# 中華民國第59屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

國中組　數學科

## 佳作

030410

## 循環不息

學校名稱：新竹市立光華國民中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國二 林廷穎<br>國二 林泳辰 | 郭亮偉 |

關鍵詞：循環節、遞迴關係式、餘數數列

# 摘要

由遞迴關係式產生的數列各項除以質數$k$後，會產生一個循環的餘數數列，故本研究主要探討其最小循環節性質。我們先得到$g$階遞迴數列的循環狀況，在特殊情況下，餘數數列會成純循環。

若將最小循環節各項加總起來，除特殊狀況外，其和皆是$k$的倍數。在二階遞迴數列中，由於最小循環節必能分成數個每段項數相等的數列，將其依序排成有序的形式後，相鄰二行會具有倍數關係，在某些排法中橫列數字和必為$k$的倍數。我們還得到簡化計算循環節長度的過程，並且知道若餘數數列非等比數列模$k$後的形式時，則起始值對最小循環節長度無影響。

# 壹、 研究動機

關於費波那契數列，參考資料《費氏數列的性質》[1]的性質闡述任意「連續幾項」之和會是「某數」的倍數，參考資料《List of periods for F (mod m)》[2]列出此數列除以「正整數」的「餘數週期」，或稱皮薩諾週期，令我們驚訝的是，這二組數值對應相等，若限定除數是質數，我們想探討其最小循環節在遞迴關係下，是否都具有各項和為除數之倍數性質。例：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 費波那契數列 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | $=54$ |
| mod 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | $\equiv 0$ |
| 最小循環週期 | 8 | | | | | | | | (左列數字相加) |

# 貳、 研究目的

一、探討$g$階遞迴式產生之餘數數列循環判別法

二、探討一階遞迴式之最小循環節關係

三、建立二階遞迴式之循環性質

四、推廣$g$階遞迴式之循環節加總是否為除數的倍數

五、探討二階遞迴式之橫列數字和是否為除數的倍數

六、簡化計算二階遞迴式之最小循環節長度

# 參、 研究設備及器材

電腦（使用軟體：Excel）、紙、筆

# 肆、 研究方法

一、名詞解釋

(一)$\langle A_n \rangle$：

給定起始值$A_1$、$A_2$、…、$A_g$、係數$C_1$、$C_2$、…、$C_g$($C_g$不為 0)，以上皆為整數，以$g$階遞迴關係式$A_{g+n} = C_1A_{g-1+n} + C_2A_{g-2+n} + \cdots + C_gA_n$，$n \in N$，產生無窮數列$\langle A_n \rangle$。

(二)$\langle a_n \rangle$：

將$\langle A_n \rangle$各項除以一正整數$k$所得餘數依序形成之新數列，表示為$a_1$、$a_2$、…、$a_n$，$0 \le a_n < k$。其中$a_{g+n} \equiv C_1a_{g-1+n} + C_2a_{g-2+n} + \cdots + C_ga_n (\mathrm{mod}\, k)$。

(三)$\langle s_i \rangle$：

取$\langle a_n \rangle$數列中值為零的項並依序排列，第$i$個為零的項是$a_{s_i}$，即$a_{s_1} = a_{s_2} = \cdots = a_{s_i} = 0$，$i \in N$。將符合上述條件之$s_i$依序排列，形成數列$\langle s_i \rangle$。

(四)循環節：

一數列中，某段數值不斷在數列中出現,並且相鄰兩次之間無其他數值出現，則該段數值稱為此數列的循環節。

(五)$L(k)$：

函數 $\mathrm{L}(k, a_1, a_2, \ldots a_g, C_1, C_2, \ldots C_g)$的縮寫，表示$g$階餘數數列的最小循環節長度。在$n$足夠大時，$a_n \equiv a_{n+L(k)} (\mathrm{mod}\, k)$。

(六)$L(k) = tx$：

若將最小循環節依序分成$t$段，每段$x$個數值，則$L(k) = tx$，$x \in N$，$t \in N$。

(七)純循環與混循環：

若$a_n \equiv a_{L(k)+n} (\mathrm{mod}\, k)$，$\forall n \in N$皆成立，則此數列為純循環；反之，為混循環。

(八)$a_z$：

若$\langle a_n \rangle$成混循環，則令$a_z$為進入循環節前的最後一項，也就是說$a_z$不在循環節內。

(九)$\langle m_n \rangle$：(可利用中國剩餘定理定義)

若$k$為質數，(1)當$n \ne s_i$、$s_i - 1$時，$a_{n+1} \equiv m_na_n (\mathrm{mod}\, k)$；

(2)當$n = s_i - 1$時，$a_{n+1} \equiv m_{n-1}a_{n-1} (\mathrm{mod}\, k)$，所產生的數列$\langle m_n \rangle$，$0 \le m_n < k$。

(十)$U_{(n,x)}$：

在循環節內等間隔為$x$的項之加總為$U_{(n,x)}$，$U_{(n,x)} = a_n + a_{x+n} + \cdots + a_{(t-1)x+n}$。

註：以下都探討$\mathrm{mod}\ k$後的關係，因此只出現$\equiv$號的式子會省略掉$(\mathrm{mod}\ k)$。並且以下若無特別說明，則每個符號皆為整數，其中我們設定$n \in N$。

## 二、參考定理

### (一)同餘性質

此參考《基礎數論》[3]所述。

1. 運算中可將模 $k$ 下是以同餘號連接的二數互相代換。
2. 給定$k \in N$，且假設$a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in Z$，

   若$\gcd(c,k) = 1$，則$ac \equiv bc(\mathrm{mod}\ k) \Leftrightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\ k)$。
3. 給定$k \in N$，假設$a \in Z$，則存在$b \in Z$滿足$ab \equiv 1(\mathrm{mod}\ k) \Leftrightarrow \gcd(a,k) = 1$。

   雖然當 $\gcd(a,k) = 1$時，有無窮多的整數$b$會滿足$ab \equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$，但是這樣的$b$在模$k$之下是唯一的。
4. 費馬小定理：若 $\gcd(a,k) = 1$，則 $a^k \equiv a(\mathrm{mod}\ k)$，或寫成$a^{k-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$。

### (二)特徵多項式

此參考《台灣高中職數學科教師甄試中的數列和級數問題》[4]所述。

1. 特徵方程式

   若$A_{g+n} = C_1 A_{g-1+n} + C_2 A_{g-2+n} + \cdots + C_g A_n$，

   則$\alpha^g - C_1 \alpha^{g-1} - C_2 \alpha^{g-2} \ldots - C_g = 0$為該遞迴關係式的特徵方程式。
2. 遞迴數列的一般式

   在推廣$g$階遞迴時，我們只好奇一種較簡潔的形式，因此用不到此處更一般的式子，這裡就不加贅述。

### (三)級數公式

1. 等差級數求值：$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_n) \times n}{2}$。
2. 等比級數求值：$\beta + \beta\alpha^1 + \beta\alpha^2 + \cdots + \beta\alpha^{n-1} = \beta \times \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$。

3. 福爾哈伯公式：

此參考《微積分之前奏（或變奏）：高階等差數列的求和》[5]所述。

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p+1}{j}B_j n^{p+1-j}$$

其中$\binom{p+1}{j} = \dfrac{(p+1)!}{j!\,(p+1-j)!}$，而伯努利數$B_{p+1} = -\sum_{j=1}^{p}\binom{p+1}{j}B_j$，$B_0 = 1$。

(四)預備定理

$g$階遞迴關係式模$k$後所形成的餘數數列必定會產生循環，即$L(k)$為有限值。

【證明】

我們知道$a_n \in E = \{0,1,2,\dots,k-1\}$，$E$為有限集合，故$(a_n, a_{n+1}, \dots a_{n+g-1}) \in E \times E \times \dots \times E$，亦為有限集合，$(a_n, a_{n+1}, \dots a_{n+g-1})$至多有$E^g$種組合，因此至少在無窮數列$\langle a_n \rangle$的第$k^g + 2$項開始會重覆到同一段數值，再由$a_{g+n} \equiv C_1 a_{g-1+n} + C_2 a_{g-2+n} + \cdots + C_g a_n \pmod k$產生下一數字開始循環，只要有同樣的連續$g$個數就能判斷是否開始循環。

三、研究方法

(一) Excel 圖表介紹

下表以$A_{n+2} = 2A_{n+1} + 10A_n$為例

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= | 11 | $A_1$= | 9 | $A_2$= | 2 |
| $C_1$= | 2 | $C_2$= | 10 | $C_3$= | 0 |
| An= | 2 | An-1+ | 10 | An-2+ | 0 |
| 9 | | | 9 | | |
| 2 | | | 2 | | |
| 94 | | | 6 | | |
| 208 | | | 10 | | |
| 1356 | | | 3 | | |
| 4792 | | | 7 | | |
| 23144 | | | 0 | | |
| 94208 | | | 4 | | |
| 419856 | | | 8 | | |
| 1781792 | | | 1 | | |
| 7762144 | | | 5 | | |
| 33342208 | | | 9 | | |
| 144305856 | | | 2 | | |

$\langle a_n \rangle$規律不易直接推導，為因應大量地嘗試進行觀察，我們使用 Excel 研究。右圖為二階遞迴式的研究表格，上方的滾輪可分別調整$k$、$A_1$、$A_2$、$C_1$、$C_2$之值(常數項固定為 0)，藍色數字為起始值$A_1$、$A_2$，下面的數則依序為$A_3$、$A_4$、$A_5$、…。

$\langle A_n \rangle$右邊的數則為除以$k$後得到的餘數數列$\langle a_n \rangle$，紅色方格為每個循環節的第一項，黃色方格為每個循環節的第二項。

(二)數值範圍

由於同一個同餘類經同餘遞迴後，餘數數列相同，因而可縮小觀察範圍為$0 <$ 數值 $< k$。例如$C_2 = 21$、$A_1 = 31$，模$k$後分別是$C_2 = 10$、$A_1 = 9$，與上圖等價。

# 伍、 研究過程與結果

## 一、探討$g$階遞迴式產生之餘數數列循環判別法

### (一)一階遞迴式$A_{n+1}=C_1A_n$產生之$\langle a_n\rangle$

1. $k$為質數且$\langle a_n\rangle$成純循環

如例：$k$為質數時，實驗後發現餘數數列都是純循環。

| k= 11 | $A_1$= 6 |
|---|---|
| $C_1$= 2 | $C_2$= 0 |
| $A_n$= 2 | $A_{n-1}$+ 0 |
| 6 | 6 |
| 12 | 1 |
| 24 | 2 |
| 48 | 4 |
| 96 | 8 |
| 192 | 5 |
| 384 | 10 |
| 768 | 9 |
| 1536 | 7 |
| 3072 | 3 |
| 6144 | 6 |
| 12288 | 1 |

| k= 11 | $A_1$= 7 |
|---|---|
| $C_1$= 2 | $C_2$= 0 |
| $A_n$= 2 | $A_{n-1}$+ 0 |
| 7 | 7 |
| 14 | 3 |
| 28 | 6 |
| 56 | 1 |
| 112 | 2 |
| 224 | 4 |
| 448 | 8 |
| 896 | 5 |
| 1792 | 10 |
| 3584 | 9 |
| 7168 | 7 |
| 14336 | 3 |

| k= 11 | $A_1$= 7 |
|---|---|
| $C_1$= 5 | $C_2$= 0 |
| $A_n$= 5 | $A_{n-1}$+ 0 |
| 7 | 7 |
| 35 | 2 |
| 175 | 10 |
| 875 | 6 |
| 4375 | 8 |
| 21875 | 7 |
| 109375 | 2 |
| 546875 | 10 |
| 2734375 | 6 |
| 13671875 | 8 |
| 68359375 | 7 |
| 341796875 | 2 |

2. $k$為合數且$\langle a_n\rangle$成純循環

$\langle a_n\rangle$的循環狀況，跟$k$、$A_1$ 、$C_1$的公因數大有關係。以下面三個例子來說：

例 1：$k=30$，$A_1=8$，$C_1=7$

$\gcd(k，A_1)=\gcd(30，8)=2$，此時，當$C_1=7$時，$\gcd(k，C_1)=\gcd(30，7)=1$，所以$A_1\times C_1$時，就不會多出$k$的因數，而使得$\langle a_n\rangle$各項和$C_1$的最大公因數恆為 2，$\langle a_n\rangle$也就成純循環了。

| k= 30 | $A_1$= 8 |
|---|---|
| $C_1$= 7 | $C_2$= 0 |
| $A_n$= 7 | $A_{n-1}$+ 0 |
| 8 | 8 |
| 56 | 26 |
| 392 | 2 |
| 2744 | 14 |
| 19208 | 8 |
| 134456 | 26 |
| 941192 | 2 |
| 6588344 | 14 |

3. $k$為合數且$\langle a_n\rangle$成混循環

例 2：$k=30$，$A_1=8$，$C_1=9$

將$C_1$調整為 9 時，$\gcd(k，C_1)=\gcd(30，9)=3$，當$A_1\times C_1$時，所得到的積與 30 就多出 3 這個公因數，使得$\langle a_n\rangle$的首項不是 3 的倍數，但第二項以後是 3 的倍數，因此$\langle a_n\rangle$成混循環了。

| k= 30 | $A_1$= 8 |
|---|---|
| $C_1$= 9 | $C_2$= 0 |
| $A_n$= 9 | $A_{n-1}$+ 0 |
| 8 | 8 |
| 72 | 12 |
| 648 | 18 |
| 5832 | 12 |
| 52488 | 18 |
| 472392 | 12 |

例 3：$k=30$，$A_1=8$，$C_1=18$

而$C_1=18$時，雖然$\gcd(k，A_1)=\gcd(k，C_1)=2$，

但是$\gcd(k，A_1C_1)=6$，造成$\langle a_n\rangle$首項不是 6 的倍數，

又第二項以後是 6 的倍數，因此$\langle a_n\rangle$亦成混循環。

| | | | |
|---|---|---|---|
| k= 30 | | A₁= 8 | |
| C₁= 18 | | C₂= 0 | |
| $A_n$= | 18 | $A_{n-1}$+ | 0 |
| 8 | | 8 | |
| 144 | | 24 | |
| 2592 | | 12 | |
| 46656 | | 6 | |
| 839808 | | 18 | |
| 15116544 | | 24 | |
| 272097792 | | 12 | |

我們推測純循環或混循環的關鍵，就在於$C_1$次數增加時，會不會多出其他$k$的因數。

(二)二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$產生之$\langle a_n\rangle$

1. $k$為質數且$\langle a_n\rangle$成純循環

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= 7 | | A₁= 2 | | A₂= 5 | |
| C₁= 3 | | C₂= 6 | | C₃= 0 | |
| $A_{n+2}$= | 3 | $A_{n+1}$+ | 6 | $A_n$+ | 0 |
| 2 | | | 2 | | |
| 5 | | | 5 | | |
| 27 | | | 6 | | |
| 111 | | | 6 | | |
| 495 | | | 5 | | |
| 2151 | | | 2 | | |
| 9423 | | | 1 | | |
| 41175 | | | 1 | | |
| 180063 | | | 2 | | |
| 787239 | | | 5 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= 11 | | A₁= 7 | | A₂= 8 | |
| C₁= 3 | | C₂= 1 | | C₃= 0 | |
| $A_{n+2}$= | 3 | $A_{n+1}$+ | 1 | $A_n$+ | 0 |
| 7 | | | 7 | | |
| 8 | | | 8 | | |
| 31 | | | 9 | | |
| 101 | | | 2 | | |
| 334 | | | 4 | | |
| 1103 | | | 3 | | |
| 3643 | | | 2 | | |
| 12032 | | | 9 | | |
| 39739 | | | 7 | | |
| 131249 | | | 8 | | |

2. $k$為合數且$\langle a_n\rangle$成純循環

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= 12 | | A₁= 2 | | A₂= 4 | |
| C₁= 7 | | C₂= 5 | | C₃= 0 | |
| $A_{n+2}$= | 7 | $A_{n+1}$+ | 5 | $A_n$+ | 0 |
| 2 | | | 2 | | |
| 4 | | | 4 | | |
| 38 | | | 2 | | |
| 286 | | | 10 | | |
| 2192 | | | 8 | | |
| 16774 | | | 10 | | |
| 128378 | | | 2 | | |
| 982516 | | | 4 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= 12 | | A₁= 2 | | A₂= 4 | |
| C₁= 6 | | C₂= 5 | | C₃= 0 | |
| $A_{n+2}$= | 6 | $A_{n+1}$+ | 5 | $A_n$+ | 0 |
| 2 | | | 2 | | |
| 4 | | | 4 | | |
| 34 | | | 10 | | |
| 224 | | | 8 | | |
| 1514 | | | 2 | | |
| 10204 | | | 4 | | |
| 68794 | | | 10 | | |
| 463784 | | | 8 | | |

以上二例似乎表示循環狀況與$\gcd(k，C_1)$無關？

右圖$\gcd(k，C_1)=\gcd(12，6)\neq 1$，但是$\langle a_n\rangle$成純循環，再來看以下二例。

3. $k$為合數且$\langle a_n\rangle$成混循環

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= 12 | | A₁= 3 | | A₂= 4 | |
| C₁= 5 | | C₂= 8 | | C₃= 0 | |
| $A_{n+2}$= | 5 | $A_{n+1}$+ | 8 | $A_n$+ | 0 |
| 3 | | | 3 | | |
| 4 | | | 4 | | |
| 44 | | | 8 | | |
| 252 | | | 0 | | |
| 1612 | | | 4 | | |
| 10076 | | | 8 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k= 72 | | A₁= 3 | | A₂= 4 | |
| C₁= 5 | | C₂= 8 | | C₃= 0 | |
| $A_{n+2}$= | 5 | $A_{n+1}$+ | 8 | $A_n$+ | 0 |
| 3 | | | 3 | | |
| 4 | | | 4 | | |
| 44 | | | 44 | | |
| 252 | | | 36 | | |
| 1612 | | | 28 | | |
| 10076 | | | 68 | | |
| 63276 | | | 60 | | |
| 396988 | | | 52 | | |
| 2491148 | | | 20 | | |
| 15631644 | | | 12 | | |
| 98087404 | | | 4 | | |
| 615490172 | | | 44 | | |

猜測因為$\gcd(k，C_2)\neq 1$，所以$\langle a_n\rangle$成混循環。

(三)$g$階遞迴的$\langle a_n\rangle$

透過以上觀察，純循環是一個「雙向」的運算結果，正推或逆推都必須是同一數列。

| |
|---|
| 定理 1：$g$階遞迴式$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，<br>若 $\gcd\left(C_g\ ，k\right)=1$，則$\langle a_n\rangle$成純循環。 |

【證明】

用反證法，假設$\langle a_n\rangle$成混循環，則存在$a_z$是進入循環節前的最後一項，$z\in N$，

則$a_{z+n}\equiv a_{z+L(k)+n}$，$n\in N$。$a_{g+z}\equiv C_1a_{g-1+z}+C_2a_{g-2+z}+\cdots+C_ga_z$，

$C_ga_z\equiv a_{g+z}-C_1a_{g-1+z}-\cdots-C_{g-1}a_{1+z}$

$\equiv a_{g+z+L(k)}-C_1a_{g-1+z+L(k)}-\cdots-C_{g-1}a_{1+z+L(k)}$

$\equiv C_ga_{z+L(k)}$，因$\gcd\left(C_g\ ，k\right)=1$，故$a_z\equiv a_{z+L(k)}$，又$a_{z+1}\equiv a_{z+1+L(k)}$，

得知$a_z$就在循環節內，得到矛盾，所以數列每一項都在循環節內，$\langle a_n\rangle$成純循環。

二、一階遞迴式產生之餘數數列$\langle a_n\rangle$關係

一階遞迴式為$A_{n+1}=C_1A_n$,其餘數數列關係可寫成$a_{n+1}\equiv C_1a_n(\operatorname{mod} k)$,由定理1：若$\gcd\left(C_1\ ，k\right)=1$，則$\langle a_n\rangle$成純循環。因此當$k$為質數時，當然地$\langle a_n\rangle$成純循環，在此僅研究**$k$為質數，且**$\gcd\left(C_1\ ，k\right)=1$下餘數數列的關係。

| |
|---|
| 性質 1：一階遞迴式$A_{n+1}=C_1A_n$，有$L(k)\mid k-1$。 |

【證明】

根據費馬小定理，因$\gcd(C_1,k)=1$，$(C_1)^{k-1}\equiv 1$，則$a_1\equiv a_1(C_1)^{k-1}$，

故到第$k$項時數列循環，所以$L(k)\mid k-1$。

| |
|---|
| 定理 2：一階遞迴式$A_{n+1}=C_1A_n$，若 $C_1\not\equiv 1$，則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。 |

【證明】

若$C_1\not\equiv 1$，數列的一般項$a_n\equiv(C_1)^{n-1}a_1$，

根據費馬小定理，因$\gcd(C_1,k)=1$，故$(C_1)^{k-1}\equiv 1$，

前$k-1$項之和$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\equiv a_1+a_1(C_1)^1+\cdots+a_1(C_1)^{k-2}$

$=a_1\times\frac{(C_1)^{k-1}-1}{C_1-1}\equiv a_1\times\frac{1-1}{C_1-1}=0$，

由性質 1 知道$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=\frac{k-1}{L(k)}\times\left(a_1+\cdots+a_{L(k)}\right)\equiv 0$，

因$\gcd\left(\frac{k-1}{L(k)}\ ,k\right)=1$，故$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$，得證。

附註：若$C_1\equiv 1$，則$a_n\equiv a_1$，$n\in N$。

三、二階遞迴之循環性質

(一)循環節內分類的方法

二階遞迴式為$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，餘數數列的關係可寫成 $a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n(\mathrm{mod}\ k)$。同樣地，由定理 1 知道$k$為質數時，$\langle a_n\rangle$成純循環，之後將探討$\boldsymbol{k}$**為質數**的發現。

1. 利用$m_n$來探討循環節內存在的「循環」

二階遞迴關係式以上，對於如此複雜的運算結果，我們試圖以接近一階的方法來進行探討，若利用相鄰兩數存在一個模$k$下倍數的關係，想必可以避免展開項式愈來愈多的趨勢。

我們定義$a_{s_i}$為循環節中第$i$個碰到0的項,利用中國剩餘定理可推得$\langle m_n\rangle$定義：

| |
|---|
| $\langle m_n\rangle$定義：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$， |
| 則存在唯一的$m_n$使得當$n\neq s_i$、$s_i-1$時，$a_{n+1}\equiv m_na_n$；當$n=s_i$時，$a_{n+1}\equiv m_{n-1}a_{n-1}$。 |

以下將$\langle a_n\rangle$分為 $a_n\neq 0$或存在$a_n=0$討論。

| |
|---|
| 定理 3.1：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$， $a_n\neq 0$，$\forall n\in N$。若$a_{n+1}\equiv m_na_n$，則存在最小值$x_0$使得$m_1$、$m_2$、…、$m_{x_0}$與$m_{ix_0+1}$、$m_{ix_0+2}$、…、$m_{(i+1)x_0}$依序相同，$i\in N$。 |

【證明】

(1) $a_{n+2}\equiv m_{n+1}a_{n+1}\equiv m_{n+1}m_na_n$

$a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n\equiv C_1m_na_n+C_2a_n=a_n(C_1m_n+C_2)$

$m_{n+1}m_na_n\equiv a_n(C_1m_n+C_2)$，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$。

(2)因$0 \leq m_n < k$， $m_n$共$k-1$個可能的值，故在$\langle a_n \rangle$無窮數列中，根據鴿籠原理必可找到$m_{x_0+j} = m_j$，$x_0$為最小值。由$\begin{cases} m_j m_{j-1} \equiv C_1 m_{j-1} + C_2 \\ m_{x_0+j} m_{x_0+j-1} \equiv C_1 m_{x_0+j-1} + C_2 \end{cases}$，得$m_{x_0+j-1} = m_{j-1} \dots$，依此類推到$m_{x_0+1} = m_1$，同理$m_{dx_0+n} = m_n$，即$x_0$是$m_n$循環的長度，$i$是$m_n$循環的次數。

由上知

> 性質 2.1：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1 A_{n+1} + C_2 A_n$， $a_n \neq 0$，$\forall n \in N$，
>
> 則$m_{n+1} m_n \equiv C_1 m_n + C_2$。

> 定理 3.2：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1 A_{n+1} + C_2 A_n$， $a_n = 0, \forall n = s_i$，
>
> 若$n \neq s_i$、$s_i - 1$，$a_{n+1} \equiv m_n a_n$；$n = s_i - 1$，$a_{n+2} \equiv m_n a_n$，
>
> 則存在$x$的最小值$x_0$使得$m_1$、$m_2$、…、$m_{s_1-1}$、$m_{s_1+1}$、…、$m_{x_0}$
>
> 與$m_{ix_0+1}$、$m_{ix_0+2}$、…、$m_{s_{i+1}-1}$、$m_{s_{i+1}+1}$、…、$m_{(i+1)x_0}$依序相同，$i \in N$。

【證明】

(1)首先舉出所有$a_{n+2}$的二個關係式，一個是倍數關係，另一個是遞迴關係式，整理如下所示：

①$s_{i-1} + 1 \leq n \leq s_i - 3$(設$s_0 = 0$)

$a_{n+2} \equiv m_{n+1} a_{n+1} \equiv m_{n+1} m_n a_n$

$a_{n+2} \equiv C_1 a_{n+1} + C_2 a_n \equiv C_1 m_n a_n + C_2 a_n = a_n(C_1 m_n + C_2)$

$m_{n+1} m_n \equiv C_1 m_n + C_2$。

②$n = s_i - 2$

$a_{n+2} = 0$，$a_{n+2} \equiv C_1 a_{n+1} + C_2 a_n \equiv C_1 m_n a_n + C_2 a_n = a_n(C_1 m_n + C_2)$

$0 \equiv C_1 m_n + C_2$，$C_1 m_n \equiv -C_2$

反推之，得$n = s_{i+1} - 2$若且惟若$C_1 m_n \equiv -C_2$。

③$n = s_i - 1$

$a_{n+2} \equiv m_n a_n$，$a_{n+2} \equiv C_1 a_{n+1} + C_2 a_n = C_2 a_n$，$m_n \equiv C_2$。

④$n = s_i$

$a_{n+2} \equiv m_{n+1} a_{n+1}$，$a_{n+2} \equiv C_1 a_{n+1} + C_2 a_n \equiv C_1 a_{n+1}$，$m_{n+1} \equiv C_1$。

(2)因為$C_1 m_{s_2-2} \equiv -C_2 \equiv C_1 m_{s_1-2}$，$m_{s_2-2} \equiv m_{s_1-2}$，由$\begin{cases} m_{s_2-2} m_{s_2-3} \equiv C_1 m_{s_2-3} + C_2 \\ m_{s_1-2} m_{s_1-3} \equiv C_1 m_{s_1-3} + C_2 \end{cases}$，得

$m_{s_2-3} = m_{s_1-3}$，依此類推到$m_{s_2-s_1+1} = m_1$，令$x_0 = s_2 - s_1$，則$m_{x_0+1} = m_1$，在$s_i$與$s_{i+1}$之間就是一個$x_0$的長度，也就是說一個最小的長度$x_0$之中恰好出現一個值為 0。同理

$m_1$、$m_2$、…、$m_{s_1-1}$、$m_{s_1+1}$、…、$m_{x_0}$與

$m_{ix_0+1}$、$m_{ix_0+2}$、…、$m_{s_{i+1}-1}$、$m_{s_{i+1}+1}$、…、$m_{(i+1)x_0}$依序相同。我們還得知$\langle a_n \rangle$數列中為零的項是等間隔出現的，即$s_{i+1} - s_i = x_0$。

由上知

性質 2.2：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1 A_{n+1} + C_2 A_n$，若$a_n = 0, \forall n = s_i$，則

(1)$s_{i-1} + 1 \le n \le S_i - 3$ 時，$m_{n+1} m_n \equiv C_1 m_n + C_2$

(2)$n = S_i - 2$時，$C_1 m_n \equiv -C_2$

(3)$n = S_i - 1$時，$m_n \equiv C_2$

(4)$n = S_i$時，$m_{n+1} \equiv C_1$。

性質 3：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1 A_{n+1} + C_2 A_n$，

則存在定值$M$使得$a_{ix_0+n} \equiv M a_{(i-1)x_0+n}$，$\forall i \in N$。

【證明】

由$\langle m_n \rangle$定義可知，

$$\begin{aligned} a_{ix_0+n} &\equiv m_{ix_0+n-1} a_{ix_0+n-1} \\ &\equiv m_{ix_0+n-1} m_{ix_0+n-2} a_{ix_0+n-2} \equiv \cdots \\ &\equiv m_{ix_0+n-1} m_{ix_0+n-2} \dots m_{(i-1)x_0+n} a_{(i-1)x_0+n} \\ &\equiv m_{x_0} m_{x_0-1} \dots m_2 m_1 a_{(-1)x_0+n} \end{aligned}$$

令$M \equiv m_{x_0} m_{x_0-1} \dots m_2 m_1$，$a_{ix_0+n} \equiv M a_{(i-1)x_0+n}$，得證。

性質 4：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1 A_{n+1} + C_2 A_n$，有$x_0 \mid L(k)$。

【證明】

若$x_0 \nmid L(k)$，則$m_{L(k)+1} = m_{ix_0+n}$，$n \neq 1$。又$a_{L(k)+1} \times m_{L(k)+1} \equiv a_{L(k)+2}$，$a_{L(k)+1} \equiv a_1$，$a_{L(k)+2} \equiv a_2$，則$m_1 = m_{L(k)+1} = m_{ix_0+n}$，$n = 1$，矛盾。故$x_0 \mid L(k)$，得證。

| 定理 4：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1A_{n+1} + C_2A_n$，<br>若$L(k) = t_0x_0$，則$t_0$為使$M^{t_0} \equiv 1$成立的最小值。 |
|---|

【證明】

設$L(k) = t_0x_0$，由性質 3 可知 $a_{ix_0+n} \equiv Ma_{(i-1)x_0+n} \equiv \cdots \equiv M^{t_0}a_{(i-t_0)x_0+n} \equiv M^{t_0}a_{ix_0-L(k)+n}$ $= M^{t_0}a_{ix_0+n}$，$M^{t_0} \equiv 1$，由於$L(k)$是最小循環節長度，可知$t_0$為最小值。

| 性質 5：二階遞迴式$A_{n+2} = C_1A_{n+1} + C_2A_n$，則$L(k) \mid (k-1)x_0$。 |
|---|

【證明】

$a_{(k-1)x_0+n} \equiv M^{k-1}a_n \equiv a_n$(費馬小定理)，$t_0 \mid k-1$，$t_0x_0 \mid (k-1)x_0$，$L(k) \mid (k-1)x_0$，得證。

$m_n$的性質概念以下圖呈現：

| | $(\times \boldsymbol{M})$ | $\times \boldsymbol{M}$ | $\times M^{t_0-3}$ | $\times \boldsymbol{M}$ | $\times \boldsymbol{M}$ | $\equiv \mathbf{1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\times \boldsymbol{m}_{x_0})$<br>$\times \boldsymbol{m}_1$ | $a_1$ | $a_{x_0+1}$ | $\cdots$ | $a_{(t_0-2)x_0+1}$ | $a_{(t_0-1)x_0+1}$ | $a_1$ |
| $\times \boldsymbol{m}_2$ | $a_2$ | $a_{x_0+2}$ | $\cdots$ | $a_{(t_0-2)x_0+2}$ | $a_{(t_0-1)x_0+2}$ | $a_2$ |
| $\cdots$<br>$\times \boldsymbol{m}_{x_0-2}$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $\times \boldsymbol{m}_{x_0-1}$ | $a_{x_0-1}$ | $a_{2x_0-1}$ | $\cdots$ | $a_{(t_0-1)x_0-1}$ | $a_{t_0x_0-1}$ | $a_{x_0-1}$ |
| $\times \boldsymbol{m}_{x_0}$ | $a_{x_0}$ | $a_{2x_0}$ | $\cdots$ | $a_{(t_0-1)x_0}$ | $a_{t_0x_0} = a_{L(k)}$ | $a_{x_0}$ |
| $\equiv \boldsymbol{M}$ | 一個循環節$L(k)$ | | | | | |

在研究時，我們有個發現：上圖中將同一橫列的所有項相加，其和必會是$k$的倍數，如下圖。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $+a_{x_0+1}$ | $\cdots$ | $+a_{(t_0-2)x_0+1}$ | $+a_{(t_0-1)x_0+1}$ | $\equiv 0$ |
| $a_2$ | $+a_{x_0+2}$ | $\cdots$ | $+a_{(t_0-2)x_0+2}$ | $+a_{(t_0-1)x_0+2}$ | $\equiv 0$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\equiv 0$ |
| $a_{x_0-1}$ | $+a_{2x_0-1}$ | $\cdots$ | $+a_{(t_0-1)x_0-1}$ | $+a_{t_0x_0-1}$ | $\equiv 0$ |
| $a_{x_0}$ | $+a_{2x_0}$ | $\cdots$ | $+a_{(t_0-1)x_0}$ | $+a_{L(k)}$ | $\equiv 0$ |

我們提出性質 6，並由性質 3 的相鄰兩行倍數關係解釋此情形。

> 性質 6：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$， $U_{(n,x_0)}=a_n+a_{x_0+n}+\cdots+a_{(t_0-1)x_0+n}$。
>
> 若$M\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$，則$U_{(n,x_0)}\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)$。

【證明】

設$L(k)=t_0x_0$。若$M\not\equiv 1$，則

$U_{(n,x_0)}=a_1+a_{x_0+1}+\cdots+a_{(t_0-1)x_0+1}\equiv a_1+Ma_1+\cdots+M^{t_0-1}a_1=\frac{a_1(M^{t_0}-1)}{M-1}\equiv\frac{a_1(1-1)}{M-1}=0$，

同理$U_{(1,x_0)}\equiv U_{(2,x_0)}\equiv\cdots\equiv U_{(x_0,x_0)}\equiv 0$，得證。

而當$M\equiv 1$時，則$U_{(n,x_0)}=a_n$，只有$a_n\equiv 0$的情況，會發生$U_{(n,x_0)}=a_n\equiv 0$。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 9 | 1 |
| 2 | 10 | 6 | 8 | 7 |
| 6 | 8 | 7 | 2 | 10 |
| 2 | 10 | 6 | 8 | 7 |
| 3 | 4 | 9 | 1 | 5 |
| 9 | 1 | 5 | 3 | 4 |

左圖舉例：

$k=11$，$A_1=5$，$A_2=2$，$C_1=5$，$C_2=8$

$A_{n+2}=5A_{n+1}+8A_n$

$t_0=5$，$x_0=6$，$M\equiv 5$

若$M\not\equiv 1$，則$U_{(3,x_0)}=a_3+a_{x_0+3}+\cdots++a_{4x_0+3}=6+8+7+2+10\equiv 0$。

可利用性質 6，若$M\not\equiv 1$，則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv U_{(1,x_0)}+U_{(2,x_0)}+\cdots+U_{(x_0,x_0)}\equiv 0$。這對最小循環節各項和加總的目標近了一步，但並不能解決$M\equiv 1$的情況，接下來會以另一個面向切入。

四、$g$階遞迴之循環節加總，$k$為質數，討論$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$

| |
|---|
| 性質 7：$g$階遞迴式$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，<br>若$C_1+C_2+\cdots+C_g\not\equiv 1$，則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。 |

【證明】

在$g$階遞迴關係下，$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，

或寫成$a_{g+n}\equiv C_1a_{g-1+n}+C_2a_{g-2+n}+\cdots+C_ga_n$，我們列出$L(k)$個關係式並相加，

$$\begin{cases} a_{g+1}\equiv C_1a_g+C_2a_{g-1}+\cdots+C_ga_1 \\ a_{g+2}\equiv C_1a_{g+1}+C_2a_g+\cdots+C_ga_2 \\ \cdots \\ a_{g+L(k)-1}\equiv C_1a_{g+L(k)-2}+C_2a_{g+L(k)-3}+\cdots+C_ga_{L(k)-1} \\ a_{g+L(k)}\equiv C_1a_{g+L(k)-1}+C_2a_{g+L(k)-2}+\cdots+C_ga_{L(k)} \end{cases}$$

$a_{g+1}+a_{g+2}+\cdots+a_{g+L(k)-2}+a_{g+L(k)-1}+a_{g+L(k)}$

$\equiv C_1(a_g+a_{g+1}+\cdots+a_{g+L(k)-2}+a_{g+L(k)-1})$

$+C_2\left(a_{g-1}+a_g+\cdots+a_{g+L(k)-3}+a_{g+L(k)-2}\right)+\cdots+C_g\left(a_1+a_2+\cdots+a_{L(k)-1}+a_{L(k)}\right)$

$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv C_1(a_1+\cdots+a_{L(k)})+C_2(a_1+\cdots+a_{L(k)})+\cdots+C_g(a_1+\cdots+a_{L(k)})$

$(C_1+C_2+\cdots+C_g-1)\,(a_1+\cdots+a_{L(k)})\equiv 0$，

因$k$是質數，故$C_1+C_2+\cdots+C_g\equiv 1$或$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$，

若$C_1+C_2+\cdots+C_g\not\equiv 1$，則有$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$，得證。

當$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$時，循環節各項總和性質即成立，所以我們探討

$\boldsymbol{C_1+C_2+\cdots+C_g\equiv 1}$的情形。

(一)$g=1$，一階遞迴式$A_{n+1}=C_1A_n$

若$C_1\equiv 1$ ，則$a_n=a_1$，$L(k)=1$，僅當$a_1\equiv 0$時，會有循環節各項和$a_1\equiv 0$。

(二)$g=2$，二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$

1. 基礎方法

**若$\boldsymbol{m_1\neq 1}$，則$\boldsymbol{m_n\neq 1}$**，因為若$m_n=1(n>1)$，則$a_2=a_n\neq a_1$，是混循環，矛盾。

若$C_1+C_2\equiv 1$，$m_1=1$，則$a_3=C_1a_2+C_2a_1\equiv(C_1+C_2)a_1\equiv a_1$，$L(k)=1$，則

$a_n=a_1=a_2$，僅當$a_1\equiv 0$時，會有循環節各項和$a_1+a_2\equiv 0$。

性質 8：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，

若$C_1+C_2\equiv 1$，$C_2\not\equiv -1$，$a_1\neq a_2$，則$(-C_2)^{L(k)}\equiv 1$，且$L(k)\mid k-1$。

【證明】

(1)$a_n\neq 0,\forall n\in N$，$m_1\neq 1$

以性質 2.1，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$為前提，$C_1\equiv 1-C_2$代入整理移項，

有$m_n(m_{n+1}-1)\equiv -C_2(m_n-1)$。將所有$1\leq n\leq L(k)$的式子都列出來。

$$\begin{cases} m_1(m_2-1)\equiv -C_2(m_1-1) \\ m_2(m_3-1)\equiv -C_2(m_2-1) \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ m_{L(k)}(m_{L(k)+1}-1)\equiv -C_2(m_{L(k)}-1) \end{cases}$$

將左列各式相乘，因為$m_n-1\neq 0$，所以同餘號左右可同除，得$m_1m_2\dots m_{L(k)}\equiv(-C_2)^{L(k)}$，$1\equiv(-C_2)^{L(k)}$，

又由費馬小定理$(-C_2)^{k-1}\equiv 1$，若$C_2\not\equiv -1$，則$L(k)\mid k-1$；

(2) $a_n=0,\forall n=s_i$，$m_1\neq 1$

以性質 2.2，$s_i+1\leq n\leq s_{i+1}-3$時，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$為前提，$C_1\equiv 1-C_2$代入整理移項，亦有$m_n(m_{n+1}-1)\equiv -C_2(m_n-1)$。將所有$1\leq n\leq L(k)$的式子都列出來。

$$\begin{cases} m_1(m_2-1) & \equiv -C_2(m_1-1) \\ m_2(m_3-1) & \equiv -C_2(m_2-1) \\ & \dots \\ m_{S_1-3}(m_{S_1-2}-1) & \equiv -C_2(m_{S_1-3}-1) \\ C_1m_{S_1-2} & \equiv -C_2 \\ m_{S_1-1} & \equiv C_2 \\ m_{S_1+1} & \equiv C_1 \\ m_{S_1+1}(m_{S_1+2}-1) & \equiv -C_2(m_{S_1+1}-1) \\ & \dots \\ m_{L(k)}(m_{L(k)+1}-1) & \equiv -C_2(m_{L(k)}-1) \end{cases}$$

將以上各式相乘，因為$m_n-1\neq 0$，所以同餘號左右可同除，得

$m_1m_2\dots m_{s_1-1}{m_{s_1+1}}^2\dots m_{L(k)}(m_{s_1-2}-1)\equiv -(-C_2)^{L(k)-1}(m_{s_1+1}-1)$

$m_1m_2\dots m_{s_1-1}m_{s_1+1}\dots m_{L(k)}(m_{s_1+1}m_{s_1-2}-m_{s_1+1})\equiv -(-C_2)^{L(k)-1}(-C_2)$

$m_1m_2\dots m_{s_1-1}m_{s_1+1}\dots m_{L(k)}(C_1m_{s_1-2}-C_1)\equiv -(-C_2)^{L(k)}$

$m_1m_2\dots m_{s_1-1}m_{s_1+1}\dots m_{L(k)}(-C_2-C_1)\equiv -(-C_2)^{L(k)}$

$m_1m_2\dots m_{s_1-1}m_{s_1+1}\dots m_{L(k)}\equiv(-C_2)^{L(k)}$，$1\equiv(-C_2)^{L(k)}$，$s_i$附近都可如此處理。

由費馬小定理$(-C_2)^{k-1}\equiv 1$，若$C_2\not\equiv -1$，則$L(k)\mid k-1$。由(1)(2)得證。

若$C_1+C_2\equiv 1$，則$a_n$的展開多項式如下：

| |
|---|
| $a_1\equiv 0\times a_2+1\times a_1$ |
| $a_2\equiv 1\times a_2+0\times a_1$ |
| $a_3\equiv(-C_2+1)a_2+C_2a_1$ |
| $a_4\equiv({C_2}^2-C_2+1)a_2+(-{C_2}^2+C_{2)}a_1$ |
| $a_5\equiv(-{C_2}^3+{C_2}^2-C_2+1)a_2+({C_2}^3-{C_2}^2+C_2)a_1$ |
| 依此類推 |

為方便描述$a_n$的一般式，我們將$a_n$的展開多項式記為$b_na_2+d_na_1$，$b_n$、$d_n$是該項的係數。藉由觀察連續不同的$n$值，很容易發現$b_n$、$d_n$各自的關係，我們將這樣一個降階描述為性質9。

性質 9：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，

若$C_1+C_2\equiv 1$，設展開式$a_n\equiv b_na_2+d_na_1$，

則$b_n\equiv -C_2b_{n-1}+1$，$d_n\equiv -C_2d_{n-1}+C_2$，$b_1=0$，$d_1=1$。

【證明】

(1)$n=2$時，$b_2=1\equiv -C_2\times 0+1$，結論成立。

假設$n=p$時，結論成立，則$n=p+1$時

$b_{p+1}\equiv C_1b_p+C_2b_{p-1}$

$\equiv(-C_2+1)(-C_2b_{n-1}+1)+C_2b_{p-1}$

$=-C_2(-C_2b_{p-1}+1)+(-C_2b_{n-1}+1)+C_2b_{p-1}\equiv -C_2b_p+1$，結論成立。

(2)$n=2$時，$d_2=0\equiv -C_2\times 1+C_2$，結論成立。

假設$n=p$時，結論成立，則$n=p+1$時

$d_{p+1}\equiv(-C_2+1)d_p+C_2d_{p-1}$

$\equiv(-C_2+1)(-C_2d_{n-1}+C_2)+C_2d_{p-1}$

$=-C_2(-C_2d_{p-1}+C_2)+(-C_2d_{p-1}+C_2)+C_2d_{p-1}\equiv -C_2d_p+C_2$，結論成立。

由(1)(2)與數學歸納法得證。

定理 5：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，

若$C_1+C_2\equiv 1$，且$m_1\not\equiv -C_2$時，則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\not\equiv 0$；

除了$C_1\equiv 2$，$C_2\equiv -1$，且$m_1\not\equiv -C_2$時，$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。

【證明】

(1) $C_2\not\equiv -1$

可得出一般式$b_n=\dfrac{-(-C_2)^{n-1}}{C_2+1}+\dfrac{1}{C_2+1}$，$d_n=\dfrac{(-C_2)^{n-1}}{C_2+1}+\dfrac{C_2}{C_2+1}$

$$a_1+\cdots+a_{L(k)}$$

$$=\left(b_1+\cdots+b_{L(k)}\right)a_2+\left(d_1+\cdots+d_{L(k)}\right)a_1$$

$$=\left[\frac{-(-C_2)^0}{C_2+1}+\cdots+\frac{-(-C_2)^{L(k)-1}}{C_2+1}+\frac{L(k)}{C_2+1}\right]a_2+\left[\frac{(-C_2)^0}{C_2+1}+\cdots+\frac{(-C_2)^{L(k)-1}}{C_2+1}+\frac{C_2L(k)}{C_2+1}\right]a_1$$

$$=\frac{(-C_2)^{L(k)}-1}{C_2+1}(a_2-a_1)+\frac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)$$

$$\equiv\frac{1-1}{C_2+1}(a_2-a_1)+\frac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)\equiv\frac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)$$

因為$L(k)\mid k-1$，$L(k)\nmid k$，所以 $\frac{L(k)}{C_2+1}\not\equiv 0$，

當$m_1=-C_2$時，$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv\dfrac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)\equiv\dfrac{L(k)}{C_2+1}(-C_2a_1+C_2a_1)=0$。

(2) $C_2\equiv -1$，可得出一般式$b_n=n-1$，$d_n=-n+2$

①$a_{L(k)+1}=a_1$，$L(k)a_2+(-L(k)+1)a_1\equiv a_1$，$(a_2-a_1)L(k)\equiv 0$

$a_2-a_1\equiv 0$或$L(k)\equiv 0$，$m_1=1=-C_2$或$L(k)=k$。

② $m_1\neq -C_2$，$L(k)=k$

$$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv\left(b_1+\cdots+b_{L(k)}\right)a_2+\left(d_1+\cdots+d_{L(k)}\right)a_1$$

$$\equiv(0+1+\cdots+L(k)-1)a_2+[1+0+\cdots+(-L(k)+2)]a_2$$

$$=\frac{(L(k)-1)L(k)}{2}a_2+\frac{(-L(k)+3)L(k)}{2}a_1$$

$$=\mathrm{L(k)}\left[\frac{(L(k)-1)a_2+(-L(k)+3)a_1}{2}\right]\equiv 0$$。得證。

2. 由特徵方程式求一般式

考慮$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$的特徵方程式$x^2-C_1x-C_2=0$，若$C_1+C_2\equiv 1$，求得$x$的兩根為1、$-C_2$，得設其一般式$A_n=W_1\times 1^n+W_2\times(-C_2)^n$

$=W_1+W_2(-C_2)^n$，其中$W_1=\frac{C_2A_1+A_2}{C_2+1}$，$W_2=\frac{A_2-A_1}{C_2(C_2+1)}$，整理後

$A_n=\frac{-C_1A_1+A_2}{C_2}\times(-C_2)^n$。

當$C_1=2$，$C_2=-1$時，特徵方程式為$x^2-2x+1=0$，此時方程式重根，其一般式$A_n=(W_1+W_2n)\times 1^n=W_1+W_2n$，其中$W_1=2A_1-A_2$，$W_2=-A_1+A_2$，$A_n$就是一個等差數列。利用特徵方程式求一般式也是一個證明定理 5 的方向。

(三)$g$階遞迴式$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$

在一、二階遞迴中，其特徵方程式重根時都有特殊的情形發生，考慮$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$的特徵方程式，$\alpha^g-C_1\alpha^{g-1}-C_2\alpha^{g-2}\ldots-C_g=0$，首先我們知道若$\alpha$至少有一根是 1 時，則$C_1+C_2+\cdots+C_g\equiv 1$。因此我們好奇$g$階的特徵方程式$g$重根時$(\alpha-1)^g=0$，循環節各項之和是否為$k$的倍數？

> 性質 10：$g$階遞迴$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，$k>g+1$，$k$也不是伯努利數$B_1,\ldots,B_g$分母的因數，起始值不相同，且其特徵方程式的根都是 1，則
> $a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。

【證明】

根據參考資料[4]，$A_n=(W_1+W_2n+\cdots+W_gn^g)\times 1^n=W_1+W_2n+\cdots+W_gn^g$，其中$W_1$、$W_2$、...、$W_g$是常數。

1. 因為起始值不相同，$L(k)\neq 1$

$A_{k+n}=W_1+W_2(k+n)+\cdots+W_g(k+n)^g\equiv W_1+W_2n+\cdots+W_gn^g=A_n$，

$a_{k+n}=a_n$，$L(k)=k$。

2. $a_1+\cdots+a_{L(k)}$

$\equiv(1+\cdots+1)W_1+\big(1+\cdots+L(k)\big)W_2+(1^2+\cdots+L(k)^2)W_3+\cdots$

$+(1^{g-1}+\cdots+L(k)^{g-1})W_{L(k)-1}+(1^{g}+\cdots+L(k)^{g})W_{L(k)}$

$\equiv(1+\cdots+1)W_1+(1+\cdots+k)W_2+(1^2+\cdots+k^2)W_3+\cdots$

$+(1^{g-1}+\cdots+k^{g-1})W_{k-1}+(1^{g}+\cdots+k^{g})W_k$

$$\equiv kW_1+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}W_3+\cdots$$

根據福爾哈伯公式[5]，已知$k>g+1$，$k$也不是伯努利數$B_1,\dots,B_g$分母的因數，我們可以將上式寫為$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv k\times\omega\equiv 0$，得證。

五、$k$為質數時，二階遞迴之橫列數字和

回到二階遞迴，性質 6 有告訴我們：若$M\not\equiv 1$，則$U_{(n,x_0)}=a_n+a_{x_0+n}+\cdots+a_{(t_0-1)x_0+n}\equiv 0$。我們在利用 Excel 將最小循環節分段尋找$x_0$時，因為當時我們不清楚定理 3、4 以及性質 3、4、5、6，常常$x\neq x_0$，直到我們從「對齊 0」、「對齊$m_n$」才得到相鄰二行具有倍數關係$M$。因此我們在提出性質 6 時也有注意到，當$x\neq x_0$時，$U_{(n,x)}=a_n+a_{x+n}+\cdots+a_{(t-1)x+n}\equiv 0$也會發生，我們開始研究更一般的$U_{(n,x)}\equiv 0$。

> 性質 11：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$M\not\equiv 1$，$h\mid t_0$且$h\neq t_0$，
>
> 則$U_{(n,hx_0)}=a_n+a_{hx_0+n}+a_{2hx_0+n}+\cdots+a_{(t_0-h)x_0+n}\equiv 0$。

【證明】

$h\mid t_0\Rightarrow\frac{L(k)}{t_0}\mid\frac{L(k)}{h}\Rightarrow a_1$、$a_{hx_0+1}$、$a_{2hx_0+1}$、…、$a_{(t_0-h)x_0+1}$均在第一橫列

則$a_1\times M^h\equiv a_{hx_0+1}$，$a_{hx_0+1}\times M^h\equiv a_{2hx_0+1}$，…$a_{(t_0-2h)x_0+1}\times M^h\equiv a_{(t_0-h)x_0+1}$

$$U_{(1,hx_0)}=a_1\times\left(1+M^h+M^{2h}+\cdots+M^{(t_0-h)}\right)=a_1\times\frac{M^{t_0}-1}{M^h-1}$$

根據定理 4，$M^{t_0}-1\equiv 0$，又$h<t_0\Rightarrow M^h-1\not\equiv 0$

故$\frac{M^{t_0}-1}{M^h-1}\equiv 0$，$U_{(1,hx_0)}=a_1\times\frac{M^{t_0}-1}{M^h-1}\equiv 0$，同理可證$U_{(n,hx_0)}\equiv 0$，得證。

如下圖，此圖是$k=7$，$A_1=2$，$A_2=3$，$C_1=10$，$C_2=9$，

最小循環節分 $t_0$ 行，$t_0=6$，$x_0=8$，$3 \mid t_0$，

則$U_{(1,3x_0)}=a_1+a_{3x_0+1}=a_1+a_{25}=2+5\equiv 0$。

$U_{(9,3x_0)}=a_9+a_{3x_0+9}=a_9+a_{33}=3+4\equiv 0$

$U_{(17,3x_0)}=a_3+a_{3x_0+3}=a_{17}+a_{41}=1+6\equiv 0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 5 | 4 | 6 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 |
| 6 | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 |
| 4 | 6 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| 3 | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 |

我們針對$2h=t_0$提出逆敘述。

性質 12：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，

若$M\not\equiv 1$，$U_{(n,hx_0)}=a_n+a_{hx_0+n}\equiv 0$，$h$為最小正整數，則$h=\frac{t_0}{2}$。

【證明】

$a_n+a_{hx_0+n}\equiv 0$，$a_n+M^h a_n\equiv 0$，$M^h\equiv -1$，$M^{2h}\equiv 1\equiv M^{t_0}$

因$h$為最小正整數使得$M^{2h}\equiv 1$，$t_0$為最小正整數使得$M^{t_0}\equiv 1$，得$h=\frac{t_0}{2}$，得證。

| 定理 6：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，<br>若$\mathrm{lcm}[x,x_0] \mid \mathrm{L}(k)$，且$\mathrm{lcm}[x,x_0] \neq L(k)$，<br>則$U_{(n,x)}=a_n+a_{x+n}+\cdots+a_{(t-1)x+n}\equiv 0$ |
|---|

【證明】

令$\mathrm{lcm}[x,x_0]=hx_0$，則$h \mid t_0$

$$U_{(n,x)}=a_1+a_{x_0+1}+\cdots+a_{(t-1)x_0+1}$$

$$=\left(a_1+a_{hx_0+1}+\cdots+a_{(t_0-h)x_0+1}\right)+\left(a_{x+1}+a_{x+1+hx_0}+\cdots+a_{x+1+(t_0-h)x_0}\right)+\cdots$$

$$+\left(a_{x(h-1)+1}+a_{x(h-1)+1+hx_0}+\cdots+a_{x(h-1)+1+(t_0-h)x_0}\right)$$

$$\equiv U_{(1,hx_0)}+U_{(x+1,hx_0)}+\cdots+U_{(x(h-1)+1,hx_0)}$$

根據性質 11：$U_{(n,hx_0)}\equiv 0$，故$U_{(n,x)}\equiv 0$，得證。

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 4 | 4 | 6 | 6 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 6 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 5 | 0 | 4 | 0 |
| 5 | 3 | 4 | 1 | 6 | 5 | 2 | 4 | 3 | 6 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 4 | 2 | 6 | 3 | 2 | 1 | 3 | 5 | 1 |

此圖是$k=7$，$A_1=1$，$A_2=6$，$C_1=4$，$C_2=2$，最小循環節分$x$行，$x_0=8$，給定$x=4$，

則$U_{(3,x)}=a_1+a_5+\cdots+a_{(12-1)4+1}\equiv 0$。

六、二階遞迴之計算最小循環節長度

我們的目標是要更快地計算出最小循環節長度，經實驗發現改變起始值並不會改變 $L(k)$，我們從$a_n$的展開多項式開始探討，欲移除起始值對最小循環節長度的影響。

| |
|---|
| 性質 13：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，設$a_n\equiv b_na_2+d_na_1$，<br>則$C_1b_n+d_n=b_{n+1}$；$C_2b_n=d_{n+1}$，$b_1=0$，$d_1=1$。 |

【證明】

用數學歸納法證明$C_1b_n+d_n=b_{n+1}$

1. $n=1$時，$C_1b_1+d_1=C_1\times 0+1=1=b_2$，結論成立。

   $n=2$時，$C_1b_2+d_2=C_1\times 1+0=C_1=b_3$，結論成立。

2.假設 $n=p$時，$C_1b_p+d_p=b_{p+1}$及$n=p+1$時，$C_1b_{p+1}+d_{p+1}=b_{p+2}$同時成立。

則$n=p+2$時，

$$C_1b_{p+2}+d_{p+2}$$
$$=C_1\left(C_1b_{p+1}+C_2b_p\right)+\left(C_1d_{p+1}+C_2d_p\right)$$
$$=C_1\left(C_1b_{p+1}+d_{p+1}\right)+C_2\left(C_1b_p+d_p\right)$$
$=C_1b_{p+2}+C_2b_{p+1}=b_{p+3}$，結論成立，由數學歸納法得證。

$b_{n+1}=C_1b_n+d_n$，又$b_{n+1}=C_1b_n+C_2b_{n-1}$，得$C_2b_{n-1}=d_n$。

此為$a_n$展開多項式對照：

| |
|---|
| $\boldsymbol{a_1}\equiv\mathbf{0}\times a_2+\mathbf{1}\times a_1$ |
| $\boldsymbol{a_2}\equiv\mathbf{1}\times a_2+\mathbf{0}\times a_1$ |
| $\boldsymbol{a_3}\equiv\boldsymbol{C_1}a_2+\boldsymbol{C_2}\times a_1$ |
| $\boldsymbol{a_4}\equiv(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C_2})a_2+\boldsymbol{C_1C_2}a_1$ |
| $\boldsymbol{a_5}\equiv(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{3}}+\mathbf{2}\boldsymbol{C_1C_2})a_2+(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{C_2}+\boldsymbol{C_2}^{\mathbf{2}})a_1$ |
| $\boldsymbol{a_6}\equiv(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{4}}+\mathbf{3}\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{C_2}+\boldsymbol{C_2}^{\mathbf{2}})a_2+(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{C_2}+\mathbf{2}\boldsymbol{C_1C_2}^{\mathbf{2}})a_1$ |
| $\boldsymbol{a_7}\equiv(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{5}}+\mathbf{4}\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{C_2}+\mathbf{3}\boldsymbol{C_1C_2}^{\mathbf{2}})a_2+(\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{4}}\boldsymbol{C_2}+\mathbf{3}\boldsymbol{C_1}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{C_2}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C_2}^{\mathbf{3}})a_1$ |
| 依此類推 |

性質 14：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，設$a_n\equiv b_na_2+d_na_1$，

若$m_1{}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$b_{x_0+1}\equiv 0$。

【證明】

1. $a_n\neq 0$

(1)我們先證明：$m_1\left(b_{x_0+2-n}m_n+d_{x_0+2-n}\right)\equiv b_{x_0+3-n}m_n+d_{x_0+3-n}$------①，$1\leq n\leq x_0+1$

利用性質2.1，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$作數學歸納法

① $n=x_0+1$時

$m_1\left(b_1m_{x_0+1}+d_1\right)$

$=m_1\left(0\times m_{x_0+1}+1\right)=m_1=m_{x_0+1}=1\times m_{x_0+1}+0=b_2m_{x_0+1}+d_2$，①式成立。

②假設$n=p$時，$m_1\left(b_{x_0+2-p}m_p+d_{x_0+2-p}\right)\equiv b_{x_0+3-p}m_p+d_{x_0+3-p}$，①式成立。

則$n=p-1$時

$m_{p-1}m_1\left(b_{x_0+2-p}m_p+d_{x_0+2-p}\right)\equiv m_{p-1}(b_{x_0+3-p}m_p+d_{x_0+3-p})$

$m_1\left(b_{x_0+2-p}m_pm_{p-1}+d_{x_0+2-p}m_{p-1}\right)\equiv(b_{x_0+3-p}m_pm_{p-1}+d_{x_0+3-p}m_{p-1})$

$m_1\left[b_{x_0+2-p}(C_1m_{p-1}+C_2)+d_{x_0+2-p}m_{p-1}\right]\equiv\left[b_{x_0+3-p}(C_1m_{p-1}+C_2)+d_{x_0+3-p}m_{p-1}\right]$

$m_1[(C_1b_{x_0+2-p}+d_{x_0+2-p})m_{p-1}+C_2b_{x_0+2-p})]\equiv\left[\left(C_1b_{x_0+3-p}+d_{x_0+3-p}\right)m_{p-1}+C_2b_{x_0+3-p}\right]$

性質 13 整理得$m_1\left[b_{x_0+3-p}m_{p-1}+d_{x_0+3-p})\right]\equiv b_{x_0+4-p}m_{p-1}+C_2d_{x_0+4-p}$,①式成立。

(2) $n=1$代入①式，$m_1\left(b_{x_0+1}m_1+d_{x_0+1}\right)\equiv b_{x_0+2}m_1+d_{x_0+2}$

$b_{x_0+1}\,m_1{}^2+\left(d_{x_0+1}-b_{x_0+2}\right)m_1-d_{x_0+2}\equiv 0$，以性質 13 整理

$b_{x_0+1}\,m_1{}^2+(-C_1b_{x_0+1})-C_2b_{x_0+1}\equiv 0$

$b_{x_0+1}\,(m_1{}^2-C_1m_1-C_2)\equiv 0$，

若$m_1{}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$b_{x_0+1}\equiv 0$。

附註：當$m_1{}^2-C_1m_1-C_2\equiv 0$時，可寫成$m_1\times m_1\equiv C_1m_1+C_2$，與性質 2.1 比較，可得

$m_1=m_2=m_n$，$a_n\equiv(m_1)^n$，$a_1\equiv a_{L(k)+1}\equiv(m_1)^{L(k)}a_1$，$(m_1)^{L(k)}\equiv 1$。

2. $a_n=0,\forall n=s_i$，同理可證。

| |
|---|
| 定理 7：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，<br>則$L(k,C_1,C_2,A_1,A_2)=L(k,C_1,C_2,0,1)$。 |

【證明】

1. 因為性質 14：若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$b_{x_0+1}\equiv 0$，所以存在最小正整數$q$滿足$b_{q+1}\equiv 0$，$q\mid x_0$。

   根據性質 3 及定理 4，我們定義：$M_b$為二階遞迴式$b_{n+2}=C_1b_{n+1}+C_2b_n$的$M$值，$t_b$為使${M_b}^{t_b}\equiv 1$成立的最小值。

   根據性質 13，由$b_1=0$可得$b_2=1$，則$b_{q+2}\equiv M_bb_2=M_b\equiv C_2b_q$。

2. 欲證 $a_{q+n}\equiv C_2b_qa_n$

   (1)根據性質 13，

   當$n=1$時，$a_{q+1}\equiv b_{q+1}a_2+d_{q+1}a_1\equiv d_{q+1}a_1\equiv C_2b_qa_1$成立

   當$n=2$時，$a_{q+2}\equiv b_{q+2}a_2+d_{q+2}a_1\equiv b_{q+2}a_2+C_2b_{q+1}a_1\equiv b_{q+2}a_2$

   $\equiv(C_1b_{q+1}+C_2b_q)a_2\equiv C_2b_qa_2$成立

   (2)設$n=p$時，$a_{q+p}\equiv C_2b_qa_p$成立；$n=p+1$時，$a_{q+p+1}\equiv C_2b_qa_{p+1}$亦成立

   則$n=p+2$時，$a_{q+p+2}\equiv C_1a_{q+p+1}+C_2a_{q+p}\equiv C_1C_2b_qa_{p+1}+C_2\cdot C_2b_qa_p$

   $\equiv C_2b_q(C_1a_{p+1}+C_2a_p)\equiv C_2b_qa_{p+2}$成立

   由數學歸納法得知，$a_{q+n}\equiv C_2b_qa_n$成立。

3. 根據性質 3，$a_{x_0+n}\equiv Ma_n$，根據 2. 之結論，$x_0\mid q$。又$q\mid x_0$，故$q=x_0$。

   帶入 2. 之結果，則$C_2b_qa_n\equiv a_{x_0+n}\equiv Ma_n\Rightarrow M\equiv C_2b_q=M_b$

4. 根據定理 4，$t_0$為使$M^{t_0}\equiv 1$成立的最小值；又$t_b$為使${M_b}^{t_b}\equiv 1$成立的最小值，故$t_0=t_b$。

5. $L(k,C_1,C_2,A_1,A_2)=x_0t_0=t_bq=L(k,C_1,C_2,0,1)$，得證$L(k,C_1,C_2,A_1,A_2)=L(k,C_1,C_2,0,1)$。

二階遞迴$A_{n+2} = C_1A_{n+1} + C_2A_n$，$k$為質數，給定質數$k$、$A_1$、$A_2$、$C_1$、$C_2$計算$L(k)$，尋找$L(k)$的簡化方法：

步驟：

1. 找到最小正整數$q$滿足$b_{q+1} \equiv 0$，這部分需要較複雜計算。

| $\boldsymbol{x_0}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{b_{x_0+1}}$ | 1 | $\boldsymbol{C_1}$ | $\boldsymbol{{C_1}^2 + C_2}$ | $\boldsymbol{{C_1}^3 + 2C_1C_2}$ | $\boldsymbol{{C_1}^4 + 3{C_1}^2C_2 + {C_2}^2}$ |

其中因為$b_{q+1} \equiv 0$，故$x_0 \neq 1,2$，否則與定義矛盾。

2. 當找到$x_0$時，也能知道$M_b \equiv d_{q+1} = C_2b_q$。
3. 透過定理 4：$t_b$為使${M_b}^{t_b} \equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$成立的最小值，可藉由試驗$k-1$的因數得到 $t_b$。
4. 因為$L(k, C_1, C_2, A_1, A_2) = L(k, C_1, C_2, 0,1) = t_bq$，所以得到了$L(k)$。
5. 從性質 11：若$M \not\equiv 1$，$U_{(n,hx_0)} = a_n + a_{hx_0+n} \equiv 0$，$h$為最小正整數，則$h = \frac{t_0}{2}$。可知只要$a_1 + a_{hx_0+1} \equiv a_2 + a_{hx_0+2} \equiv 0$，則$hx_0 = \frac{L(k)}{2}$。若我們已算出最小循環節前一半，利用性質 11 可以減少後一半的計算。

其實$L(k) = t_bq$，$b_{q+1} \equiv 0$，$(C_2b_q)^{t_b} \equiv 1(\mathrm{mod}\ k)$，其中並沒有用到$A_1$、$A_2$的條件，也就是說：

性質 15：二階遞迴下，$k$為質數，若固定$C_1$、$C_2$、$k$，${m_1}^2 - C_1m_1 - C_2 \not\equiv 0$，

則不論$A_1$、$A_2$為何，$L(k)$的數值恆定。

# 陸、討論

一、費波那契數列之$L(k)$

限定$k$為質數，$A_1=1$、$A_2=1$、$C_1=1$、$C_2=1$，列表如右以下個別計算：

1. $k=2$

$x_0=3$，$M\equiv 1$，$1^1\equiv 1(\bmod 2)$，$L(2)=1\times 3=3$

2. $k=3$

$x_0=4$，$M\equiv 2$，$2^2\equiv 1(\bmod 3)$，$L(3)=2\times 4=8$

3. $k=5$

$x_0=5$，$M\equiv 3$，$3^4\equiv 1(\bmod 5)$，$L(5)=4\times 5=20$

4. $k=7$

$x_0=8$，$M\equiv 6$，$6^2\equiv 1(\bmod 7)$，$L(7)=2\times 8=16$

5. $k=11$

$x_0=10$，$M\equiv 1$，$1^1\equiv 1(\bmod 11)$，$L(11)=1\times 10=10$

6. $k=13$

$x_0=7$，$M\equiv 8$，$8^4\equiv 1(\bmod 13)$，$L(13)=4\times 7=28$

7. $k=17$

$x_0=9$，$M\equiv 4$，$4^4\equiv 1(\bmod 17)$，$L(17)=4\times 9=36$

| $x_0$ | $b_{x_0+1}$ | $d_{x_0+1}$ | $\boldsymbol{k}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | |
| 2 | 1 | 1 | |
| 3 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 3 | 5 |
| 6 | 8 | 5 | |
| 7 | 13 | 8 | 13 |
| 8 | 21 | 13 | 7 |
| 9 | 34 | 21 | 17 |
| 10 | 55 | 34 | 11 |
| 11 | 89 | 55 | |
| 12 | 144 | 89 | |
| 13 | 233 | 144 | |
| 14 | 377 | 233 | |
| 15 | 610 | 377 | |
| 16 | 987 | 610 | |

這裡很剛好地$a_{s_1}=a_{x_0}$，$\langle a_n\rangle$從首項數起碰到零時為一個$x_0$；費氏數列對於合數的$L(k)$也許可以根據質數的結果計算出來。

二、二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，$x$的特殊性質

定理 6 還有部份尚未解決：

若$\mathrm{lcm}[x,x_0]=\mathrm{L}(k)$，則$U_{(n,x)}=a_1+a_{x+1}+\cdots+a_{(t-1)x+1}\equiv 0$？

如下圖第一個例子：$k=13$，$a_1=1$，$a_2=8$，$C_1=9$，$C_2=1$，$x_0=7$：

| $a_1$至$a_7$排序 | $a_8$至$a_{14}$排序 | $a_{15}$至$a_{21}$排序 | $a_{22}$至$a_{28}$排序 | 橫列數字和 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 12 | 5 | 26 |
| 8 | 12 | 5 | 1 | 26 |
| 8 | 12 | 5 | 1 | 26 |
| 2 | 3 | 11 | 10 | 26 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 11 | 10 | 26 |
| 5 | 1 | 8 | 12 | 26 |

如下圖第二個例子：$k=13$，$a_1=1$，$a_2=8$，$C_1=9$，$C_2=1$，$x=4$：

| $a_1$至$a_4$排序 | $a_5$至$a_8$排序 | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $a_{25}$至$a_{28}$排序 | 橫列數字和 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 12 | 3 | 5 | 8 | 10 | 39 |
| 8 | 2 | 12 | 1 | 11 | 5 | 0 | 39 |
| 8 | 5 | 3 | 12 | 0 | 1 | 10 | 39 |
| 2 | 8 | 0 | 5 | 11 | 1 | 12 | 39 |

設$k=13$，$a_1=1$，$a_2=8$，$C_1=9$，$C_2=1$，則$L(k)=28$，上圖是照$x_0=7$的排法，下圖是以$x=4$的排法，這是我們未來該繼續努力的地方。

# 柒、結論

一、$g$階遞迴關係產生之餘數數列$\langle a_n \rangle$循環判別

**若$\gcd(C_g，k)=1$，則$\langle a_n \rangle$成純循環。**

若$k$為質數，我們有以下發現：

二、一階遞迴式產生之餘數數列$\langle a_n \rangle$關係

(一)長度特性：$L(k) \mid k-1$。

三、二階遞迴之循環性質

(一)倍數$M$：**存在最小值$x_0$使得$a_{ix_0+n} \equiv Ma_{(i-1)x_0+n}$，$\forall i \in N$，其中$M$為定值。**

(二) $L(k)=t_0x_0$：若$L(k)=t_0x_0$，則$t$為使$M^{t_0} \equiv 1(\text{mod } k)$成立的最小值。

(三)長度特性：$L(k) \mid (k-1)x_0$

四、$g$階遞迴之循環節加總

**$C_1+C_2+\cdots+C_g \not\equiv 1$時，$a_1+\cdots+a_{L(k)} \equiv 0$。**

**(一)一階：$C_1 \equiv 1$時，$L(k)=1$。**

**(二)二階：$C_1+C_2 \equiv 1$，$m_1 \neq -C_2$時，$a_1+\cdots+a_{L(k)} \not\equiv 0$；除了$C_1 \equiv 2$，$C_2 \equiv -1$，且$m_1 \neq -C_2$時，$a_1+\cdots+a_{L(k)} \equiv 0$。**

**(三) $g$階：若$k>g+1$，$k$也不是伯努利數$B_1$、$\ldots B_g$分母的因數，起始值不相同，且其特徵方程式的根都是1，則$a_1+\cdots+a_{L(k)} \equiv 0$。**

五、二階遞迴之橫列數字和

**若$\text{lcm}[x,x_0] \mid L(k)$，且$\text{lcm}[x,x_0] \neq L(k)$，則$U_{(n,x)}=a_1+a_{x+1}+\cdots+a_{(t-1)x+1} \equiv 0$。**

六、二階遞迴之計算循環節長度

(一)計算 $L(k)$：

1. **若${m_1}^2-C_1m_1-C_2 \not\equiv 0$，則$L(k)=t_bq$，最小正整數$q$滿足$b_{q+1} \equiv 0$，$(C_2b_q)^{t_b} \equiv 1(\text{mod } k)$。**
2. 若${m_1}^2-C_1m_1-C_2 \equiv 0$，則$L(k)$為使${m_1}^{L(k)} \equiv 1(\text{mod } k)$成立的最小值。
3. 若$M \not\equiv 1$，$a_1+a_{hx_0+1} \equiv a_2+a_{hx_0+2} \equiv 0$，則$hx_0=\frac{L(k)}{2}$。

(二)$A_1$、$A_2$與$L(k)$：

**固定$C_1$、$C_2$、$k$，$m_1^2 - C_1m_1 - C_2 \neq 0$，則不論$A_1$、$A_2$為何，$L(k)$的數值恆定。**

# 捌、參考資料及其他


一、周恢穎、莊詠如。費氏數列的性質。高雄市立高雄女中。取自：

https://www.shs.edu.tw/works/essay/2012/04/2012040310055218.pdf

二、List of periods for F (mod m)。The period of F(mod m) for 1 < m < 2002。取自：

http://webspace.ship.edu/msrenault/fibonacci/fiblist.htm

三、李華介。基礎數論。國立台灣師範大學數學系。取自：

http://math.ntnu.edu.tw/~li/ent-html/

四、張福春。台灣高中職數學科教師甄試中的數列和級數問題。取自：

https://ndltd.ncl.edu.tw/cgi-bin/gs32/gsweb.cgi/login?o=dnclcdr&s=id=%22104NSYS5507007%22.&searchmode=basic

五、林開亮。微積分之前奏（或變奏）：高階等差數列的求和。數學傳播。取自：

https://w3.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=41107

六、DISTRIBUTION OF THE FIBONACCI NUMBERS MODULO 3。取自：

https://www.mathstat.dal.ca/FQ/Papers1/43-1/paper43-1-3.pdf

七、FibonacciSequence。取自：

http://oz.nthu.edu.tw/~u9721201/penguin2/math/article/FibonacciSequence.pdf

八、FIBONACCI SEQUENCE MODULO m. 。取自：

http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.390.1661&rep=rep1&type=pdf

九、FibModK。取自：

http://www.math.toronto.edu/mccann/assignments/199S/FibModK.pdf

#【評語】030410

作品為組合數遞迴關係之研究，藉由觀察費氏數列同餘 3 之後產生的週期數列的現象，探討以遞迴關係式產生的數列在同餘 k (k 為質數)下產生循環時的情形加以討論。作者設定在一些條件限制下，獲得一些結果並加以證明。此外，作者應用 Excel 協助計算實驗及相關結果探討，幫忙討論最小循還節及相關性質，是不錯的計算機協助解決問題的方式。藉此研究主題，作者可瞭解學習一些深入的數學理論。

# 作品海報

# 摘要

由遞迴關係式產生的數列各項除以正整數$k$後，會產生一個循環的餘數數列，本研究主要探討其最小循環節性質。我們先得到$g$階遞迴數列的循環狀況，在特殊情況下，餘數數列會成純循環。

若將最小循環節各項加總起來，除特殊狀況外，其和皆是$k$的倍數。在二階遞迴數列中，由於最小循環節必能分成數個每段項數相等的數列，將其依序排成有序的形式後，相鄰二行會具有倍數關係，在某些排法中橫列數字和必為$k$的倍數。我們還得到簡化計算循環節長度的過程，並且知道若餘數數列非等比數列模$k$後的形式時，則起始值對最小循環節長度無影響。

# 壹、研究動機

關於費波那契數列，參考資料[1] 闡述任意「連續幾項」之和會是「某數」的倍數，參考資料[2]列出此數列除以「正整數」的「餘數週期」，或稱皮薩諾週期。令我們驚訝的是，這二組數值對應相等，若限定除數是質數，我們想探討其最小循環節在遞迴關係下，是否都具有各項和為除數之倍數性質。

例：

| 費波那契數列 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | = 54 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mod 3 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | ≡ 0 |
| 最小循環週期 | 8 | | | | | | | | (左列數字相加) |

# 貳、研究目的

一、探討$g$階遞迴式產生之餘數數列循環判別法
二、探討一階遞迴式之最小循環節關係
三、建立二階遞迴式之循環性質
四、推廣$g$階遞迴式之循環節加總是否為除數的倍數
五、探討二階遞迴式之橫列數字和是否為除數的倍數
六、簡化計算二階遞迴式之最小循環節長度

# 參、研究過程及方法

## 一、名詞解釋

(一)$\langle A_n\rangle$：給定起始值$A_1$、$A_2$、 … 、$A_g$、係數$C_1$、$C_2$、 … 、$C_g$，以上皆為整數，以$g$階遞迴關係式
$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n(\boldsymbol{C_g\neq 0})$，$n\in N$，產生無窮數列$\langle A_n\rangle$。

(二)$\langle a_n\rangle$：將$\langle A_n\rangle$各項除以一正整數$k$所得餘數依序形成之新數列，表示為$a_1$、$a_2$、 … 、$a_n$，$0\le a_n<k$。
其中$a_{g+n}\equiv C_1a_{g-1+n}+C_2a_{g-2+n}+\cdots+C_ga_n(\mathrm{mod}\ k)$。

(三)$\langle s_i\rangle$：取 $\langle a_n\rangle$數列中值為零的項並依序排列，第$i$個為零的項是$a_{s_i}$，即
$a_{s_1}=a_{s_2}=\cdots=a_{s_i}=0$，$i\in N$。將符合上述條件之$s_i$依序排列，形成數列$\langle s_i\rangle$。

註(1)：以下都探討mod $k$後的關係，
因此只出現 ≡的式子會省略掉(mod $k$)

(四)循環節：一數列中，某段數值不斷在數列中出現,並且相鄰兩次之間無其他數值出現，
則該段數值稱為此數列的循環節。

(五)$L(k)$：函數$L(k,a_1,a_2,\dots a_g,C_1,C_2,\dots C_g)$的縮寫，表示$g$階餘數數列的最小循環節長度。
在$n$足夠大時，$a_n\equiv a_{n+L(k)}(\mathrm{mod}\ k)$。

註(2)：以下若無特別說明，則每個符號
皆代表整數，其中我們設定$n\in N$

(六)$L(k)=tx$：若將最小循環節依序分成$t$段，每段$x$個數值，則$L(k)=tx$，$x\in N$，$t\in N$。

(七)純循環與混循環：若$a_n\equiv a_{L(k)+n}(\mathrm{mod}\ k)$，$\forall n\in N$皆成立，則此數列為純循環；反之，為混循環。

(八)$\langle m_n\rangle$：利用中國剩餘定理定義，若$k$為質數，(1)當$n\neq s_i$、$s_i-1$時，$a_{n+1}\equiv m_na_n(\mathrm{mod}\ k)$；
(2)當$n=s_i-1$時，$a_{n+1}\equiv m_{n-1}a_{n-1}(\mathrm{mod}\ k)$，所產生的數列$\langle m_n\rangle$，$0\le m_n<k$。

(九)$U_{(n,x)}$：在循環節內等間隔為$x$的項之加總為$U_{(n,x)}$，$U_{(n,x)}=a_n+a_{x+n}+\cdots+a_{(t-1)x+n}$。

## 二、預備定理

**$g$階遞迴關係式模$k$後所形成的餘數數列必定會產生循環，即$L(k)$為有限值。**

【證明】

我們知道$a_n\in E=\{0,1,2,\dots,k-1\}$，$E$為有限集合，故$(a_n,a_{n+1},\dots a_{n+g-1})\in E\times E\times\dots\times E$，亦為有限集合，$(a_n,a_{n+1},\dots a_{n+g-1})$至多有$k^g$種組合，因此至少在無窮數列$\langle a_n\rangle$的第$k^g+2$項開始會重覆到同一段數值，再由$a_{g+n}\equiv C_1a_{g-1+n}+C_2a_{g-2+n}+\cdots+C_ga_n$產生下一數字開始循環，只要有**同樣的連續$g$個數就能判斷是否開始循環**。

# 肆、研究內容

## 一、探討$g$階遞迴式產生之餘數數列循環判別法

定理1：$g$階遞迴式$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，若$\gcd(C_g，k)=1$，則$\langle a_n\rangle$成純循環。

【證明】

用反證法，假設$\langle a_n\rangle$成混循環，則存在$a_z$是進入循環節前的最後一項，$z\in N$，則$a_{z+n}=a_{z+L(k)+n}$，$n\in N$。

以下研究 **$k$為質數**
，餘數數列的關係

$a_{g+z}\equiv C_1a_{g-1+z}+C_2a_{g-2+z}+\cdots+C_ga_z$，

$C_ga_z\equiv a_{g+z}-C_1a_{g-1+z}-\cdots-C_{g-1}a_{1+z}$

$\equiv a_{g+z+L(k)}-C_1a_{g-1+z+L(k)}-\cdots-C_{g-1}a_{1+z+L(k)}\equiv C_ga_{z+L(k)}$，

因$\gcd(C_g，k)=1$，故$a_z=a_{z+L(k)}$，又$a_{z+1}\equiv a_{z+1+L(k)}$，得知$a_z$就在循環節內，故矛盾，所以數列每一項都在循環節內，$\langle a_n\rangle$成純循環。

## 二、一階遞迴式產生之餘數數列$\langle a_n\rangle$關係

性質1：一階遞迴式$A_{n+1}=C_1A_n$，有$L(k)\mid k-1$。

定理2：一階遞迴式$A_{n+1}=C_1A_n$，若 $C_1\not\equiv 1$，則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。

【證明】

若$C_1\not\equiv 1$，數列的一般項$a_n\equiv (C_1)^{n-1}a_1$，根據費馬小定理，因$\gcd(C_1,k)=1$，故$(C_1)^{k-1}\equiv 1$，

前$k-1$項之和$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\equiv a_1+a_1(C_1)^1+\cdots+a_1(C_1)^{k-2}=a_1\times\frac{(C_1)^{k-1}-1}{C_1-1}\equiv a_1\times\frac{1-1}{C_1-1}=0$，

由性質1知道$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=\frac{k-1}{L(k)}\times(a_1+\cdots+a_{L(k)})\equiv 0$，因$\gcd\left(\frac{k-1}{L(k)}，k\right)=1$，故$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$，得證。

而若$C_1\equiv 1$，則$a_n=a_1$，$n\in N$。

## 三、二階遞迴之循環性質

$\langle m_n\rangle$定義：若$k$為質數，則存在唯一的$m_n$使得當$n\neq s_i$、$s_i-1$時，$a_{n+1}\equiv m_na_n$；當$n=s_i$時，$a_{n+1}\equiv m_{n-1}a_{n-1}$。

定理3.1：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$， $a_n\neq 0$，$\forall n\in N$。
有最小值$x_0$使得$m_1$、$m_2$、 … 、$m_{x_0}$與$m_{ix_0+1}$、$m_{ix_0+2}$、 … 、$m_{(i+1)x_0}$依序相同，$i\in N$。

【證明】

1. $a_{n+2}\equiv m_{n+1}a_{n+1}\equiv m_{n+1}m_na_n$，$a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n\equiv C_1m_na_n+C_2a_n=a_n(C_1m_n+C_2)$
$m_{n+1}m_na_n\equiv a_n(C_1m_n+C_2)$，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$。
2. 因$0\le m_n<k$， $m_n$共$k-1$個可能的值，故在$\langle a_n\rangle$無窮數列中，根據鴿籠原理必可找到$m_{x_0+j}=m_j$，$x_0$為最小值。
由$\begin{cases}m_jm_{j-1}\equiv C_1m_{j-1}+C_2\\ m_{x_0+j}m_{x_0+j-1}\equiv C_1m_{x_0+j-1}+C_2\end{cases}$，得$m_{x_0+j-1}=m_{j-1}\dots$，依此類推到$m_{x_0+1}=m_1$，
同理$m_{ix_0+n}=m_n$，即$x_0$是$m_n$循環的長度，$i$是$m_n$循環的次數。

性質2.1：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$， $a_n\neq 0$，$\forall n\in N$，則$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$。

定理3.2：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$， $a_n=0,\forall n=s_i$，
有$x$的最小值$x_0$使得$m_1$、$m_2$、 … 、$m_{s_1-1}$、$m_{s_1+1}$、 … 、$m_{x_0}$與$m_{ix_0+1}$、$m_{ix_0+2}$、 … 、$m_{s_{i+1}-1}$、$m_{s_{i+1}+1}$、 … 、$m_{(i+1)x_0}$依序相同，$i\in N$。

【證明】

1. 首先舉出所有$a_{n+2}$的二個關係式，一個是倍數關係，另一個是遞迴關係式，整理如下所示：
(1)$s_{i-1}+1\le n\le s_i-3$(設$s_0=0$)：$a_{n+2}\equiv m_{n+1}a_{n+1}\equiv m_{n+1}m_na_n$，$a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n\equiv C_1m_na_n+C_2a_n=a_n(C_1m_n+C_2)$，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$。
(2)$n=s_i-2$：$a_{n+2}=0$，$a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n\equiv C_1m_na_n+C_2a_n=a_n(C_1m_n+C_2)$，$0\equiv C_1m_n+C_2$，$C_1m_n\equiv -C_2$。
反推之，得$n=s_{i+1}-2$若且惟若$C_1m_n\equiv -C_2$。
(3)$n=s_i-1$：$a_{n+2}\equiv m_na_n$，$a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n=C_2a_n$，$m_n\equiv C_2$。
(4)$n=s_i$：$a_{n+2}\equiv m_{n+1}a_{n+1}$，$a_{n+2}\equiv C_1a_{n+1}+C_2a_n\equiv C_1a_{n+1}$，$m_{n+1}\equiv C_1$。

2. 因為$C_1m_{s_2-2}\equiv -C_2\equiv C_1m_{s_1-2}$，$m_{s_2-2}\equiv m_{s_1-2}$，由$\begin{cases}m_{s_2-2}m_{s_2-3}\equiv C_1m_{s_2-3}+C_2\\ m_{s_1-2}m_{s_1-3}\equiv C_1m_{s_1-3}+C_2\end{cases}$，得$m_{s_2-3}=m_{s_1-3}$，依此類推到$m_{s_2-s_1+1}=m_1$，令$x_0=s_2-s_1$，
則$m_{x_0+1}=m_1$，在$s_i$與$s_{i+1}$之間就是一個$x_0$的長度，也就是說一個最小的長度$x_0$之中恰好出現一個值為0。同理$m_1$、$m_2$、 … 、$m_{s_1-1}$、$m_{s_1+1}$、 … 、$m_{x_0}$與$m_{ix_0+1}$、$m_{ix_0+2}$、 … 、$m_{s_{i+1}-1}$、$m_{s_{i+1}+1}$、 … 、$m_{(i+1)x_0}$依序相同。我們還得知$\langle a_n\rangle$數列中為零的項是等間隔出現的，即$s_{i+1}-s_i=x_0$。

性質2.2：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$a_n=0,\forall n=s_i$，則
1. $S_i+1\le n\le S_{i+1}-3$時，$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$
2. $n=S_{i+1}-2$時，$C_1m_n\equiv -C_2$
3. $n=S_{i+1}-1$時，$m_n\equiv C_2$
4. $n=S_{i+1}$時，$m_{n+1}\equiv C_1$

性質3：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，則存在定值$M$使得$a_{ix_0+n}\equiv Ma_{(i-1)x_0+n}$，$\forall i\in N$。

性質4：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，有$x_0\mid L(k)$。

定理4：二階遞迴下，$k$為質數，若$L(k)=t_0x_0$，則$t_0$為使$M^{t_0}\equiv 1$成立的最小值。

【證明】
設$L(k)=t_0x_0$，性質3：$a_{ix_0+n}\equiv Ma_{(i-1)x_0+n}\equiv\cdots\equiv M^{t_0}\,a_{(i-t_0)x_0+n}\equiv M^{t_0}\,a_{ix_0-L(k)+n}=M^{t_0}a_{ix_0+n}$。故$M^{t_0}\equiv 1$，由於$L(k)$是最小循環節長度，可知$t_0$為最小值。

| | $(\times M)$ | $\times M$ | $\times M^{t_0-3}$ | $\times M$ | $\times M$ | $\equiv 1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\times m_{x_0})$ $\times m_1$ | $a_1$ | $a_{x_0+1}$ | … | $a_{(t_0-2)x_0+1}$ | $a_{(t_0-1)x_0+1}$ | $a_1$ |
| $\times m_2$ | $a_2$ | $a_{x_0+2}$ | … | $a_{(t_0-2)x_0+2}$ | $a_{(t_0-1)x_0+2}$ | $a_2$ |
| … $\times m_{x_0-2}$ | … | … | … | … | … | … |
| $\times m_{x_0-1}$ | $a_{x_0-1}$ | $a_{2x_0-1}$ | … | $a_{(t_0-1)x_0-1}$ | $a_{t_0x_0-1}$ | $a_{x_0-1}$ |
| $\times m_{x_0}$ | $a_{x_0}$ | $a_{2x_0}$ | … | $a_{(t_0-1)x_0}$ | $a_{t_0x_0}=a_{L(k)}$ | $a_{x_0}$ |
| $\equiv M$ | 一個循環節$L(k)$ | | | | | |

性質5：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，則$L(k)\mid(k-1)x_0$。

發現如下圖：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $+a_{x_0+1}$ | ⋯ | $+a_{(t_0-2)x_0+1}$ | $+a_{(t_0-1)x_0+1}$ | $\equiv 0$ |
| $a_2$ | $+a_{x_0+2}$ | … | $+a_{(t_0-2)x_0+2}$ | $+a_{(t_0-1)x_0+2}$ | $\equiv 0$ |
| … | … | … | … | … | $\equiv 0$ |
| $a_{x_0-1}$ | $+a_{2x_0-1}$ | … | $+a_{(t_0-1)x_0-1}$ | $+a_{t_0x_0-1}$ | $\equiv 0$ |
| $a_{x_0}$ | $+a_{2x_0}$ | … | $+a_{(t_0-1)x_0}$ | $+a_{L(k)}$ | $\equiv 0$ |

性質6：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，
若$M\not\equiv 1$，則$U_{(n,x_0)}=a_n+a_{x_0+n}+\cdots+a_{(t_0-1)x_0+n}\equiv 0$。

## 四、$g$階遞迴之循環節加總，$k$為質數，討論$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$

性質7：$g$階遞迴式$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，若$C_1+C_2+\cdots+C_g\not\equiv 1$，則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。

【證明】
在$g$階遞迴關係下，$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，或寫成$a_{g+n}\equiv C_1a_{g-1+n}+C_2a_{g-2+n}+\cdots+C_ga_n$，我們列出$L(k)$個關係式並相加，

$$\begin{cases}a_{g+1}\equiv C_1a_g+C_2a_{g-1}+\cdots+C_ga_1\\ a_{g+2}\equiv C_1a_{g+1}+C_2a_g+\cdots+C_ga_2\\ \cdots\\ a_{g+L(k)-1}\equiv C_1a_{g+L(k)-2}+C_2a_{g+L(k)-3}+\cdots+C_ga_{L(k)-1}\\ a_{g+L(k)}\equiv C_1a_{g+L(k)-1}+C_2a_{g+L(k)-2}+\cdots+C_ga_{L(k)}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}a_{g+1}+a_{g+2}+\cdots+a_{g+L(k)-2}+a_{g+L(k)-1}+a_{g+L(k)}\equiv{}& C_1(a_g+a_{g+1}+\cdots+a_{g+L(k)-2}+a_{g+L(k)-1})\\ &+C_2\big(a_{g-1}+a_g+\cdots+a_{g+L(k)-3}+a_{g+L(k)-2}\big)\\ &+\cdots+C_g\big(a_1+a_2+\cdots+a_{L(k)-1}+a_{L(k)}\big)\end{aligned}$$

$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv C_1(a_1+\cdots+a_{L(k)})+C_2(a_1+\cdots+a_{L(k)})+\cdots+C_g(a_1+\cdots+a_{L(k)})$，$(C_1+C_2+\cdots+C_g-1)\,(a_1+\cdots+a_{L(k)})\equiv 0$，
因$k$是質數，故$C_1+C_2+\cdots+C_g\equiv 1$或$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$，若$C_1+C_2+\cdots+C_g\not\equiv 1$，則有$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$，得證。

| 若$C_1+C_2\equiv 1$，則$a_n$的展開多項式如下，觀察後整理出了性質9。(數學歸納法) |
|---|
| $a_1\equiv 0\times a_2+1\times a_1$ |
| $a_2\equiv 1\times a_2+0\times a_1$ |
| $a_3\equiv(-C_2+1)a_2+C_2a_1$ |
| $a_4\equiv(C_2{}^2-C_2+1)a_2+(-C_2{}^2+C_2)a_1$ |
| $a_5\equiv(-C_2{}^3+C_2{}^2-C_2+1)a_2+(C_2{}^3-C_2{}^2+C_2)a_1$依此類推。 |

性質8：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$C_1+C_2\equiv 1$，$C_2\not\equiv -1$，$a_1\neq a_2$，
則$(-C_2)^{L(k)}\equiv 1$，且$L(k)\mid k-1$。

性質9：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$C_1+C_2\equiv 1$，
設展開式$a_n\equiv b_na_2+d_na_1$，則$b_n\equiv -C_2b_{n-1}+1$，
$d_n\equiv -C_2d_{n-1}+C_2$，$b_1=0$，$d_1=1$。

定理5 ：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，且$m_1\neq -C_2$時， $a_1+\cdots+a_{L(k)}\not\equiv 0$；除了 $C_1\equiv 2$ ，$C_2\equiv -1$，且$m_1\neq -C_2$時， $a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$ 。

【證明】

(1) $C_2\not\equiv -1$

可得出一般式$b_n=\dfrac{-(-C_2)^{n-1}}{C_2+1}+\dfrac{1}{C_2+1}$，$d_n=\dfrac{(-C_2)^{n-1}}{C_2+1}+\dfrac{C_2}{C_2+1}$

$$\begin{aligned}&a_1+\cdots+a_{L(k)}\\ &=\big(b_1+\cdots+b_{L(k)}\big)a_2+\big(d_1+\cdots+d_{L(k)}\big)a_1\\ &=\left[\frac{-(-C_2)^0}{C_2+1}+\cdots+\frac{-(-C_2)^{L(k)-1}}{C_2+1}+\frac{L(k)}{C_2+1}\right]a_2+\left[\frac{(-C_2)^0}{C_2+1}+\cdots+\frac{(-C_2)^{L(k)-1}}{C_2+1}+\frac{C_2L(k)}{C_2+1}\right]a_1\\ &=\frac{(-C_2)^{L(k)}-1}{C_2+1}(a_2-a_1)+\frac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)\\ &\equiv\frac{1-1}{C_2+1}(a_2-a_1)+\frac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)\equiv\frac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)\end{aligned}$$

因為$L(k)\mid k-1$，$L(k)\nmid k$，所以 $\frac{L(k)}{C_2+1}\not\equiv 0$，

當$m_1=-C_2$時，$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv\dfrac{L(k)}{C_2+1}(a_2+C_2a_1)\equiv\dfrac{L(k)}{C_2+1}(-C_2a_1+C_2a_1)=0$。

(2) $C_2\equiv -1$，可得出一般式$b_n=n-1$，$d_n=-n+2$

①$a_{L(k)+1}=a_1$，$L(k)a_2+(-L(k)+1)a_1\equiv a_1$，$(a_2-a_1)L(k)\equiv 0$

$a_2-a_1\equiv 0$或$L(k)\equiv 0$，$m_1=1=-C_2$或$L(k)=k$。

② $m_1\neq -C_2$，$L(k)=k$

$$\begin{aligned}&a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv\big(b_1+\cdots+b_{L(k)}\big)a_2+\big(d_1+\cdots+d_{L(k)}\big)a_1\\ &\equiv(0+1+\cdots+L(k)-1)a_2+[1+0+\cdots+(-L(k)+2)]a_2\\ &=\frac{(L(k)-1)L(k)}{2}a_2+\frac{(-L(k)+3)L(k)}{2}a_1\\ &=\mathrm{L(k)}\left[\tfrac{(L(k)-1)a_2+(-L(k)+3)a_1}{2}\right]\equiv 0\text{。得證。}\end{aligned}$$

性質10：$g$階遞迴$A_{g+n}=C_1A_{g-1+n}+C_2A_{g-2+n}+\cdots+C_gA_n$，$k>g+1$，$k$也不是伯努利數$B_1,\dots,B_g$分母的因數，起始值不相同，且其特徵方程式的根都是1，
則$a_1+\cdots+a_{L(k)}\equiv 0$。

## 五、$k$為質數時，二階遞迴之橫列數字和

性質11：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$M\not\equiv 1$，$h\mid t_0$且$h\neq t_0$，則$U_{(n,hx_0)}=a_n+a_{hx_0+n}+a_{2hx_0+n}+\cdots+a_{(t_0-h)x_0+n}\equiv 0$。

性質12：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$a_1+a_{x+1}\equiv a_2+a_{x+2}\equiv 0$， $x$為最小正整數，則$L(k)=2x$。
。

定理6：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，若$\mathrm{lcm}[x,x_0]\mid \mathrm{L}(k)$，且$\mathrm{lcm}[x,x_0]\neq L(k)$，則$U_{(n,x)}=a_n+a_{x+n}+\cdots+a_{(t-1)x+n}\equiv 0$。

【證明】
令$\mathrm{lcm}[x,x_0]=hx_0$，則$h\mid t_0$

$$\begin{aligned}U_{(n,x)}&=a_n+a_{x+n}+\cdots+a_{(t-1)x+n}\\ &=\big(a_n+a_{hx_0+n}+\cdots+a_{(t_0-h)x_0+n}\big)+\big(a_{x+n}+a_{x+n+hx_0}+\cdots+a_{x+n+(t_0-h)x_0}\big)+\cdots+\big(a_{x(h-1)+n}+a_{x(h-1)+n+hx_0}+\cdots+a_{x(h-1)+n+(t_0-h)x_0}\big)\\ &\equiv U_{(n,hx_0)}+U_{(x+n,hx_0)}+\cdots+U_{(x(h-1)+n,hx_0)}\end{aligned}$$

根據性質11：$U_{(n,hx_0)}\equiv 0$，故$U_{(n,x)}\equiv 0$，得證。

## 六、二階遞迴之計算最小循環節長度

性質13：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，設$a_n\equiv b_na_2+d_na_1$，有$C_1b_n+d_n=b_{n+1}$；$C_2b_n=d_{n+1}$，$b_1=0$，$d_1=1$。

性質14：二階遞迴$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，設$a_n\equiv b_na_2+d_na_1$，若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$b_{x_0+1}\equiv 0$。

【證明】

1. $a_n\neq 0$

 (1)先用性質2.1：$m_{n+1}m_n\equiv C_1m_n+C_2$作數學歸納法證明$m_1\left(b_{x_0+2-n}m_n+d_{x_0+2-n}\right)\equiv b_{x_0+3-n}m_n+d_{x_0+3-n}$，$1\le n\le x_0+1$。

 (2)$n=1$代入上式，$m_1\left(b_{x_0+1}m_1+d_{x_0+1}\right)\equiv b_{x_0+2}m_1+d_{x_0+2}$， $b_{x_0+1}{m_1}^2+\left(d_{x_0+1}-b_{x_0+2}\right)m_1-d_{x_0+2}\equiv 0$，

 以性質13整理得$b_{x_0+1}\left({m_1}^2-C_1m_1-C_2\right)\equiv 0$，若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$b_{x_0+1}\equiv 0$。

2. $a_n=0,\forall n=s_i$，同理可證。

而若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\equiv 0$，與性質2.1比較，可得$m_1=m_2=m_n$，$a_n\equiv(m_1)^{n-1}a_1$，$a_1\equiv a_{L(k)+1}\equiv(m_1)^{L(k)}a_1$，則$(m_1)^{L(k)}\equiv 1$。

定理7：二階遞迴式$A_{n+2}=C_1A_{n+1}+C_2A_n$，$k$為質數，若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$L(k,C_1,C_2,A_1,A_2)=L(k,C_1,C_2,0,1)$。

【證明】

1. 由性質14，存在最小正整數$q$滿足$b_{q+1}\equiv 0$，$q\,|\,x_0$。

 根據性質3及定理4，我們定義：$M_b$為二階遞迴式

 $b_{n+2}=C_1b_{n+1}+C_2b_n$的$M$值，$t_b$為使${M_b}^{t_b}\equiv 1$成立的最小值。

 $b_2=1$，$b_{q+2}\equiv M_bb_2=M_b\equiv C_2b_q$。

2. 由數學歸納法證得 $a_{q+n}\equiv C_2b_qa_n$。

3. 根據2. 之結論，搭配性質3：$a_{x_0+n}\equiv Ma_n$，$x_0\,|\,q$。又$q\,|\,x_0$，故$q=x_0$。

 帶入2. 之結果，則$C_2b_qa_n\equiv a_{x_0+n}\equiv Ma_n\Rightarrow M\equiv C_2b_q=M_b$。

4. 根據定理4，$t_0$為使$M^{t_0}\equiv 1$成立的最小值；

 又$t_b$為使${M_b}^{t_b}\equiv 1$成立的最小值，故$t_0=t_b$。

 $L(k,C_1,C_2,A_1,A_2)=x_0t_0=qt_b=L(k,C_1,C_2,0,1)$，得證。

給定質數$k$、$A_1$、$A_2$、$C_1$、$C_2$而計算$L(k)$：

1. 找到最小正整數$q$滿足$b_{q+1}\equiv 0$。
2. 找到$q=x_0$時，也能知道$M\equiv d_{q+1}=C_2b_q$。
3. 透過定理4：$t_b$為使$M^{t_b}\equiv 1$成立的最小值，
 可試驗$k-1$的因數得到$t_b$。
4. $L(k,C_1,C_2,A_1,A_2)=L(k,C_1,C_2,0,1)=t_bq$。

| $x_0=q$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_{x_0+1}$ | $C_1$ | ${C_1}^2+C_2$ | ${C_1}^3+2C_1C_2$ | ${C_1}^4+3{C_1}^2C_2+{C_2}^2$ | ${C_1}^5+4{C_1}^3C_2+3C_1{C_2}^2$ |
| $d_{x_0+1}$ | $C_2$ | $C_1C_2$ | ${C_1}^2C_2+{C_2}^2$ | ${C_1}^3C_2+2C_1{C_2}^2$ | ${C_1}^4C_2+3{C_1}^2{C_2}^2+{C_2}^3$ |

性質15：二階遞迴下， $k$為質數，若固定$C_1$、$C_2$、$k$ ，${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則不論$A_1$、$A_2$為何， $L(k)$的數值恆定。

# 陸、討論

舉例：**費波那契數列除以7**。$A_{n+2}=A_{n+1}+A_n$，$A_1=A_2=1$，其中${m_1}^2-C_1m_1-C_2=1^2-1\times 1-1=-1\neq 0$

一、因為$\gcd(C_2，k)=1$，所以$\langle a_n\rangle$成純循環。

二、簡化計算$L(7)$

(一)分段乘積法

1. 找到最小正整數$q=8$滿足

 $b_{8+1}=\ b_9=21\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$

2. $M\equiv C_2b_8=13\equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$

3. $6^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$

4. $L(7)=2\times 8=16$。

(二)二段相加法

由於$a_1+a_8=1+6$

 $\equiv a_2+a_9=1+6$

 $\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$，

由性質12可得

$L(7)=2\times 8=16$。

三、性質15的使用：$L(7,1,1,1,1)=L(7,1,1,1,3)=16$

 對費波那契與盧卡斯數列除以7產生的最小循環節長度進行比較

 費波那契 mod 7：**1,1**,2,3,5,1,6,0,6,6,5,4,2,6,1,0 ,1,1,2,3...

 盧卡斯 mod 7：**1,3**,4,0,4,4,1,5,6,4,3,0,3,3,6,2 ,1,3,4,0...

 結果二者最小循環節長度相同。

四、此餘數數列經分段，依序排列後，橫列數字和為$k$的倍數

| $a_1\sim a_4$ | | $a_5\sim a_8$ | | $a_9\sim a_{12}$ | | $a_{13}\sim a_{16}$ | | $U_{(n,4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 5 | | 6 | | 2 | | 0 |
| 1 | + | 1 | + | 6 | + | 6 | $\equiv$ | 0 |
| 2 | | 6 | | 5 | | 1 | | 0 |
| 3 | | 0 | | 4 | | 0 | | 0 |
| $a_1+\cdots+a_{L(7)}$ | | | | | | | $\equiv$ | 0 |

五、由定理7個別計算$L(k)$：

(一) $k=2$， $x_0=3,\ \ M\equiv 1,\ 1^1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\ \ L(2)=1\times 3=3$

(二) $k=3$， $x_0=4,\ \ M\equiv 2,\ 2^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3),\ \ L(3)=2\times 4=8$

(三) $k=5$， $x_0=5,\ \ M\equiv 3,\ 3^4\equiv 1(\mathrm{mod}\ 5),\ \ L(5)=4\times 5=20$

(四) $k=11$，$x_0=10,M\equiv 1,\ 1^1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11),L(11)=1\times 10=10$

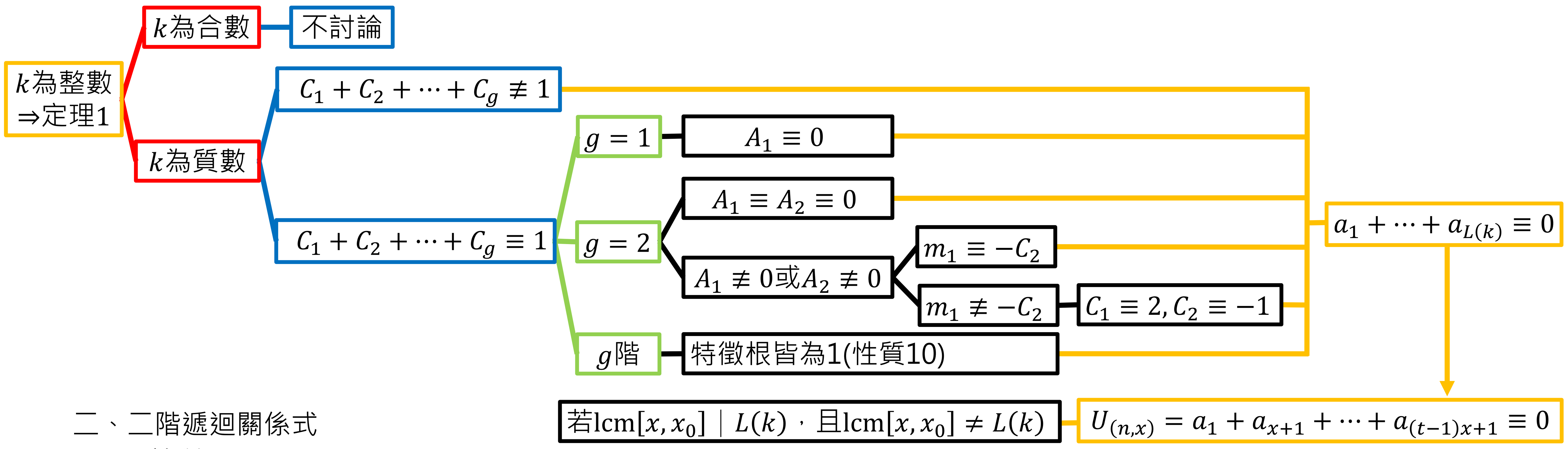
(五) $k=13$，$x_0=7,\ \ M\equiv 8,\ 8^4\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13),L(13)=4\times 7=28$

(六) $k=17$，$x_0=9,\ \ M\equiv 4,\ 4^4\equiv 1(\mathrm{mod}\ 17),L(17)=4\times 9=36$

| $x_0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_{x_0+1}$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |
| $d_{x_0+1}$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| $k$ | | | 2 | 3 | 5 | | 13 | 7 | 17 | 11 |

# 柒、結論

一、 $g$階遞迴關係式循環節加總




二、二階遞迴關係式

(一)性質

1. 存在$x$的最小值$x_0$使得$m_n$會循環。

2. 存在定值 $M$使得 $a_{ix_0+n}\equiv Ma_{(i-1)x_0+n}$，$\forall i\in N$。

3. 若$L(k)=t_0x_0$ ，則$t_0$為使 $M^{t_0}\equiv 1$成立的最小值。

4. $L(k)\,\big|\,[(k-1)x_0]$。

5. 若固定$C_1$、$C_2$、$k$，${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則不論起始值$A_1$、$A_2$為何，$L(k)$恆定。

(二)簡化計算$L(k)$

1. 分段乘積法

 (1)若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\not\equiv 0$，則$L(k)=t_bq$，最小正整數$q$滿足$b_{q+1}\equiv 0$，$(C_2b_q)^{t_b}\equiv 1$。

 (2)若${m_1}^2-C_1m_1-C_2\equiv 0$，則$L(k)$為使${m_1}^{L(k)}\equiv 1$成立的最小值。

2. 二段相加法

 若$a_1+a_{x+1}\equiv a_2+a_{x+2}\equiv 0$， $x$為最小正整數，則$L(k)=2x$。

# 捌、參考資料及其他


一、周恢頴、莊詠如。費氏數列的性質。高雄市立高雄女中

二、List of periods for F (mod m)。The period of F(mod m) for 1 < m < 2002

三、李華介。基礎數論。國立台灣師範大學數學系

四、張福春。台灣高中職數學科教師甄試中的數列和級數問題

五、林開亮。微積分之前奏（或變奏）：高階等差數列的求和。數學傳播

六、DISTRIBUTION OF THE FIBONACCI NUMBERS MODULO 3

七、FibonacciSequence

八、FIBONACCI SEQUENCE MODULO m.

九、FibModK