置用序對『(i,j)』表示，至於此位置是否有放置石頭，則以不同標記區分，若方格圖中第i列第j行的位置有擺放石頭，則記為『$S(i,j)=1$』；反之，若方格圖中第i列第j行的位置沒擺放石頭，則記為『$S(i,j)=0$』。

在大小為$n\times m$的方格圖中，每一行恰放置一顆石頭，其中每一顆石頭的左上角方向一路延伸都不可以有別的石頭，這表示『當$S(i_1,j_1)=1$且$S(i_2,j_2)=1$時，則$i_1-j_1\neq i_2-j_2$』。符合規定下，我們將所有放石頭的方法數記為『$T(n\times m)$』。對於正整數n，我們的研究目的如下：

（1）建立$\boldsymbol{T(n\times 1)}$、$\boldsymbol{T(n\times 2)}$、$\boldsymbol{T(n\times 3)}$與$\boldsymbol{T(n\times 4)}$的一般通式；

（2）建立$\boldsymbol{T(1\times n)}$、$\boldsymbol{T(2\times n)}$、$\boldsymbol{T(3\times n)}$的一般通式；建立$\boldsymbol{T(4\times n)}$的遞迴關係式與生成函數。

參、研究設備及器材

方格紙、筆、電腦、繪圖與文書軟體（Powerpoint、Word）、Mathtype。

肆、研究過程或方法

一、基本概念、名詞解釋與先備知識

有關『森棚教官的數學題』專欄中所提出的放石頭問題，在遊戲規則下，想要探討具有一般性的結論，研究過程中，為了清楚的表達我們所探究出來的成果，我們學習了許多相關的數學知識，包含多項式、數列等基本概念，進一步瞭解聯立方程式、遞迴關係與費氏數列。為了能夠順暢的呈現論述的過程，我們亦需要設計一些數學符號來說明放石頭的規則。以下將介紹我們的研究題目以及所需的先備知識。

多項式

一個問題中的未知數，我們通常會引入符號 x, y, z 來代表特定的未知數，一旦有了這些符號，我們就可以將問題中的量與量之間的關係列成算式。設 n 為非負整數，而 a_0，a_1，$\cdots$，a_n 為給定的常數，凡是可以寫成 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 形式的式子，其中 $a_n \neq 0$，即稱為 x 的『**n 次多項式**』。例如：$3x+2$、$2x^2-4x+1$、$4x^3-x$ 分別為 x 的 1 次、2 次、3 次多項式。

數列

將一系列的數字依照順序排列出來，即構成一個『**數列**』。數列中的每一個數稱為『**項**』，其中第一個數字稱為第一項（或首項）、第二個數稱為第二項，依此類推。一般而言，有 n 項的數列可以表達為 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$。例如：$\langle 2,4,6,8,10 \rangle$ 即為具有 5 項的數列。

遞迴關係

描述數列中每一項與前面幾項之間關係的式子，我們稱為該數列的『**遞迴關係式**』，而具有遞迴關係式的數列則稱為『**遞迴數列**』。某些與計數有關的問題，往往隱含前因影響後果的規律，即某種現象的結果與緊靠它前面的一個或數個結果有密切的關係，在數學上稱為『**遞迴關係**』。例如：公差為 2 的等差數列 $\langle a_n \rangle$，其遞迴關係式為 $a_n = a_{n-1} + 2$，表示除了第一項 a_1 以外，其他項皆為前一項的值再加上 2，而第一項 a_1 的值稱為該遞迴關係的『**起始值**』。然而根據遞迴關係式的結構，所需的起始值數量也會有所改變，例如下列將介紹的費氏數列，就需要兩個起始值。

費氏數列

費氏數列 $\langle F_n \rangle$ 是一個有名的遞迴數列，在許多科普書籍上皆有提及，費氏數列的第一項 F_1 與第二項 F_2 皆定義為 1，第三項開始，每一項皆為前兩項之和，意即對於 $n \geq 3$，第 n 項即為第 $n-1$ 項與第 $n-2$ 項的總和。費氏數列的遞迴關係式為 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，其起始值為 $F_1 = F_2 = 1$。例如：費氏數列的前 10 項為 $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55$。

費氏數列：滿足遞迴關係 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，且初始值為 $F_1 = F_2 = 1$ 的數列稱為費氏數列。

考慮費氏數列的第$n+2$項F_{n+2}，根據遞迴關係，將每一項逐漸展開可得以下關係式，這表示費氏數列前n項的總和再加上1恰為費氏數列的第$n+2$項：

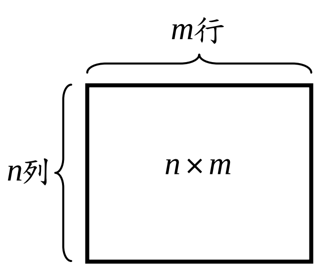
$$
\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= (F_{n-1} + F_n) + F_n = F_{n-1} + 2F_n \\
&= (F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n-1} + F_n = F_{n-2} + 2F_{n-1} + F_n \\
&= (F_{n-3} + F_{n-2}) + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n = F_{n-3} + 2F_{n-2} + F_{n-1} + F_n \\
&\vdots \\
&= F_1 + 2F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n \\
&= 1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n
\end{aligned}
$$

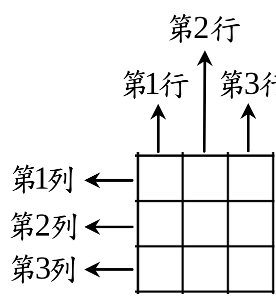
費氏數列的加總特性：

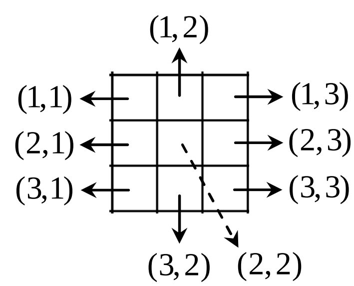
令$\langle F_n \rangle$為費氏數列，則$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + 1 = F_{n+2}$。

方格圖的位置記號

在方格圖中，若方格圖的列數為n、行數為m，則我們將此方格圖的大小記為『$\boldsymbol{n \times m}$』，對於方格圖中不同的位置，我們將第i列第j行的位置用序對『$\boldsymbol{(i, j)}$』表示。為了表示方格圖中第i列第j行的位置是否有放石頭，若方格圖中第i列第j行的位置有擺放石頭，則記為『$\boldsymbol{S(i, j)} = 1$』；反之，若方格圖中第i列第j行的位置沒擺放石頭，則記為『$\boldsymbol{S(i, j)} = 0$』。



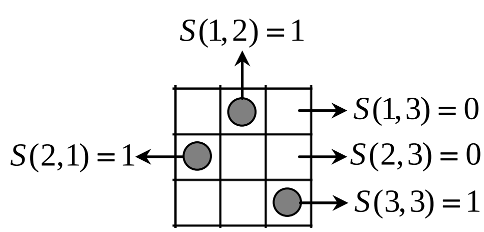




例如：考慮3×3的已擺放石頭的方格圖，如下圖所示。

根據石頭擺放的情形，可知$S(1,2) = S(2,1) = S(3,3) = 1$；

根據沒有擺石頭的位置，可知$S(1,1) = S(1,3) = S(2,2) = S(2,3) = S(3,1) = S(3,2) = 0$。



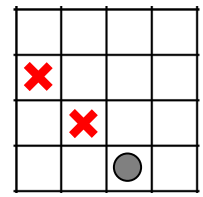
放石頭的條件限制

在給定的方格圖中，每一行皆需放一顆石頭，並且滿足每一顆石頭的左上角方向一路延伸都不可以有別的石頭，以下舉例說明。

例如：（1）如右圖 4×4 的方格圖所示。

因為 $S(4,3)=1$，因此 $(3,2)$ 與 $(2,1)$ 的位置皆不能擺放石頭。

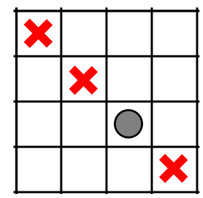
意即 $S(3,2)=S(2,1)=0$。



（2）如右圖 4×4 的方格圖所示。

因為 $S(3,3)=1$，因此 $(4,4)$、$(2,2)$ 與 $(1,1)$ 的位置皆不能擺放石頭。

意即 $S(4,4)=S(2,2)=S(1,1)=0$。



對於 $n\times m$ 的方格圖中，不失一般性假設 $i_1<i_2$，若 (i_1,j_1) 與 (i_2,j_2) 滿足 $i_1-j_1=i_2-j_2$，則 (i_1,j_1) 必位於在 (i_2,j_2) 的左上角一路延伸的方向，這表示 (i_1,j_1) 與 (i_2,j_2) 這兩個位置不能同時擺放石頭。意即 $S(i_1,j_1)$ 與 $S(i_2,j_2)$ 不能同時為 1。因此我們將放石頭的限制條件以數學符號表示如下：

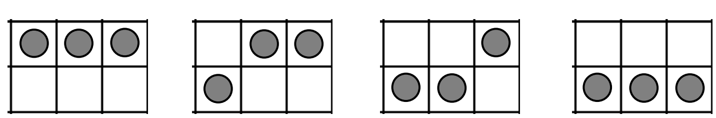
放石頭的限制條件：

在 $n\times m$ 的方格圖中，已知 $S(i_1,j_1)=1$，若 (i_2,j_2) 滿足 $i_2-j_2=i_1-j_1$，則 $S(i_2,j_2)=0$。

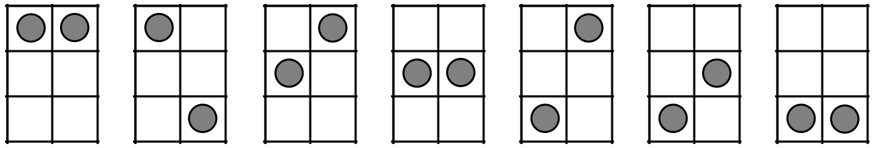
放石頭的方法數

在放石頭的條件限制之下，考慮所有不同放石頭的情形，對於 $n\times m$ 的方格圖，我們將所有放石頭的方法數記為『$\boldsymbol{T(n\times m)}$』。

例如：（1）考慮 2×3 的方格圖，所有放石頭的情形共有 4 種，因此 $T(2\times3)=4$，如下圖所示：

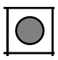
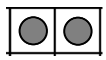
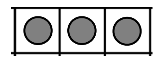


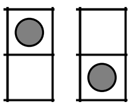
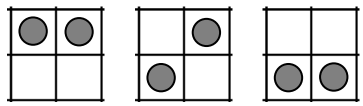
（2）考慮3×2的方格圖，所有放石頭的情形共有7種，因此$T(3\times 2)=7$，如下圖所示：

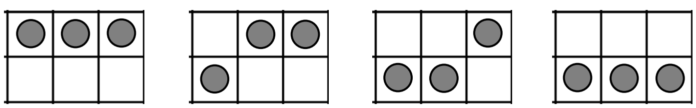
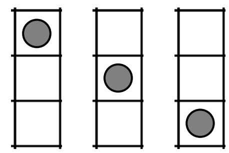


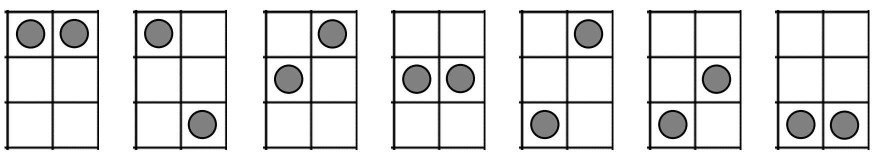
二、簡單例子的啟蒙

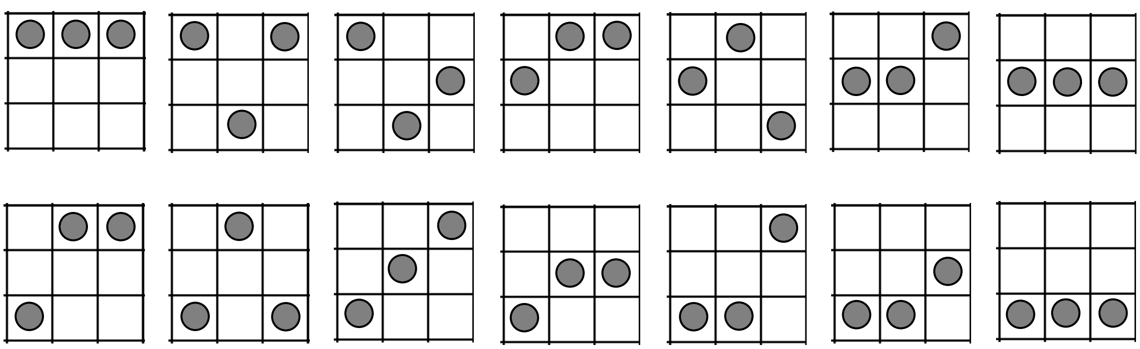
為了探討放石頭問題，首先我們先從較小的列數與行數的方格圖進行實作，並記錄放石頭的不同情形。對於$\{n\times m:1\le n,m\le 3\}$，其放石頭的所有可能性羅列如下：

$T(1\times 1)=1$ ：  $T(1\times 2)=1$ ：  $T(1\times 3)=1$ ： 

$T(2\times 1)=2$ ：  $T(2\times 2)=3$ ： 

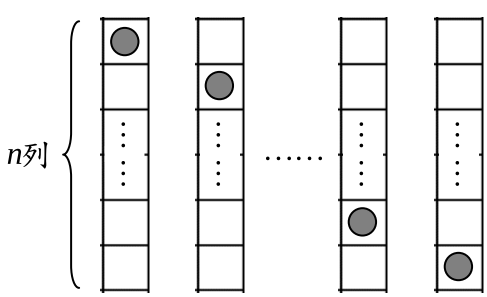
$T(2\times 3)=4$ ：  $T(3\times 1)=3$ ： 

$T(3\times 2)=7$ ： 

$T(3\times 3)=14$ ： 

$\boldsymbol{T(n\times 1)=n}$

考慮$n\times 1$的方格圖，可知第一行的石頭，共有n個位置可以選擇擺放，故$T(n\times 1)=n$。



$\Rightarrow\ T(n\times 1)=n$

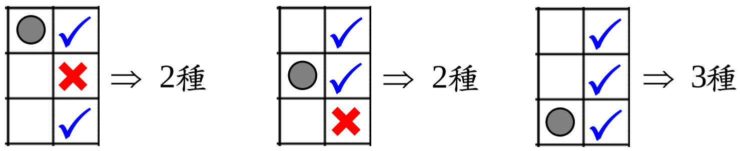
3×2與4×2的規律

在上述簡單的例子中，我們試圖從中探索出放石頭的脈絡，並研究是否能具有一般性的結果。例如從3×2的方格圖中，第一行的石頭共可分為三種情形，分別為$S(1,1)=1$或$S(2,1)=1$或$S(3,1)=1$。針對每一種情形我們亦可以討論第二行的可能性：

（1） 當$S(1,1)=1$時，因為$S(2,2)=0$，故$S(1,2)=1$或$S(3,2)=1$，共有2種可能性；

（2） 當$S(2,1)=1$時，因為$S(3,2)=0$，故$S(1,2)=1$或$S(2,2)=1$，共有2種可能性；

（3） 當$S(3,1)=1$時，故$S(1,2)=1$或$S(2,2)=1$或$S(3,2)=1$，共有3種可能性。



因此可知3×2的方格圖中，共有$2+2+3=7$種可能性，故$T(3\times 2)=7$。

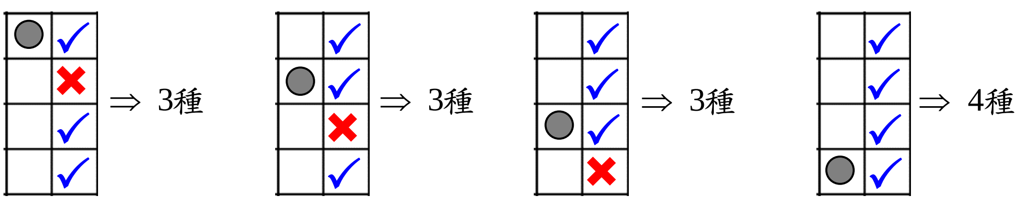
進一步對於4×2的方格圖，我們利用上述的分類方式進行類似的討論，第一行的石頭共可分為四種情形，分別為$S(1,1)=1$、$S(2,1)=1$、$S(3,1)=1$或$S(4,1)=1$：

（1） 當$S(1,1)=1$時，因為$S(2,2)=0$，故$S(1,2)=1$或$S(3,2)=1$或$S(4,2)=1$，共有3種可能性；

（2） 當$S(2,1)=1$時，因為$S(3,2)=0$，故$S(1,2)=1$或$S(2,2)=1$或$S(4,2)=1$，共有3種可能性；

（3） 當$S(3,1)=1$時，因為$S(4,2)=0$，故$S(1,2)=1$或$S(2,2)=1$或$S(3,2)=1$，共有3種可能性；

（4） 當$S(4,1)=1$時，故$S(1,2)=1$或$S(2,2)=1$或$S(3,2)=1$或$S(4,2)=1$，共有4種可能性。



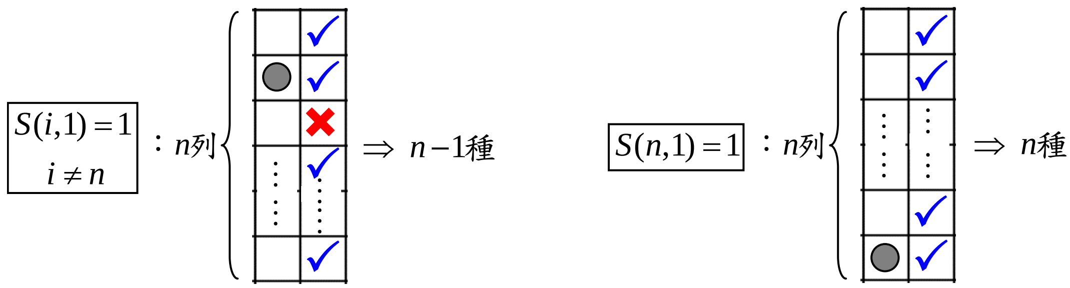
因此可知4×2的方格圖中，共有$3+3+3+4=13$種可能性，故$T(4\times 2)=13$。

$\boldsymbol{T(n\times 2)=n^2-n+1}$

有了3×2與4×2的分類經驗之後，我們將放石頭的策略直接推廣到$n\times 2$的方格圖中。今考慮$n\times 2$的方格圖，第一行的石頭共可分為n種情形，分別為$S(i,1)=1$，其中$i=1,2,\cdots,n$，針對每一種情形，我們可直接計算第二行擺放石頭的可能性：

（1） 當$S(i,1)=1$時，其中$i\neq n$，因為$S(i+1,2)=0$且$i+1\leq n$，所以第二行的石頭僅有位置$(i+1,2)$不可擺放，所以第二行的石頭共有$n-1$個可能性（如左下圖所示）。

（2） 當$S(n,1)=1$時，可知第二行的石頭沒有任何限制，故共有n個可能性（如右下圖所示）。

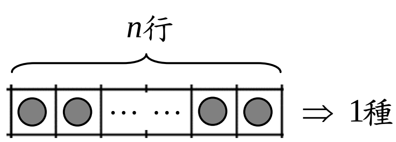


由上述討論可知，$n\times 2$的方格圖共有$(n-1)\times(n-1)+n=n^2-n+1$種可能性，故$T(n\times 2)=n^2-n+1$。

結論 1：考慮$n\times 1$與$n\times 2$的方格圖，所有放石頭的可能性為$T(n\times 1)=n$、$T(n\times 2)=n^2-n+1$。

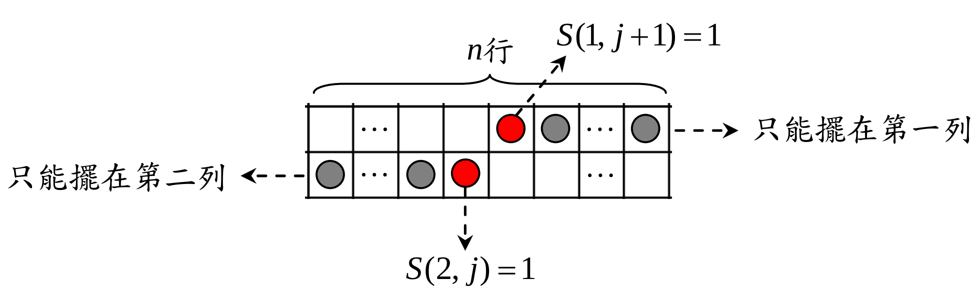
$\boxed{\boldsymbol{T(1\times n)=1}}$

考慮$1\times n$的方格圖，由於每一行的石頭皆只有一個位置可以擺放，故$T(1\times n)=1$。



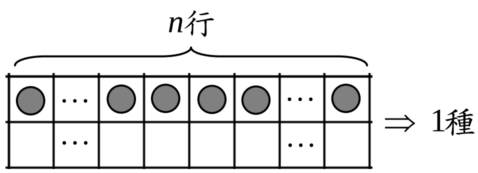
$\boxed{\boldsymbol{T(2\times n)=n+1}}$

考慮$2\times n$的方格圖，觀察放石頭的情形，可得知若存在某個j滿足『$S(2,j)=1$且$S(1,j+1)=1$』，根據放石頭的條件限制可推論得『$S(1,j-1)=0$、$S(1,j-2)=0$、…、$S(1,2)=0$、$S(1,1)=0$』且『$S(2,j+2)=0$、$S(2,j+3)=0$、…、$S(2,n-1)=0$、$S(2,n)=0$』，換句話說，『對任意$k=1,2,\cdots,j$，$S(2,k)=1$』且『對任意$k=j+1,j+2,\cdots,n$，$S(1,k)=1$』。這意味著當某個j滿足『$S(2,j)=1$且$S(1,j+1)=1$』時，除了第j行與第$j+1$行之外，其它行的石頭只有唯一的擺放可能。



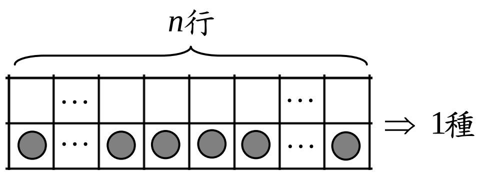
根據上述所討論的性質，我們可將放石頭的情形分成三種類型：

（1） 對於$1\le j\le n$，滿足$S(1,j)=1$，意即每一行的石頭皆擺放在第一列的位置；



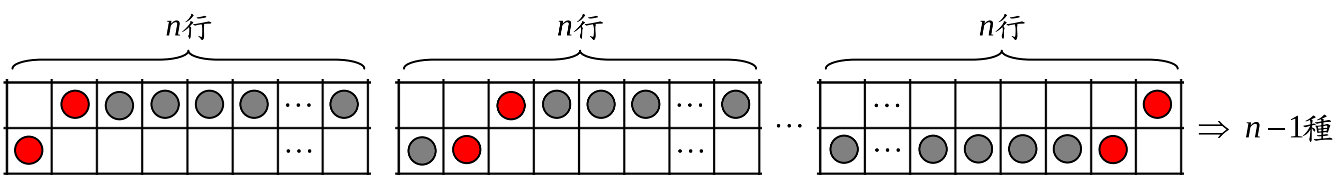
全部擺在第一列

（2） 對於$1\le j\le n$，滿足$S(2,j)=1$，意即每一行的石頭皆擺放在第二列的位置；



全部擺在第二列

（3） 存在某一個j，滿足$S(2,j)=1$且$S(1,j+1)=1$，意即第j行與第$j+1$行的石頭為先下後上。

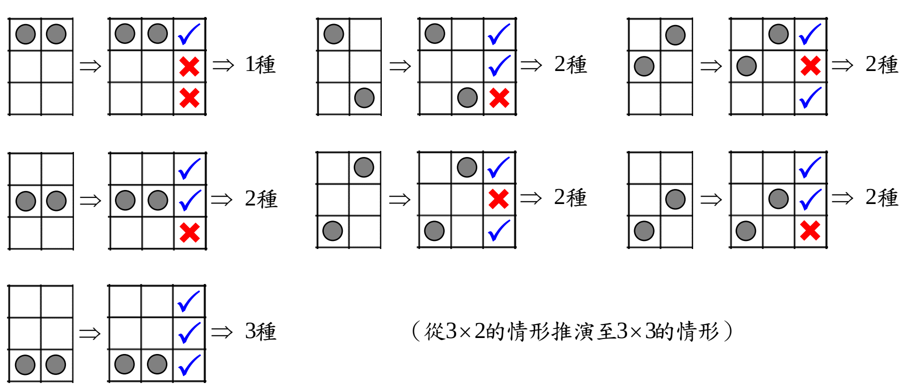


由上述討論可知，$2\times n$的方格圖共有$1+1+(n-1)=n+1$種可能性，故$T(2\times n)=n+1$。

結論 2：考慮$1\times n$與$2\times n$的方格圖，所有放石頭的可能性為$T(1\times n)=1$、$T(2\times n)=n+1$。

從3×2到3×3的推演策略

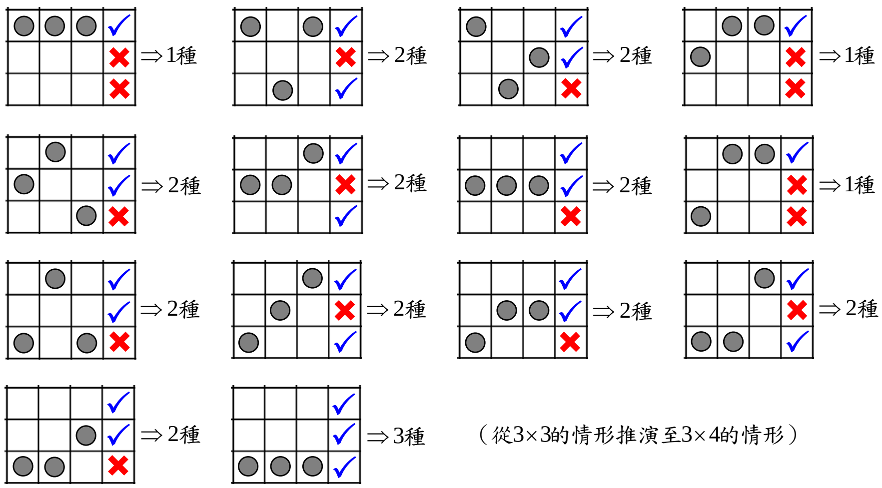
透過3×2的方格圖所有放石頭的7種情形，將每一種情形新增第三行，保持前兩行石頭的位置，進一步討論第三行石頭擺放的可能性。



（從3×2的情形推演至3×3的情形）

由此可知，透過3×2的方格圖所有放石頭的7種情形，新增第三行後，我們可以推演出3×3的方格圖共有$1\times1+5\times2+1\times3=14$種放石頭的情形，故得知$T(3\times3)=14$。

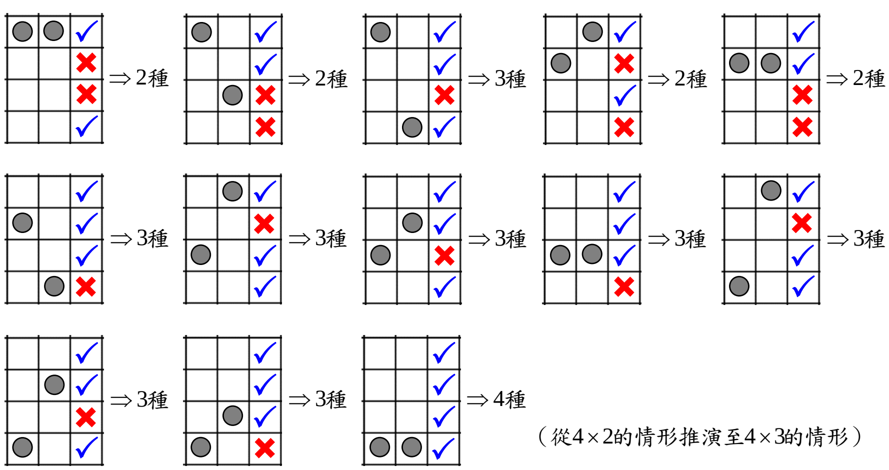
利用上述的推演概念，我們亦可以利用3×3的方格圖14種放石頭的情形，新增第四行後，推演出3×4的方格圖所有放石頭的情形，如下所示：



（從3×3的情形推演至3×4的情形）

可知，共有3個3×3的擺法可推演出1種3×4的擺法；共有10個3×3的擺法可推演出2種3×4的擺法；共有1個3×3的擺法可推演出3種3×4的擺法。故3×4的方格圖共有$3\times1+10\times2+1\times3=26$種放石頭的情形，故得知$T(3\times4)=26$。

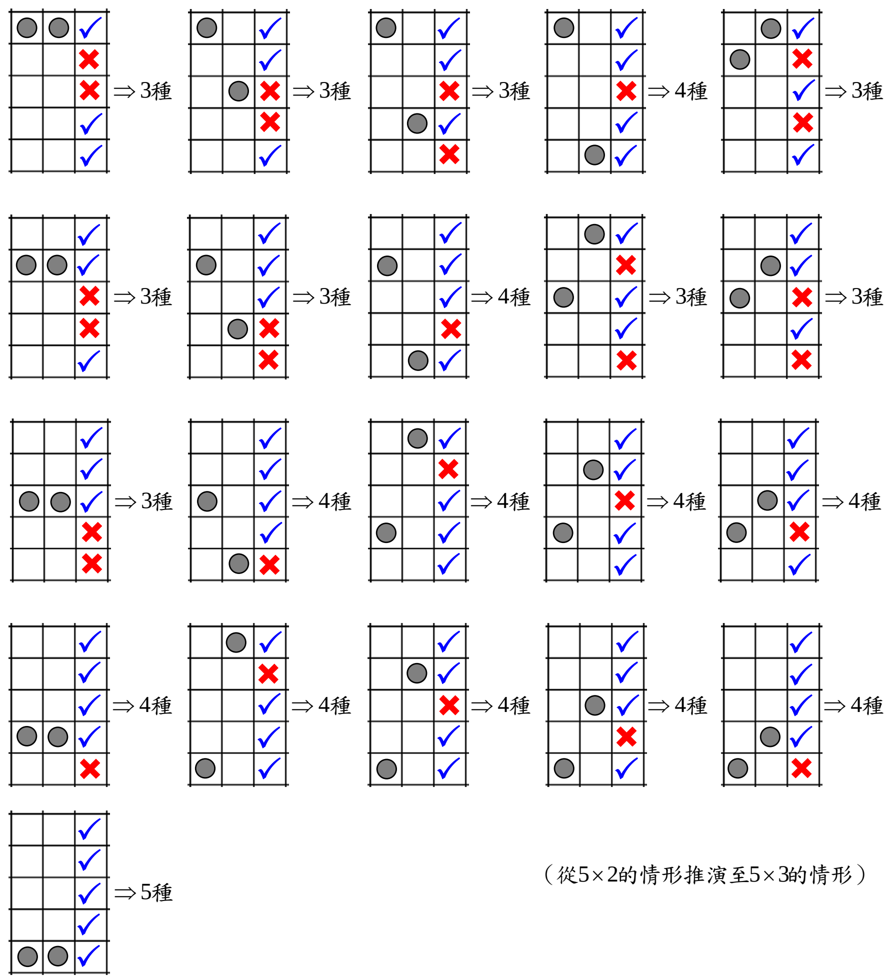
此外，根據結論1可知$T(4\times2)=13$，利用相同的討論手法，以下我們利用13種4×2的方格圖推演出4×3的方格圖放石頭的情形，推演情形如下圖所示：



（從4×2的情形推演至4×3的情形）

故可知4×3的方格圖共有$4\times2+8\times3+1\times4=36$種放石頭的情形，故得知$T(4\times3)=36$。

同理，根據結論 1 可知$T(5\times2)=21$，利用相同的討論手法，以下我們利用21種5×2的方格圖推演出5×3的方格圖放石頭的情形，推演情形如下圖所示：



（從5×2的情形推演至5×3的情形）

故可知5×3的方格圖共有$9\times3+11\times4+1\times5=76$種放石頭的情形，故得知$T(5\times3)=76$。

結論 3：考慮2×3、3×3、4×3與5×3的方格圖，所有放石頭的可能性為：

$T(2\times3)=4$、$T(3\times3)=14$、$T(4\times3)=36$與$T(5\times3)=76$。

根據上述的討論，讓我們體會到以下特性：

（1） **針對$\boldsymbol{n\times(m-1)}$的方格圖，新增第$\boldsymbol{m}$行後，根據前$\boldsymbol{(m-1)}$行的石頭擺放位置，即可決定第$\boldsymbol{m}$行石頭擺放的可能性（當$\boldsymbol{n\ge m}$時，第$\boldsymbol{m}$行石頭的選擇數最少$\boldsymbol{n-(m-1)}$種，最多$\boldsymbol{n}$種）。**

（2） **針對$\boldsymbol{n\times(m-1)}$的方格圖，若能畫出所有$\boldsymbol{T\big(n\times(m-1)\big)}$種放石頭的情形，新增一行後，則可推演出$\boldsymbol{n\times m}$的方格圖放石頭的所有情形，進一步求得$\boldsymbol{T(n\times m)}$。**

這表示若欲求得$T(n\times m)$，則必須先得知$n\times(m-1)$的方格圖放石頭的所有情形。如果『夠有恆心與毅力』，我們總是可以做到，這看似已經找到一種放石頭的策略，然而在實際操作上，並無法完整的解決所有的問題，因為隨著n,m越大，欲畫出$n\times(m-1)$方格圖放石頭的所有情形並非是有效率的策略，所以接下來我們將換個角度來分析，針對$n\times 3$與$3\times n$等特殊規格方格圖，求得一般性的結論。

三、$T(n\times 3)$的證明

根據結論 1 可知$T(n\times 1)=n$、$T(n\times 2)=n^2-n+1$，其結論皆為多項式，其自變數為『列數』而次方等於『行數』。因此考慮$n\times 3$的方格圖時，我們很自然的猜想，當$n\geq 2$時，$T(n\times 3)$是否為『n的3次多項式』？在這樣的猜想作為基礎之下，我們假設$T(n\times 3)=an^3+bn^2+cn+d$，其中$a,b,c,d$皆為實數。利用結論 3，透過$T(2\times 3)=4$、$T(3\times 3)=14$、$T(4\times 3)=36$與$T(5\times 3)=76$建立聯立方程組，並試著求得實數$a,b,c,d$。聯立方程組建立如下：

$$\begin{cases} T(2\times 3)=4 \\ T(3\times 3)=14 \\ T(4\times 3)=36 \\ T(5\times 3)=76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c+d=4 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=36 \\ 125a+25b+5c+d=76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19a+5b+c=10 \\ 37a+7b+c=22 \\ 61a+9b+c=40 \\ 125a+25b+5c+d=76 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18a+2b=12 \\ 24a+2b=18 \\ 61a+9b+c=40 \\ 125a+25b+5c+d=76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=6 \\ 24a+2b=18 \\ 61a+9b+c=40 \\ 125a+25b+5c+d=76 \end{cases}$$

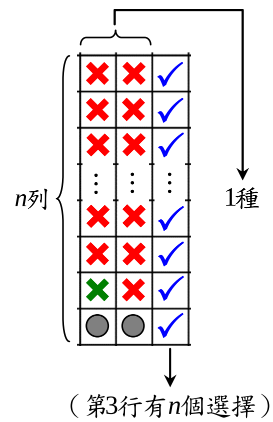
透過加減消去法，依序消去d,c,b後，可依序得$a=1$，$b=-3$，$c=6$，$d=-4$。因此我們猜想『當$n\geq 2$時，$T(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4$』。然而到此為止這當然僅僅是猜想，為了檢驗此猜想，以下我們將清楚的說明此猜想的正確性，並給予證明。

> **結論 4**：當$n\geq 2$時，$n\times 3$的方格圖共有n^3-3n^2+6n-4種不同的放石頭情形。
>
> 意即當$n\geq 2$時，$T(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4$。特別的$T(1\times 3)=1$。

【證明】：

令$n\geq 2$，考慮$n\times 3$的方格圖，根據第1行與第2行的石頭位置，將直接決定第3行石頭擺放的可能性，因此我們分成三大類進行討論，分別是『第3行的石頭有n個選擇』、『第3行的石頭有$n-1$個選擇』與『第3行的石頭有$n-2$個選擇』。

（1）第3行的石頭有n個選擇：



若第3行的石頭有n個選擇，則表示對『$i=1,2,\cdots,n-2$，$S(i,1)=0$』且『$i=1,2,\cdots,n-1$，$S(i,2)=0$』。由此可知$S(n,2)=1$，這將使得$S(n-1,1)=0$，故$S(n,1)=1$。意即第1行與第2行的石頭皆必須放置於第n列，故此類型的方格圖前兩行僅有1種情形。

因此前兩行共有1種情形使得第3行的石頭有n個選擇，

故共有n種擺放石頭的方法。

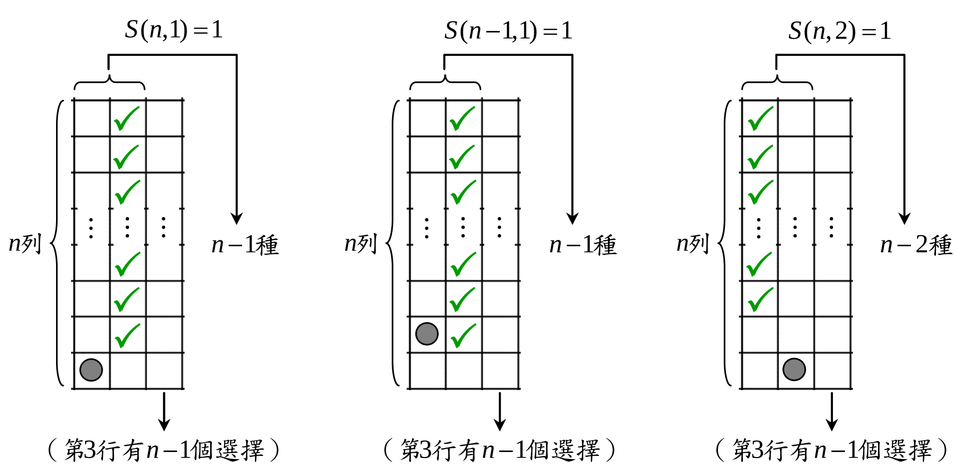
（2）第3行的石頭有$n-1$個選擇：

若第3行的石頭有$n-1$個選擇，則表示『第1行或第2行的石頭恰有一顆的位置使得第3行有一個位置不能擺放石頭』。換句話說，『第1行或第2行的石頭恰有一顆的位置不影響第3行石頭的擺放位置』，意即『$S(n,1)=1$、$S(n-1,1)=1$、$S(n,2)=1$恰有一個成立』。

① 若$S(n,1)=1$，則第2行的石頭必須直接影響到第3行石頭的擺放位置，因此$S(i,2)=1$，其中$1\le i\le n-1$。故前兩行石頭擺放的情形共有$n-1$種（如左下圖所示）。

② 若$S(n-1,1)=1$，則第2行的石頭必須直接影響到第3行石頭的擺放位置，因此$S(i,2)=1$，其中$1\le i\le n-1$。故前兩行石頭擺放的情形共有$n-1$種（如中下圖所示）。

③ 若$S(n,2)=1$，則第1行的石頭必須直接影響到第3行石頭的擺放位置，因此$S(i,1)=1$，其中$1\le i\le n-2$。故前兩行石頭擺放的情形共有$n-2$種（如右下圖所示）。

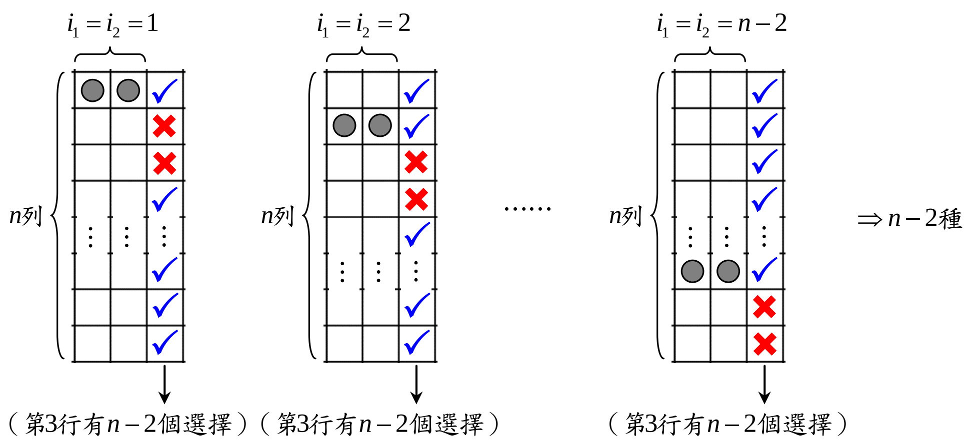


因此前兩行共有$(n-1)+(n-1)+(n-2)=3n-4$種情形使得第3行的石頭有$n-1$個選擇，故共有$(3n-4)(n-1)$種擺放石頭的方法。

（3）第3行的石頭有$n-2$個選擇：

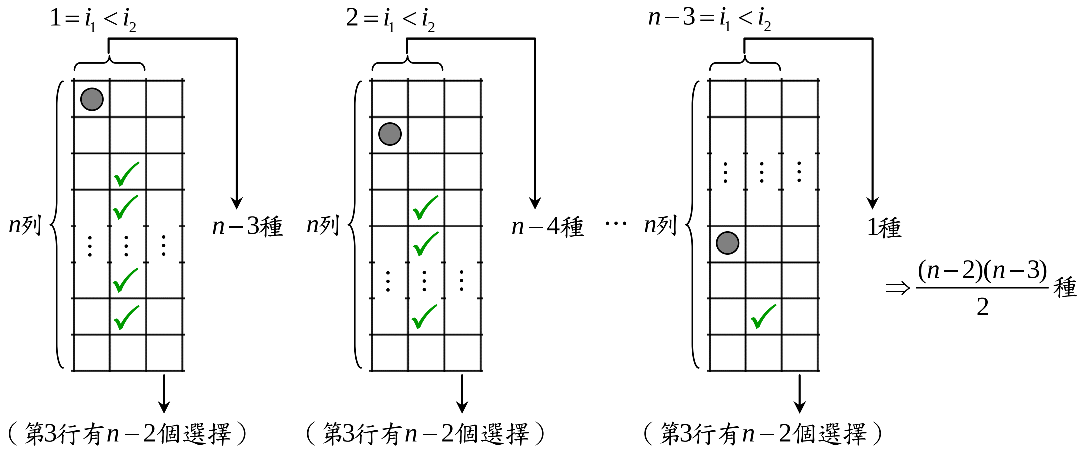
若第3行的石頭有$n-2$個選擇，則表示『第1行與第2行的石頭位置兩者皆使得第3行共有兩個位置不能擺放石頭』。令$S(i_1,1)=1$且$S(i_2,2)=1$，可知$1\le i_1\le n-2$且$1\le i_2\le n-1$，將第1行與第2行的石頭位置進行分類，分為『$i_1=i_2$（水平）』、『$i_1<i_2$（先上後下）』與『$i_1>i_2$（先下後上）』等三種類型。

① 考慮$i_1=i_2$，因為第3行的位置皆被前兩行石頭所影響，所以$1\le i_1=i_2\le n-2$，因此前兩行石頭呈現水平狀態共有$n-2$種情形。



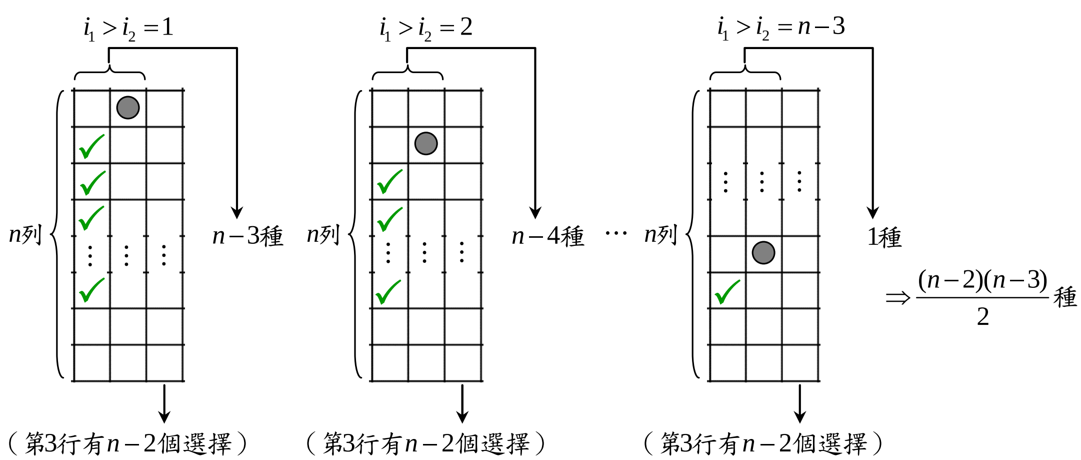
② 考慮$i_1<i_2$，根據放石頭的限制條件可知$i_1-1\ne i_2-2$，所以$i_1+1\ne i_2$，因為第1行的石頭必須影響到第3行，所以$1\le i_1\le n-3$；又因為第2行的石頭必須影響到第3行，所以$1\le i_2\le n-1$，故可得$i_1+2\le i_2\le n-1$。

當$i_1=1$時，則$3\le i_2\le n-1$，共$n-3$種情形；當$i_1=2$時，則$4\le i_2\le n-1$，共$n-4$種情形；依此類推，當$i_1=k$時，則$k+2\le i_2\le n-1$，共$n-k-2$種情形；當$i_1=n-3$時，則$n-1\le i_2\le n-1$，共1種情形。由此可知共有$(n-3)+(n-4)+\cdots+3+2+1=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形。



③ 考慮$i_1>i_2$，因為第2行的石頭必須影響到第3行，所以$1\le i_2\le n-3$；又因為第1行的石頭必須影響到第3行，所以$i_2+1\le i_1\le n-2$。

當$i_2=1$時，則$2\le i_1\le n-2$，共$n-3$種情形；當$i_2=2$時，則$3\le i_1\le n-2$，共$n-4$種情形；依此類推，當$i_2=k$時，則$k+1\le i_1\le n-2$，共$n-k-3$種情形；當$i_2=n-3$時，則$n-2\le i_1\le n-2$，共1種情形。可知共有$(n-3)+(n-4)+\cdots+2+1=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形。



因此前兩行共有$(n-2)+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}=(n-2)^2$種情形能使得第3行的石頭有$n-2$個選擇，故共有$(n-2)^3$種擺放石頭的方法。

綜合上述三大類型的分類討論計算，可知當$n\ge 2$時，$n\times 3$的方格圖擺放石頭的情形共有$n+(3n-4)(n-1)+(n-2)^3=n^3-3n^2+6n-4$種。 ■

將上述討論方式進行推廣，我們亦能夠證明$T(n\times 4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$。（因說明書篇幅限制，證明過程中各項的細節與圖形將於研究記錄簿呈現）

結論 5：當$n\geq 3$時，$n\times 4$的方格圖共有$n^4-6n^3+21n^2-36n+26$種不同的放石頭情形。

意即當$n\geq 3$時，$T(n\times 4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$。特別的$T(1\times 4)=1$且$T(2\times 4)=5$。

【證明】：

令$n\geq 3$，考慮$n\times 4$的方格圖，根據前三行的石頭位置，將直接決定第4行石頭擺放的可能性，因此我們分成四大類進行討論，分別是『第4行的石頭有n個選擇』、『第4行的石頭有$n-1$個選擇』、『第4行的石頭有$n-2$個選擇』與『第4行的石頭有$n-3$個選擇』。

（1）第4行的石頭有n個選擇：

若第4行的石頭有n個選擇，則表示對『$i=1,2,\cdots,n-3$，$S(i,1)=0$』、『$i=1,2,\cdots,n-2$，$S(i,2)=0$』且『$i=1,2,\cdots,n-1$，$S(i,3)=0$』。由此可知$S(n,3)=1$，這將使得$S(n-1,2)=0$，故$S(n,2)=1$；同理，$S(n,1)=1$。意即前三行的石頭皆必須放置於第n列，故此類型的方格圖前三行僅有1種情形。

因此前三行共有1種情形使得第4行的石頭有n個選擇，故共有n種擺放石頭的方法。

（2）第4行的石頭有$n-1$個選擇：

① 若僅有第3行的石頭影響到第4行，意即$S(i,3)=1$，其中$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，則前兩行的石頭位置可以區分為四類，依序為『$S(n,1)=S(n,2)=1$』、『$S(n,1)=S(n-1,2)=1$』、『$S(n-1,1)=S(n-1,2)=1$』、『$S(n-2,1)=S(n,2)=1$』。故此類型的方格圖前三行共有$(n-1)\times 4$種情形。

因此前三行共有$4(n-1)$種情形使得第4行的石頭有$n-1$個選擇，故共有$4(n-1)^2$種擺放石頭的方法。

② 若僅有第2行的石頭影響到第4行，意即$S(i,2)=1$，其中$i\in\{1,2,\cdots,n-2\}$，則第1,3行的石頭位置可以區分為兩類，依序為『$S(n,1)=S(n,3)=1$』、『$S(n-1,1)=S(n,3)=1$』。故此類型的方格圖前三行共有$(n-2)\times 2$種情形。

因此前三行共有$2(n-2)$種情形使得第4行的石頭有$n-1$個選擇，故共有$2(n-1)(n-2)$種擺放石頭的方法。

③ 若僅有第1行的石頭影響到第4行，意即$S(i,1)=1$，其中$i\in\{1,2,\cdots,n-3\}$，則第2,3行的石頭位置必為『$S(n,2)=S(n,3)=1$』。故此類型的方格圖前三行共有$(n-3)$種情形。

因此前三行共有$(n-3)$種情形使得第4行的石頭有$n-1$個選擇，故共有$(n-1)(n-3)$種擺放石頭的方法。

（3）第4行的石頭有$n-2$個選擇：

① 若僅有第1行的石頭不影響到第4行，則第1行的石頭位置可以區分為三類，依序為『$S(n,1)=1$』、『$S(n-1,1)=1$』、『$S(n-2,1)=1$』。考慮此三類任何一種狀況，令$S(i_2,2)=S(i_3,3)=1$。若$i_2=i_3$，則第2,3行共有$(n-2)$種情形；若$i_2<i_3$，則第2,3行共有$\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形；若$i_2>i_3$，則第2,3行共有$\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形。

因此前三行共有$3\left((n-2)+2\left(\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\right)\right)=3(n-2)^2$種情形使得第4行的石頭有$n-2$個選擇，故共有$3(n-2)^3$種擺放石頭的方法。

② 若僅有第2行的石頭不影響到第4行，則第2行的石頭位置可以區分為二類，依序為『$S(n,2)=1$』、『$S(n-1,2)=1$』。考慮此二類任何一種狀況，令$S(i_1,1)=S(i_3,3)=1$。若$i_1=i_3$，則第1,3行共有$(n-3)$種情形；若$i_1<i_3$，則第1,3行共有$\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形；若$i_1>i_3$，則第1,3行共有$\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$種情形。

因此前三行共有$2\left((n-3)+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}+\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}\right)=2(n-2)(n-3)$種情形使得第4行的石頭有$n-2$個選擇，故共有$2(n-2)^2(n-3)$種擺放石頭的方法。

③ 若僅有第3行的石頭不影響到第4行，則第3行的石頭位置必為『$S(n,3)=1$』。令$S(i_1,1)=S(i_2,2)=1$。若$i_1=i_2$，則第1,2行共有$(n-3)$種情形；若$i_1<i_2$，則第1,2行共有$\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$種情形；若$i_1>i_2$，則第1,2行共有$\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$種情形。

因此前三行共有$\left((n-3)+2\times\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}\right)=(n-3)^2$種情形使得第4行的石頭有$n-2$個選擇，故共有$(n-2)(n-3)^2$種擺放石頭的方法。

（4）第4行的石頭有$n-3$個選擇：

令$S(i_1,1)=S(i_2,2)=S(i_3,3)=1$，由於前三行的石頭都將影響到第4行，故$1\le i_1\le n-3$、$1\le i_2\le n-2$且$1\le i_3\le n-1$。依序決定第1,2,3行的石頭位置，可知$i_1$有$n-3$種選擇，使得$i_2$有$n-3$種選擇，進一步$i_3$有$n-3$種選擇。

因此前三行共有$(n-3)^3$種情形使得第4行的石頭有$n-3$個選擇，故共有$(n-3)^4$種擺放石頭的方法。

綜合以上四大類的討論，可知當$n\ge 3$時，$n\times 4$的方格圖擺放石頭的情形共有

$$n+\left(4(n-1)^2+2(n-1)(n-2)+(n-1)(n-3)\right)+\left(3(n-2)^3+2(n-2)^2(n-3)+(n-2)(n-3)^2\right)+(n-3)^4$$

$=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$種。 ■

綜合『結論1』、『結論4』與『結論5』，對於$n\times1$、$n\times2$、$n\times3$與$n\times4$，我們有以下定理：

Theorem 1：

對任意正整數n，$T(n\times1)=n$、$T(n\times2)=n^2-n+1$。

對任意正整數$n\ge 2$，$T(n\times3)=n^3-3n^2+6n-4$。特別的$T(1\times3)=1$。

對任意正整數$n\ge 3$，$T(n\times4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$。特別的$T(1\times4)=1$且$T(2\times4)=5$。

根據Theorem 1的結果，我們亦提出下列猜想：

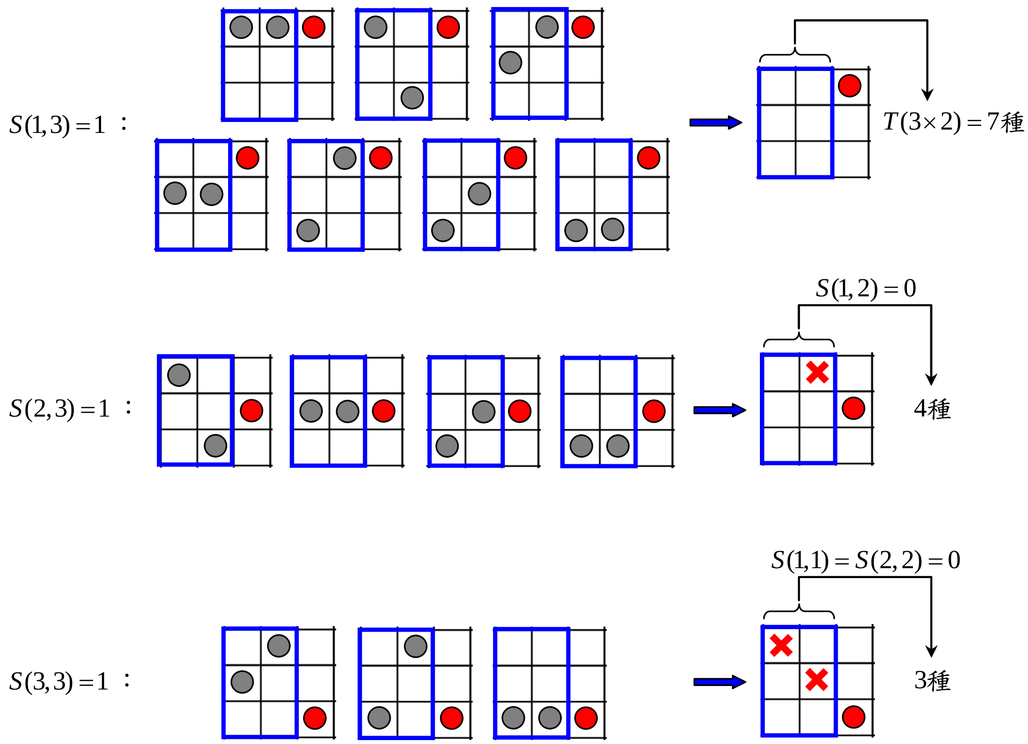
Conjecture 1：（1）$T(n\times5)$為n的5次多項式；

（2）對任意正整數m，$T(n\times m)$必為n的m次多項式。

四、$T(3\times n)$的證明

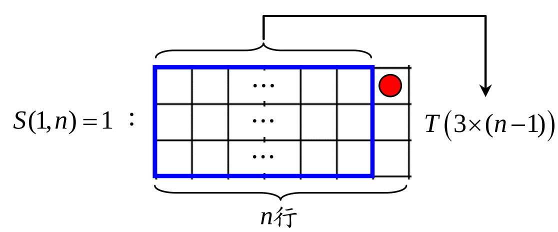
給定3×3的方格圖，已知$T(3\times3)=14$，針對第3行的石頭進行分類（如下圖所示），可知『當

$S(1,3)=1$時，共有7種情形』、『當$S(2,3)=1$時，共有4種情形』、『當$S(3,3)=1$時，共有3種情形』。當確定第3行石頭的位置時，僅需討論第1,2行的情形。若$S(1,3)=1$，則第1,2行的情形即為$T(3\times 2)$；若$S(2,3)=1$，則第1,2行的情形必須滿足$S(1,2)=0$的限制；若$S(3,3)=1$，則第1,2行的情形必須滿足$S(1,1)=S(2,2)=0$的限制。

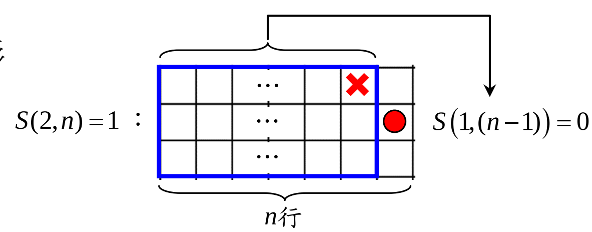


我們將上述的分類概念推廣至$3\times n$的方格圖，試圖求出$T(3\times n)$的值。我們針對第n行的石頭進行分類，將放石頭的情形分為『$S(1,n)=1$、$S(2,n)=1$、$S(3,n)=1$』等三大類型。當確定第n行石頭的位置時，僅需討論第1行至第$n-1$行的情形，意即$3\times(n-1)$的方格圖的放石頭情形。三大類型如下列所示：

（第一類）：若$S(1,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的情形即為$T\left(3\times(n-1)\right)$；

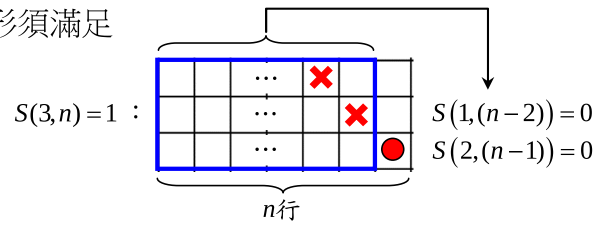


（第二類）：若$S(2,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的情形必須滿足$S\left(1,(n-1)\right)=0$的限制；



（第三類）：若 $S(3,n)=1$，則第1行至第 $n-1$ 行的情形須滿足

$S\left(1,(n-2)\right)=S\left(2,(n-1)\right)=0$ 的限制。



為了清楚的分析上述三大類型的放石頭可能性，針對 $3\times n$ 的方格圖，考慮在不同額外限制條件下放石頭的情形，以下我們定義三個數列 $<a_n>$、$<b_n>$、$<c_n>$：

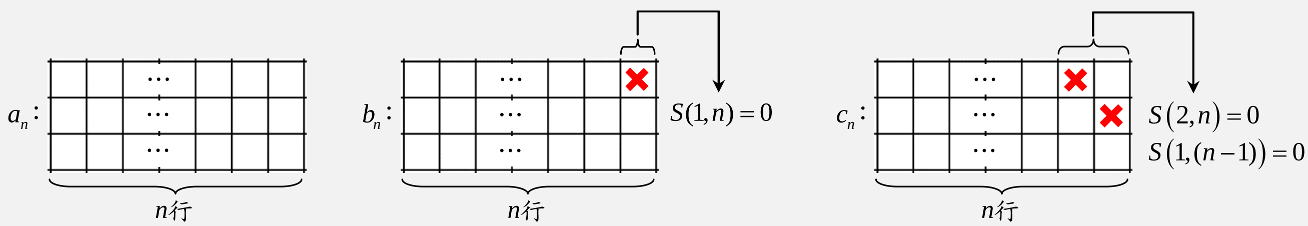
定義：考慮 $3\times n$ 的方格圖，針對不同的額外限制，定義放石頭的特殊方法數『a_n、b_n、c_n』：

（1）$a_n=T(3\times n)$；

（2）若限制 $S(1,n)=0$，則放石頭的特殊方法數為 b_n；

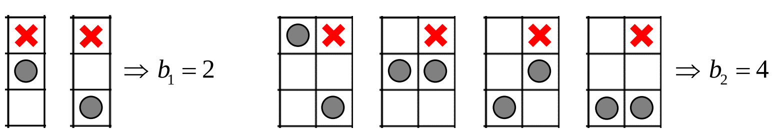
（3）令 $n\geq 2$，若限制 $S\left(1,(n-1)\right)=S(2,n)=0$，則放石頭的特殊方法數為 c_n。

特別的，定義 $c_1=2$。

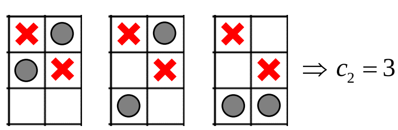


例如：（1）考慮 3×1、3×2 方格圖，可知 $a_1=T(3\times 1)=3$、$a_2=T(3\times 2)=7$（參考 Page 6）。

（2）考慮 3×1、3×2 方格圖，可知 $b_1=2$、$b_2=4$。



（3）考慮 3×2 方格圖，可知 $c_2=3$。



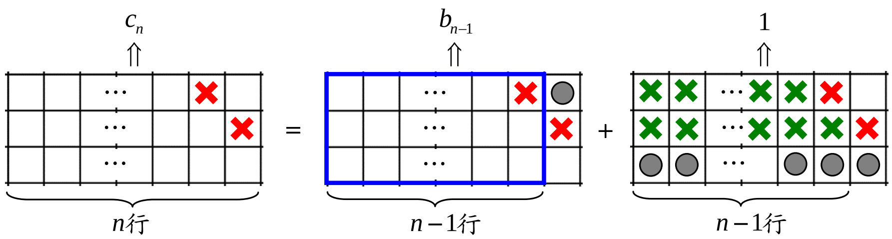
若欲求得 a_n，則必須先分析 b_n 與 c_n 的特性。根據 a_n、b_n、c_n 的定義，接下來將介紹我們在研究過程中發現的遞迴關係，進一步說明 a_n 與費氏數列的巧妙連結性。

b_n與c_n的關係：（1）對任意正整數$n\geq 2$，$c_n=b_{n-1}+1$，其中$b_1=2$；

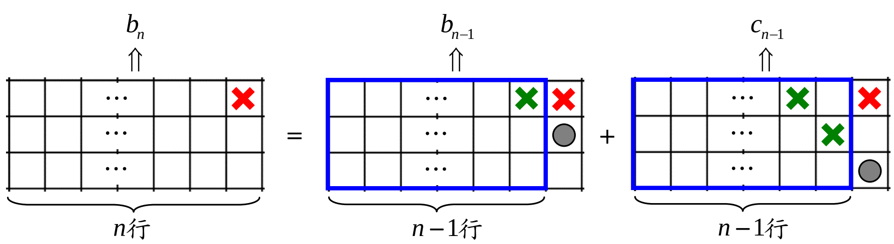
（2）對任意正整數$n\geq 2$，$b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$，其中$b_1=2$，$c_1=2$。

【證明】：

（1）對於正整數$n\geq 2$，考慮$3\times n$方格圖。因為$S\left(1,(n-1)\right)=S(2,n)=0$，針對第$n$行的石頭位置進行分類討論。若$S(1,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$b_{n-1}$種；若$S(3,n)=1$，則$S\left(1,(n-2)\right)=S\left(2,(n-1)\right)=0$，故$S\left(3,(n-1)\right)=1$。依此類推，可知對任意$1\leq j\leq n$，$S\left(3,j\right)=1$。可得第1行至第$n-1$行的放石頭情形僅有1種。由此可知$c_n=b_{n-1}+1$。



（2）對於正整數$n\geq 3$，考慮$3\times n$方格圖。因為$S(1,n)=0$，針對第n行的石頭位置進行分類討論。若$S(2,n)=1$，則$S\left(1,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有b_{n-1}種；若$S(3,n)=1$，則$S\left(1,(n-2)\right)=S\left(2,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$c_{n-1}$種。由此可知$b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$。特別的當$n=2$時，$b_2=4=b_1+c_1=2+2$亦成立。



■

以下我們將利用數列$<b_n>$與$<c_n>$的相互關係，說明兩者數列與費氏數列的關連性。

b_n、c_n與費氏數列的關係：

（1） 對任意正整數n，數列$<b_n+1>$為費氏數列，其中b_n+1為費氏數列的第$n+3$項F_{n+3}。

（2） 對任意正整數n，數列$<c_n>$為費氏數列，其中c_n為費氏數列的第$n+2$項F_{n+2}。

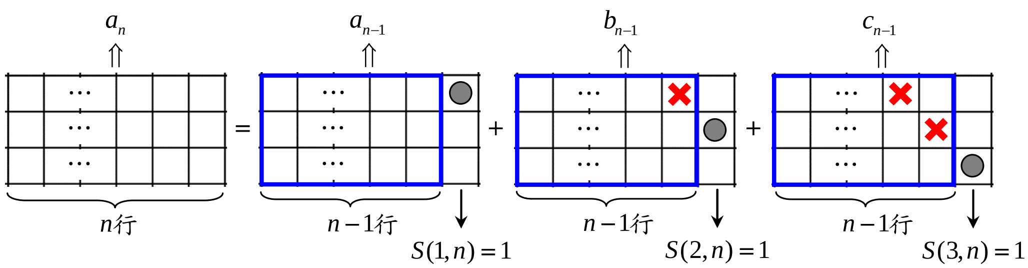
【證明】：

（1）考慮正整數$n \ge 2$，利用$<c_n>$的遞迴關係$c_n = b_{n-1}+1$，$<b_n>$的遞迴關係$b_n = b_{n-1}+c_{n-1}$，可知$b_n = b_{n-1}+c_{n-1} = b_{n-1}+(b_{n-2}+1) \Leftrightarrow b_n+1 = (b_{n-1}+1)+(b_{n-2}+1)$。由此可知數列$<b_n+1>$與費氏數列$<F_n>$具有相關性。又因為$b_1+1=3=F_4$、$b_2+1=5=F_5$、$b_3+1=8=F_6$，故對任意正整數$n$，可知$b_n+1=F_{n+3}$。

（2）當$n \ge 2$，可知$c_n = b_{n-1}+1 = F_{n+2}$。又因為$c_1 = 2 = F_3$，故對任意正整數$n$，可知$c_n = F_{n+2}$。■

a_n的三大類型：對任意正整數$n \ge 2$，$a_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$，其中$a_1=3$，$b_1=2$，$c_1=2$。

【證明】：



對於正整數$n \ge 3$，考慮$3\times n$方格圖，針對第n行的石頭位置進行分類討論。若$S(1,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有a_{n-1}種；若$S(2,n)=1$，則$S(1,(n-1))=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有b_{n-1}種；若$S(3,n)=1$，則$S(1,(n-2))=S(2,(n-1))=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有c_{n-1}種，所以$a_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$。特別的，當$n=2$時，$a_2 = a_1+b_1+c_1 = 7$亦成立。由此可知對任意正整數$n \ge 2$，$a_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$恆成立。■

目前已知數列$<a_n>$，$<b_n>$與$<c_n>$的遞迴關係整理如下：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1} & ,\ n\ge 2 & ,\ \text{其中}\ a_1=3 \\ b_n = b_{n-1}+c_{n-1} & ,\ n\ge 2 & ,\ \text{其中}\ b_1=2 \\ c_n = b_{n-1}+1 & ,\ n\ge 2 & ,\ \text{其中}\ c_1=2 \end{cases}$$

我們將利用三者的遞迴關係求出數列$<a_n>$的通式，並呈現$<a_n>$與費氏數列的關係。

a_n的遞迴關係：對任意正整數$n \ge 2$，$a_n = a_{n-1}+F_{n+3}-1$，其中$a_1=3$。

【證明】：

考慮正整數$n \ge 3$，因為$b_n = b_{n-1}+c_{n-1}$，$c_n = b_{n-1}+1$且$b_n+1=F_{n+3}$，其中F_{n+3}為費氏數列的第$n+3$

項。因為 $a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-1}+(b_{n-2}+1)=a_{n-1}+(F_{n+2}-1)+F_{n+1}=a_{n-1}+F_{n+3}-1$，所以可得 $a_n=a_{n-1}+F_{n+3}-1$。特別的當 $n=2$ 時，$a_2=a_1+F_5-1=3+5-1=7$ 亦成立。■

a_n 與費氏數列的關係：對任意正整數 n，$a_n=F_{n+5}-n-4$。

【證明】：

考慮正整數 $n\ge 3$，因為 $a_n=a_{n-1}+F_{n+3}-1$。利用累加法，計算 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_4+a_3$ 的總和。

$$\begin{array}{c|lcccccc}
 & a_n & = & a_{n-1} & + & F_{n+3} & - & 1 \\
 & a_{n-1} & = & a_{n-2} & + & F_{n+2} & - & 1 \\
 & & \vdots & & & & & \\
 & a_4 & = & a_3 & + & F_7 & - & 1 \\
+) & a_3 & = & a_2 & + & F_6 & - & 1 \\
\hline
\Rightarrow & a_n & = & \multicolumn{5}{l}{a_2+(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6)-(n-2)}
\end{array}$$

(遞迴式加總)

將上述 $n-1$ 個遞迴式相加後可得 $a_n=a_1+(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)-(n-1)$。

根據費氏數列的加總特性，可知 $(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)+(F_4+\cdots+F_1)+1=F_{n+5}$。

意即 $(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)+(3+2+1+1)+1=(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)+8=F_{n+5}$。

由此可推論 $a_n=a_1+(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)-(n-1)$

$=3+(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)+8-(n-1)-8$ （因為 $a_1=3$）

$=3+F_{n+5}-(n-1)-8$ （因為 $(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_6+F_5)+8=F_{n+5}$）

$=F_{n+5}-n-4$。

特別的，當 $n=1$ 時，因為 $a_1=3$，$F_6=8$ 且 $a_1=F_6-1-4$，所以 $a_n=F_{n+5}-n-4$ 亦成立。

故對任意正整數 n，$a_n=F_{n+5}-n-4$ 恆成立。■

由上述討論可得知 a_n 、 b_n 與 c_n 皆與費氏數列 $<F_n>$ 有相關性，其結果如下表格所示：

a_n,b_n,c_n 記錄表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	n
a_n	3	7	14	26	46	79	133	221	$F_{n+5}-n-4$
b_n	2	4	7	12	20	33	54	88	$F_{n+3}-1$
c_n	2	3	5	8	13	21	34	55	F_{n+2}

綜合『結論 2』與『 a_n 與費氏數列的關係』，對於 $1\times n$ 、 $2\times n$ 與 $3\times n$ 的方格圖放石頭的情形，我們有以下定理：

Theorem 2：令 $<F_n>$ 為費氏數列。

對任意正整數 n ， $T(1\times n)=1$ 、 $T(2\times n)=n+1$ 、 $T(3\times n)=F_{n+5}-n-4$ 。

對於費氏數列 $<F_n>$ 的一般式，根據參考文獻可知對任意正整數 n ，費氏數列的第 n 項已完全被刻畫，其第 n 項為 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，因此由 Theorem 2 的結果可知，有關 $3\times n$ 的方格圖放石頭的方法數 $T(3\times n)$ 亦可表示如下：

結論 6：對任意正整數 n，$3\times n$ 的方格圖共有 $T(3\times n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+5}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+5}\right]-n-4$ 種不同的放石頭情形。

五、$T(4\times n)$ 的遞迴關係

依照 $3\times n$ 建立遞迴關係的方式，針對 $4\times n$ 的方格圖，考慮在不同額外限制條件下放石頭的情形，以下我們定義四個數列 $<a_n>$ 、 $<b_n>$ 、 $<c_n>$ 與 $<d_n>$ ：

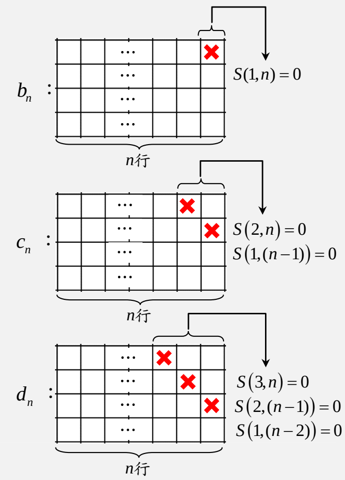
定義：考慮$4\times n$的方格圖，針對不同的額外限制，定義放石頭的特殊方法數『a_n、b_n、c_n與d_n』：

（1）$a_n = T(4\times n)$；

（2）若限制$S(1,n)=0$，則放石頭的特殊方法數為b_n；

（3）令$n\ge 2$，若限制$S\big(1,(n-1)\big)=S(2,n)=0$，則放石頭的特殊方法數為$c_n$。特別的，定義$c_1=3$。

（4）令$n\ge 3$，若限制$S(1,n-2)=S\big(2,(n-1)\big)=S(3,n)=0$，則放石頭的特殊方法數為$d_n$。特別的，定義$d_1=3$、$d_2=7$。



當$1\le n\le 3$時，利用窮舉法我們將a_n、b_n、c_n、d_n的值記錄在表格中。利用這些初始值，進一步建立遞迴關係如下：

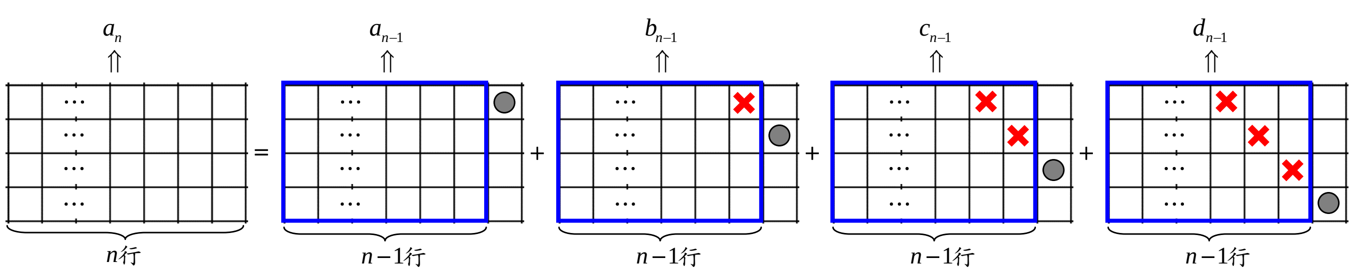
a_n、b_n、c_n、d_n的遞迴關係：

a_n、b_n、c_n、d_n有遞迴關係
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1} & , \quad n\ge 2 \\ b_n = b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1} & , \quad n\ge 2 \\ c_n = b_{n-1}+\left(c_{n-1}-b_{n-2}\right)+\left(d_{n-1}-c_{n-2}\right) & , \quad n\ge 3 \\ d_n = c_{n-1}+\left(c_{n-1}-b_{n-2}\right)+\left(c_{n-2}-b_{n-3}+1\right), & \quad n\ge 4 \end{cases}$$
。

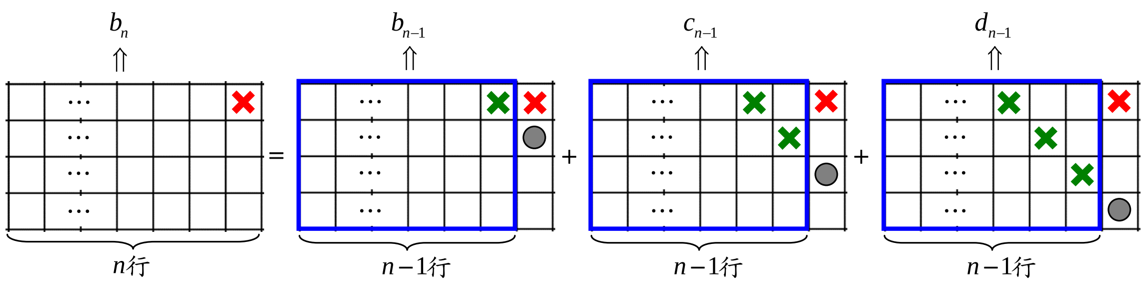
n	1	2	3
a_n	4		
b_n	3		
c_n	3	7	
d_n	3	7	14

【證明】：

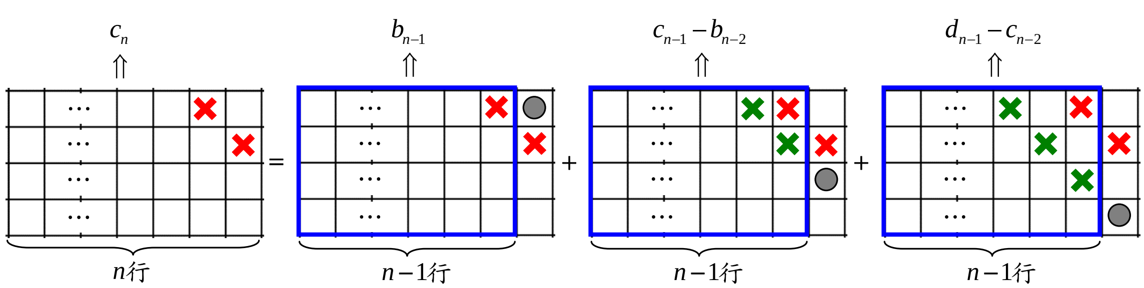
（1） 給定$4\times n$方格圖，針對第n行的石頭位置進行分類討論。若$S(1,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有a_{n-1}種；若$S(2,n)=1$，則$S\big(1,(n-1)\big)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有b_{n-1}種；若$S(3,n)=1$，則$S\big(1,(n-2)\big)=S\big(2,(n-1)\big)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$c_{n-1}$種；若$S(4,n)=1$，則$S\big(1,(n-3)\big)=S\big(2,(n-2)\big)=S\big(3,(n-1)\big)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$d_{n-1}$種。由此可知對任意正整數$n\ge 2$，$a_n = a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}$。



（2） 給定$4\times n$方格圖，已知$S(1,n)=0$，針對第n行的石頭位置進行分類討論。若$S(2,n)=1$，則$S\left(1,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有b_{n-1}種；若$S(3,n)=1$，則$S\left(1,(n-2)\right)=S\left(2,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$c_{n-1}$種；若$S(4,n)=1$，則$S\left(1,(n-3)\right)=S\left(2,(n-2)\right)=S\left(3,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$d_{n-1}$種。由此可知對任意正整數$n\geq 2$，$b_n=b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}$。

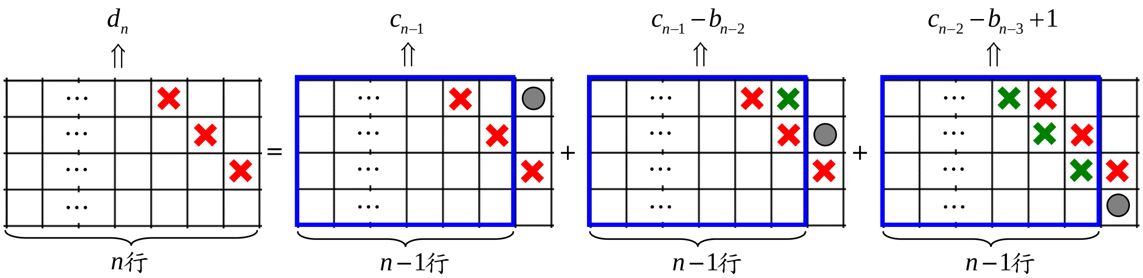


（3） 給定$4\times n$方格圖，已知$S(1,n-1)=S(2,n)=0$，針對第n行的石頭位置進行分類討論。若$S(1,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有b_{n-1}種；若$S(3,n)=1$，則$S\left(1,(n-2)\right)=S\left(2,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭方法數即為$c_{n-1}$再扣除$S(1,n-1)=1$的情形，因此共有$(c_{n-1}-b_{n-2})$種；若$S(4,n)=1$，則$S\left(1,(n-3)\right)=S\left(2,(n-2)\right)=S\left(3,(n-1)\right)=0$，故第1行至第$n-1$行的放石頭方法數即為$d_{n-1}$再扣除$S(1,n-1)=1$的情形，因此共有$(d_{n-1}-c_{n-2})$種。由此可知對任意正整數$n\geq 3$，$c_n=b_{n-1}+\left(c_{n-1}-b_{n-2}\right)+\left(d_{n-1}-c_{n-2}\right)$。



（4） 給定$4\times n$方格圖，已知$S(1,n-2)=S(2,n-1)=S(3,n)=0$，針對第$n$行的石頭位置進行分類討論。若$S(1,n)=1$，則第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$c_{n-1}$種；若$S(2,n)=1$，則$S\left(1,(n-1)\right)=0$，與（3）同理，故第1行至第$n-1$行的放石頭情形共有$(c_{n-1}-b_{n-2})$種；若

$S(4,n)=1$，則 $S(1,(n-3))=S(2,(n-2))=S(3,(n-1))=0$，進一步討論第 $n-1$ 行的石頭位置，當 $S(1,n-1)=1$ 時，則與（3）同理可知第1行至第 $n-2$ 行的放石頭方法數有 $(c_{n-2}-b_{n-3})$ 種，當 $S(4,n-1)=1$ 時，依序可知 $S(4,n-2)=S(4,n-3)=\cdots=S(4,2)=S(4,1)=1$，則第1行至第 $n-2$ 行的放石頭方法數僅有1種情形，故第1行至第 $n-1$ 行的放石頭情形共有 $(c_{n-2}-b_{n-3}+1)$ 種。由此可知對任意正整數 $n\geq 4$，$d_n=c_{n-1}+(c_{n-1}-b_{n-2})+(c_{n-2}-b_{n-3}+1)$。



■

利用上述遞迴關係，可依序求出 a_n、b_n、c_n、d_n 的值，以下表格呈現 $1\leq n\leq 8$ 的數值，可知 $a_8=T(4\times 8)=2227$，這也回答了『森棚教官的數學題』專欄中原始問題的答案即為2227。

a_n,b_n,c_n,d_n 記錄表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	4	13	36	90	212	478	1044	2227
b_n	3	9	23	54	122	266	566	1183
c_n	3	7	17	38	82	174	362	743
d_n	3	7	14	30	62	126	255	511

此外，利用上述 a_n、b_n、c_n、d_n 的遞迴關係，亦可建立 $a_n=T(4\times n)$ 的生成函數，其中 $T(4\times n)$ 的生成函數為 $\dfrac{-x\left(x^7-4x^4+2x^3+3x-4\right)}{(x-1)^2\left(x^6+2x^5+3x^4-x^2-2x+1\right)}$。（因說明書篇幅有 30 頁限制，生成函數的推導細節將於研究記錄簿呈現）。

伍、研究結果

對於 $n\times m$ 的方格圖，每一行恰放一顆石頭，且每一顆石頭的左上角一路延伸方向不可以有別的石頭，討論在此限制條件下，放石頭的所有可能性，令其總數為 $T(n\times m)$。我們透過實際的

操作，進行探究與實作的歷程，發展出具有程序性的方法來建構放石頭的方式，從中觀察出具有一般性的數學結構，進一步完成證明。對於$n\times1$、$n\times2$、$n\times3$、$n\times4$等方格圖，得知$T(n\times1)$、$T(n\times2)$、$T(n\times3)$、$T(n\times4)$皆為n的多項式；此外，對於$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$等方格圖，得知$T(1\times n)$、$T(2\times n)$亦為多項式，而$T(3\times n)$與費氏數列具有相關性。針對$T(4\times n)$，建立遞迴關係式與生成函數。我們將主要的研究結果羅列如下：

（1） 任意正整數n，$T(n\times1)=n$、$T(n\times2)=n^2-n+1$；

（2） 任意正整數$n\geq2$，$T(n\times3)=n^3-3n^2+6n-4$。特別的，$T(1\times3)=1$；

（3） 任意正整數$n\geq3$，$T(n\times4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$。特別的，$T(1\times4)=1$且$T(2\times4)=5$；

（4） 任意正整數n，$T(1\times n)=1$、$T(2\times n)=n+1$；

（5） 任意正整數n，$T(3\times n)=F_{n+5}-n-4$，其中F_{n+5}為費氏數列的第$n+5$項，

意即$T(3\times n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+5}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+5}\right]-n-4$；

（6） 建立$T(4\times n)$的遞迴關係式與生成函數$\frac{-x\left(x^7-4x^4+2x^3+3x-4\right)}{(x-1)^2\left(x^6+2x^5+3x^4-x^2-2x+1\right)}$，並求得原始放石頭問題的答案$T(4\times8)=2227$。

根據本文的 Theorem 1 與 Theorem 2 的結果，我們將目前已知的$n\times m$方格圖放石頭的方法數以下列表格呈現：

$T(n\times m)$ 記錄表

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	m
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	$m+1$
3	3	7	14	26	46	79	133	221	$F_{m+5}-m-4$
4	4	13	36	90	212	478	1044	2227	生成函數
5	5	21	76	246					
6	6	31	140	566					
7	7	43	234	1146					
8	8	57	364	2106					
n	n	n^2-n+1	n^3-3n^2+6n-4	$n^4-6n^3+21n^2-36n+26$					$T(n\times m)$

陸、討論

對於方格圖中的放石頭問題，將可能結果全部列出是一個錯誤率很高也沒有效率的方法，於是我們發展出由 $n\times(m-1)$ 的方格圖中所有可能，推導出 $n\times m$ 的方格圖中的所有可能。但這種方法也有一些缺點，例如：若要算出 $T(n\times m)$ 的值，就需要有 $n\times(m-1)$ 方格圖的所有放石頭的圖形，這顯得此推演方法效率不高。

研究過程中，對於 $n\times3$ 的方格圖，我們利用聯立方程式的解來猜測 $T(n\times3)$ 為三次多項式，因此使用聯立方程式推得 $T(n\times3)=n^3-3n^2+6n-4$ 。為求更有力的證明，於是我們將放石頭的方法分成三類進行討論，分別是『第3行的石頭有 n 個選擇』、『第3行的石頭有 $n-1$ 個選擇』與『第3行的石頭有 $n-2$ 個選擇』，綜合上述三大類型的分類討論計算，可知對 $n\times3$ 的方格圖，放石頭的情形共有 $T(n\times3)=n^3-3n^2+6n-4$ 種，證明此猜想的正確性。延續 $n\times3$ 的分類原則，我們亦求得 $T(n\times4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$ 。對於 $n\times5$ 的方格圖，若繼續採用分類的手法來求得 $T(n\times5)$ ，我們猜想 $T(n\times5)$ 應為五次多項式，但目前仍未有具體的證明方式，也認為隨著行數越高，分類的難度也隨之升高，因此需要發展其他數學分析手法。

此外，對於 $3\times n$ 的方格圖，我們根據第 n 行石頭位置進行分類，依照不同的額外限制，我們定義了放石頭的特殊方法數『 a_n 、 b_n 、 c_n 』，並建立了此三個數列的遞迴關係，從中得知 $<b_n+1>=<F_{n+3}>$ 與 $<c_n>=<F_{n+2}>$ ，兩者皆與費氏數列相關，進一步得知 $a_n=F_{n+5}-n-4$ 。對於 $4\times n$ 的方格圖，我們使用相同的手法來分析放石頭的方法數時，卻僅能建立遞迴關係，透過程式來建立演算法，但對於一般通式仍沒有明確的結果，我們也將持續研究如何刻畫 $T(4\times n)$ 。

柒、結論

在本次『放石頭』的問題中，我們發現了一些規律和關聯，從原本小小的一個題目中探討其規律和公式，也尋找些能夠幫助我們猜想和驗證這個問題的關聯，例如遞迴關係、費氏數列等。在過程中我們試圖從中探索出放石頭的脈絡，並研究是否能具有一般性的結果。為了探討放石頭問題，首先我們先從較小的列數與行數的方格圖進行實作，並記錄放石頭的不同情形。在嘗試各種方法裡，終於找到了一些規律性，從猜測、試驗裡，我們學習了遞迴關係、聯立方程式、多項

式、費氏數列等數學知識，最後我們終於找到了最初我們想找出的公式，雖然並沒有完全解決這個問題，但從研究的過程中，體會整個『探究與實作』的過程，從舉例、觀察、歸納、提出猜想並完成證明，這個歷程讓我們體會到數學研究的樂趣與腦力激盪的成就感。數學總是一個浩瀚無垠的學科，縱使沒有解決所有的問題，卻始終令人著迷，無悔的沉浸在研究的時空裡，但願有天能看見此問題完全被解決的一天，即便是多年之後，我們的內心還是會深刻的悸動著吧！

未來展望

對於任意正整數 n ，持續探討 $T(4\times n)$ 的一般式是我們要努力研究的目標，研究 $T(4\times n)$ 是否仍與費氏數列有相關性，或是與其他的數列有連結？除了利用解聯立方程式或是建立遞迴關係以外，是否有更好的數學工具可以用來『有效率的』分析 $T(n\times m)$ 的量。若能順利研究 $T(n\times m)$ 的一般性，則是否能將原始放石頭問題推廣到空間的立方體或長方體中，其數量是否也與某些特定的數列有相關，則是我們後續的研究重點。此外，引進生成函數的觀點，建立 $T(4\times n)$ 的生成函數，希望能從中求得 $T(4\times n)$ 的一般式，亦是後續的研究目標。

捌、參考資料及其他

1. 游森棚，森棚教官的數學題，科學研習月刊，第 56 卷第 11 期，2017 年 11 月。
2. 許介彥，數學悠哉遊，三民書局，2011 年。
3. 國民中學數學，第二、三、四冊，翰林出版社。
4. 普通高級中學數學，第一、二冊，南一出版社。
5. 賴東昇，再談費氏數列，科學月刊，第六卷第十期，1975 年。
6. 吳振奎，斐波那契數列，九章出版社，1993 年。

【評語】030412

考慮在 n×m 的棋盤中放置棋子，在滿足對任一個放置的棋子，其左斜上方都不會有其它棋子（也就是說，在同一條斜率為-1 的直線上，最多只能放置一個棋子。）的限定條件下，所能放置的棋子的個數的最大可能值。針對 n≤4 或 m≤4 的情況，給出了完整的解答。這是一個很有趣又具有一定難度的問題。作者藉由分類與遞迴的想法，對 n≤4 或 m≤4 的棋盤作了詳盡的分析。說理清楚而且有條理，值得稱許。對於 n≤4 的棋盤，作者採用的是以最後一行為基準的分類討論的方式，這當然也是處理問題的一種好方法，但是這樣的技巧在 n 越來越大時會越來越複雜而難以處理。是否可以有一個更簡潔、更有系統的處理方式？（例如：利用取捨原理）如果能獲得這樣的一個成果，會是相當優秀的作品。

作品海報

動　機

在『科學研習月刊』內容中，從游森棚教授主筆的『森棚教官的數學題』專欄，接觸了第56卷第11期中『放石頭』這個有趣的問題。如何精確算出所有符合規則的放石頭可能性很困擾我們，但也燃起了我們對於數學現象的求知渴望，因此我們決定投入此研究，先從較小的行數與列數進行探索，希望能從實作的過程中找出擺放石頭的策略與規律，進而得出一般性的結論。研究過程中我們運用第二冊聯立方程式、第三冊多項式與第四冊數列與級數等單元的概念。

目　的

在大小為$n\times m$的方格圖中，『每一行恰放置一顆石頭』且『每顆石頭的左上角方向一路延伸都不可以有別的石頭』，這表示『當$S(i_1,j_1)=1$且$S(i_2,j_2)=1$時，則$i_1-j_1\neq i_2-j_2$』。符合規定下，我們將所有放石頭的方法數記為『$T(n\times m)$』。

我們的研究目的為：（1）對於正整數n，建立$T(n\times1)$、$T(n\times2)$、$T(n\times3)$、$T(n\times4)$與$T(n\times5)$的一般通式；

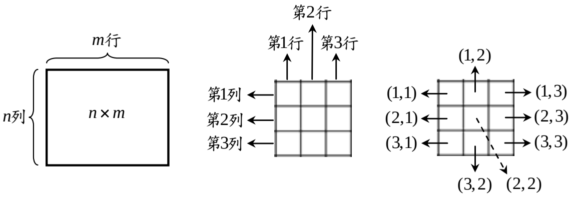
（2）對於正整數n，建立$T(1\times n)$、$T(2\times n)$、$T(3\times n)$的一般通式與$T(4\times n)$的遞迴關係與生成函數。

研究過程與方法

基本名詞解釋

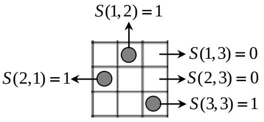
方格圖的位置記號

在方格圖中，若方格圖的列數為n、行數為m，則我們將此方格圖的大小計為『$n\times m$』，對於方格圖中不同的位置，我們將第i列第j行的位置用序對『(i,j)』表示。為了表示方格圖中第i列第j行的位置是否有放石頭，若(i,j)的位置有擺放石頭，記為『$S(i,j)=1$』；反之，若(i,j)的位置沒有擺放石頭，則記為『$S(i,j)=0$』。



例如：考慮3×3的已擺放石頭的方格圖，如右圖。可知$S(1,2)=S(2,1)=S(3,3)=1$；

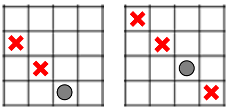
$S(1,1)=S(1,3)=S(2,2)=S(2,3)=S(3,1)=S(3,2)=0$。



放石頭問題的條件限制

在給定的方格圖中，每一行皆需放一顆石頭，並且滿足每一顆石頭的左上角方向一路延伸都不可以有別的石頭，以下舉例說明。

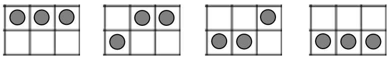
例如：如右圖4×4的方格圖所示，因為$S(4,3)=1$，所以$(3,2)$與$(2,1)$的位置皆不能擺放石頭。



放石頭的方法總數

在條件限制之下，考慮所有不同放石頭的情形，對於$n\times m$的方格圖，將所有放石頭的方法數記為『$T(n\times m)$』。

例如：考慮2×3的方格圖，所有放石頭的情形共有4種，因此$T(2\times3)=4$。

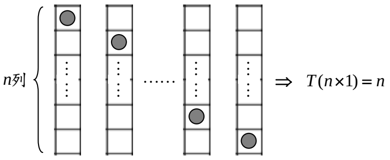


簡單例子的啟蒙

為了探討放石頭問題，首先我們先從列數與行數較小的方格圖進行實作，記錄放石頭的不同情形，從中觀察並發展分類方式，進一步獲得具有一般性的結論。

$T(n\times1)$

考慮$n\times1$的方格圖，可知第一行的石頭，共有n個位置可以選擇擺放，故$T(n\times1)=n$。

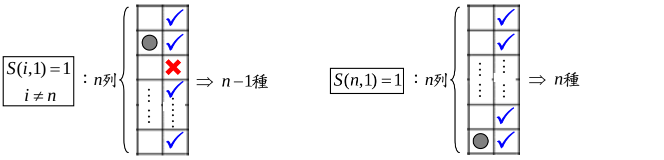


$T(n\times2)$

考慮$n\times2$的方格圖，第一行的石頭共有n種情形。針對每一種情形，可直接計算第二行擺放石頭的可能性：

（1）當$S(i,1)=1$時，其中$i\neq n$，因為$S(i+1,2)=0$且$i+1\leq n$，所以第二行的石頭僅有位置$(i+1,2)$不可擺放，所以第二行的石頭共有$n-1$個可能性。

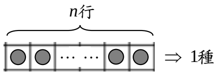
（2）當$S(n,1)=1$時，可知第二行的石頭沒有任何限制，故共有n個可能性。



可知共有$(n-1)\times(n-1)+n=n^2-n+1$種可能性，故$T(n\times2)=n^2-n+1$。

$T(1\times n)$

考慮$1\times n$的方格圖，由於每一行的石頭皆只有一個位置可以擺放，故$T(1\times n)=1$。



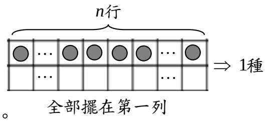
$T(2\times n)$

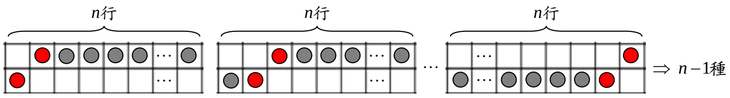
考慮$2\times n$的方格圖，我們可將放石頭的情形分成三種類型：

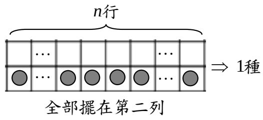
（1）對於$1\leq j\leq n$，滿足$S(1,j)=1$，即每一行的石頭皆擺在第一列的位置；

（2）對於$1\leq j\leq n$，滿足$S(2,j)=1$，即每一行的石頭皆放在第二列的位置；

（3）存在某一個j，滿足$S(2,j)=1$且$S(1,j+1)=1$，意即第j行與第$j+1$行的石頭為先下後上。







可知，$2\times n$的方格圖共有$1+1+(n-1)=n+1$種可能性，故$T(2\times n)=n+1$。

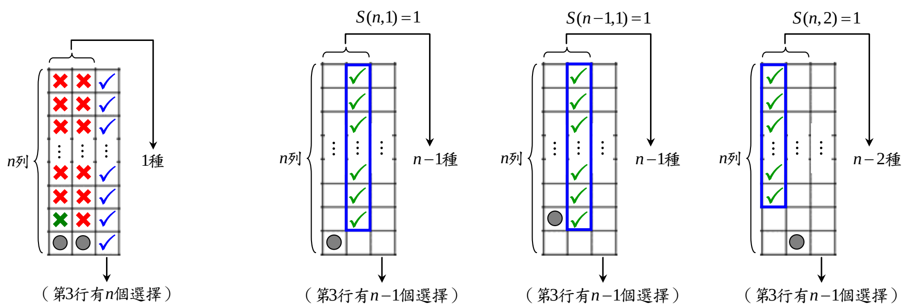
Theorem 1

對任意正整數n，$T(n\times1)=n$、$T(n\times2)=n^2-n+1$。對任意正整數$n\ge2$，$T(n\times3)=n^3-3n^2+6n-4$，特別的，$T(1\times3)=1$。
對任意正整數$n\ge3$，$T(n\times4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$，特別的，$T(1\times4)=1$，$T(2\times4)=5$。
對任意正整數$n\ge3$，$T(n\times5)=n^5-10n^4+55n^3-170n^2+290n-212$，特別的，$T(1\times5)=1$，$T(2\times5)=6$。

$T(n\times3)$

令$n\ge2$，考慮$n\times3$的方格圖，根據第1行與第2行的石頭位置，決定第3行石頭擺放的可能性，因此我們分成三大類討論，分別是『第3行的石頭有n個選擇』、『第3行的石頭有$n-1$個選擇』與『第3行的石頭有$n-2$個選擇』。

（1）第3行的石頭有n個選擇　（2）第3行有$n-1$個選擇，則『$S(n,1)=1$』、『$S(n-1,1)=1$』、『$S(n,2)=1$』恰有一個成立。



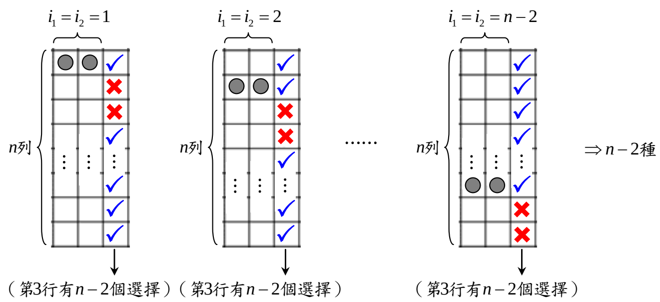
前兩行共有$(n-1)+(n-1)+(n-2)=3n-4$種情形使得第3行的石頭共有$n-1$個抉擇，故共有$(3n-4)(n-1)$種擺放石頭的可能性。

（3）第3行的石頭有$n-2$個選擇

將第1、2行的石頭位置分為『$i_1=i_2$(水平)』、『$i_1<i_2$(先上後下)』和『$i_1>i_2$(先下後上)』三類。

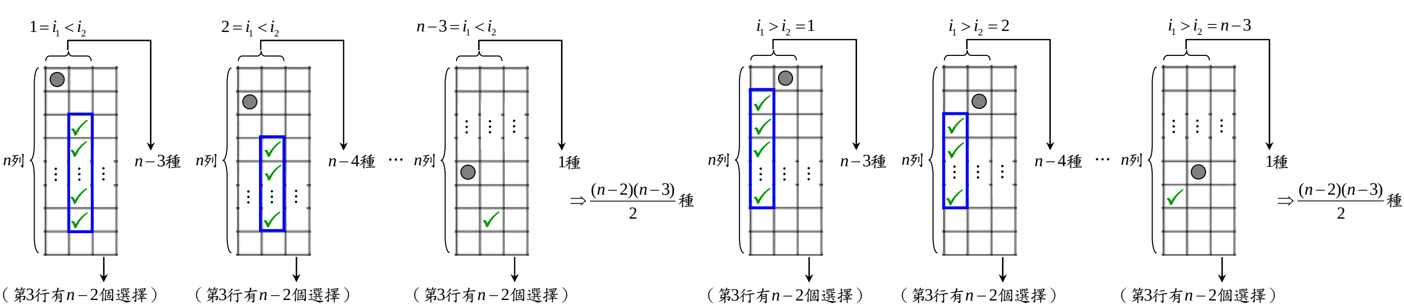
1. 考慮$i_1=i_2$，因為第3行的位置需被前兩行石頭所影響，所以$1\le i_1=i_2\le n-2$，因此前兩行石頭呈現水平狀態共有$n-2$種情形。

2. 考慮$i_1<i_2$，因為前兩行的石頭必須皆影響到第3行，所以$1\le i_1\le n-3$且$1\le i_2\le n-1$，故可得$i_1+2\le i_2\le n-1$，而當$i_1=1$時，共有$n-3$種情形；當$i_1=2$，共$n-4$種情形；依此類推，當$i_1=k$時，則$k+2\le i_2\le n-1$，共$n-k-2$種情形；當$i_1=n-3$時，則有1種情形。由此可知共有
$(n-3)+(n-4)+\cdots+3+2+1=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形。



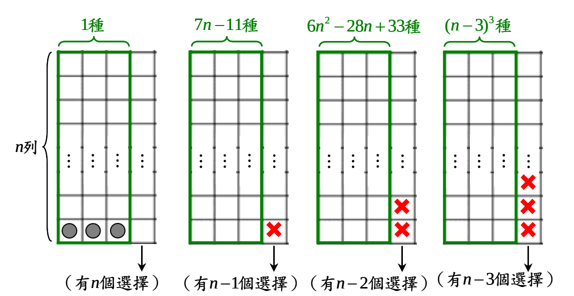
3. 考慮$i_1>i_2$，因前兩行的石頭必須影響第3行，所以$1\le i_2\le n-3$且$i_2+1\le i_1\le n-2$。當$i_2=1$時，共有$n-3$種情形；當$i_2=2$，共$n-4$種情形；依此類推，當$i_2=k$時，則$k+1\le i_1\le n-2$，共$n-k-2$種情形；當$i_2=n-3$時，則有1種情形。
由此可知共有$(n-3)+(n-4)+\cdots+3+2+1=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$種情形。

前兩行共有$(n-2)+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}+\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}=(n-2)^2$種情形使第3行的石頭有$n-2$個抉擇，故共有$(n-2)^3$種放石頭的可能性。



因此當$n\ge2$時，$n\times3$的方格圖共有$n+(3n-4)(n-1)+(n-2)^3=n^3-3n^2+6n-4$種不同的放石頭情形。
亦即當$n\ge2$時，$T(n\times3)=n^3-3n^2+6n-4$。特別的，$T(1\times3)=1$。

$T(n\times4)$



令$n\ge3$，考慮$n\times4$的方格圖，將前三行的石頭將造成第4行的石頭『有n個選擇』、『有$n-1$個選擇』、『有$n-2$個選擇』與『有$n-3$個選擇』四大類。
（1）當第4行有n種選擇時，前3行共有1種情形。
（2）當第4行有$n-1$種選擇時，前3行共有$7n-11$種情形。
（3）當第4行有$n-2$種選擇時，前3行共有$6n^2-28n+33$種情形。
（4）當第4行有$n-3$種選擇時，前3行共有$(n-3)^3$種情形。

因此當$n\ge3$時，$n\times4$的方格圖共有$n+(n-1)(7n-11)+(n-2)(6n^2-28n+33)+(n-3)(n-3)^3=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$種不同的放石頭情形。
亦即當$n\ge3$時，$T(n\times4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$。特別的，$T(1\times4)=1$，$T(2\times4)=5$。

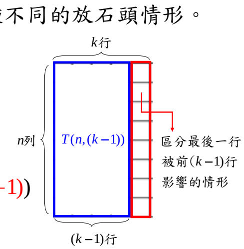
$T(n\times5)$

當$n\ge3$時，$T(n\times5)=n^5-10n^4+55n^3-170n^2+290n-212$。
特別的，$T(1\times5)=1$，$T(2\times5)=6$。

Corollary

對任意正整數k，$T(n\times k)$為n的k次多項式。

$T(n\times k)=A_0\times n+A_1\times(n-1)+A_2\times(n-2)+\cdots+A_{k-1}\times(n-(k-1))$
其中$A_0+A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}=T(n\times(k-1))$



Theorem 2

令 $<F_n>$ 為費氏數列 。

對任意正整數 n ，$T(1\times n)=1$ 、$T(2\times n)=n+1$ 、$T(3\times n)=F_{n+5}-n-4$ 。

費氏數列的一般式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

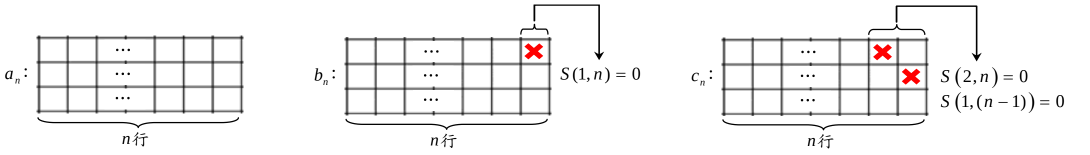
$T(3\times n)$

針對$3\times n$的方格圖，考慮在不同額外限制條件下放石頭的情形，以下我們定義三個數列 $<a_n>$ 、$<b_n>$ 、 $<c_n>$:

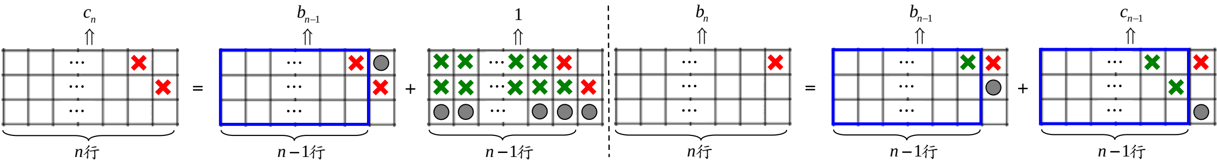
（1）$a_n=T(3\times n)$

（2）$b_n=$ 若限制$S(1,n)=0$ ，則放石頭的特殊方法數。

（3）$c_n=$ 令$n\geq 2$ ，若限制$S\left(1,(n-1)\right)=S(2,n)=0$ ，則放石頭的特殊方法數 。特別的，定義$c_1=2$ 。



b_n與c_n的關係：對任意正整數$n\geq 2$ ，$\begin{cases}c_n=b_{n-1}+1\\ b_n=b_{n-1}+c_{n-1}\end{cases}$ ，其中$b_1=2$ ，$c_1=2$ 。



b_n 、c_n與費氏數列的關係：

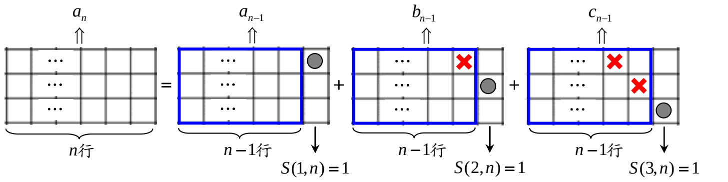
對任意正整數n ，數列 $<b_n+1>$ 即為費氏數列，其中b_n+1 為費氏數列的第$n+3$項F_{n+3} 。

對任意正整數n ，數列 $<c_n>$ 即為費氏數列，其中c_n為費氏數列的第$n+2$項F_{n+2} 。

$$b_n=b_{n-1}+c_{n-1}=b_{n-1}+\left(b_{n-2}+1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$b_n+1=\left(b_{n-1}+1\right)+\left(b_{n-2}+1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$$

Fibonacci Number

a_n 的三大類型：對任意正整數$n\geq 2$ ，$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$ ，其中$a_1=3$ ，$b_1=2$ ，$c_1=2$ 。



a_n 的遞迴關係：對任意正整數$n\geq 2$ ，$a_n=a_{n-1}+F_{n+3}-1$ ，其中$a_1=3$ 。

考慮正整數$n\geq 3$ ，因為$b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$ ，$c_n=b_{n-1}+1$且$b_n+1=F_{n+3}$ ，其中F_{n+3}為費氏數列的第$n+3$項。

因為$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-1}+\left(b_{n-2}+1\right)=a_{n-1}+\left(F_{n+2}-1\right)+F_{n+1}=a_{n-1}+F_{n+3}-1$ ，所以可得$a_n=a_{n-1}+F_{n+3}-1$ 。

特別的，當$n=2$時，$a_2=a_1+F_5-1=3+5-1=7$ 亦成立。

a_n 與費氏數列的關係：對任意正整數n ，$a_n=F_{n+5}-n-4$ 。

$$\begin{array}{rrcllll}
 & a_n & = & a_{n-1} & + & F_{n+3} & - & 1\\
 & a_{n-1} & = & a_{n-2} & + & F_{n+2} & - & 1\\
 & \vdots & & & & & & \\
 & a_3 & = & a_2 & + & F_6 & - & 1\\
+) & a_2 & = & a_1 & + & F_5 & - & 1\\
\hline
\Rightarrow & a_n & = & \multicolumn{5}{l}{a_1+\left(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_5\right)-(n-1)}
\end{array}$$

(遞迴式加總)

當$n\geq 2$時 ，將這$n-1$個遞迴式相加後可得$a=a_1+\left(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_5\right)-(n-1)$ 。

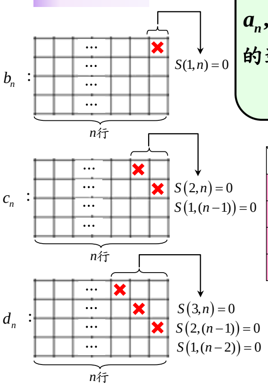
根據費氏數列的加總特性，由此可推論

$$a_n=a_1+\left(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_5\right)-(n-1)=3+\left(F_{n+3}+F_{n+2}+\cdots+F_5\right)+8-(n-2)-8$$
$$=3+F_{n+5}-(n-1)-8=F_{n+5}-n-4$$

特別的，當$n=1$時，因為$a_1=3$ ，$F_6=8$ 且$a_1=F_6-1-4$ 。

所以對任意正整數，$a_n=F_{n+5}-n-4$恆成立。

$T(4\times n)$



a_n,b_n,c_n,d_n 的遞迴關係：

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1} & ,\quad n\geq 2\\ b_n=b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1} & ,\quad n\geq 2\\ c_n=b_{n-1}+\left(c_{n-1}-b_{n-2}\right)+\left(d_{n-1}-c_{n-2}\right) & ,\quad n\geq 3\\ d_n=c_{n-1}+\left(c_{n-1}-b_{n-2}\right)+\left(c_{n-2}-b_{n-3}+1\right), & \quad n\geq 4\end{cases}$$

$T(4\times n)$的生成函數

$$\frac{-x\left(x^7-4x^4+2x^3+3x-4\right)}{(x-1)^2\left(x^6+2x^5+3x^4-x^2-2x+1\right)}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	4	13	36	90	212	478	1044	2227
b_n	3	9	23	54	122	266	566	1183
c_n	3	7	17	38	82	174	362	743
d_n	3	7	14	30	62	126	255	511

在 n 代入 $0,1,2,3,4,\cdots$ 且不考慮係數正負，全部相加的總和。

$T(n\times m)$ 記錄表

	1	2	3	4	5	6	7	8	m
1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
2	2	3	4	5	6	7	8	9	$m+1$
3	3	7	14	26	46	79	133	221	$F_{m+5}-m-4$
4	4	13	36	90	212	478	1044	2227	**生成函數**
5	5	21	76	246	738				
6	6	31	140	566	2104				
7	7	43	234	1146	5150				
8	8	57	364	2106	11196				
n	n	n^2-n+1	n^3-3n^2+6n-4	$n^4-6n^3+21n^2-36n+26$	✓				$T(n\times m)$

研 究 結 果

（1）$T(n\times 1)=n$ 、$T(n\times 2)=n^2-n+1$ 、$T(1\times n)=1$ 、$T(2\times n)=n+1$ ；

（2）$n\geq 2$ ，$T(n\times 3)=n^3-3n^2+6n-4$ 。$T(1\times 3)=1$ ；

（3）$n\geq 3$ ，$T(n\times 4)=n^4-6n^3+21n^2-36n+26$ ；

$T(n\times 5)=n^5-10n^4+55n^3-170n^2+290n-212$ ；

（4）$T(3\times n)=F_{n+5}-n-4$ ，其中F_{n+5}為費氏數列第$n+5$項；

（5）求得$T(4\times n)$的遞迴關係與生成函數。

參 考 文 獻

1. 科學研習月刊，森棚教官的數學題，第56卷，第11期，2017年11月。
2. 許介彥，數學悠哉遊，三民書局，2011年。
3. 國民中學數學，第一、二、三、四冊，翰林出版社。
4. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊，南一出版社。
5. 賴東昇，再談費氏數列，科學月刊，第六卷第十期，1975年。
6. 吳振奎，斐波那契數列，九章出版社，1993年。