中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030411

活「菱」活現，獨「菱」風騷

學校名稱：臺中市立爽文國民中學

作者：	指導老師：
國二 趙冠昕	陳曉慧
國二 羅垣鈞	陳怡如
國二 陳沛穎	

關鍵詞：共頂點、菱形、級數

摘要

本研究主要目的是要用快速的方法算出正三角形或特殊菱形中的菱形總數，我們參考過去科展優勝作品專輯，發現全國第五十一屆科展國中數學組有類似的內容，他們是以共頂點分層計算法找出其規律性，經觀察後發現每一層與層之間的和會形成公差為(-2)的等差數列，然後再利用等差級數求和及推導通式。我們的研究比較複雜，雖然採用了他們共頂點的算法，但我們的結果卻無法形成等差數列，因此，我們運用「拆解共頂點」的方式推導出正三角形和特殊菱形中菱形總數的通式，再進一步把圖形加上橫槓，並推出加上橫槓後的通式，但在菱形中的菱形(加橫槓)的研究中，因無法使用「拆解共頂點」的方式，所以只好尋求其他的方式來計算。

壹、研究動機

在國中第四冊的數學課本中有提到圖形的樣式與規律，恰巧想起多年前曾在網路上看到一篇文章在探討羅浮宮前的金字塔壁上一共有幾個菱形？仔細想想，日常生活中也有許多物品上的圖案是由相同的幾何圖形所排列而成，例如：鐵絲網、電蚊拍、瓷磚、烤肉網……。於是數學老師建議我們可以找一找資料，於是充滿好奇心的我們去翻高中課本的排列組合，而我們從中發現有矩形中找矩形的題目，就想是否限縮到正方形中找正方形，發現已經有相當多的研究，於是我們就把正方形「壓」成菱形。接著找到科展的文獻，有人計算三角形中的三角形總數，最後找出從等分點數求三角形總數的公式。我們開始思考可否利用等分點數的概念從正三角形、特殊菱形的等分點數快速求出內含菱形總數規律及通式。

貳、研究目的

一、探討正三角形中內含菱形的規律。

二、探討特定菱形中內含菱形的規律。

三、探討計算正三角形中內含菱形的總數。

四、探討計算特定菱形中內含菱形的總數。

參、研究設備

電腦、紙、筆、Geogebra、Word、Excel、PowerPoint、USB

肆、研究過程

***以下所述之菱形內角皆為 120 度、60 度、120 度、60 度，三角形皆為正三角形。**

一、定義三角形各邊等分點的分割方式：

將一三角形各邊取相同數量的等分點後，把這些等分點與底邊(粗紅線處)連接起來，連線即形成一個完成分割的三角形，（圖 1）為每邊取 1 個等分點所形成的分割圖；（圖 2）為每邊取 2 個等分點所形成的分割圖（設等分點數為 n），圖 1 為 n=1，圖 2 為 n=2。

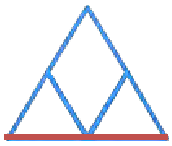


圖 1

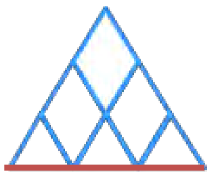
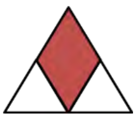


圖 2

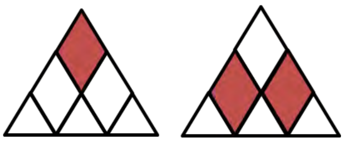
二、探討三角形中內含菱形的總數：

$\boxed{\text{步驟一}}$ 以分解的方式計算三角形中的菱形總數：

n = 1 時，所形成的分割圖中的菱形總數為 1 個，如下圖

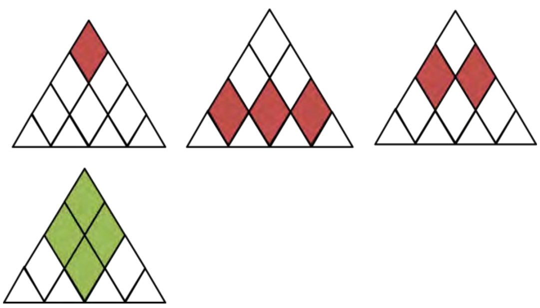


n = 2 時，所形成的分割圖中的菱形總數為紅色 3 個（邊長為 1），如下圖



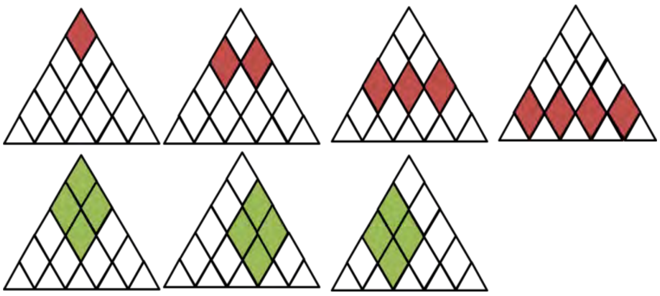
n = 3 時，所形成的分割圖中的菱形總數為紅色 6 個（邊長為 1），

綠色 1 個（邊長為 2），共 7 個菱形，如下圖



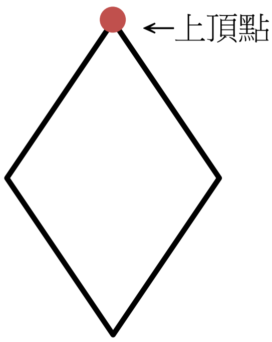
n = 4 時，所形成的分割圖中的菱形總數為紅色 10 個（邊長為 1），

綠色 3 個（邊長為 2），共 13 個菱形，如下圖



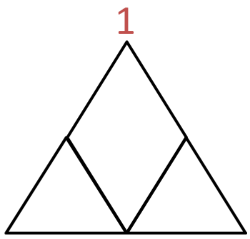
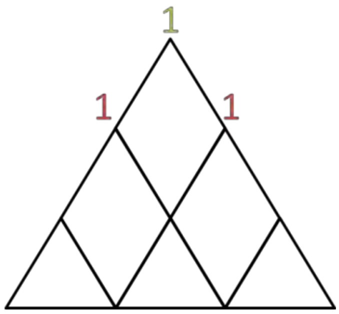
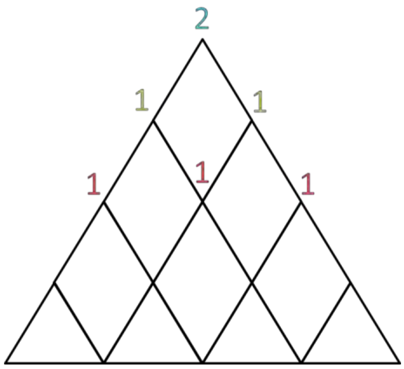
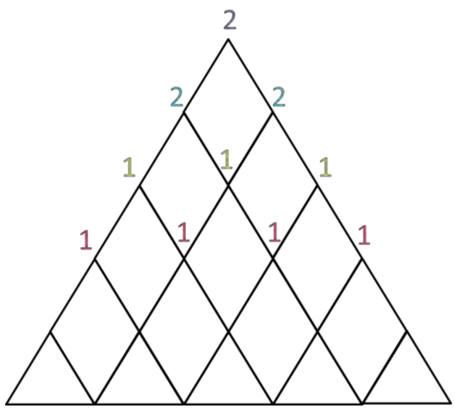
步驟二　將步驟一的結果製成表格，如下表

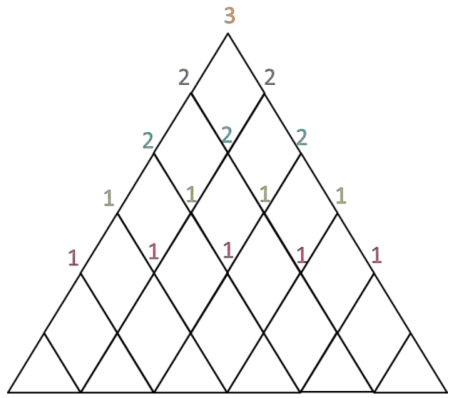
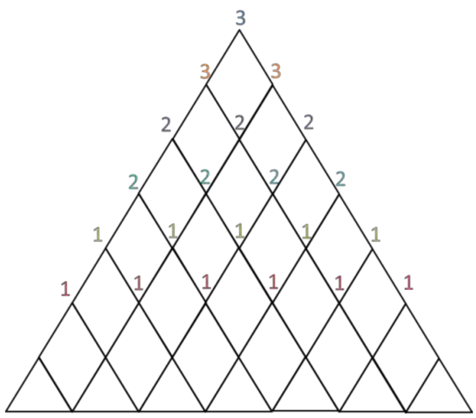
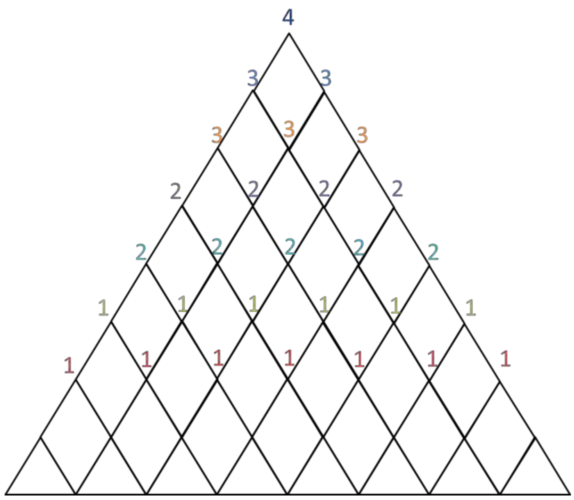
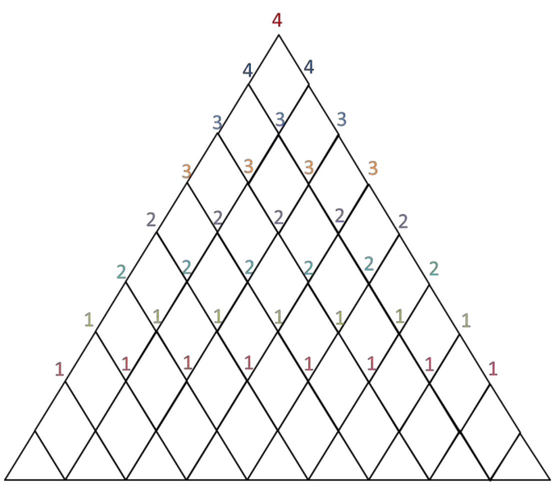
n	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	菱形總數
1	1					**1**
2	3					**3**
3	6	1				**7**
4	10	3				**13**
5	15	6	1			**22**
6	21	10	3			**34**
7	28	15	6	1		**50**
8	36	21	10	3		**70**
9	45	28	15	6	1	**95**



步驟三

由步驟二可知，如果每個三角形內的菱形總數都一個一個算，不僅很慢、容易算錯，也會有漏算的情形。因此，我們就找找看是否有規律可循，就發現可以用菱形共頂點的特性，減少漏算的機會。每個菱形都各有上、下、左、右四個頂點，我們在相交點旁邊寫出數字，代表該點是幾個菱形的上頂點(如右上圖)，由於每個菱形只有一個上頂點，所以只要找出上頂點的總數就能算出菱形的總數。

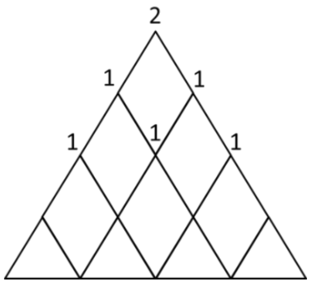
共點數圖	等分點數 n	菱形總數
	**1**	**1**
	**2**	**3**
	**3**	**7**
	**4**	**13**

	**5**	**22**
	**6**	**34**
	**7**	**50**
	**8**	**70**

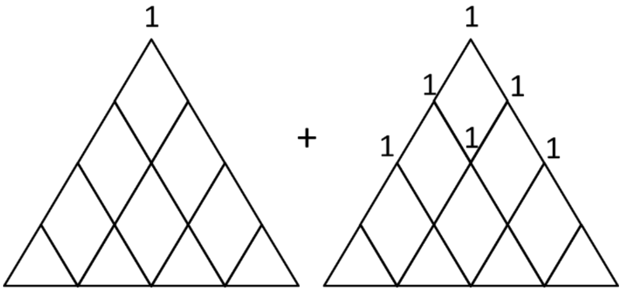
步驟四

我們可以使用「拆解共頂點」的方式把不同大小的菱形個別獨立出來，這裡

以 n=3 為例：

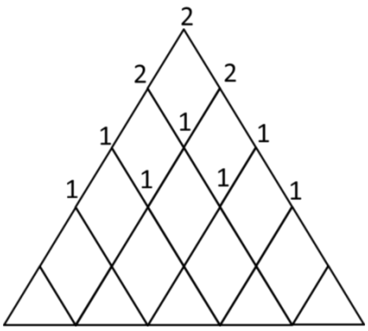


可拆解成：

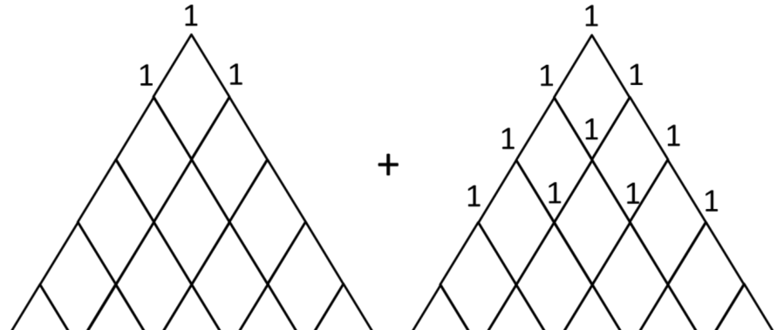


這樣子把菱形個數整理後就變成了：1+(1+2+3)=7

以 n=4 為例：



可拆解成：



把菱形個數整理後就變成了：(1+2)+(1+2+3+4)=13

步驟五

將 n 為奇數時的狀況和為偶數時的狀況分開找公式。

當 n 為奇數時 → 設 n=2k-1

n=1➔1

n=3➔1+(1+2+3)

n=5➔1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)

n=7➔1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5) +(1+2+3+4+5+6+7)

⋮

n=2k-1➔1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5) +⋯+(1+2+⋯+2k-1)

由此可見，這個 1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5) +⋯+(1+2+⋯+2k-1)就是我們要找的答案，於是把它列為公式就會變成下面的樣子：

1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5) +⋯+(1+2+⋯+2k-1)

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)(1+2i-1)}{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(2i^2-i)$$ 〈註1〉

$$=2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{3k(k+1)}{6}$$

$$=\frac{k(k+1)(4k+2-3)}{6}$$

$$=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

因此

1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5) +⋯+(1+2+⋯+2k-1) $=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}\ (*)$

對於所有自然數 k，我們希望(*)恆成立，所以我們採用數學歸納法來證明:

1.當 k=1 時，左式=1 = $\frac{1(1+1)(4-1)}{6}=1=$ 右式，命題成立

2.設 k=m 時成立，則得左式=$1+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+2m-1)$

$$=\frac{m(m+1)(4m-1)}{6}=\text{右式}$$

3.當 k=(m+1)時，

左式$=1+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+2m-1)+[1+2+\cdots+2m-1+2(m+1)-1]$

$$=\frac{m(m+1)(4m-1)}{6}+\frac{(2m+1)(2m+2)}{2}$$

$$=\frac{(m+1)[m(4m-1)+6(2m+1)]}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(4m^2-m+12m+6)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(4m^2+11m+6)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(4m+3)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)[(m+1)+1][4(m+1)-1]}{6}=\text{右式成立}$$

因此，由數學歸納法得知，對任意正整數 k 都成立

再來把 n 代回去 (因為 n=2k-1，所以 k=$\frac{n+1}{2}$)，得到以下列式：

$1+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)\ +\cdots+(1+2+\cdots+n)$

$$=\frac{\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{n+1}{2}+1\right)[(2n+2)-1]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\left(\frac{n+3}{2}\right)(2n+1)}{12}=\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$$

當 n 為偶數時→設 n=2k

n=2→(1+2)

n=4→ (1+2)+(1+2+3+4)

n=6→ (1+2)+(1+2+3+4)+ (1+2+3+4+5+6)

n=8→ (1+2)+(1+2+3+4)+ (1+2+3+4+5+6) + (1+2+3+4+5+6+7+8)

⋮

n=2k→ (1+2)+(1+2+3+4)+⋯+ (1+2+⋯+2k)

由此可見，這個(1+2)+(1+2+3+4)+⋯+ (1+2+⋯+2k)就是我們要找的答案，

於是把它列為公式就會變成下面的樣子：

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{2i(1+2i)}{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(2i^2+i) \qquad \text{〈註1〉}$$

$$=2\bullet\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{3k(k+1)}{6}$$

$$=\frac{k(k+1)(4k+2+3)}{6}$$

$$=\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}$$

因此

(1+2)+(1+2+3+4) +⋯+(1+2+3+⋯+2k) $=\dfrac{\mathrm{k(k+1)(4k+5)}}{6}\ (*)$

對於所有自然數 k，我們希望(*)恆成立，所以我們採用數學歸納法來證明:

1.當 k=1 時，左式=1+2=3= $\dfrac{1(1+1)(4+5)}{6}=3=$ 右式，命題成立

2.設 k=m 時成立，則得左式=$(1+2)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3\ldots+2\mathrm{m})$

$$=\frac{\mathrm{m(m+1)(4m+5)}}{6}=\text{右式}$$

3.當 k=(m+1)時，

左式=$(1+2)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3+\cdots+2\mathrm{m})+[1+2+3+4+\cdots+$

$+2(\mathrm{m}+1)]$

$$=\frac{\mathrm{m(m+1)(4m+5)}}{6}+\frac{(2\mathrm{m}+2)(2\mathrm{m}+2+1)}{2}$$

$$=\frac{(\mathrm{m}+1)[\mathrm{m}(4\mathrm{m}+5)+6(2\mathrm{m}+3)]}{6}$$

$$=\frac{(\mathrm{m}+1)(4\mathrm{m}^2+5\mathrm{m}+12\mathrm{m}+18)}{6}$$

$$=\frac{(\mathrm{m}+1)(4\mathrm{m}^2+17\mathrm{m}+18)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)[(m+2)(4m+9)]}{6}$$

$$=\frac{(m+1)[(m+1)+1][4(m+1)+5]}{6}=\text{右式成立}$$

因此，由數學歸納法得知，對任意正整數 k 都成立

再來把 n 代回去 (因為 n=2k，所以 k=$\frac{n}{2}$)，得到以下列式

(1+2)+(1+2+3+4) +⋯+(1+2+3+⋯+n)

$$=\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(2n+5)}{6}=\frac{n\left(\frac{n+2}{2}\right)(2n+5)}{12}=\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$$

由上方公式得知：

在正三角形中：

如果等分點數 n 為奇數時，正三角形內的菱形個數為 $\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$ 個

如果等分點數 n 為偶數時，正三角形內的菱形個數為 $\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$ 個

註1 ： $\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

利用 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 證明

證明如下：

$$2^3=\cancel{(1+1)^3}=1^3+3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2+1^3$$

$$3^3=\cancel{(2+1)^3}=\cancel{2^3}+3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2+1^3$$

$$4^3=\cancel{(3+1)^3}=\cancel{3^3}+3\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1^2+1^3$$

$$5^3=\cancel{(4+1)^3}=\cancel{4^3}+3\cdot4^2\cdot1+3\cdot4\cdot1^2+1^3$$

$$6^3=\cancel{(5+1)^3}=\cancel{5^3}+3\cdot5^2\cdot1+3\cdot5\cdot1^2+1^3$$

$$\vdots$$

$$+)\quad (k+1)^3=\cancel{k^3}+3\cdot k^2\cdot1+3\cdot \mathrm{k}\cdot1^2+1^3$$

$$(k+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)+3(1+2+3+\cdots k)+k$$

設 $(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)=A$

$$(k+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)+3(1+2+3+\cdots k)+k$$

$$(k+1)^3=1+3A+3\frac{k(k+1)}{2}+k$$

$$(k+1)^3-3\frac{k(k+1)}{2}-1-k=3A$$

$$\frac{(k+1)^3-3\frac{k(k+1)}{2}-1-k}{3}=A$$

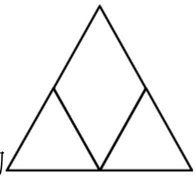
$$\frac{2(k+1)^3-3k(k+1)-2(k+1)}{6}=A$$

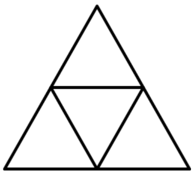
$$\frac{(k+1)[2(k+1)^2-3k-2]}{6}=A$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k)}{6}=A \quad\rightarrow\quad \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=A$$

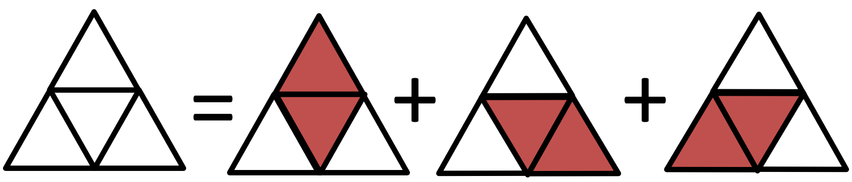
我們得知：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

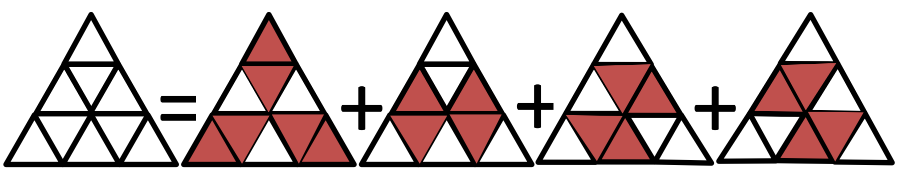
我們接著想，若三角形中有橫槓時又會有何種情形，因此將現有的

加上橫槓，變成後，想知道是否能找出通式。

n=1 的情形，共有 3 個菱形

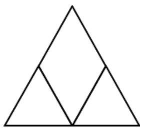


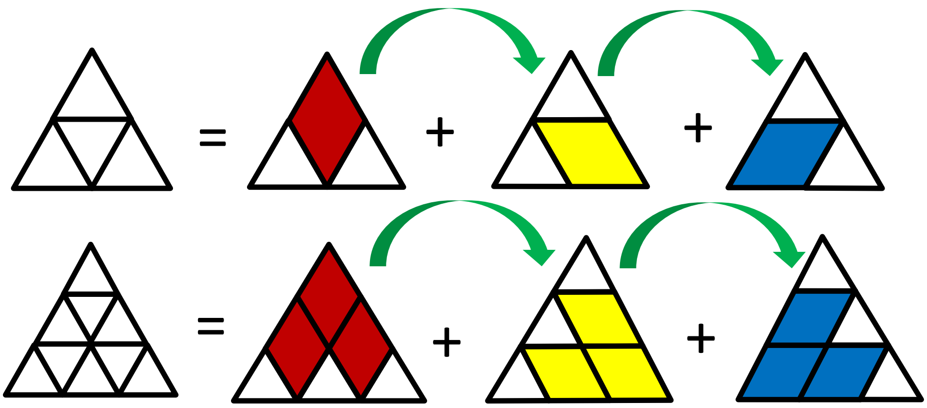
n=2 的情形，共有 9 個菱形



n	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	菱形總數
1	3					**3**
2	9					**9**
3	18	3				**21**
4	30	9				**39**
5	45	18	3			**66**
6	63	30	9			**102**
7	84	45	18	3		**150**
8	108	63	30	9		**210**
9	135	84	45	18	3	**285**

從窮舉的過程中發現，三角形加橫槓中的菱形數量會是沒有加橫槓的三倍，但細數過程是複雜的，因此，我們試著用證明的方式求得通式。

結果發現，將一個三角形旋轉成三個方向並重疊(如下圖)，我們發現只要將  中的菱形總數乘以 3 倍，就可以算出三角形中有橫槓的菱形個數。



所以把沒加槓的三角形的奇數及偶數公式乘以三，整理如下

當 n 為奇數時：

$$3\cdot\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$$

$$=\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{8}$$

$\boxed{\text{當 n 為偶數時}}$：

$$3 \cdot \frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$$

$$= \frac{n(n+2)(2n+5)}{8}$$

由上方公式得知：

在加槓的正三角形中：

如果等分點數 n 為奇數時，正三角形內的菱形個數為 $\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{8}$ 個

如果等分點數 n 為偶數時，正三角形內的菱形個數為 $\frac{n(n+2)(2n+5)}{8}$ 個

三、定義菱形各邊等分點的分割方式：

將一菱形各邊取相同數量的等分點後，把這些等分點與對邊連接起來（圖 3），連線即形成一個完成分割的菱形，（圖 4）為每邊取 1 個等分點所形成的分割圖；（圖 5）為每邊取 2 個等分點所形成的分割圖〈設等分點數為 n〉

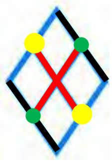


圖 3

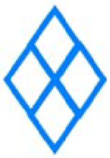


圖 4

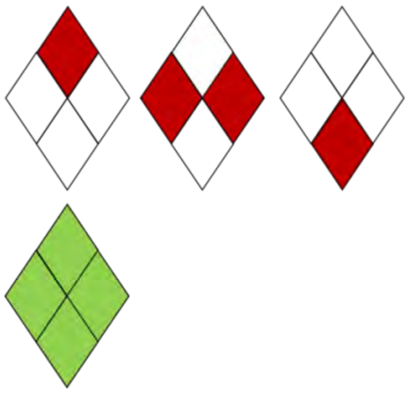

圖 5

四、探討菱形中內含菱形的總數：

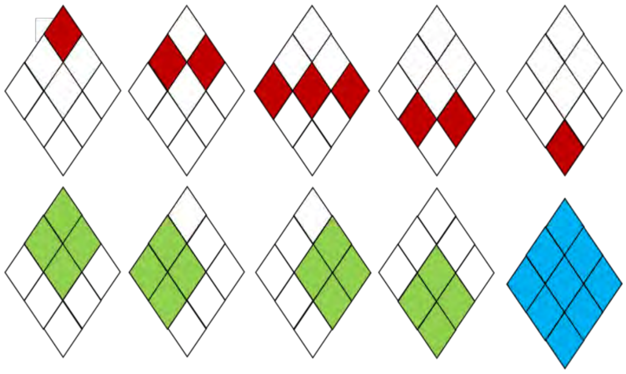
步驟一 以分解的方式計算菱形中的菱形總數：

n =1 時，所形成的分割圖中的菱形總數為紅色 4 個(邊長為 1)，綠色 1 個(邊長為 2)，

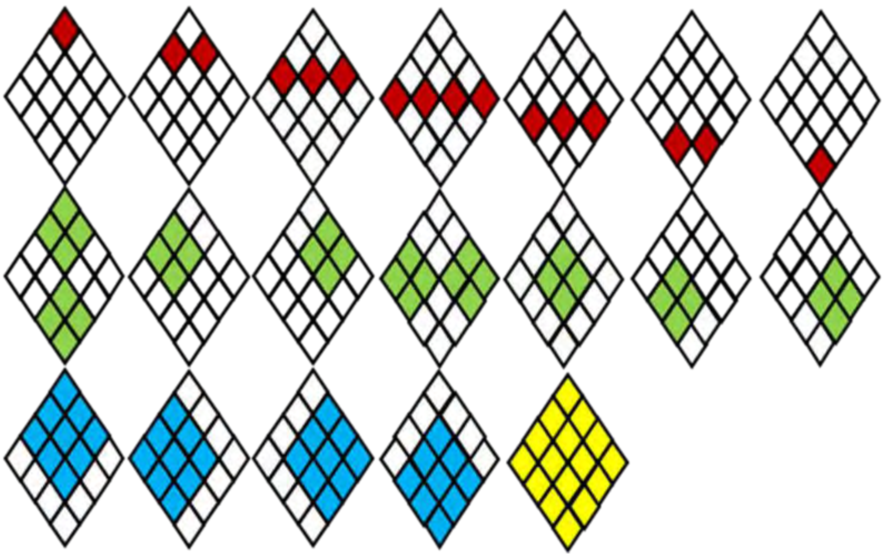
共 5 個，如下圖



n =2 時，所形成的分割圖中的菱形總數為紅色 9 個(邊長為 1)，綠色 4 個(邊長為 2)，藍色 1 個(邊長為 3)，共 14 個，如下圖



n =3 時，所形成的分割圖中的菱形總數為紅色 16 個(邊長為 1)，綠色 9 個(邊長為 2)，藍色 4 個(邊長為 3)，黃色 1 個(邊長為 4)，共 30 個，如下圖

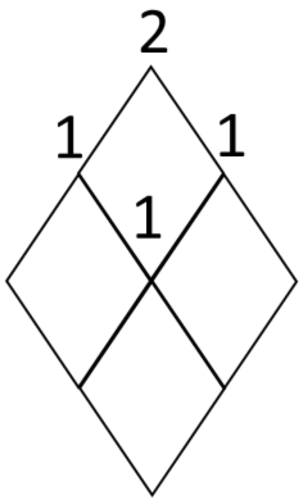
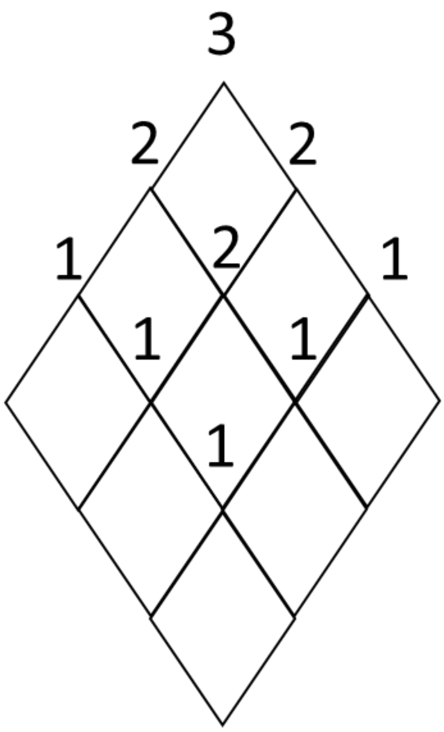


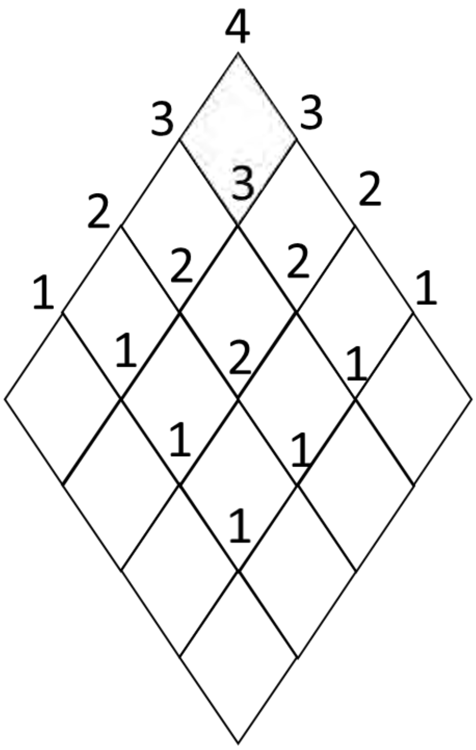
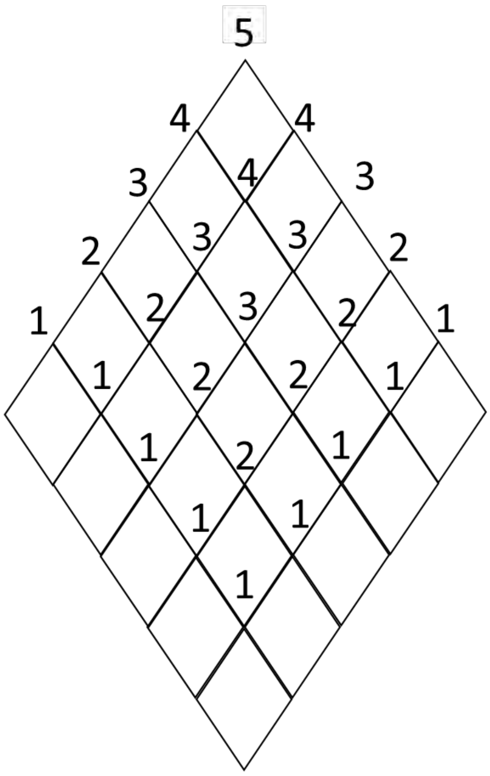
步驟二　將步驟一的結果製成表格，如下表

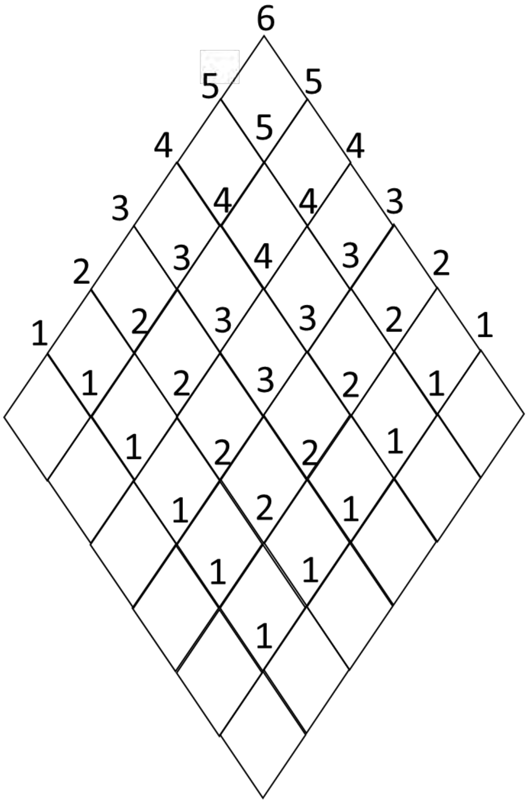
n	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6	邊長 7	邊長 8	菱形總數
1	4	1							**5**
2	9	4	1						**14**
3	16	9	4	1					**30**
4	25	16	9	4	1				**55**
5	36	25	16	9	4	1			**91**
6	49	36	25	16	9	4	1		**140**
7	64	49	36	25	16	9	4	1	**204**

步驟三

由步驟二可知，雖然菱形中的菱形個數較規律，但到後期 n 比較大的時候就會非常難計算。因此，我們要使用菱形共頂點的特性，做出一個通式來簡化複雜的計算。每個菱形都有上、下、左、右四個頂點，我們在每個交會點旁邊寫出數字，代表該點是幾個菱形共同擁有的上頂點，正因為每個菱形都只有一個上頂點，所以只要算出上頂點的總個數就能算出圖形中所有菱形的數量。

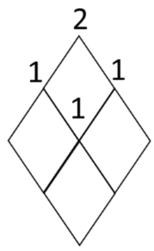
共點數圖	n	菱形總數
	**1**	**5**
	**2**	**14**

4 3 3 3 2 2 2 2 1 1 1 2 1 1 1 1	**3**	**30**
5 4 4 4 3 3 3 3 2 2 2 3 2 1 1 1 2 2 1 1 2 1 1 1 1	**4**	**55**

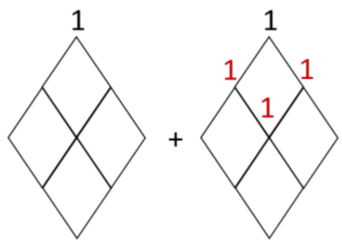
	**5**	**91**

步驟四

我們可以使用「拆解共頂點」的方式把不同大小的菱形個別獨立出來，這裡以 n=1 為例：

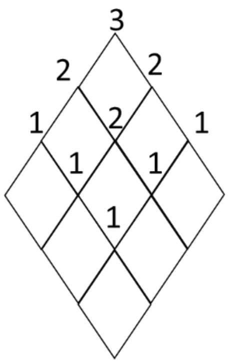


可拆解成：

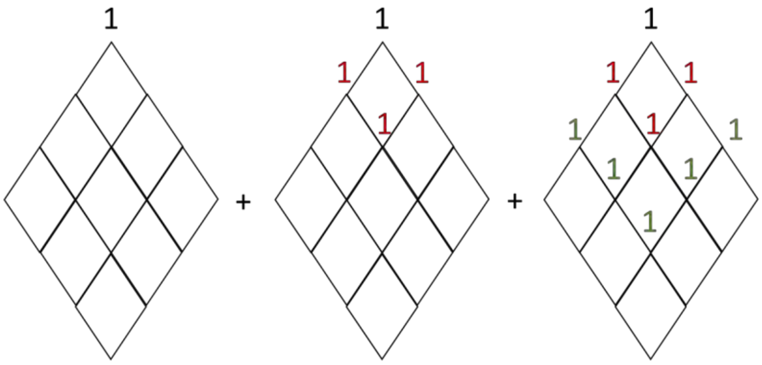


把菱形個數整理後就變成了：1+(1+3)=5

以 n=2 為例：



可拆解成：



把菱形個數整理後就變成了：1+(1+3)+(1+3+5)=14

$\boxed{\text{步驟五}}$

由步驟四可得以下規律(n 為奇、偶數時都相同)：

$\mathrm{n}=1 \rightarrow 1+(1+3)$

$\mathrm{n}=2 \rightarrow 1+(1+3)+(1+3+5)$

$\mathrm{n}=3 \rightarrow 1+(1+3)+(1+3+5)+(1+3+5+7)$

$\mathrm{n}=\mathrm{k} \rightarrow 1+(1+3)+\cdots+(1+3+\cdots+2\mathrm{k}+1)$

由此可見，這個 1+(1+3)+(1+3+5) +…+(1+3+…+2k+1)就是我們要找的答案，

於是把它列為公式就會變成下面的樣子：

$$1+(1+3)+(1+3+5)\ +\cdots+(1+3+\cdots+2\mathrm{k}+1)$$

$$=1+(1+3)+\cdots+\frac{(k+1)(1+2k+1)}{2}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{(i+1)(1+2i+1)}{2}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} (i^2 + 2i + 1)$$

$$= 1 + [\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + 2 \bullet \frac{k(k+1)}{2} + k] \qquad 〈註 1〉$$

$$= 1 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + k(k+1) + k$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+7) + 6k + 6}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+7) + 6(k+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+7) + 6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

因此

1+(1+3)+(1+3+5) +⋯+(1+3+⋯+2k+1) $= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} (*)$

對於所有自然數 k，我們希望(∗)恆成立，所以我們採用數學歸納法來證明:

1.當 k=1 時，左式=$1 + (1 + 3)$ =5 $= \frac{(1+1)(1+2)(2+3)}{6} = 5 =$ 右式，命題成立

2.設 k=m 時成立，則得

左式=$1 + (1 + 3) + \cdots + (1 + 3 + \cdots + 2m + 1) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} =$ 右式

3.當 k=(m+1)時，

左式=$1 + (1 + 3) + \cdots + (1 + 3 + \cdots + 2m + 1) + [1 + 3 + \cdots + (2m + 1) + 2(m + 1) + 1]$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} + \frac{(m+2)[1 + 2(m+1) + 1]}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} + \frac{(m+2)(2m+4)}{2}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}+(m+2)(m+2)$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)+6(m+2)(m+2)}{6}$$

$$=\frac{(m+2)[(m+1)(2m+3)+6(m+2)]}{6}$$

$$=\frac{(m+2)(2m^2+5m+3+6m+12)}{6}$$

$$=\frac{(m+2)(2m^2+11m+15)}{6}$$

$$=\frac{(m+2)(m+3)(2m+5)}{6}=\frac{[(m+1)+1][(m+1)+2][2(m+1)+3]}{6}=\text{右式成立}$$

因此，由數學歸納法得知，對任意正整數 k 都成立

再來把 n 代回去 (n=k)，得到以下列式

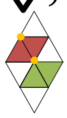
$$1+(1+3)+\cdots+(1+3+\cdots+2n+1)$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

就可以得到菱形內菱形的總數。

我們又接著想，若菱形中有橫槓時又會有何種情形，如下：

菱形中有橫槓的情形比較特別，要運用不同的方法來計算，直的菱形(◇)就使用 $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ (p.19)的公式來計算，但橫的菱形數量就只能用其他方法得到，其中我們又先將 n 分為奇數和偶數的情況，再做運算，方法如下：

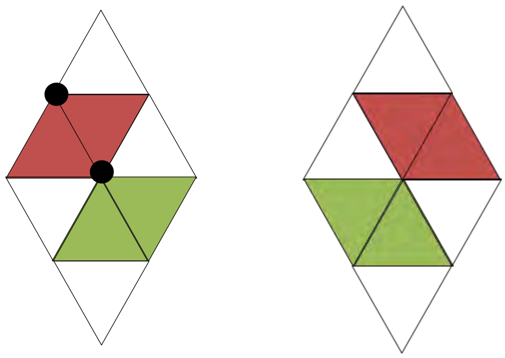
有三種菱形，直的(◇)、左橫(▱)和右橫(▱)，其中下面圖中的圓點代表▱的左上方的頂點〈例如  〉，因此圓點數就是菱形數量，先從 n=1 開始一個一個找 。

n	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6	邊長 7	菱形總數
1	8	1						9
2	21	4	1					26
3	40	15	4	1				60
4	65	32	9	4	1			111
5	96	55	24	9	4	1		189
6	133	84	45	16	9	4	1	292

由上述表得知：在這種圖形中找出的菱形數目非常龐大，光 n=6 就有高達 292 個菱形，所以勢必要找出一個公式來取代繁複的計算，在這裡又分為奇數和偶數來加以探討。

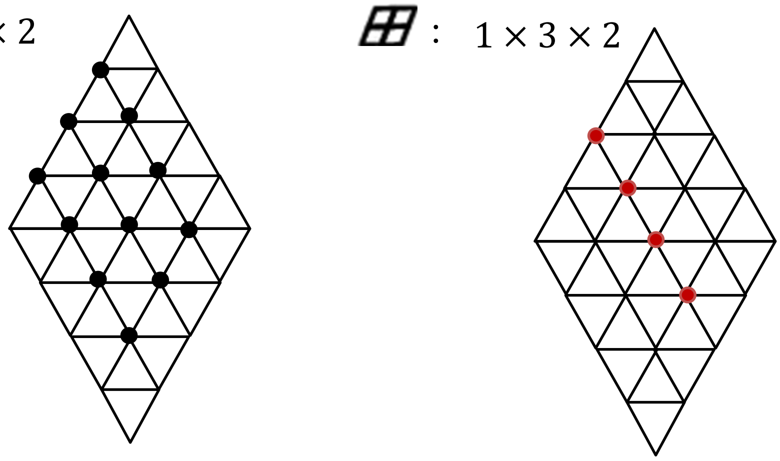
奇數的情形：

n=1，邊長為 1 ( ) 的菱形在一條線上有兩個，記為 1×2，又因橫的菱形有兩個方向 (+)，所以記為 1×2×2



n=3 時，邊長為 1 的菱形記為 3×4×2，至於邊長為 2 ( ) 的菱形，額外記成 1×3×2

： $3 \times 4 \times 2$　　　　　： $1 \times 3 \times 2$



再把數據整理成下方情況：

n=1 時

：$\dfrac{(1+1)(1+2)(2\times1+3)}{6} = 5$

：$1 \times 2 \times 2 = 4$

n=3 時

：$\dfrac{(3+1)(3+2)(2\times3+3)}{6} = 30$

：$3 \times 4 \times 2 = 24$

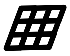
：$1 \times 3 \times 2 = 6$

n=5 時

： $\frac{(5+1)(5+2)(2\times5+3)}{6}=91$

： $5\times6\times2=60$

： $3\times5\times2=30$

： $1\times4\times2=8$

由上述推論，試著尋求通式

設 n=2k-1

把直的菱形算出()：

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}$$

把斜的菱形算出()：

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)(k+i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}[2i^2+(2k-1)i-k]$$

$$=2\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(2k-1)\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]-k^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}+(2k-1)\left(\frac{k^2+k}{2}\right)-k^2$$

$$=\frac{2k(k+1)(2k+1)+3(2k-1)(k^2+k)-6k^2}{6}$$

$$=\frac{k(2k+2)(2k+1)+k(6k-3)(k+1)-k\cdot6k}{6}$$

$$=\frac{k[(4k^2+6k+2)+(6k^2+3k-3)-6k]}{6}$$

$$=\frac{k[10k^2+3k-1]}{6}$$

$$=\frac{k(2k+1)(5k-1)}{6}$$

因此

對於所有自然數 k，我們希望以上的公式恆成立，所以我們採用數學歸納法來證明:

1.當 k=1 時，左式=$1\times 2 = 2 = \frac{1\times(2\times1+1)(5\times1-1)}{6} = \frac{1\times3\times4}{6}$=2=右式，命題成立

2.設 k=m 時成立，則得左式=$1(m+1)+3(m+2)+5(m+3)+\cdots+(2m-1)\cdot 2m$

$$=\frac{m(2m+1)(5m-1)}{6}$$

3.當 k=(m+1)時，

左式=$1(m+2)+3(m+3)+5(m+4)+\cdots+(2m-1)(2m+1)+(2m+1)(2m+2)$

$$=\frac{m(2m+1)(5m-1)}{6}+\ 1+3+5+\cdots+(2m-1)+2(2m+1)(m+1)$$

$$=\frac{m(2m+1)(5m-1)}{6}+\frac{m(1+2m-1)}{2}+4m^2+6m+2$$

$$=\frac{10m^3+3m^2-m}{6}+5m^2+6m+2$$

$$=\frac{10m^3+3m^2-m+30m^2+36m+12}{6}$$

$$=\frac{10m^3+33m+35m+12}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(10m^2+23m+12)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(2m+3)(5m+4)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)[2(m+1)+1][5(m+1)-1]}{6}$$=右式成立

因此，由數學歸納法得知，對任意正整數 k 都成立

◇+ ▱+ ▱ 的總數：

$$\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}+\frac{k(2k+1)(5k-1)}{6}\times 2$$

$$=\frac{k(2k+1)(4k+1+5k-1)}{3}$$

$$=\frac{k(2k+1)\cdot 9k}{3}$$

$$=3k^2(2k+1)$$

再來把 n 代回去 (因為 n=2k-1 所以 k=$\frac{n+1}{2}$)，得到以下列式：

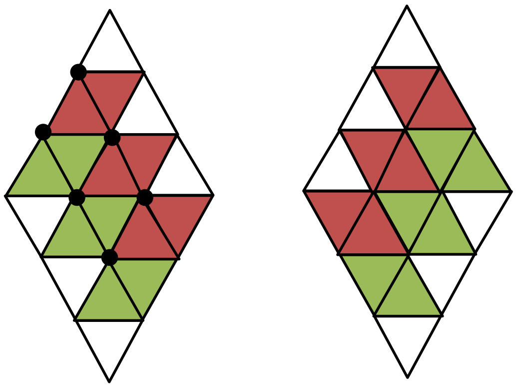
$$=3\times\frac{(n+1)^2}{4}\times\left(2\times\frac{n+1}{2}+1\right)$$

$$= 3 \times \frac{(n+1)^2}{4} \times (n+2) \;=\; \frac{3(n+1)^2(n+2)}{4}$$

偶數的情況：

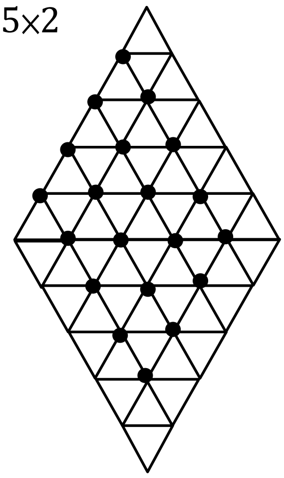
n=2 時，邊長為 1 ( ) 的菱形一共有 2×3 個，又因橫的菱形有兩個方向(+)，

所以記為 2×3×2

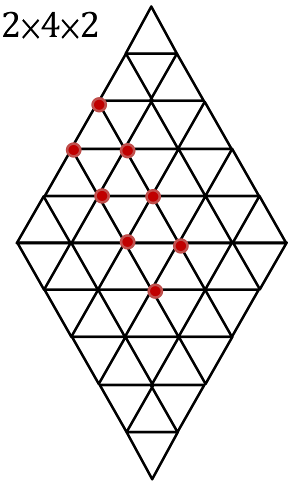


n=4 時，邊長為 1 的菱形記為 4×5×2，至於邊長為 2 ( ) 的菱形，記成 2×4×2

：4×5×2



：2×4×2



再把數據整理成下方情況：

n=2 時

: $\frac{(2+1)(2+2)(2\times2+3)}{6} = 14$

: $2 \times 3 \times 2 = 12$

n=4 時

: $\frac{(4+1)(4+2)(2\times4+3)}{6} = 55$

: $4 \times 5 \times 2 = 40$

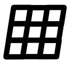
: $2 \times 4 \times 2 = 16$

n=6 時

 ： $\frac{(6+1)(6+2)(2\times6+3)}{6}=140$

：$6\times7\times2=84$

：$4\times6\times2=48$

：$2\times5\times2=20$

由上述推論，試著尋求通式

設 n=2k

把直的菱形算出()：

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(2k+1)(2k+2)(4k+3)}{6}$$

把斜的菱形算出()：

$$\sum_{i=1}^{k}2i[(k+1)+i]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}[2i^2+2i(k+1)]$$

$$=2\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+2(k+1)\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}+k(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+3k(k+1)^2}{3}$$

$$=\frac{k(k+1)[(2k+1)+3(k+1)]}{3}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1+3k+3)}{3}$$

$$=\frac{k(k+1)(5k+4)}{3}$$

因此

對於所有自然數 k，我們希望以上的公式恆成立，所以我們採用數學歸納法來證明:

1.當 k=1 時，左式$=2\times 3=6=\frac{1(1+1)(5\times1+4)}{3}=\frac{1\times2\times9}{3}=6=$右式，命題成立

2.設 k=m 時成立，則得左式$=2(m+2)+4(m+3)+6(m+4)+\cdots+2m(2m+1)$

$$=\frac{m(m+1)(5m+4)}{3}$$

3.當 k=(m+1)時，

左式

$$=2(m+3)+4(m+4)+6(m+5)+\cdots+2m(2m+2)+2(m+1)(2m+3)$$

$$=\frac{m(m+1)(5m+4)}{3}+2+4+6+\cdots+2m+2(m+1)(2m+3)$$

$$=\frac{m(m+1)(5m+4)}{3}+\frac{m(2+2m)}{2}+4m^2+10m+6$$

$$=\frac{m(m+1)(5m+4)}{3}+5m^2+11m+6$$

$$=\frac{m(m+1)(5m+4)+15m^2+33m+18}{3}$$

$$=\frac{5m^3+9m^2+4m+15m^2+33m+18}{3}$$

$$=\frac{5m^3+24m^2+37m+18}{3}$$

$$=\frac{(m+1)(5m^2+19m+18)}{3}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(5m+9)}{3}=\frac{(m+1)[(m+1)+1][5(m+1)+4]}{3}=\text{右式成立}$$

因此，由數學歸納法得知，對任意正整數 k 都成立

◇ + ▱ + ▱ 的總數：

$$\frac{(2k+1)(2k+2)(4k+3)}{6}+\frac{k(k+1)(5k+4)}{3}\times 2$$

$$=\frac{(k+1)[(2k+1)(4k+3)+2k(5k+4)]}{3}$$

$$=\frac{(k+1)(18k^2+18k+3)}{3}$$

$$=(k+1)(6k^2+6k+1)$$

因為 n=2k 所以 k=$\frac{n}{2}$

$$=\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(6\times\frac{n^2}{4}+6\times\frac{n}{2}+1\right)$$

$$=\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{3n^2}{2}+\frac{6n}{2}+1\right)$$

$$=\left(\frac{n+2}{2}\right)\left(\frac{3n^2+6n+2}{2}\right)$$

$$=\frac{(n+2)(3n^2+6n+2)}{4}$$

由上方公式得知：

在加橫槓的特殊菱形中：

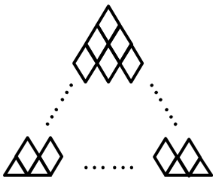
如果等分點數 n 為奇數時，特殊菱形內求得的菱形個數為 $\frac{3(n+1)^2(n+2)}{4}$ 個

如果等分點數 n 為偶數時，特殊菱形內求得的菱形個數為 $\frac{(n+2)(3n^2+6n+2)}{4}$ 個

伍、研究結果

研究完畢後，我們成功利用「拆解共頂點」、級數……等觀念來推算出正三角形和特殊菱形中的菱形總數，只要將等分點n帶入公式，便可得到正三角形、特殊菱形內菱形的總數。

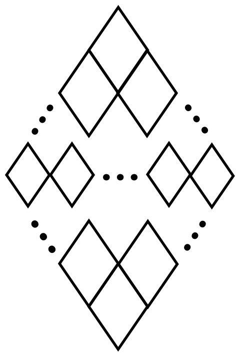
正三角形內菱形的總數：



n為奇數：$\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$

n為偶數：$\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$

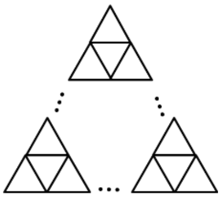
特殊菱形內菱形的總數：



不論 n 為奇偶數皆為：$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

在研究完以上兩種公式後，我們另外又延伸找到正三角形、特殊菱形加上橫槓後內部菱形總數。

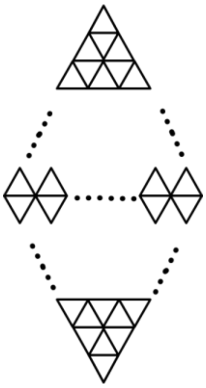
正三角形加上橫槓後內部的菱形總數：



n 為奇數：$\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{8}$

n 為偶數：$\frac{n(n+2)(2n+5)}{8}$

特殊菱形加上橫槓後內部的菱形總數：



n 為奇數：$\frac{3(n+1)^2(n+2)}{4}$

n 為偶數：$\frac{(n+2)(3n^2+6n+2)}{4}$

陸、討論

在本研究的過程中，我們十分頭痛的是如何有效算出精準的菱形總數，因為一開始，大家所計算出來的值都不大相同，因此想參考第五十一屆科展的方法，利用「共頂點」的特性，但由於我們的結果不是等差數列，因此我們發明了「拆解共頂點」來解決這問題，這樣不但能準確且快速的求出菱形總數，還能避免重複算或是漏算的可能性。最後我們想要進一步加上橫槓，而這方法就不管用了，這也是我們本次研究中最大的瓶頸，大家腦力激盪並尋找資料後，試著利用旋轉、乘積和級數等方法，終於求得了通式。我們認為科展就是要培養研究、合作的精神，且遇到困難和瓶頸都要想辦法突破，是個困難重重的考驗。

我們這次的研究，是從前人的資料中找出一些靈感，做進一步更深入的研究，由於我們在參考文獻中發現的方式，卻無法解決所遇到的問題，於是我們只好另闢蹊徑尋找圖形間的規律，終於找到通式，但我們不確定當 n 的值極大時，我們的通式是否還能使

用？所以我們聽從老師的建議，使用歸納法證明。在找出規律、通式以及用歸納法證明後，我們對自己的研究更具信心，但編排整個科展研究的 word 檔格式也是一大難題，因為不熟悉 word 程式功能，所以只好花時間，慢慢摸索才找出它的使用方法，起初使用 PowerPoint 繪圖繪出來的圖形，不是歪七扭八，就是不堪入目，但經過一段時間的磨練、修正，到最後才慢慢摸清楚這些軟體的操作模式，繪出來的圖形也更為精準。

柒、結論

在這個研究中，我們發現做出這個研究中最困難的應該是從找出規律到列出公式，在找出公式前我們照著第五十一屆科展研究—「三角形中的三角形—探討三角形的總數」中提到的方式去算，結果求不出答案，因為我們的研究和他們不一樣，無法從一開始就出現等差數列，於是尋找新方法，將共頂點拆解成 1，再利用相加的方式找出公式。在加槓菱形中找菱形的研究中，我們發現無法用先前發明出來的「拆解共頂點」方式找規律，於是想出要用相乘方式，發現乘數與被乘數和等分點數的增加有關係，因此成功推論出公式，這是這次的研究中最特別的地方。我們三人絞盡腦汁，在研究中不僅發現新結果，也發現了新的研究方法，以後期望可以有更多發展。

捌、參考文獻及其他

一、高中數學課本第二冊第二章：排列與組合 翰林出版社。

二、國中數學課本第四冊第一章：等差數列與等差級數 康軒出版社。

三、環遊世界玩數學：巴黎羅浮宮，取自
http://www.winniemath.url.tw/essay/%E7%92%B0%E9%81%8A%E4%B8%96%E7%95%8C%E7%8E%A9%E6%95%B8%E5%AD%B8%EF%BD%9E%E5%B7%B4%E9%BB%8E%E7%BE%85%E6%B5%AE%E5%AE%AE.pdf

四、林妍辰、鄭琳亦，2011 年。「三角形中的三角形—探討三角形的總數」。中華民國第五十一屆中小學科學展覽會國中組數學科佳作。

五、國中自然與生活科技課本第四冊第七章 *p.200~p.201*

【評語】030411

計算三角格點圖中大大小小的菱形的個數總數，給出了完整的結果。對於由兩組三角格點圖組合出的菱形圖像中不同大小的菱形的個數總數，也給出了答案。能夠巧妙的把複雜的計算藉由改寫成求級數和的總和的形式來求和，想法別出心裁，值得嘉許。一些基本的級數和的計算過程與數學歸納法的證明在作品說明書中佔了過多的篇幅,可以考慮適當的做一些刪減。討論的內容稍嫌少了些。如果被分割的圖形不是正三角形或菱形，而是平行四邊形、梯形、正六邊形這些圖形，是不是也可以有一些聰明的計算方式？如果可以增加這樣的一些延伸內容會更好。

作品海報

壹、研究動機

在國中第四冊的數學課本中有提到圖形的樣式與規律，日常生活中也有許多物品是由相同的幾何圖形所排列而成，例如：鐵絲網、電蚊拍、瓷磚、烤肉網……我們從中發現有矩形中找矩形的題目，就想是否能限縮到菱形中找菱形，後來開始思考可否利用等分點數的概念從正三角形、特殊菱形的等分點數快速求出內含菱形總數規律及通式。

貳、研究目的

一、探討正三角形中內含菱形的規律。
二、探討特定菱形中內含菱形的規律。
三、探討計算正三角形中內含菱形的總數。
四、探討計算特定菱形中內含菱形的總數。

參、研究設備

電腦、紙、筆、Geogebra、Word、Excel、PowerPoint、USB

壹、 研究過程

***以下所述之菱形內角皆為 120 度、60 度、120 度、60 度，三角形皆為正三角形。**

一、正三角形中內含菱形的規律並計算總數

將一三角形各邊取相同數量的等分點後，把這些等分點與底邊連接起來，連線即形成一個完成分割的三角形，（圖 1）為每邊取 1 個等分點所形成的分割圖；（圖 2）為每邊取 2 個等分點所形成的分割圖〈設等分點數為 n〉

圖 1

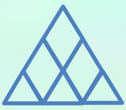
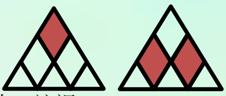


圖 2

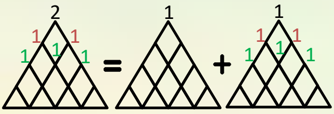
以分解的方式計算三角形中的菱形總數：

n = 1 時

n = 2 時

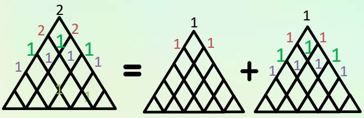


我們可以使用「拆解共頂點」的方式把不同大小的菱形個別獨立出來，這裡以n=3為例可拆解成：



菱形數整理後：1+(1+2+3)

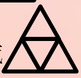
以n=4例可拆解成：



菱形數整理後：(1+2)+(1+2+3+4)

將 n 為奇數時的狀況和為偶數時的狀況分開找公式。

當 n 為奇數時 → 設 n=2k-1	當 n 為偶數時→設 n=2k
n=1→1 n=3→1+(1+2+3) ⋮ n=2k-1→1+(1+2+3) +⋯+(1+2+⋯+2k-1) 由此可見 1+(1+2+3) +⋯+(1+2+⋯+2k-1) 就是我們要找的答案，列公式如下： $=\sum_{i=1}^{k}\frac{(2i-1)(1+2i-1)}{2}$ $=\sum_{i=1}^{k}(2i^2-i)$ $=2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}$ $=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$	n=2→(1+2) n=4→ (1+2)+(1+2+3+4) ⋮ n=2k→ (1+2) +⋯+ (1+2+⋯+2k) 由此可見 (1+2)+(1+2+3+4)+⋯+ (1+2+⋯+2k) 就是我們要找的答案，列公式如下： $=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i(1+2i)}{2}$ $=\sum_{i=1}^{k}(2i^2+i)$ $=2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}$ $=\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}$
再來把 n 代回去 因為 n=2k-1，所以 k=$\frac{(n+1)}{2}$ $=\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$	再來把 n 代回去 因為 n=2k，所以 k=$\frac{n}{2}$ $=\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$

由於一個三角形可以旋轉成三個方向並疊合，我們發現將現有的加上橫槓，變成後，就等於沒加槓的三角形的奇數及偶數公式乘以三，整理如下

當 n 為奇數時：	當 n 為偶數時：
$=\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{8}$	$=\frac{n(n+2)(2n+5)}{8}$

二、特定菱形中內含菱形的規律並計算總數

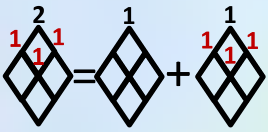
將一菱形各邊取相同數量的等分點後，把這些等分點與對邊連接起來，連線即形成一個完成分割的菱形，(圖 3)為每邊取 1 個等分點所形成的分割圖；(圖 4)為每邊取 2 個等分點所形成的分割圖〈設等分點數為 n〉

圖 3

圖 4

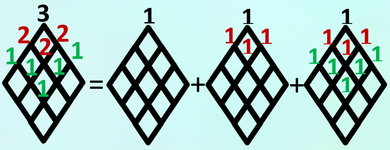
我們可以使用「拆解共頂點」的方式把不同大小的菱形個別獨立出來，

n=1：



整理後就成 1+(1+3)=5

n=2：



整理後就成 1+(1+3)+(1+3+5)=14

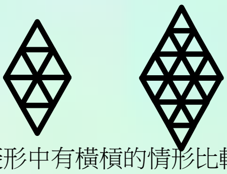
由此可見，這個 1+(1+3)+(1+3+5) +…+(1+3+…+2k+1)就是我們要找的答案，於是把它列為公式就會變成下面的樣子：

$$1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots+(1+3+\cdots+2k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)}{6}$$

把 n 帶入:

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$



我們接著想，若菱形中有橫槓時(如右圖)又會有何種情形，菱形中有橫槓的情形比較特別，要運用不同的方法來計算，先將菱形分成直的、橫的拆開來看再找出規律：

n=3 時

◇ : $\frac{(3+1)(3+2)(2\times3+3)}{6}=30$

▱ : $3\times4\times2=24$

▱ : $1\times3\times2=6$

n=5 時

◇ : $\frac{(5+1)(5+2)(2\times5+3)}{6}=91$

▱ : $5\times6\times2=60$

▱ : $3\times5\times2=30$

▱ $1\times4\times2=8$

n=2 時

◇ : $\frac{(2+1)(2+2)(2\times2+3)}{6}=14$

▱ : $2\times3\times2=12$

n=4 時

◇ : $\frac{(4+1)(4+2)(2\times4+3)}{6}=55$

▱ : $4\times5\times2=40$

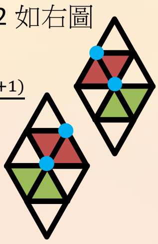
▱ : $2\times4\times2=16$

再將 n 分為奇數和偶數的情況分開找公式：

奇數的情形：

n=1，▱ 的菱形在一條線上有兩個點

記為 1×2，▱+▱ 記 1×2×2 如右圖



設 n=2k-1 把直的菱形算出

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}$$

把斜的菱形算出(▱)

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)(k+i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}[2i^2+(2k-1)i-k]$$

$$=2\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(2k-1)\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]-k^2$$

$$=\frac{k(2k+1)(5k-1)}{6}$$

◇+▱+▱ 的總數：

$$\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6}+\frac{k(2k+1)(5k-1)}{6}\times2$$

$$=\frac{k(2k+1)(4k+1+5k-1)}{3}$$

$$=3k^2(2k+1)$$

再來把 n 代回去 (因為 n=2k-1 所以 k=$\frac{n+1}{2}$)，得以下列式：

$$=3\times\frac{(n+1)^2}{4}\times(2\times\frac{n+1}{2}+1)$$

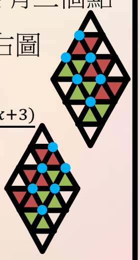
$$=3\times\frac{(n+1)^2}{4}\times(n+2)$$

$$=\frac{3(n+1)^2(n+2)}{4}$$

偶數的情形：

n=2，▱ 的菱形在兩條線上各有三個點

記 2×3，▱+▱ 記 2×3×2 如右圖



設 n=2k 把直的菱形算出

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(2k+1)(2k+2)(4k+3)}{6}$$

把斜的菱形算出(▱)

$$\sum_{i=1}^{k}2i[(k+1)+i]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}[2i^2+2i(k+1)]$$

$$=2\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+2(k+1)\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k(k+1)(5k+4)}{3}$$

◇+▱+▱ 的總數：

$$=\frac{(2k+1)(2k+2)(4k+3)}{6}+\frac{k(k+1)(5k+4)}{3}\times2$$

$$=\frac{(k+1)[(2k+1)(4k+3)+2k(5k+4)]}{3}$$

$$=(k+1)(6k^2+6k+1)$$

再來把 n 代回去 (因為 n=2k 所以 k=$\frac{n}{2}$)，得以下列式：

$$=(\frac{n+2}{2})(6\times\frac{n^2}{4}+6\times\frac{n}{2}+1)$$

$$=(\frac{n+2}{2})(\frac{3n^2}{2}+\frac{6n}{2}+1)$$

$$=\frac{(n+2)(3n^2+6n+2)}{4}$$

三角形中的菱形(不加槓)

n	1	2	3	總數
1	1			1
2	3			3
3	6	1		7
4	10	3		13
5	15	6	1	22

菱形中的菱形(不加槓)

n	1	2	3	4	5	6	總數
1	4	1					5
2	9	4	1				14
3	16	9	4	1			30
4	25	16	9	4	1		55
5	36	25	16	9	4	1	91

三角形中的菱形(加橫槓)

n	1	2	3	總數
1	3			3
2	9			9
3	18	3		21
4	30	9		39
5	45	18	3	66

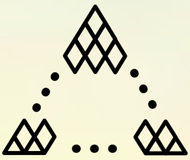
菱形中的菱形(加橫槓)

n	1	2	3	4	5	總數
1	8	1				9
2	21	4	1			26
3	40	15	4	1		60
4	65	32	9	4	1	111

伍、研究結果

研究完畢後，我們成功利用「共頂點」、級數……等觀念來推算出正三角形和特殊菱形中菱形總數，將等分點n帶入公式，便可得到正三角形、特殊菱形內菱形的總數。

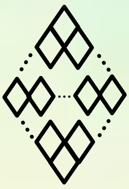
正三角形內菱形的總數：



n為奇數：$\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}$

n為偶數：$\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$

特殊菱形內菱形的總數：

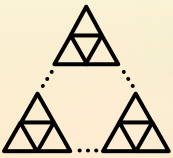


不論 n 為奇偶數皆為：

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

在研究完以上兩種公式後，我們另外又延伸找到正三角形、特殊菱形加上橫槓後內部菱形總數。

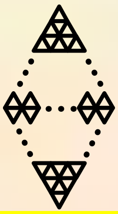
正三角形加槓後內部的菱形總數：



n 為奇數：$\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{8}$

n 為偶數：$\frac{n(n+2)(2n+5)}{8}$

特殊菱形加槓後內部的菱形總數：



n 為奇數：$\frac{3(n+1)^2(n+2)}{4}$

n 為偶數：$\frac{(n+2)(3n^2+6n+2)}{4}$

陸、討論

在研究過程中，我們的瓶頸是如何算出菱形的總數，因為大家計算出來的值都不同，使用方式是參考其他作品的方法，利用「共頂點」，能準確求出菱形總數，且避免計算錯誤，但我們想要進一步加橫槓，大家便利用旋轉、乘積和級數等方法，終於成功。我們認為科展就是要培養研究、合作的精神。

柒、結論

我們發現做出這個研究中最困難是從找出規律到列出公式。我們參考「共頂點三角形」計算方式將共頂點拆解成 1，再利用相加方式找出公式。在菱形中找菱形加槓的研究中，我們發現無法用先前發明出來的「拆解共頂點」方式找規律，於是想出要用相乘方式，發現乘數與被乘數和等分點數的增加有關係，因此成功推論出公式，這是這次的研究中最特別的地方。

捌、參考文獻及其他

一、高中數學課本第二冊第二章：排列與組合　翰林出版社。

二、國中數學課本第四冊第一章：等差數列與等差級數　康軒出版社。

三、環遊世界玩數學：巴黎羅浮宮，取自

四、林妍辰、鄭琳亦，2011 年。「三角形中的三角形—探討三角形的總數」。中華民國第五十一屆中小學科學展覽會國中組數學科佳作。

五、國中自然與生活科技課本第四冊第七章　*p.200 ~p.201*