# 中華民國第59屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

國中組　數學科

## 探究精神獎

030409

## 過橋問題


學校名稱：嘉義市立北興國民中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國二 王靖富 | 羅俊明<br>翁秀玉 |



關鍵詞：過橋遊戲、規律

# 摘要

「過橋遊戲」規則為有 n 個人要過橋，他們過橋的速度皆不同，每次 2 人過橋，過橋的 2 人中秒數較多的人為該次過橋的秒數，過橋時有人要提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，和剩餘的人過橋至對岸，直到所有人都過橋。

本研究討論出過橋秒數不一時的最簡走法通式，再由結論推算出秒數為等差、等比、階差規則走法公式。

## 壹、研究動機

雖然這是一個常見的數學遊戲，而且歷年來也有人研究過，不過，細看這些報告後，還是有值得深入探討之處。這個題目是我從國小階段就開始研究的題目，當時是因為在網路發現過橋遊戲，遊戲規則是：有 5 個人要過橋，他們過橋的秒數分別是 1、3、6、8、12 秒，每次最多 2 人過去，但是要有 1 人回來，直到所有人都過橋，遊戲規定在 30 秒內完成就算過關。

我在 106 年國小六年級時，探討的僅限於過橋秒數是**等差=1** 在**橋上可過橋的人數**不同的情況，但是那時採用的方法是相減法，整個證明非常繁複，而且有特例發生，在我的心中一直存著「未解決」的念頭。

在 107 年 8 月開始繼續研究，推廣到過**橋秒數不一**時的最簡走法通式，再由結論推算出秒數為**等差**、**等比**、**階差**規則走法公式。在 108 年 1 月時獨立研究課的安排，請教教授給我指點，他建議一定要提出最簡公式的證明，我為此困擾很久，大約一個月後終於想出方法。

## 貳、研究目的

有 n 個人要過橋，每人過橋速度不一，每次 2 人過橋，但要有 1 人必須提燈籠回到橋頭，探討在**過橋速度不同**時的情況，**找出最簡秒數的走法及公式**。

研究一：過橋速度規則不一走法**通式**。

研究二：秒數為等差規則走法公式。

研究三：秒數為等比規則走法公式。

研究四：秒數為階差規則走法公式。

## 參、文獻探討與研究差異性

我上網搜尋發現，這個主題國內外皆有一些關於過橋問題的討論，但大部分僅侷限於一些特定的情況，或是無法確認最簡的走法通式。這個問題我小六時也曾經研究過，但當時討論的也僅限於過橋秒數是**等差=1** 在**橋上可過橋的人數**不同的情況，在此我也說明本研究與其他研究的差別:

| 參考資料 | 內容 |
|---|---|
| 資料 1：Gunter Rote(民 91 年)。Crossing the bridge at night。 | 有找出過橋速度不一時的情況最簡秒數，但其方法為討論【n/2】個數值中最小的數為最簡秒數，討論的情況繁雜，並且沒有證明。 |
| 資料 2：王 XX(民 106 年)。過橋遊戲餘數分類解法。 | 只有找出秒數規律為等差=1 時，最多 2 人在橋上、3 人在橋上、及 x 人在橋上的最簡秒數公式。（我的作品，不出現姓名） |
| 資料 3：蔡玗真(民 103 年)。過橋遊戲探討。 | 僅止於討論秒數規律為等差=1，每次最多 2、3、4 人在橋上時的最簡秒數公式，並且有特例。 |
| 資料 5：陳淵琮(民 92 年)。如何最快。 | 有討論出過橋速度不一時的情況最簡秒數，但沒有證明的過程，也沒有延伸推廣至其他情況。 |
| 資料 6：張蒔曦(民 97 年)。過橋問題。 | 討論最多 3、4 人在橋上的情況，但出現了一些沒有解決的特殊情況。 |
| 本研究 | 於過橋速度不一時的情況找出並證明一人提燈走法及二人提燈走法為最簡後，推導出過橋速度秒數不一的通式，成功找出秒數為等差、等比、階差規則走法與最簡秒數公式。 |

## 肆、名詞解釋

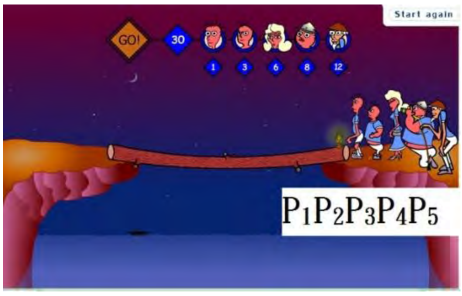
**遊戲規則**

有 n 個人要過橋，過橋秒數**由小排列到大**分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數不一，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，累加每次過橋秒數，找出最簡秒數的走法及公式。**

**舉實例說明遊戲規則**

我用網路上的過橋遊戲的步驟來說明，有五個人要過橋，$P_1$～$P_5$ 過橋秒數分別為 1、3、6、8、12 秒，以下 5 人全部過橋，共花了 29 秒。

| | |
|---|---|
|   |   |
| $P_1P_2P_3P_4P_5$在橋頭 | 第 1 步：$P_1P_2$過橋-3 秒 |
|   |   |
| 第 2 步：$P_1$回橋頭-1 秒 | 第 3 步：$P_4P_5$過橋-12 秒 |
|   |   |
| 第 4 步：$P_2$回橋頭-3 秒 | 第 5 步：$P_1P_3$過橋-6 秒 |
|   |   |
| 第 6 步：$P_1$回橋頭-1 秒 | 第 7 步：$P_1P_2$過橋-3 秒 |
|   | |
| $P_1P_2P_3P_4P_5$全部橋頭，共花了 29 秒 | |

**由遊戲規則，我可以發現一些簡單的通式：**

1. 若有 n 個人要過橋，則總共需要的步驟數為 $2n-3$。
2. 令 $P_1$ 過橋所需秒數為 $t_1$，$P_2$ 過橋所需秒數為 $t_2$，$P_3$ 過橋所需秒數為 $t_3$，……，$P_n$ 過橋所需秒數為 $t_n$，則過橋所需總秒數為 $T=c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3+\cdots+c_nt_n$，其中 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=2n-3$，且 $c_1$、$c_2$……$c_n$ 是不小於 0 的整數。
3. 無論如何 $P_n$ 的秒數一定會被計算到。

**根據以上，我分析走法後，定義了以下的名詞：**

## 一、一人提燈走法與二人提燈走法

**(一)一人提燈走法：** **由同一個人走每一次的回程**，因為 $P_1$ 秒數最少，所以由 $P_1$ 帶領所有人輪番過橋，也由 $P_1$ 走回程。

**(二)二人提燈走法:** 由**兩個人 $P_1$ $P_2$(速度最快的 2 人)走完所有的回程**，搭配以運送最慢 2 人過橋。

## 二、輪

我發現一人提燈走法和二人提燈走法都是**<u>每 4 步驟形成一個規律</u>**，而這 4 步驟結束後共多了 2 人在橋尾，也就是說每一輪送走了 2 人，「第 1 輪」就是把秒數第 1 多的 2 人送過橋，「第 2 輪」就是把秒數第 2 多的 2 人送過橋，「第 3 輪」就是把秒數第 3 多的 2 人 送過橋，…，「第 m 輪」就是把秒數第 m 多的 2 人送過橋，也就是說每一輪結束後會多 2 人在橋尾。


1. 每 4 步驟結束後，多了 2 人在橋尾，即每一輪送走 2 人。
2. 送走秒數第 1 多的 $P_4P_5$。

## 三、剩餘人數所需秒數 R

如果前面已走了 m 輪，就會送走 2m 個人，最終留在橋頭只剩 2 個人或 3 個人時，要送走剩餘的人，就不需要完整 4 步驟過橋了，此時，剩 2 個人或 3 個人這兩種情況要特別分開討論，我把他們所需的秒數代號叫 R。

## 伍、研究方法、結果與討論

### 一、研究一：過橋速度規則不一走法通式

有 n 個人要過橋，過橋所需秒數由小排列到大分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數不一，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。我在這個研究討論**過橋速度規則不一走法的通式。**

#### （一）試玩的情況

我測試不同的過橋秒數情況，花了不少時間，從中觀察最快的走法，想要找出最簡共通的走法規則，舉例如下：

1. 測試秒數($P_1, P_2, P_3, P_4$)=(4, 8, 9, 10)

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_4$去 | 10 |
| 2 | $P_1$回 | 4 |
| 3 | $P_1P_3$去 | 9 |
| 4 | $P_1$ 回 | 4 |
| 5 | $P_1P_2$去 | 8 |
| | 秒數共 | 35 |

2. 測試秒數($P_1, P_2, P_3, P_4$)= (2, 3, 6, 9)

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | 3 |
| 2 | $P_1$回 | 2 |
| 3 | $P_3P_4$去 | 9 |
| 4 | $P_2$ 回 | 3 |
| 5 | $P_1P_2$去 | 3 |
| | 秒數共 | 20 |

3. 測試秒數($P_1, P_2, P_3, P_4$)= (4, 5, 8, 9)

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | 5 |
| 2 | $P_1$回 | 4 |
| 3 | $P_3P_4$去 | 9 |
| 4 | $P_2$ 回 | 5 |
| 5 | $P_1P_2$去 | 5 |
| | 秒數共 | 28 |

4. 測試秒數($P_1, P_2, P_3, P_4$)= (1, 7, 8, 11)

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_4$去 | 11 |
| 2 | $P_1$回 | 1 |
| 3 | $P_1P_3$去 | 8 |
| 4 | $P_1$ 回 | 1 |
| 5 | $P_1P_2$去 | 7 |
| | 秒數共 | 28 |

5. 測試秒數($P_1, P_2, P_3, P_4$)= (1, 3, 7, 8)

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_4$去 | 3 |
| 2 | $P_1$回 | 1 |
| 3 | $P_1P_3$去 | 8 |
| 4 | $P_1$ 回 | 3 |
| 5 | $P_1P_2$去 | 1 |
| | 秒數共 | 16 |

6. 測試秒數($P_1, P_2, P_3, P_4$)= (1, 5, 6, 8)

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | 5 |
| 2 | $P_1$回 | 1 |
| 3 | $P_3P_4$去 | 8 |
| 4 | $P_2$ 回 | 5 |
| 5 | $P_1P_2$去 | 5 |
| | 秒數共 | 24 |

## (二)分析

我測試許多種情況，觀察後發現，各種過橋秒數排列最快的走法，它們的共通點有兩種情況，整理如下:

1. **一人提燈走法:** 由同一個人走每一次的回程，因為 $P_1$ 秒數最少，所以由 $P_1$ 帶領所有人輪番過橋，也由 $P_1$ 走回程。以 4 人過橋舉例：

| 步驟 | 在橋頭的人 | 走在橋上的人 | 最終在橋尾的人 | 秒數 |
|---|---|---|---|---|
| 初始 | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | | | |
| 第 1 步 | $P_2P_3P_4$ | $P_1P_5\rightarrow$ | $P_1P_5$ | $t_5$ |
| 第 2 步 | $P_1P_2P_3P_4$ | $P_1\leftarrow$ | $P_5$ | $t_1$ |
| 第 3 步 | $P_2P_3$ | $P_1P_4\rightarrow$ | $P_1P_4P_5$ | $t_4$ |
| 第 4 步 | $P_1P_2P_3$ | $P_1\leftarrow$ | $P_4P_5$ | $t_1$ |
| 第 5 步 | $P_2$ | $P_1P_3\rightarrow$ | $P_1P_3P_4P_5$ | $t_3$ |
| 第 6 步 | $P_1P_2$ | $P_1\leftarrow$ | $P_3P_4P_5$ | $t_1$ |
| 第 7 步 | | $P_1P_2\rightarrow$ | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | $t_2$ |

2. **二人提燈走法:** 由兩個人 $P_1$ $P_2$(速度最快的 2 人)走完所有的回程，搭配以運送最慢 2 人過橋(想法:最慢兩人過橋，即可不計其中一人的時間)，以 4 人過橋舉例:

| 步驟 | 在橋頭的人 | 走在橋上的人 | 最終在橋尾的人 | 秒數 |
|---|---|---|---|---|
| 初始 | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | | | |
| 第 1 步 | $P_3P_4P_5$ | $P_1P_2\rightarrow$ | $P_1P_2$ | $t_2$ |
| 第 2 步 | $P_1P_3P_4P_5$ | $P_1\leftarrow$ | $P_2$ | $t_1$ |
| 第 3 步 | $P_1P_3$ | $P_4P_5\rightarrow$ | $P_2P_4P_5$ | $t_5$ |
| 第 4 步 | $P_1P_2P_3$ | $P_2\leftarrow$ | $P_4P_5$ | $t_2$ |
| 第 5 步 | $P_2$ | $P_1P_3\rightarrow$ | $P_1P_3P_4P_5$ | $t_3$ |
| 第 6 步 | $P_1P_2$ | $P_1\leftarrow$ | $P_3P_4P_5$ | $t_1$ |
| 第 7 步 | | $P_1P_2\rightarrow$ | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | $t_2$ |

## (三)最簡走法

我已找出一人提燈走法和二人提燈走法，接下來我要試著證明一人提燈走法和二人提燈走法為最快的。

1.4 人過橋

由於要完成完整四步驟至少要有 4 人過橋，又因過橋人數愈多結果愈複雜，因此先討論 4 人過橋的情況。

由文獻得知，而我也計算過，結果得知，4 人過橋共有 108 種走法，過橋總秒數有 15 種類型，表列如下，以下 $t_1$、$t_2$、$t_3$、$t_4$ 分別代表 4 人的過橋秒數)，已知秒數

$t_1<t_2<t_3<t_4$，

經過比較後，發現只有黃底的 2 種情況為最快的。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2t_1+t_2+t_3+t_4$ | $3t_2+t_3+t_4$ | $4t_3+t_4$ | $5t_4$ | $2t_2+3t_4$ |
| $t_1+t_2+2t_3+t_4$ | $2t_1+2t_3+t_4$ | $t_1+t_2+3t_4$ | $t_2+t_3+3t_4$ | $t_1+t_3+3t_4$ |
| $t_1+23_3+t_4$ | $t_2+3t_3+t_4$ | $2t_3+3t_4$ | $t_1+2t_2+t_3+t_4$ | $2t_1+2t_2+t_4$ |

我再從這 2 種情況中，列出可能的走法有 7 種，包含：$2t_1+t_2+t_3+t_4$ 有 6 種，$t_1+3t_2+t_4$ 有 1 種，詳細走法表列如下：

(1)$2t_1+t_2+t_3+t_4$ 類型：從這 6 種走法可以發現，都是採用「一人提燈走法」的規則。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| | 秒數共 | $2t_1+t_2+t_3+t_4$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| | 秒數共 | $2t_1+t_2+t_3+t_4$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| | 秒數共 | $2t_1+t_2+t_3+t_4$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | 秒數共 | $2t_1+t_2+t_3+t_4$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| | 秒數共 | $2t_1+t_2+t_3+t_4$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | 秒數共 | $2t_1+t_2+t_3+t_4$ |

(2)$t_1+3t_2+t_4$ 類型：從這種走法可以發現，是採用「二人提燈走法」的規則。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_3P_4$ 去 | $t_4$ |
| 4 | $P_2$ 回 | $t_2$ |
| 5 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | 秒數共 | $t_1+3t_2+t_4$ |

(3)綜合以上：我確定，4 人過橋最簡走法有一人提燈或二人提燈走法。

## 2.5 人過橋

我推得五人過橋共有 4320 種走法，可能的過橋總計秒數共有 65 種

我已知 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$，經過比對可發現只有黃底的 2 種情況有可能為最快的，我再找出這 2 種情況，可能的走法有 25 種，包括 $3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$ 有 24 種情況，$2t_1+3t_2+t_3+t_5$ 有 1 種情況，詳細表列如下：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $7t_5$ | $t_1+t_3+5t_5$ | $t_1+t_4+5t_5$ | $t_1+t_2+5t_5$ | $2t_2+5t_5$ |
| $2t_3+5t_5$ | $2t_4+5t_5$ | $t_3+t_4+5t_5$ | $t_2+t_4+5t_5$ | $t_2+t_3+5t_5$ |
| $2t_1+t_2+t_3+3t_5$ | $2t_1+t_3+t_4+3t_5$ | $2t_1+t_2+t_4+3t_5$ | $t_1+3t_4+3t_5$ | $t_1+3t_3+3t_5$ |
| $t_1+2t_2+t_3+3t_5$ | $t_1+2t_3+t_4+3t_5$ | $t_1+t_3+2t_4+3t_5$ | $t_1+2t_2+t_4+3t_5$ | $t_1+t_2+2t_4+t_5$ |
| $t_1+t_2+t_3+t_4+3t_5$ | $3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$ | $2t_1+3t_2+t_4+t_5$ | $2t_1+3t_2+t_3+t_5$ | $2t_1+t_2+3t_3+t_5$ |
| $2t_1+t_2+3t_4+t_5$ | $2t_1+t_2+2t_3+t_4+t_5$ | $2t_1+t_2+t_3+2t_4+t_5$ | $2t_1+3t_3+t_4+t_5$ | $2t_1+t_3+3t_4+t_5$ |
| $t_1+4t_2+t_4+t_5$ | $t_1+4t_2+t_3+t_5$ | $t_1+3t_2+t_3+t_4+t_5$ | $t_1+2t_2+3t_3+t_5$ | $t_1+2t_2+2t_3+t_4+t_5$ |
| $t_1+2t_2+t_3+2t_4+t_5$ | $t_1+2t_2+3t_4+t_5$ | $t_1+t_2+3t_3+t_4+t_5$ | $t_1+t_2+2t_3+2t_4+t_5$ | $t_1+t_2+t_3+3t_4+t_5$ |
| $t_1+5t_3+t_5$ | $t_1+4t_3+t_4+t_5$ | $t_1+3t_2+2t_3+t_5$ | $t_1+2t_3+3t_4+t_5$ | $t_1+5t_4+t_5$ |
| $4t_2+t_3+t_4+t_5$ | $3t_2+3t_3+t_5$ | $3t_2+2t_3+t_4+t_5$ | $3t_2+t_3+2t_4+t_5$ | $3t_2+3t_4+t_5$ |
| $2t_2+3t_3+t_4+t_5$ | $2t_2+2t_3+2t_4+t_5$ | $2t_2+t_3+3t_4+t_5$ | $t_2+5t_3+t_5$ | $t_2+4t_3+t_4+t_5$ |
| $t_2+3t_3+2t_4+t_5$ | $t_2+2t_3+3t_4+t_5$ | $t_2+t_3+4t_4+t_5$ | $t_2+5t_4+t_5$ | $5t_3+t_4+t_5$ |
| $4t_2+2t_3+t_5$ | $3t_3+3t_4+t_5$ | $2t_3+4t_4+t_5$ | $t_3+5t_4+t_5$ | $6t_4+t_5$ |

我再找出這 2 種情況，列出可能的走法有 25 種，包括 $3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$24 種，$2t_1+3t_2+t_3+t_5$1 種，詳細走法表列如下

(1)$3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$ 類型：從這 24 種走法可以發現，都是採用「一人提燈走法」的規則。

我只舉其中幾個為例，這 24 種走法皆為一人提燈走法。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_5$ 去 | $t_5$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 6 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 7 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | 秒數共 | $3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_5$ 去 | $t_5$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 6 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 7 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| | 秒數共 | $3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$ |

(2) $2t_1+3t_2+t_3+t_5$ 類型：從這種走法可以發現，是採用「二人提燈走法」的規則。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_4P_5$ 去 | $t_5$ |
| 4 | $P_2$ 回 | $t_2$ |
| 5 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 6 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 7 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| | 秒數共 | $2t_1+3t_2+t_3+t_5$ |

**(3)綜合以上，因此我確定 5 人過橋最簡走法有一人提燈走法或二人提燈走法。**

## 3.6 人過橋及 8 人過橋

後來，我查到一篇資料(資料 1:crossing the bridge at night,作者:Gunter Rote,2002)，寫到說若有 n 人過橋，則要考慮【n/2】個數值中最小的數為最簡走法，因此可知，每多 2 人，可能最快的情形會多 1 種，因此我先討論 6 人和 8 人過橋的情況。

**(1)6 人過橋**

依照文獻(資料 1,p.2)，6 人過橋要討論的情況有 3 個，分別是

($4t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6$, $3t_1+3t_2+t_3+t_4+t_5+t_6-t_5$, $2t_1+5t_2+t_3+t_4+t_5+t_6-t_5-t_3$)

我把這三種情況的走法排出來後，發現其走法皆為一人提燈走法或二人提燈走法，並且我還發現第 1 種情況使用 0 次二人提燈走法，第 2 種情況使用 1 次二人提燈走法，第 3 種情況使用 2 次二人提燈走法，走法表列如下：

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_6$ 去 | $t_6$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_5$ 去 | $t_5$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 6 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 7 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 8 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 9 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | 秒數 | $4t_1+t_2+t_3+$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_5P_6$ 去 | $t_6$ |
| 4 | $P_2$ 回 | $t_2$ |
| 5 | $P_1P_4$ 去 | $t_4$ |
| 6 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 7 | $P_1P_3$ 去 | $t_3$ |
| 8 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 9 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | 秒數 | $3t_1+3t_2+t_3+t_4$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_5P_6$ 去 | $t_6$ |
| 4 | $P_2$ 回 | $t_2$ |
| 5 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 6 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 7 | $P_3P_4$ | $t_4$ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 共 | $t_4+t_5+t_6$ | | 共 | $+t_5+t_6-t_5$ | | 去 | |
| | | | | | | 8 | $P_2$ 回 | $t_2$ |
| | | | | | | 9 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| | | | | | | | 秒數共 | $2t_1+5t_2+t_3+t_4+t_5+t_6-t_5-t_3$ |

**(2)8 人過橋**

依照文獻(資料 1, p. 2)，8 人過橋要討論的情況有 4 個，分別是

$(6t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8, 5t_1+3t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8-t_7, 4t_1+5t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8-t_7-t_5, 3t_1+7t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8-t_7-t_5-t_3)$

我把這四種情況的走法排出來後，發現其走法皆為一人提燈走法或二人提燈走法，並且還發現第 1 種情況使用 0 次二人提燈走法，第 2 種情況使用 1 次二人提燈走法，第 3 種情況使用 2 次二人提燈走法，第 4 種情況使用 3 次二人提燈走法，此處就不詳加表示。

**(3)綜合分析**：我由此推斷此文 n 人過橋所要討論的【n/2】個情況，分別是第 1 種情況使用 0 次二人提燈走法，第 2 種情況使用 1 次二人提燈走法，第 3 種情況使用 2 次二人提燈走法……第 n 種情況使用 n-1 次二人提燈走法。

4. 證明 n 人過橋最簡走法

根據文獻，我已找到一種規律，然而在文獻中必沒有提到如何證明，我試著去證明 n 人過橋時最簡走法是一人提燈走法或二人提燈走法。討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_b$ 去 | $t_b(t_a<t_b)$ |
| 2 | $P_c$ 回 | $t_c$ |
| 3 | $P_dP_e$ 去 | $t_e(t_d<t_e)$ |
| 4 | $P_f$ 回 | $t_f$ |

觀察右表，我發現:

1. $P_c$ 為 $P_a$ 或 $P_b$，因為 $P_a<P_b$，所以 $P_c$ 為 $P_a$ 較快，以下皆以此代入。

2. $P_a$、$P_b$、$P_d$、$P_e$ 其中有 2 個是 $P_{n-1}$ 和 $P_n$，因此($P_{n-1}, P_n$)可能情形有($P_a, P_b$)、($P_d, P_e$)、($P_b, P_e$)、($P_e, P_b$)，以下分別討論。

(1)($P_{n-1}, P_n$)為($P_a, P_b$)類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_{n-1}P_n$ 去 | $t_n$ |
| 2 | $P_{n-1}$ 回 | $t_{n-1}$ |
| 3 | $P_dP_e$ 去 | $t_e$ |
| 4 | $P_f$ 回 | $t_f$ |

比對之後，我發現:

1. $P_e$ 是 $P_{n-1}$

2. $P_f$ 是 $P_d$ 最快，可以是 $P_1$-$P_n$ 任何一個，以 $P_1$ 為最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_{n-1}P_n$去 | $t_n$ |
| 2 | $P_{n-1}$回 | $t_{n-1}$ |
| 3 | $P_1P_{n-1}$去 | $t_{n-1}$ |
| 4 | $P_1$回 | $t_1$ |
| | 秒數共 | $t_1+2t_{n-1}+t_n$ |

(2)$(P_{n-1}, P_n)$為$(P_d,\ P_e)$類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_b$去 | $t_b$ |
| 2 | $P_a$回 | $t_a$ |
| 3 | $P_{n-1}P_n$去 | $t_n$ |
| 4 | $P_f$回 | $t_f$ |

比對之後，我發現:

1. $P_f$為$P_b$最快。

2. $P_a$可以是$P_1$–$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。

3. $P_f$為$P_b$，又$P_b$和$P_a$不同，所以$P_b$=$P_f$為$P_2$最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$回 | $t_1$ |
| 3 | $P_{n-1}P_n$去 | $t_n$ |
| 4 | $P_2$回 | $t_2$ |
| | 秒數共 | $t_1+2t_2+t_n$ |

(3)$(P_{n-1}, P_n)$為$(P_b, P_e)$類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_{n-1}$去 | $t_{n-1}$ |
| 2 | $P_a$回 | $t_a$ |
| 3 | $P_dP_n$去 | $t_n$ |
| 4 | $P_f$回 | $t_f$ |

比對之後，我發現:

1. $P_f$為$P_d$最快。

2. $P_a$可以是$P_1$–$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。

3. $P_d$為$P_f$，可以是$P_1$–$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_{n-1}$去 | $t_{n-1}$ |
| 2 | $P_1$回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_n$去 | $t_n$ |
| 4 | $P_1$回 | $t_1$ |
| | 秒數共 | $2t_1+2t_{n-1}+t_n$ |

(4)($P_{n-1}$, $P_n$)為($P_e$, $P_b$)類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_n$去 | $t_n$ |
| 2 | $P_a$回 | $t_a$ |
| 3 | $P_dP_{n-1}$去 | $t_{n-1}$ |
| 4 | $P_f$回 | $t_f$ |

比對之後，我發現:

1. $P_f$為$P_d$最快。
2. $P_a$可以是$P_1$–$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
3. $P_d$為$P_f$，可以是$P_1$–$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_n$去 | $t_n$ |
| 2 | $P_1$回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_{n-1}$去 | $t_{n-1}$ |
| 4 | $P_1$回 | $t_1$ |
|  | 秒數共 | $2t_1+2t_{n-1}+t_n$ |

(5)秒數比較

| | |
|---|---|
| 第(1)類型 | $t_1+2t_{n-1}+t_n$ |
| 第(2)類型 | $t_1+2t_2+t_n$ |
| 第(3)類型 | $2t_1+2t_{n-1}+t_n$ |
| 第(4)類型 | $2t_1+2t_{n-1}+t_n$ |

經過比較，可發現第(1)類型比第(2)類型慢。

第(2)類型的走法是二人提燈走法。

第(3)類型=第(4)類型是一人提燈走法。

因此 n 人過橋最簡走法必為一人提燈走法或二人提燈走法得證。

### (6)說明為何討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

因為不論是 6 步驟、8 步驟、10 步驟……，其走法肯定是一人提燈走法和二人提燈走法的混搭或變形。而在一人提燈走法較二人提燈走法快時，插入二人提燈走法，必會變慢，同理二人提燈走法較快時亦是。以下舉例說明:

如左表，若將第 3、4 步驟和第 5、6 步驟交換，則可發現形成一個前 4 步是二人提燈走法，後兩步是一人提燈走法的走法。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_{n-2}$ 去 | $t_{n-2}$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_{n-1}P_n$ | $t_n$ |
| 6 | $P_2$ | $t_2$ |
| | 秒數共 | $2t_1+2t_{n-1}+t_n$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | $t_2$ |
| 2 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 3 | $P_1P_{n-2}$ 去 | $t_{n-2}$ |
| 4 | $P_1$ 回 | $t_1$ |
| 5 | $P_{n-1}P_n$ | $t_n$ |
| 6 | $P_2$ | $t_2$ |
| | 秒數共 | $2t_1+2t_{n-1}+t_n$ |

## (四)最簡走法通式

1. 討論這兩種走法在何時較快。

令 $P_1$ 秒數為 W，$P_2$ 秒數為 X，$P_{n-1}$ 秒數為 Y，$P_n$ 秒數為 Z，其中 $W < X < \cdots < Y < Z$，將步驟及秒數列於下表。

**一人提燈走法(完整 4 步驟)**

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_n$ 去 | Z |
| 2 | $P_1$ 回 | W |
| 3 | $P_1$ $P_{n-1}$ 去 | Y |
| 4 | $P_1$ 回 | W |
| | 秒數共 | 2W+Y+Z |

**二人提燈走法(完整 4 步驟)**

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$ 去 | X |
| 2 | $P_1$ 回 | W |
| 3 | $P_n$ $P_{n-1}$ 去 | Z |
| 4 | $P_1$ 回 | X |
| | 秒數共 | W+2X+Z |

2. 當**一人提燈走法**較快時

$$2W + Y + Z < W + 2X + Z$$

$$W + Y < 2X$$

$$X > (W + Y)/2$$

3. 當**二人提燈走法**較快時

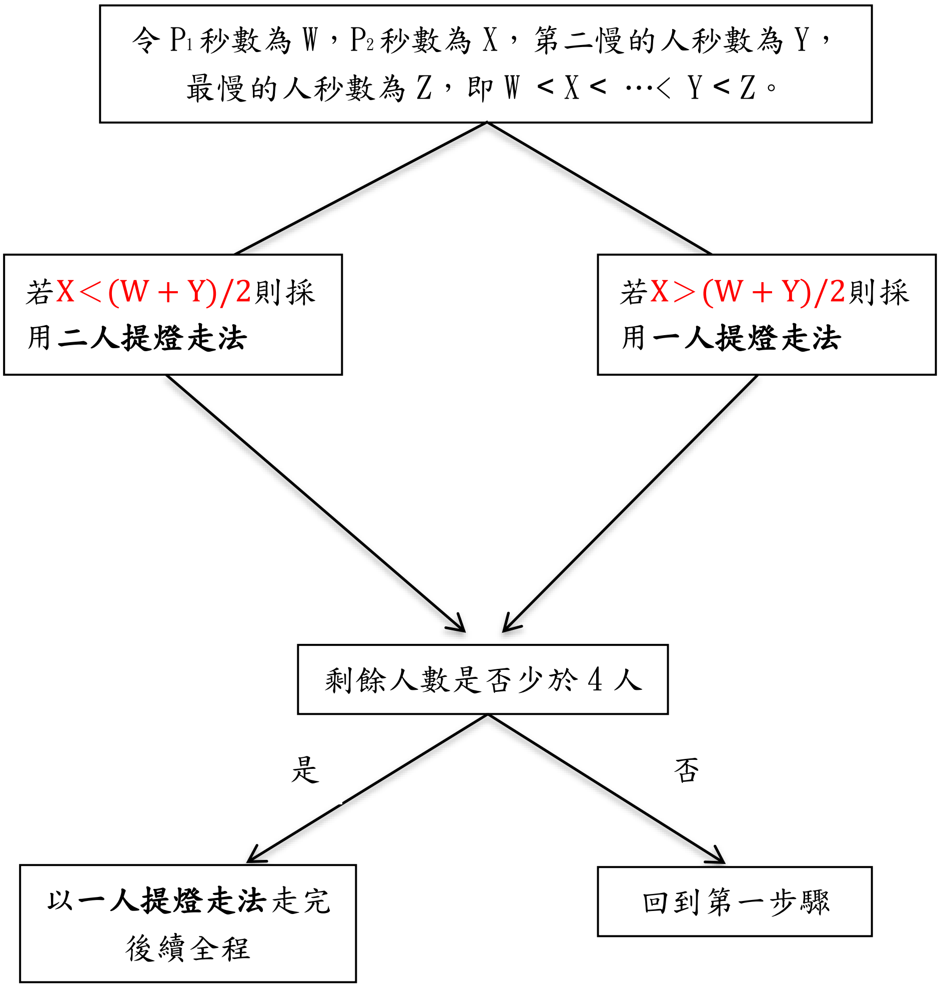
$$2W+Y+Z>W+2X+Z$$

$$W+Y>2X$$

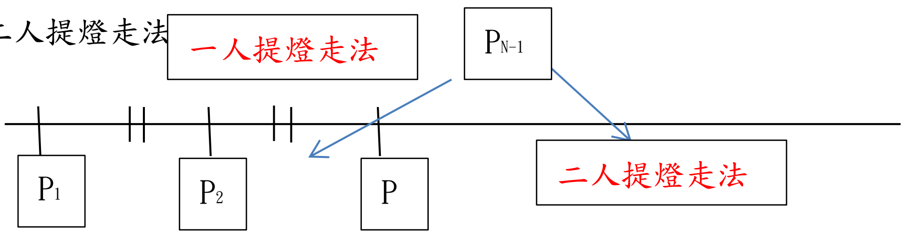
$$X<(W+Y)/2$$

4. 當**剩餘人數少於 4 人**時，無法完成完整 4 步驟，此時**由 $P_1$ 帶領所有人輪番過橋。**

## (五)走法通式結論



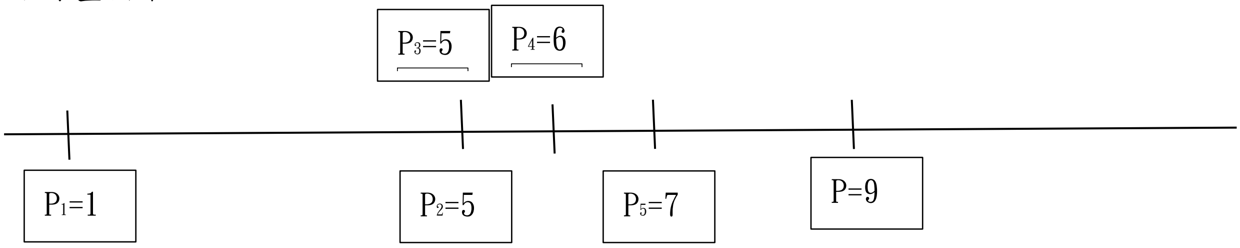

另外一個判斷使用一人提燈走法還是二人提燈走法的方法是將 $P_1$、$P_2$ 的秒數標在數線上，然後在 $P_2$ 的另一邊取一點 P，使 P 與 $P_2$ 的距離=$P_2$ 與 $P_1$ 的距離，若第二慢的人秒數標在數線上在 P 的左邊，採用一人提燈走法，若在 P 的右邊，則採用二人提燈走法



在這裡，我舉兩個例子來示範我的通式。

1.有五個人要過橋，過橋所需的秒數由小排到大分別是(1,5,5,6,7)

將數線畫出來:

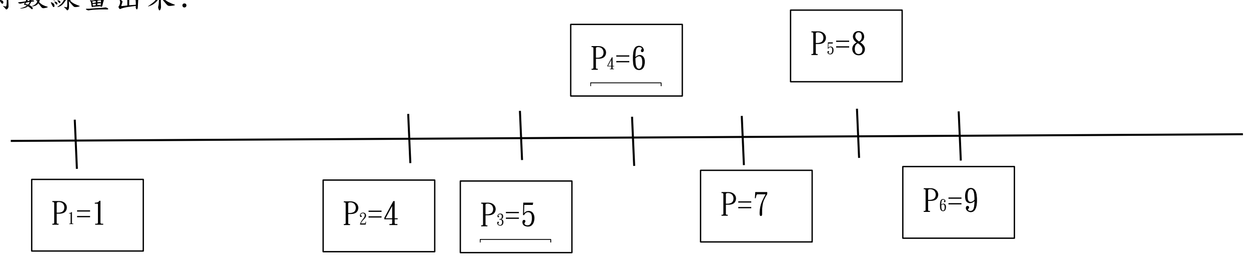



可以得知這個情況是永遠採用一人提燈走法，將步驟列於下表:

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_5$去 | 7 |
| 2 | $P_1$ 回 | 1 |
| 3 | $P_1P_4$去 | 6 |
| 4 | $P_1$ 回 | 1 |
| 5 | $P_1P_3$去 | 5 |
| 6 | $P_1$ 回 | 1 |
| 7 | $P_1P_2$去 | 5 |
| | 秒數共 | 26 |

2.有六個人要過橋，過橋所需的秒數由小排到大分別是(1,4,5,6,8,9)

將數線畫出來:




可以得知，一開始使用二人提燈走法，直到橋頭剩 4 人時，開始使用一人提燈走法。

將步驟列於下表:

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | 4 |
| 2 | $P_1$ 回 | 1 |
| 3 | $P_5P_6$去 | 9 |
| 4 | $P_2$ 回 | 4 |
| 5 | $P_1P_4$去 | 6 |
| 6 | $P_1$ 回 | 1 |
| 7 | $P_1P_3$去 | 5 |
| 8 | $P_1$ 回 | 1 |
| 9 | $P_1P_2$去 | 4 |
| | 秒數共 | 35 |

## 二、研究二、秒數為等差規則走法公式

有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、2、3……n，呈現等差規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，找出最簡秒數的走法及公式。**

### (一)想法

由研究一可知，在X＜(W＋Y)/2時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=2、Y=n-1、Z=n 代入，可得在 n＞4 時採用二人提燈走法，但因在 n=4 時，兩種走法一樣快，因此在 **n＞3** 時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式

### (二)分析

#### 1. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察**二人提燈走法**，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

| 步驟 | 第 1 輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2\to$ 2 | $P_1P_2$ 過橋，因為 $P_2$ 秒數較多，所以需要 2 秒。 |
| 2 | $P_1\leftarrow$1 | $P_1$ 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1 秒，$P_2$ 還留在橋尾。 |
| 3 | $P_{n-1}P_n\to$n | 秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 n 秒。 |
| 4 | $P_2\leftarrow$ 2 | 留在橋尾的 $P_2$ 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

#### 2. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 $P_1P_2$ 過橋，第 2 步 $P_1$ 回橋頭，第 3 步由 n 人中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 $P_2$ 回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

| 輪數 | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\to$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-1}P_n\to$n<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\to$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-3}P_{n-2}\to$n-2<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\to$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-5}P_{n-4}\to$n-4<br>$P_2\leftarrow$ 2 | … | $P_1P_2\to$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\to$n-2(m-1)<br>$P_2\leftarrow$ 2 |

#### 3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

| | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 第 2 步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第 3 步 | n | n-2=n-1x2 | n-4=n-2x2 | … | n-2(m-1) |
| 第 4 步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 小計 | n+5 | (n+5)-2x1 | (n+5)-2x2 | | (n+5)-2x(m-1) |

4. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

=(n+5)+〔(n+5)- 2×1〕+〔(n+5)- 2×2〕+…+〔(n+5)- 2×(m-1)〕

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} n+5-2(k-1)$$

化簡得

$$m(n+7)-m(m+1)$$

5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 **m(n+7)-m(m+1)+R**

A. n=2，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=2 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 m(n+7) - m(m+1)+2

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2$+$P_3$ 3 人，需要 R=6 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 m(n+7) - m(m+1)+6

## (三)推廣至公差為 d

上述的內容皆為公差為 1 之研究，我嘗試推廣至將公差 d 視為一個變數，找出公差為 d 時的最簡走法公式。有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、1+d、1+2d……1+(n-1)d，其中 d 為不小於 1 的正整數，呈現等差規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

1. 想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=1+d、Y=1+(n-2)d、Z=1+(n-1)d 代入，可得在 n>3 時採用**二人提燈走法**，再將人數少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

2. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察**二人提燈走法**，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

| 步驟 | 第 1 輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2 \rightarrow 1+d$ | $P_1P_2$過橋，因為$P_2$秒數較多，所以需要 1+d 秒。 |
| 2 | $P_1 \leftarrow 1$ | $P_1$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1 秒，$P_2$還留在橋尾。 |
| 3 | $P_{n-1}P_n \rightarrow 1+(n-1)d$ | 秒數最多的$P_{n-1}P_n$過橋，需要 1+(n−1)d 秒。 |
| 4 | $P_2 \leftarrow 1+d$ | 留在橋尾的$P_2$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

### 3. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n−2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是$P_1P_2$過橋，第 2 步$P_1$回橋頭，第 3 步從 n 人中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步$P_2$回橋頭秒數；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下：

| 輪數 | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2 \rightarrow 1+d$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n \rightarrow 1+(n-1)d$<br>$P_2 \leftarrow 1+d$ | $P_1P_2 \rightarrow 1+d$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2} \rightarrow 1+(n-3)d$<br>$P_2 \leftarrow 1+d$ | $P_1P_2 \rightarrow 1+d$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-5}P_{n-4} \rightarrow 1+(n-5)d$<br>$P_2 \leftarrow 1+d$ | … | $P_1P_2 \rightarrow 1+d$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow$<br>1+〔n−1−2(m−1)〕d<br>$P_2 \leftarrow 1+d$ |

### 4. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

| | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 步 | 1+d | 1+d | 1+d | … | 1+d |
| 第 2 步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第 3 步 | 1+(n−1)d | 1+(n−3)d | 1+(n−5)d | | 1+〔n−1−2(m−1)〕d |
| 第 4 步 | 1+d | 1+d | 1+d | | 2 |
| 小計 | 4+(n+1)d | 4+(n−1)d | 4+(n−3)d | | 4+〔n+1−2(m−1)〕d |

### 5. 合計

第 1 輪+第 2 輪+⋯+第 m 輪

=〔4+(n+1)d〕+〔(4+(n−1)d〕+〔4+(n−3)d〕+⋯+〔4+〔n+1−2(m−1)〕d〕

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} 4+[n+1-2(k-1)]$$

化簡得

$$m(nd+3d+4)-m(m+1)d$$

### 6. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 $\mathbf{m(nd+3d+4)-m(m+1)d+R}$

A. n=2，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=1+d 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(1+d)$

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=3d+3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(3d+3)$

## 三、研究三、秒數為等比規則走法公式

有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、2、4……$2^{n-1}$，呈現等比規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，找出最簡秒數的走法及公式。**

### (一)想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=2、Y=$2^{n-2}$、Z=$2^{n-1}$ 代入，可得在 **n＞3**時採用**二人提燈走法**再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式

### (二)分析

#### 1. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法: **以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

| 步驟 | 第 1 輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2\rightarrow$ 2 | $P_1P_2$過橋，因為 $P_2$秒數較多，所以需要 2 秒。 |
| 2 | $P_1\leftarrow$1 | $P_1$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭， |
| 3 | $P_{n-1}P_n\rightarrow 2^{n-1}$ | $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 $2^{n-1}$ 秒。 |
| 4 | $P_2\leftarrow$ 2 | 留在橋尾的 $P_2$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

#### 2. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n−2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 $P_1P_2$過橋，第 2 步 $P_1$回橋頭，第 3 步從 n 人中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 $P_2$回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

| 輪數 | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n \rightarrow 2^{n-1}$<br>$P_2 \leftarrow 2$ | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2} \rightarrow 2^{n-3}$<br>$P_2 \leftarrow 2$ | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-5}P_{n-4} \rightarrow 2^{n-5}$<br>$P_2 \leftarrow 2$ | … | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow 2^{n-2(m-1)}$<br>$P_2 \leftarrow 2$ |

## 3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

| | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 步 | 2 | 2 | 2 | … | 2 |
| 第 2 步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第 3 步 | $2^{n-1}$ | $2^{n-3}$ | $2^{n-5}$ | | $2^{n-2(m-1)}$ |
| 第 4 步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 小計 | $2^{n-1}+5$ | $2^{n-3}+5$ | $2^{n-5}+5$ | | $2^{n-2(m-1)}+5$ |

## 4. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

$=(2^{n-1}+5)+(2^{n-3}+5)+(2^{n-5}+5)+\cdots+(2^{n-2(m-1)}+5)]$

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{n-2(k-1)}+5$$

化簡得

$$2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m$$

## 5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5n+R$

A. n=2k，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=2 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m+2$

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=7 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m+7$

## (三)推廣至公差為 r

上述的內容皆為公比為 2 之研究，我嘗試推廣至將公比 r 視為一個變數，找出公比為 r 時的最簡走法公式。有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、⋯、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、r、$r^2$⋯⋯$r^{n-1}$，其中 r 為不小於 2 的正整數呈現等比規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

### 1. 想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 W=1、$X=r^2$、$Y=r^{n-2}$、$Z=r^{n-1}$ 代入，可得在 $n>3$時採用**二人提燈走法**再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

### 2. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

| 步驟 | 第 1 輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2\rightarrow$ r | $P_1P_2$過橋，因為 $P_2$秒數較多，所以需要 r 秒。 |
| 2 | $P_1\leftarrow 1$ | $P_1$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭， |
| 3 | $P_{n-1}P_n \rightarrow r^{n-1}$ | $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 $r^{n-1}$ 秒。 |
| 4 | $P_2\leftarrow$ r | 留在橋尾的 $P_2$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

### 3. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 $m=(n-2)\div 2$ 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 $P_1P_2$過橋，第 2 步 $P_1$回橋頭，第 3 步從 n 人中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 $P_2$回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

| 輪數 | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n \rightarrow r^{n-1}$<br>$P_2\leftarrow$ r | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow r^{n-3}$<br>$P_2\leftarrow$ r | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-5}P_{n-4}\rightarrow r^{n-5}$<br>$P_2\leftarrow$ r | ⋯ | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow r^{n-2(m-1)}$<br>$P_2\leftarrow$ r |

### 4. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

| 步驟 | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 步 | r | r | r | | r |
| 第 2 步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第 3 步 | $r^{n-1}$ | $r^{n-3}$ | $r^{-5}$ | ⋯ | $r^{n-2(m-1)}$ |
| 第 4 步 | r | r | r | | r |
| 小計 | $r^{n-1}+2r+1$ | $r^{n-3}+2r+1$ | $r^{n-5}+2r+1$ | | $r^{n-2(m-1)}+2r+1$ |

## 5. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

$=(r^{n-1}+2r+1)+(r^{n-3}+2r+1)+(r^{n-5}+2r+1)+\cdots+(r^{n-2(m-1)}+2r+1)$

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} r^{n-2(k-1)}+\ 2r+1$$

化簡得

$$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m$$

## 6. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+R$

A. n=2k，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=r+1 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m\ +r+1$

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 $R=r^2+r+1$ 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m\ +r^2+r+1$

## 四、研究四、秒數為階差規則走法公式

有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、2、5……$(n-1)^2+1$，呈現階差規則，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，找出最簡秒數的走法及公式。**

### (一)第 n 人的秒數

已知 $P_1=1$、$P_2=2$、$P_3=5$、$P_4=10$、$P_5=17$……，我利用**遞迴**關係求出 $P_n$ 的秒數

| |
|---|
| $P_1=1$ |
| $P_2=P_1+2\times1-1$ |
| $P_3=P_2+2\times2-1$ |
| $P_4=P_3+2\times3-1$ |
| …… |
| $P_n=P_{n-1}+2(n-1)-1$ |
| $P_n=1+\frac{2n(n-1)}{2}1+(n-1)=(n-1)^2+1$ |

### (二)想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 $W=1$、$X=2$、$Y=(n-2)^2+1$、$Z=(n-1)^2+1$ 代入，可得在 $n>3$ 時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

### (三)分析

#### 1. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

| 步驟 | 第 1 輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2\rightarrow$ 2 | $P_1P_2$ 過橋，因為 $P_2$ 秒數較多，所以需要 2 秒。 |
| 2 | $P_1\leftarrow1$ | $P_1$ 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1 秒，$P_2$ 還留在橋尾。 |
| 3 | $P_{n-1}P_n\rightarrow$ $(n-1)^2+1$ | 秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要$(n-1)^2+1$ 秒。 |
| 4 | $P_2\leftarrow$ 2 | 留在橋尾的 $P_2$ 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

## 2. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 $P_1P_2$ 過橋，第 2 步 $P_1$ 回橋頭，第 3 步由 n 人數中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 $P_2$ 回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

| 輪數 | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n \rightarrow (n-1)^2+1$<br>$P_2 \leftarrow 2$ | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2} \rightarrow (n-3)^2+1$<br>$P_2 \leftarrow 2$ | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-5}P_{n-4} \rightarrow (n-5)^2+1$<br>$P_2 \leftarrow 2$ | ... | $P_1P_2 \rightarrow 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow$〔$n-2(m-1)-1$〕$^2+1$<br>$P_2 \leftarrow 2$ |

## 3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

| | 第 1 輪 | 第 2 輪 | 第 3 輪 | | 第 m 輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 步 | 2 | 2 | 2 | ... | 2 |
| 第 2 步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第 3 步 | $(n-1)^2+1$ | $(n-3)^2+1$ | $(n-5)^2+1$ | | 〔$n-2(m-1)-1$〕$^2+1$ |
| 第 4 步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 小計 | $(n-1)^2+6$ | $(n-3)^2+6$ | $(n-5)^2+6$ | | 〔$n-2(m-1)-1$〕$^2+6$ |

## 4. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

=〔$(n-1)^2+6$〕+〔$(n-3)^2+6$〕+〔$(n-5)^2+6$〕+…+〔〔$n-2(m-1)-1$〕$^2+6$〕

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m}(n-2m+1)^2+6$$

化簡得

$$2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)^2$$

## 5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 m(n+7)-m(m+1)+R

**A. n=2k，則 $m=\frac{n-2}{2}$**，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=2 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)^2+2$

**B. $n=2k+1$，則 $m=\frac{n-3}{2}$**，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=8 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)^2+8$

## (四)推廣至階差為 t

上述的內容皆為階差為 2 之研究，我嘗試推廣至將階差 t 視為一個變數，找出公比為 t 時的最簡走法公式。有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、$P_1+t-(t-1)$、$P_2+2t-(t-1)$……$P_{n-1}+(n-1)t-(t-1)$，其中 t 為不小於 1 的正整數呈現階差規則，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

### 1. 第 n 人的秒數

已知 $P_1=1$、$P_2= P_1+t-(t-1)$、$P_3= P_2+2t-(t-1)$……，我利用**遞迴**關係求出 $P_n$ 的秒數

| |
|---|
| $P_1=1$ |
| $P_2=P_1+t-(t-1)$ |
| $P_3=P_2+2t-(t-1)$ |
| $P_4=P_3+3t-(t-1)$ |
| …… |
| $P_n=P_{n-1}+(n-1)t-(t-1)1$ |
| $P_n=1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$ |

### 2. 想法

由研究一可知，在 $X<(W+Y)/2$ 時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=2、$Y=1+\frac{(n-1)t(n-2)}{2}1+(n-2)-(n-2)(t-1)$、$Z=1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$ 代入，可得在 $n>3$ 時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

### 3. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

| 步驟 | 第 1 輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2 \to 2$ | $P_1P_2$ 過橋，因為 $P_2$ 秒數較多，所以需要 2 秒。 |
| 2 | $P_1 \leftarrow 1$ | $P_1$ 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1 秒，$P_2$ 還留在橋尾。 |
| 3 | $P_{n-1}P_n \to 1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$ | 秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 $(n-1)^2+1$ 秒。 |
| 4 | $P_2 \leftarrow 2$ | 留在橋尾的 $P_2$ 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

### 4. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n−2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 $P_1P_2$ 去，第 2 步 $P_1$ 回，第 3 步從人數中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人去，第 4 步 $P_2$ 回秒數；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

| 輪數 | 第 m 輪 |
|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2 \to 2$<br>$P_1 \leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \to 1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$<br>$P_2 \leftarrow 2$ |

因計算過程繁雜，省略不寫，我求得總和為

$$6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)$$

### 5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為

$$\mathbf{6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+R}$$

A. n=2k，則 $m=\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為

$$6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+3$$

B. n=2k+1，則 $m=\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=6+t 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為

$$6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+6+t$$

# 陸、結論

遊戲規則是：有 n 人要過橋，過橋秒數**由小排列到大**分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，每人過橋的秒數不一，每次可過橋的人數為 2 人，過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋，過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，累加每次過橋秒數，找出最簡秒數的走法及公式。本研究探討的是改變秒數規則，來計算出 n 人要過橋所需最簡秒數的公式。

## 一、結論一：速度規則不一走法公式。

### (一)證明方法：n 人過橋最簡走法

研究內容中已經有 4 人過橋的窮舉為例，我試著去證明 n 人過橋時最簡走法是一人提燈走法或二人提燈走法。討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_b$ 去 | $P_b(P_a<P_b)$ |
| 2 | $P_c$ 回 | $P_c$ |
| 3 | $P_dP_e$ 去 | $P_e(P_d<P_e)$ |
| 4 | $P_f$ 回 | $P_f$ |

觀察上表，我發現：

1. $P_c$ 為 $P_a$ 或 $P_b$，因為 $P_a<P_b$，所以 $P_c$ 為 $P_a$ 較快，以下皆以此代入。

2. $P_a$、$P_b$、$P_d$、$P_e$ 其中有 2 個是 $P_{n-1}$ 和 $P_n$，因此($P_{n-1}, P_n$)可能情形有($P_a, P_b$)、($P_d$, $P_e$)、

$(P_b, P_e)$、$(P_e, P_b)$，以下分別討論。

3. 秒數比較

| | | |
|---|---|---|
| 第(1)類型 | $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_a, P_b)$類型 | $P_1+2P_{n-1}+P_n$ |
| 第(2)類型 | $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_d, P_e)$類型 | $P_1+2P_2+P_n$ |
| 第(3)類型 | $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_b, P_e)$類型 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |
| 第(4)類型 | $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_e, P_b)$類型 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

經過比較，可發現第(1)類型比第(2)類型慢。

第(2)類型的走法是二人提燈走法。

第(3)類型=第(4)類型是一人提燈走法。

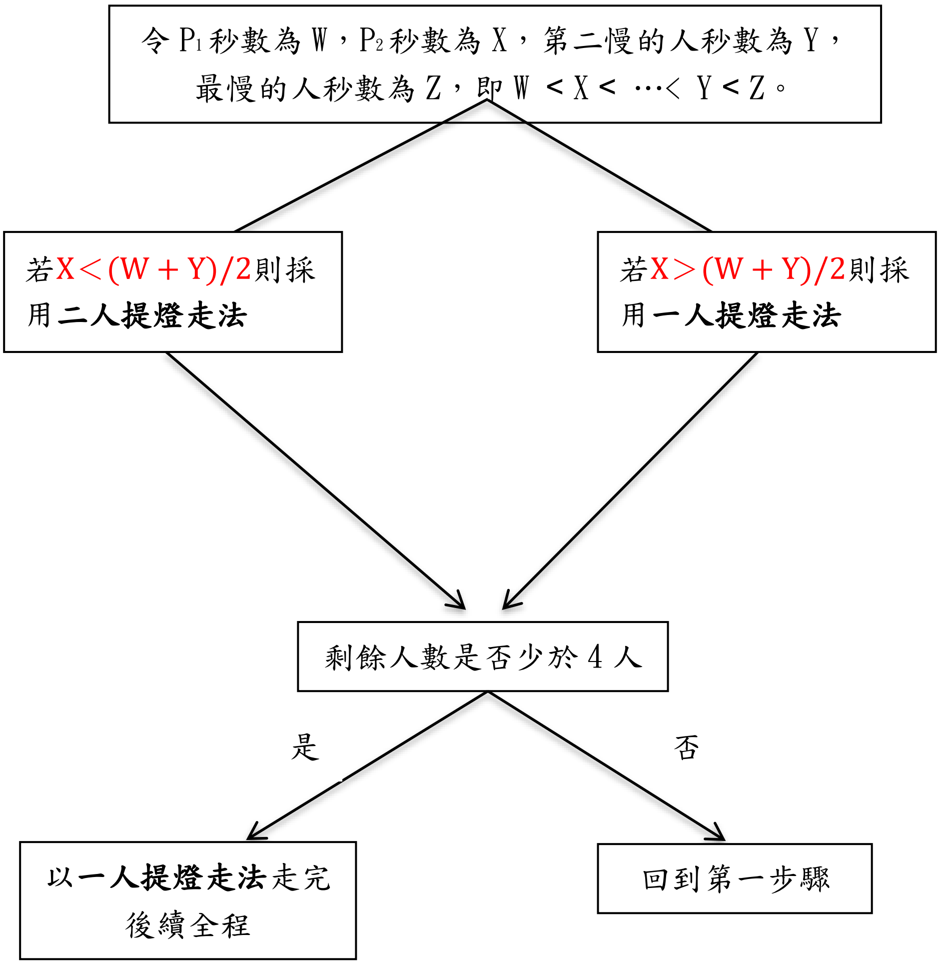
因此 n 人過橋最簡走法必為一人提燈走法或二人提燈走法得證。

**4. 說明為何討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋**

因為不論是 6 步驟、8 步驟、10 步驟……，其走法肯定是一人提燈走法和二人提燈走法的混搭或變形。而在一人提燈走法較二人提燈走法快時，插入二人提燈走法，必會變慢，同理二人提燈走法較快時亦是。

(二)最簡走法通式

由此結論即可推至所有過橋情況的走法。



## 二、結論二：秒數為等差規則走法公式。

有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、1+d、1+2d……1+(n−1)d，其中 d 為不小於 1 的正整數，呈現等差規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**A. n=2**，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=1+d 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$\mathrm{m}(\mathrm{nd}+3\mathrm{d}+4)-\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)\mathrm{d}+(1+\mathrm{d})$

**B. n=2k+1**，剩餘人數為 $P_1P_2$+$P_3$ 3 人，需要 R=3d+3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$\mathrm{m}(\mathrm{nd}+3\mathrm{d}+4)-\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)\mathrm{d}+(3\mathrm{d}+3)$

## 三、結論三：秒數為等比規則走法公式。

有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、r、$r^2$……$r^{n-1}$，其中 r 為不小於 2 的正整數呈現等比規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**A. n=2k**，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=r+1 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r+1$

**B. n=2k+1**，剩餘人數為 $P_1P_2$+$P_3$ 3 人，需要 R=$r^2$+r+1 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r^2+r+1$

## 四、結論四：秒數為階差規則走法公式。

有 n 個人要過橋，分別為 $P_1$、$P_2$、…、$P_n$，他們過橋的秒數分別為 1、$P_1$+t−(t−1)、$P_2$+2t−(t−1)……$P_{n-1}$+(n−1)t−(t−1)，其中 t 為不小於 1 的正整數呈現階差規則，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

**A. n=2k，則 m=$\frac{n-2}{2}$**，剩餘人數為 $P_1P_2$ 2 人，需要 R=3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$6\mathrm{m}+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+3$

B. n=2k+1，則 m=$\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=6+t 秒代入完整秒數公式可求得

$$秒數為6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+6+t$$

綜合以上，我在過橋的公式推算中，先提出 n 人過橋最簡走法的證明方法，再成功找出秒數為等差、等比、階差規則走法與最簡秒數公式。

## 柒、參考資料


1. Gunter Rote(民 91 年)。Crossing the bridge at night。
https://www.researchgate.net/publication/220530399_Crossing_the_Bridge_at_Night
2. 王 XX(民 106 年)。過橋遊戲餘數分類解法。嘉義市第三十五屆中小學科展作品說明書。(作者本人，依科展規定不可以出現姓名。)
3. 蔡玗真(民 103 年)。過橋遊戲探討。嘉義市第三十二屆中小學科學展覽會作品說明書。
4. 無作者(無日期)。樂和遊戲-過橋遊戲。民國 106 年 3 月 10 日取自：
http://www.novelgames.com/zh-HK/spgames/bridge/
5. 陳淵琮(民 92 年)。如何最快。中華民國第四十三屆中小學科學展覽會作品說明書。
6. 張蒔曦(民 97 年)。過橋問題。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會作品說明書。


## 捌、心得

這一件科展是我從小六開始做的，老師要我自己摸索學長姐的這件作品，把所有的資料都看過一遍，看有沒有更好的規則或是能發展的內容。後來有推導出一些內容，因為用到國高中的數學方法，而且利用未知數式子相減來找出最簡走法，因為要相減的式子太多了，所以利用網站輸入未知數式子就可以幫忙計算出結果，但在短短 5 分鐘問答中，讓評審誤會我不會計算，而且我們找到的公式，會有特例產生，不夠完美。

上了國中之後，我再將這個題目拿出來，這次是獨立一個人完成的，把國小的作品拿起來參閱，讓我訝異的是，我又發現了不同的想法，我在上網搜尋後發現了許多研究，它們的規則都不盡相同，我就在研究一討論了 n 人過橋的秒數沒有規則的情況，每次只能 2 人過橋，我重新再從最基本的狀況討論起，發現了一人提燈走法以及二人提燈走法兩種最快的走法，並且經過討論之後也找到了把所有的情況都囊括的一個最大的準則，而我也探討了過橋秒數規則等差、等比、階差的情況，然而後來遇到一個麻煩「就是要證明一人和二人提燈走法是最簡的」，不過後來我在交件前一週想到了證明的方法，並詢問教授的意見並獲得肯定，我就放心地加入報告中，就要交科展啦!

令我開心的是，我在地方科展獲得第一名代表參加全國賽的機會，我在這幾個禮拜又趕緊去請教幾位教授，詢問意見，把握這次難得參加全國科展的機會。

## 【評語】030409

討論由三角形頂點或邊上一點作周長等分線的具體作法。針對這些周長等分線所具有的特性，以及它們與包絡曲線間的關連性做了分析。這是一個有趣的問題。作者們觀察到三角形的周長等分線具有非常特別的性質，藉由解析幾何的分析手法，針對觀察到的特性給出了完整的說明。論述清楚而且詳盡，值得嘉許。比較可惜的是，作者們可能沒有注意到類似的主題其實已經被討論過了（四十六屆全國中小學科展國中組數學科第三名作品-三角形周長等分線的作圖與數量分佈），相關的一些結果在先前的作品中也都曾經被提及，不同的只是分析的方式有所出入。藉由解析幾何的方式來分析這個問題，在某種程度上其實也為進一步分析這個問題提供了一些新的想法。如果能在已有的基礎上，針對更一般化的問題做深入的討論會很不錯。建議文章中的一些名詞須更嚴謹的定義清楚。

## 作品海報

## 摘要

「過橋遊戲」規則為有n個人要過橋，他們過橋的速度皆不同，每次2人過橋，過橋的2人中秒數較多的人為該次過橋的秒數，過橋時有人要提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有1人提燈籠回到橋頭，和剩餘的人過橋至對岸，直到所有人都過橋。

本研究討論出過橋秒數不一時的最簡走法通式，再由結論推算出秒數為等差、等比、階差規則走法公式。

## 壹、研究動機

這個題目是我國小研究過的題目，當時是因為在網路發現過橋遊戲。遊戲規則是：有5個人要過橋，他們過橋的秒數分別是1、3、6、8、12秒，每次最多2人過去，但是要有1人回來，直到所有人都過橋，但遊戲規定只能在30秒內完成。我當時探討的僅限於過橋秒數是**等差=1**在**橋上可過橋的人數**不同的情況，我這次推廣到**過橋秒數不一**時的最簡走法通式，再由結論推算出秒數為**等差**、**等比**、**階差**規則走法公式。

## 貳、研究目的

有n個人要過橋，每人過橋速度不一，每次2人過橋，1人提燈籠回到橋頭，探討在過橋速度不同時的情況，**找出最簡秒數的走法及公式**。

研究一：過橋速度規則不一走法通式。

研究二：秒數為等差規則走法公式。

研究三：秒數為等比規則走法公式。

研究四：秒數為階差規則走法公式。

## 參、文獻探討

國內外皆有一些關於過橋問題的討論，但大部分僅侷限於一些特定的情況，或是無法確認最簡的走法通式。這個問題我小六時也曾經研究過，但當時討論的僅限於過橋秒數是**等差=1**在**橋上可過橋的人數**不同的情況，在此我也說明本研究與其他研究的差別:

| 參考資料 | **內容** |
|---|---|
| 資料1: Gunter Rote(民91年)。Crossing the bridge at night。 | 有找出過橋速度不一時的情況最簡秒數，但其方法為討論〔n/2〕個數值中最小的數為最簡秒數，討論的情況繁雜，並且**沒有證明**。 |
| 資料2: 王XX(民106年)。過橋遊戲餘數分類解法。 | 只有找出秒數規律為**等差=1**時，最多 2 人在橋上、3 人在橋上、及x人在橋上的最簡秒數公式。(我的作品，不出現姓名) |
| 資料3: 蔡玗真(民103年)。過橋遊戲探討。 | 僅止於討論秒數規律為**等差=1**，每次最多2、3、4人在橋上時的最簡秒數公式，並且**有特例**。 |
| 資料4: 陳淵琮(民92年)。如何最快。 | 有討論出過橋速度不一時的情況最簡秒數，但**沒有證明**的過程，也沒有延伸推廣至其他情況。 |
| 資料5: 張蒔曦(民97年)。過橋問題。 | 討論最多3、4人在橋上的情況，但出現了一些**沒有解決的特殊情況**。 |
| **本研究** | 1. 證明一人提燈走法及二人提燈走法為最簡。<br>2. 推導出過橋速度秒數不一的通式。<br>3. 秒數為等差、等比、階差規則最簡秒數公式。 |

## 肆、名詞解釋

### 一、遊戲規則

1. 有n人要過橋，每人過橋所需時間由小排到大是$P_1$、$P_2$…$P_n$。
2. 每次有2個人過橋，一個人回橋頭。
3. 每次過橋的秒數為2人中較慢的人過橋所需的秒數。

**由遊戲規則，我可以發現一些簡單的通式:**

1. 若有n個人要過橋，則總共需要的步驟數為2n-3。
2. 令$P_1$過橋所需秒數為$t_1$，$P_2$過橋所需秒數為$t_2$，$P_3$過橋所需秒數為$t_3$，……，$P_n$過橋所需秒數為$t_n$，則過橋所需總秒數為$T=c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3+\cdots+c_nt_n$，其中$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=2n-3$，且$c_1$、$c_2$、$c_3$、…、$c_n$ 為非負整數。
3. 無論如何$P_n$的秒數一定會被計算到。

### 二、一人提燈走法與二人提燈走法

**(一)一人提燈走法**：由同一個人走每一次的回程，因為$P_1$秒數最少，所以由$P_1$帶領所有人輪番過橋，也由$P_1$走回程。

**(二)二人提燈走法**:由兩個人$P_1$ $P_2$(速度最快的2人)走完所有的回程，搭配以運送最慢2人過橋。

### 三、m輪

一人提燈走法和二人提燈走法都是<u>**每4步驟形成一個規律**</u>，而這4步驟結束後共多了2人在橋尾，也就是說每一輪結束後會多2人在橋尾。

### 四、剩餘人數所需秒數R

如果前面已走了m輪，就會送走2m個人，最終留在橋頭只剩2個人或3個人時，要送走剩餘的人，就不需要完整4步驟過橋了，此時，剩2個人或3個人這兩種情況要特別分開討論，我把他們所需的秒數代號叫R。

## 伍、研究方法、結果與討論

### 一、研究一、過橋速度規則不一走法通式

我測試不同過橋秒數情況，從中觀察最快的走法，發現最快走法可分成**一人提燈**和**二人提燈**走法，以5人過橋情況為例:

#### (一)一人提燈走法

由同一個人走每一次的回程，因為$P_1$秒數最少，所以由$P_1$帶領所有人輪番過橋，也由$P_1$走回程。以5人過橋舉例：

| 步驟 | 在橋頭 | 走在橋上 | 最終在橋尾 | 秒數 |
|---|---|---|---|---|
| 初始 | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | | | |
| 第1步 | $P_2P_3P_4$ | $P_1P_5\rightarrow$ | $P_1P_5$ | $P_5$ |
| 第2步 | $P_1P_2P_3P_4$ | $P_1\leftarrow$ | $P_5$ | $P_1$ |
| 第3步 | $P_2P_3$ | $P_1P_4\rightarrow$ | $P_1P_4P_5$ | $P_4$ |
| 第4步 | $P_1P_2P_3$ | $P_1\leftarrow$ | $P_4P_5$ | $P_1$ |
| 第5步 | $P_2$ | $P_1P_3\rightarrow$ | $P_1P_3P_4P_5$ | $P_3$ |
| 第6步 | $P_1P_2$ | $P_1\leftarrow$ | $P_3P_4P_5$ | $P_1$ |
| 第7步 | | $P_1P_2\rightarrow$ | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | $P_2$ |

#### (二)二人提燈走法

由兩個人$P_1$ $P_2$走完所有的回程(速度最快的2人)，搭配以運送最慢2人過橋，以5人過橋舉例:

| 步驟 | 在橋頭的人 | 走在橋上 | 最終在橋尾 | 秒數 |
|---|---|---|---|---|
| 初始 | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | | | |
| 第1步 | $P_3P_4P_5$ | $P_1P_2\rightarrow$ | $P_1P_2$ | $P_2$ |
| 第2步 | $P_1P_3P_4P_5$ | $P_1\leftarrow$ | $P_2$ | $P_1$ |
| 第3步 | $P_1P_3$ | $P_4P_5\rightarrow$ | $P_2P_4P_5$ | $P_5$ |
| 第4步 | $P_1P_2P_3$ | $P_2\leftarrow$ | $P_4P_5$ | $P_2$ |
| 第5步 | $P_2$ | $P_1P_3\rightarrow$ | $P_1P_3P_4P_5$ | $P_3$ |
| 第6步 | $P_1P_2$ | $P_1\leftarrow$ | $P_3P_4P_5$ | $P_1$ |
| 第7步 | | $P_1P_2\rightarrow$ | $P_1P_2P_3P_4P_5$ | $P_2$ |

#### (三)4人過橋、5人過橋以及6人過橋和8人過橋

透過排列組合的運算，可以推得4人過橋及5人過橋可能的走法數分別是108種和4320種。檢查後發現，過橋總秒數共有15種和65種，比較後發現，**最快的秒數只有可能是黃底的情況**，列出走法後發現，**都是一人提燈走法或是二人提燈走法**:

4人過橋

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2t_1+t_2+t_3+t_4$ | $3t_2+t_3+t_4$ | $4t_3+t_4$ | $5t_4$ | $2t_2+3t_4$ |
| $t_1+t_2+2t_3+t_4$ | $2t_1+2t_3+t_4$ | $t_1+t_2+3t_4$ | $t_2+t_3+3t_4$ | $t_1+t_3+3t_4$ |
| $t_1+3t_3+t_4$ | $t_2+3t_3+t_4$ | $2t_3+3t_4$ | $t_1+2t_2+t_3+t_4$ | $2t_1+2t_2+t_4$ |

5人過橋

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $7t_5$ | $t_1+t_3+5t_5$ | $t_1+t_4+5t_5$ | $t_1+t_2+5t_5$ | $2t_2+5t_5$ |
| $2t_3+5t_5$ | $2t_4+5t_5$ | $t_3+t_4+5t_5$ | $t_2+t_4+5t_5$ | $t_2+t_3+5t_5$ |
| $2t_1+t_2+t_3+3t_5$ | $2t_1+t_3+t_4+3t_5$ | $2t_1+t_2+t_4+3t_5$ | $t_1+3t_4+3t_5$ | $t_1+3t_3+3t_5$ |
| $t_1+2t_2+t_3+3t_5$ | $t_1+2t_3+t_4+3t_5$ | $t_1+t_3+2t_4+3t_5$ | $t_1+2t_2+t_4+3t_5$ | $t_1+t_2+2t_4+t_5$ |
| $t_1+t_2+t_3+t_4+3t_5$ | $3t_1+t_2+t_3+t_4+t_5$ | $2t_1+3t_2+t_4+t_5$ | $2t_1+3t_2+t_3+t_5$ | $2t_1+t_2+3t_3+t_5$ |
| $2t_1+t_2+3t_4+t_5$ | $2t_1+t_2+2t_3+t_4+t_5$ | $2t_1+t_2+t_3+2t_4+t_5$ | $2t_1+3t_3+t_4+t_5$ | $2t_1+t_3+3t_4+t_5$ |
| $t_1+4t_2+t_4+t_5$ | $t_1+4t_2+t_3+t_5$ | $t_1+3t_2+t_3+t_4+t_5$ | $t_1+2t_2+3t_3+t_5$ | $t_1+2t_2+2t_3+t_4+t_5$ |
| $t_1+2t_2+t_3+2t_4+t_5$ | $t_1+2t_2+3t_4+t_5$ | $t_1+t_2+3t_3+t_4+t_5$ | $t_1+t_2+2t_3+2t_4+t_5$ | $t_1+t_2+t_3+3t_4+t_5$ |
| $t_1+5t_3+t_5$ | $t_1+4t_3+t_4+t_5$ | $t_1+3t_2+2t_3+t_5$ | $t_1+2t_3+3t_4+t_5$ | $t_1+5t_4+t_5$ |
| $4t_2+t_3+t_4+t_5$ | $3t_2+3t_3+t_5$ | $3t_2+2t_3+t_4+t_5$ | $3t_2+t_3+2t_4+t_5$ | $3t_2+3t_4+t_5$ |
| $2t_2+3t_3+t_4+t_5$ | $2t_2+2t_3+2t_4+t_5$ | $2t_2+t_3+3t_4+t_5$ | $t_2+5t_3+t_5$ | $t_2+4t_3+t_4+t_5$ |
| $t_2+3t_3+2t_4+t_5$ | $t_2+2t_3+3t_4+t_5$ | $t_2+t_3+4t_4+t_5$ | $t_2+5t_4+t_5$ | $5t_3+t_4+t_5$ |
| $4t_2+2t_3+t_5$ | $3t_3+3t_4+t_5$ | $2t_3+4t_4+t_5$ | $t_3+5t_4+t_5$ | $6t_4+t_5$ |

後來查到一篇資料(資料1)，若有n人過橋，則考慮〔n/2〕個數值中最小的數為最簡走法，因此可知，每多2人，可能最快的情形會多1種，因此先討論6人和8人過橋情況(7人過橋與6人過橋情況類似)。

**(1)6人過橋**

依照文獻(資料1, p. 2)，6人過橋要討論的情況有3個，分別是$(4t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6, 3t_1+3t_2+t_3+t_4+t_5+t_6-t_5, 2t_1+5t_2+t_3+t_4+t_5+t_6-t_5-t_3)$

我把這三種情況的走法排出來後，發現其走法皆為一人提燈走法或二人提燈走法，並且我還發現**第1種情況使用0次二人提燈走法，第2種情況使用1次二人提燈走法，第3種情況使用2次二人提燈走法**。

**(2)8人過橋**

依照文獻(資料1, p. 2)，8人過橋要討論的情況有4個，分別是$(6t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8, 5t_1+3t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8-t_7, 4t_1+5t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8-t_7-t_5,\ 3t_1+7t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8-t_7-t_5-t_3)$

我把這四種情況的走法排出來後，發現其走法皆為一人提燈走法或二人提燈走法，並且還發現**第1種情況使用0次二人提燈走法，第2種情況使用1次二人提燈走法，第3種情況使用2次二人提燈走法，第4種情況使用3次二人提燈走法**，此處就不詳加表示。

**(3)綜合分析**

由此推斷此文n人過橋所要討論的〔n/2〕個情況，分別是第1種情況使用0次二人提燈走法，第2種情況使用1次二人提燈走法，第3種情況使用2次二人提燈走…**第x種情況使用x-1次二人提燈走法**。

#### (四)證明n人過橋最簡走法(n≥4)

討論4步驟送2人($P_{n-1}P_n$)過橋

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_b$去 | $P_b(P_a<P_b)$ |
| 2 | $P_c$回 | $P_c$ |
| 3 | $P_dP_e$去 | $P_e(P_d<P_e)$ |
| 4 | $P_f$回 | $P_f$ |

觀察右表，我發現:

1. $P_c$為$P_a$或$P_b$，因為$P_a<P_b$，所以$P_c$為$P_a$較快，以下皆以此代入。
2. $P_a$、$P_b$、$P_d$、$P_e$其中有2個是$P_{n-1}$和$P_n$，因此$(P_{n-1}, P_n)$可能情形有$(P_a, P_b)$、$(P_d, P_e)$、$(P_b, P_e)$、$(P_e, P_b)$，以下分別討論。

### 1. $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_a, P_b)$類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_{n-1}P_n$去 | $P_n$ |
| 2 | $P_{n-1}$回 | $P_{n-1}$ |
| 3 | $P_dP_e$去 | $P_e$ |
| 4 | $P_f$回 | $P_f$ |

比對之後，我發現:
1. $P_e$是$P_{n-1}$
2. $P_f$是$P_d$最快，可以是$P_1$-$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
3. 因此可將此類型最簡走法列如下表。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_{n-1}P_n$去 | $P_n$ |
| 2 | $P_{n-1}$回 | $P_{n-1}$ |
| 3 | $P_1P_{n-1}$去 | $P_{n-1}$ |
| 4 | $P_1$回 | $P_1$ |
| | 秒數共 | $P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

### 2. $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_d, P_e)$類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_b$去 | $P_b$ |
| 2 | $P_a$回 | $P_a$ |
| 3 | $P_{n-1}P_n$去 | $P_n$ |
| 4 | $P_f$回 | $P_f$ |

比對之後，我發現:
1. $P_f$為$P_b$最快。
2. $P_a$可以是$P_1$-$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
3. $P_f$為$P_b$，又$P_b$和$P_a$不同，所以$P_b$=$P_f$為$P_2$最快。
4. 將此類型最簡走法列於下表。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | $P_2$ |
| 2 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 3 | $P_{n-1}P_n$去 | $P_n$ |
| 4 | $P_2$回 | $P_2$ |
| | 秒數共 | $P_1+2P_2+P_n$ |

### 3. $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_b, P_e)$類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_{n-1}$去 | $P_{n-1}$ |
| 2 | $P_a$回 | $P_a$ |
| 3 | $P_dP_n$去 | $P_n$ |
| 4 | $P_f$回 | $P_f$ |

比對之後，我發現:
1. $P_f$為$P_d$最快。
2. $P_a$可以是$P_1$-$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
3. $P_d$為$P_f$，可以是$P_1$-$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
4. 將此類型最簡走法列於下表。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_{n-1}$去 | $P_{n-1}$ |
| 2 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 3 | $P_1P_n$去 | $P_n$ |
| 4 | $P_1$回 | $P_1$ |
| | 秒數共 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

### 4. $(P_{n-1}, P_n)$為$(P_e, P_b)$類型

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_aP_n$去 | $P_n$ |
| 2 | $P_a$回 | $P_a$ |
| 3 | $P_dP_{n-1}$去 | $P_{n-1}$ |
| 4 | $P_f$回 | $P_f$ |

比對之後，我發現:
1. $P_f$為$P_d$最快。
2. $P_a$可以是$P_1$-$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
3. $P_d$為$P_f$，可以是$P_1$-$P_n$任何一個，以$P_1$為最快。
4. 將此類型最簡走法列於下表。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_n$去 | $P_n$ |
| 2 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 3 | $P_1P_{n-1}$去 | $P_{n-1}$ |
| 4 | $P_1$回 | $P_1$ |
| | 秒數共 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

### 5. 秒數比較

| | |
|---|---|
| 第1類型 | $P_1+2P_{n-1}+P_n$ |
| 第2類型 | $P_1+2P_2+P_n$ |
| 第3類型 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |
| 第4類型 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

經過比較，可發現:
第1類型比第2類型慢。

第2類型的走法是二人提燈走法。

第3類型=第4類型是一人提燈走法。

因此n人過橋最簡走法必為一人提燈走法或二人提燈走法得證。

### 6. 說明為何討論4步驟送2人$(P_{n-1}P_n)$過橋

因為**不論是6步驟、8步驟、10步驟……，走法肯定是一人提燈走法和二人提燈走法的混搭或變形。**

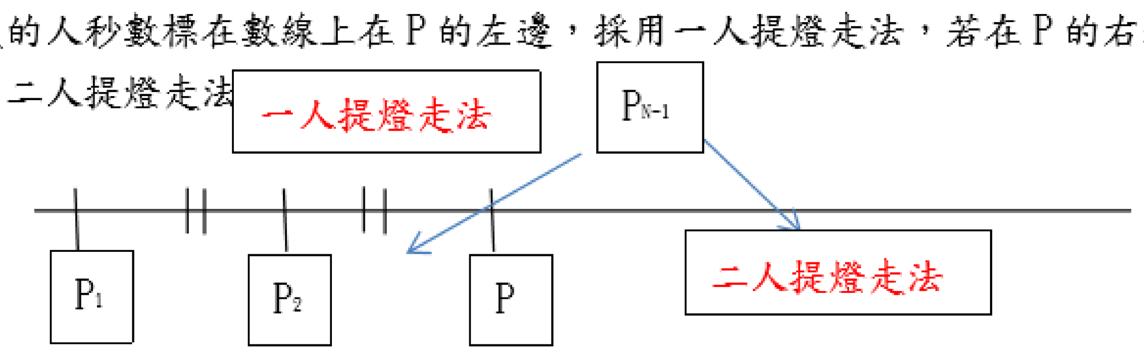
而在一人提燈走法較二人提燈走法快時，插入二人提燈走法，會變慢，同理二人提燈走法較快時亦是。

例如若將第3、4步驟和第5、6步驟交換，發現形成「前4步是二人提燈走法，後兩步是一人提燈走法」。

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | $P_2$ |
| 2 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 3 | $P_1P_{n-2}$去 | $P_{n-2}$ |
| 4 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 5 | $P_{n-1}P_n$ | $P_n$ |
| 6 | $P_2$ | $P_2$ |
| | 秒數共 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | $P_2$ |
| 2 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 3 | $P_1P_{n-2}$去 | $P_{n-2}$ |
| 4 | $P_1$回 | $P_1$ |
| 5 | $P_{n-1}P_n$ | $P_n$ |
| 6 | $P_2$ | $P_2$ |
| | 秒數共 | $2P_1+2P_{n-1}+P_n$ |

另外一個判斷使用一人提燈走法還是二人提燈走法的方法是將$P_1$、$P_2$的秒數標在數線上，然後在$P_2$的另一邊取一點P，使P與$P_2$的距離=$P_2$與$P_1$的距離，若第二慢的人秒數標在數線上在P的左邊，採用一人提燈走法，若在P的右邊，則採用二人提燈走法。




## (五)最簡走法通式結論

令$P_1$秒數為W，$P_2$秒數為X，$P_{n-1}$秒數為Y，$P_n$秒數為Z，其中 $W \le X \le \cdots \le Y \le Z$，將步驟及秒數列於下表。

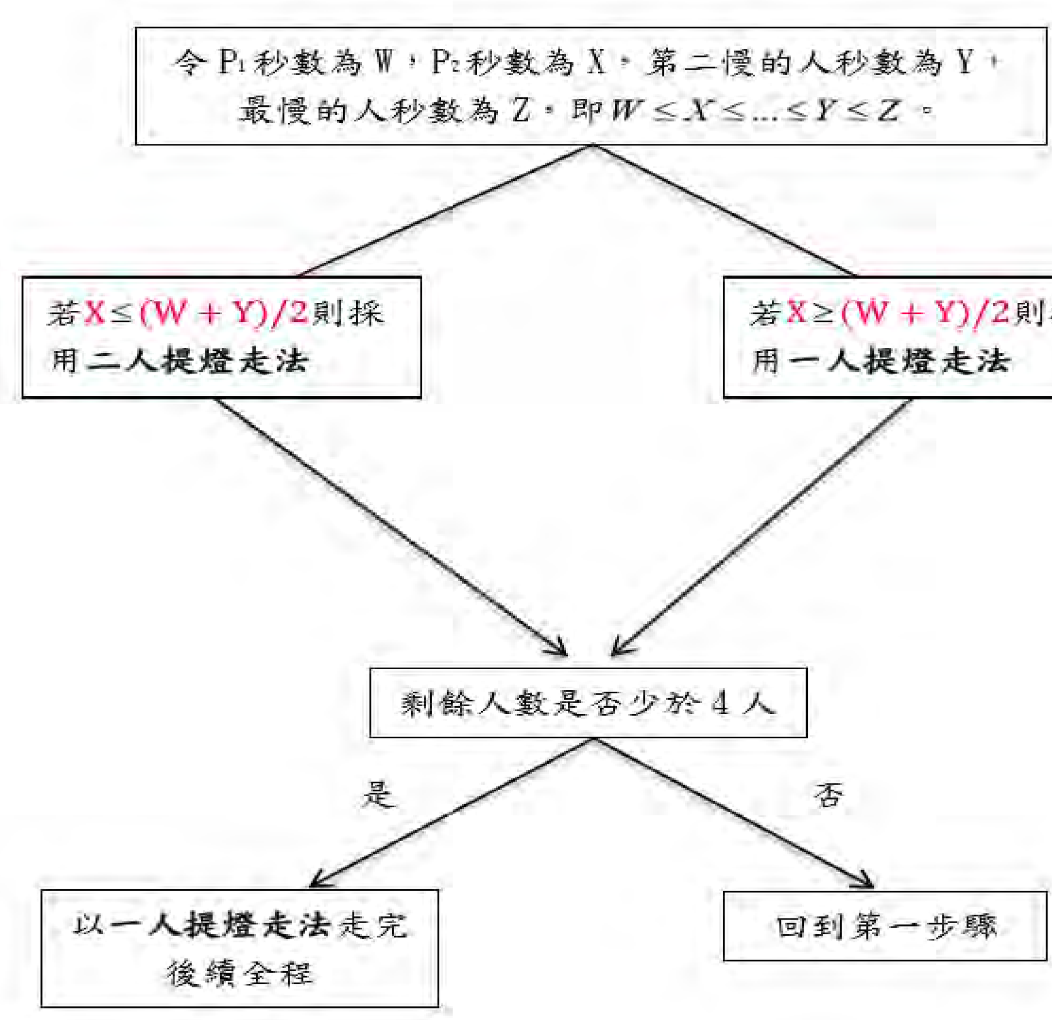
1. 當**一人提燈走法**較快時$X \ge (W+Y)/2$
2. 當**二人提燈走法**較快時$X \le (W+Y)/2$
3. 當**剩餘人數少於4人**時，無法完成完整4步驟，此時**由$P_1$帶領所有人輪番過橋。**

一人提燈走法

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_n$去 | Z |
| 2 | $P_1$ 回 | W |
| 3 | $P_1$ $P_{n-1}$去 | Y |
| 4 | $P_1$ 回 | W |
| | 秒數共 | 2W+Y+Z |

二人提燈走法

| 步驟 | 來回 | 秒數 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2$去 | X |
| 2 | $P_1$ 回 | W |
| 3 | $P_n$ $P_{n-1}$去 | Z |
| 4 | $P_1$ 回 | X |
| | 秒數共 | W+2X+Z |




# 二、研究二、秒數為等差規則走法公式

n人過橋，$P_1$、$P_2$、…、$P_n$過橋的秒數分別為1、2、3…n

## (一)想法

由研究一知，在n＞3時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

## (二)分析

**1. 完整4步驟的輪數m:**

觀察**二人提燈走法**，可發現每4個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出n人的走法:**以下完整步驟共4步，可送走2人過橋。**

| 步驟 | 第1輪 | 說明 |
|---|---|---|
| 1 | $P_1P_2\rightarrow$ 2 | $P_1P_2$過橋，因為$P_2$秒數較多，所以需要2秒。 |
| 2 | $P_1\leftarrow$1 | $P_1$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數1秒， |
| 3 | $P_{n-1}P_n$ | $P_2$還留在橋尾。 |
| 4 | $\rightarrow$n | 秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 過橋，需要n秒。 |
| | $P_2\leftarrow$ 2 | 留在橋尾的$P_2$秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。 |

**2. 完整4步驟的輪數時推算其中的秒數公式**

(1)如果人數n人，完整4步驟的輪數m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於4人時另外討論)

(2)第1步一律是$P_1P_2$過橋，第2步$P_1$回橋頭，第3步由n人中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2個人過橋，第4步$P_2$回橋頭；以上4步成為1輪，可推至第m輪表列如下:

| 輪數 | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-1}P_n\rightarrow$n<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow$n-2<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-5}P_{n-4}\rightarrow$n-4<br>$P_2\leftarrow$ 2 | … | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow$n-2(m-1)<br>$P_2\leftarrow$ 2 |

**3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下**

| | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第1步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 第2步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第3步 | n | n-2=n-1x2 | n-4=n-2x2 | … | n-2(m-1) |
| 第4步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 小計 | n+5 | (n+5)-2x1 | (n+5)-2x2 | | (n+5)-2x(m-1) |

**4. 合計**

第1輪+第2輪+…+第m輪

=(n+5)+〔(n+5)- 2x1〕+〔(n+5)- 2x2〕+…+〔(n+5)- 2x(m-1)〕

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m}[(n+5)-2(k-1)]$$

化簡得

$$m(n+7)-m(m+1)$$

**5. 完整秒數公式**

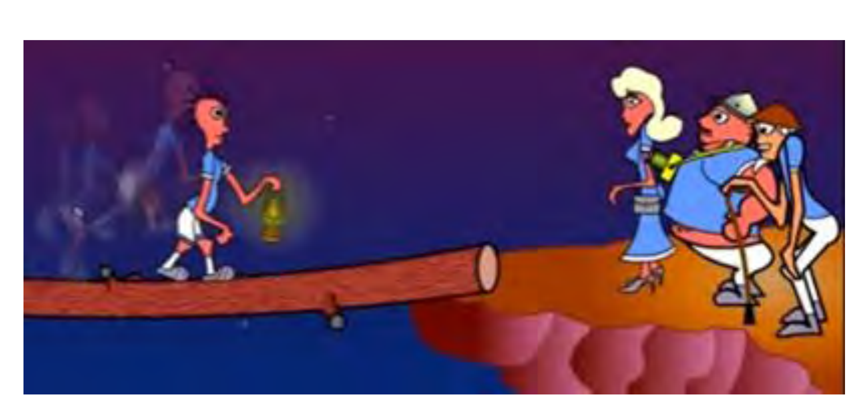
(1)前面m輪，每1輪的完整步驟是4步，已經送走2m個人，剩餘人數無法進行完整1輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中n為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為R，則完整秒數公式為**m(n+7)-m(m+1)+R**

A. **n=2k**，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=2秒代入完整秒數公式可求得秒數為m(n+7) – m(m+1)+2。

B. **n=2k+1**，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=6秒代入完整秒數公式可求得秒數為m(n+7) – m(m+1)+6。



## (三)推廣至公差為d

**1. 推算完整m輪步驟**

(1)如果人數n人，完整4步驟的輪數m=(n-2)÷2 的商。

(2)第1步是$P_1P_2$過橋，第2步$P_1$回橋頭，第3步從n人中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2個人過橋，第4步$P_2$回橋頭秒數；以上4步成為1輪，可推至第m輪表列如右:

| 輪數 | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\rightarrow$ 1+d<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-1}P_n$<br>$\rightarrow$1+(n-1)d<br>$P_2\leftarrow$ 1+d | $P_1P_2\rightarrow$ 1+d<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow$<br>1+(n-3)d<br>$P_2\leftarrow$ 1+d | $P_1P_2\rightarrow$ 1+d<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-5}P_{n-4}\rightarrow$<br>1+(n-5)d<br>$P_2\leftarrow$ 1+d | … | $P_1P_2\rightarrow$ 1+d<br>$P_1\leftarrow$1<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow$<br>1+〔n-1-2(m-1)〕d<br>$P_2\leftarrow$ 1+d |

| | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第1步 | 1+d | 1+d | 1+d | … | 1+d |
| 第2步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第3步 | 1+(n-1)d | 1+(n-3)d | 1+(n-5)d | | 1+〔n-1-2(m-1)〕d |
| 第4步 | 1+d | 1+d | 1+d | | 2 |
| 小計 | 4+(n+1)d | 4+(n-1)d | 4+(n-3)d | | 4+〔n+1-2(m-1)〕d |

可求得總合為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d$

**2.完整秒數公式**令剩餘人數所需秒數為R，則完整秒數公式為 $m(nd+3d+4)-m(m+1)d+R$

A.n=2，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=1+d秒代入完整秒數公式可求得秒數為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(1+d)$。

B.n=2k+1，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=3d+3秒代入完整秒數公式可求得秒數為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(3d+3)$。

## 三、研究三、秒數為等比規則走法公式

### (一)公比為2的情況

有n個人要過橋，$P_1$、$P_2$、…、$P_n$過橋的秒數分別為1、2、4…$2^{n-1}$

**1.完整4步驟的輪數時推算其中的秒數公式**

(1)如果人數n人，完整4步驟的輪數m=(n-2)÷2 的商。

(2)第1步一律$P_1P_2$過橋，第2步$P_1$回橋頭，第3步從n人中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2個人過橋，第4步$P_2$回橋頭；以上4步成為1輪，可推至第m輪表列如下：

| 輪數 | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n\rightarrow 2^{n-1}$<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow 2^{n-3}$<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-5}P_{n-4}\rightarrow 2^{n-5}$<br>$P_2\leftarrow$ 2 | … | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow 2^{n-2(m-1)}$<br>$P_2\leftarrow$ 2 |

| | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第1步 | 2 | 2 | 2 | … | 2 |
| 第2步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第3步 | $2^{n-1}$ | $2^{n-3}$ | $2^{n-5}$ | | $2^{n-2(m-1)}$ |
| 第4步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 小計 | $2^{n-1}+5$ | $2^{n-3}+5$ | $2^{n-5}+5$ | | $2^{n-2(m-1)}+5$ |

可求得總合為$2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\ldots+2^{n-2(m-1)}+5m$

**2.完整秒數公式**

令剩餘人數所需秒數為R，則完整秒數公式為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5n+R$。

A.n=2k，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=2秒代入完整秒數公式可求得秒數為$2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m+2$。

B.n=2k+1，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=7秒代入完整秒數公式可求得秒數為$2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m+7$。

### (二)公比為r的情況

$P_1$、$P_2$、…、$P_n$過橋的秒數分別為1、r、$r^2$……$r^{n-1}$

**1.完整4步驟的輪數時推算其中的秒數公式**

(1)如果人數n人，完整4步驟的輪數m=(n-2)÷2 的商。

(2)第1步一律是$P_1P_2$過橋，第2步$P_1$回橋頭，第3步從n人中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2個人過橋，第4步$P_2$回橋頭；以上4步成為1輪，可推至第m輪表列如下：

| 輪數 | 第1輪 | 第2輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n\rightarrow r^{n-1}$<br>$P_2\leftarrow$ r | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow r^{n-3}$<br>$P_2\leftarrow$ r | … | $P_1P_2\rightarrow$ r<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow r^{n-2(m-1)}$<br>$P_2\leftarrow$ r |

| | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第1步 | r | r | r | … | r |
| 第2步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第3步 | $r^{n-1}$ | $r^{n-3}$ | $r^{-5}$ | | $r^{n-2(m-1)}$ |
| 第4步 | r | r | r | | r |
| 小計 | $r^{n-1}+2r+1$ | $r^{n-3}+2r+1$ | $r^{n-5}+2r+1$ | | $r^{n-2(m-1)}+2r+1$ |

可求得總合為$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m$

**2.完整秒數公式**

令剩餘人數所需秒數為R，則完整秒數公式為$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+R$。

A.n=2k，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=r+1秒代入完整秒數公式可求得秒數為$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r+1$。

B.n=2k+1，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=$r^2$+r+1秒代入完整秒數公式可求得秒數為$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r^2+r+1$。

## 四、研究四、秒數為階差規則走法公式

### (一)階差為2的情況

$P_1$、$P_2$、…、$P_n$過橋的秒數分別為1、2、5……$(n-1)^2+1$

**1.完整4步驟的輪數時推算其中的秒數公式**

(1)如果人數n人，完整4步驟的輪數m=(n-2)÷2 的商。

(2)第1步一律是$P_1P_2$過橋，第2步$P_1$回橋頭，第3步由n人數中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2個人過橋，第4步$P_2$回橋頭；以上4步成為1輪，可推至第m輪表列如下：

| 輪數 | 第1輪 | 第2輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|
| 步驟 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1}P_n\rightarrow (n-1)^2+1$<br>$P_2\leftarrow$ 2 | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow (n-3)^2+1$<br>$P_2\leftarrow$ 2 | … | $P_1P_2\rightarrow$ 2<br>$P_1\leftarrow 1$<br>$P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow$〔n-2(m-1)-1〕$^2$+1<br>$P_2\leftarrow$ 2 |

| | 第1輪 | 第2輪 | 第3輪 | | 第m輪 |
|---|---|---|---|---|---|
| 第1步 | 2 | 2 | 2 | … | 2 |
| 第2步 | 1 | 1 | 1 | | 1 |
| 第3步 | $(n-1)^2+1$ | $(n-3)^2+1$ | $(n-5)^2+1$ | | 〔n-2(m-1)-1〕$^2$+1 |
| 第4步 | 2 | 2 | 2 | | 2 |
| 小計 | $(n-1)^2+6$ | $(n-3)^2+6$ | $(n-5)^2+6$ | | 〔n-2(m-1)-1〕$^2$+6 |

可求得總合為2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)$^2$

**2.完整秒數公式**

令剩餘人數所需秒數為R，則完整秒數公式為m(n+7)-m(m+1)+R。

A.n=2k，則m=$\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=2秒代入完整秒數公式可求得秒數為2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)$^2$+2 。

B.n=2k+1，則m=$\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=8秒代入完整秒數公式可求得秒數為2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)$^2$+8 。

### (三)階差為t的情況

$P_1$、$P_2$、…、$P_n$，過橋的秒數分別為 1、$P_1$+t-(t-1)、$P_2$+2t-(t-1)……$P_{n-1}$+(n-1)t-(t-1)

**1.第n人的秒數**

| |
|---|
| $P_1=1$ |
| $P_2=P_1+t-(t-1)$ |
| $P_3=P_2+2t-(t-1)$ |
| $P_4=P_3+3t-(t-1)$ |
| …… |
| $P_n=P_{n-1}+(n-1)t-(t-1)1$ |
| $P_n=1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$ |

**2.完整秒數公式**

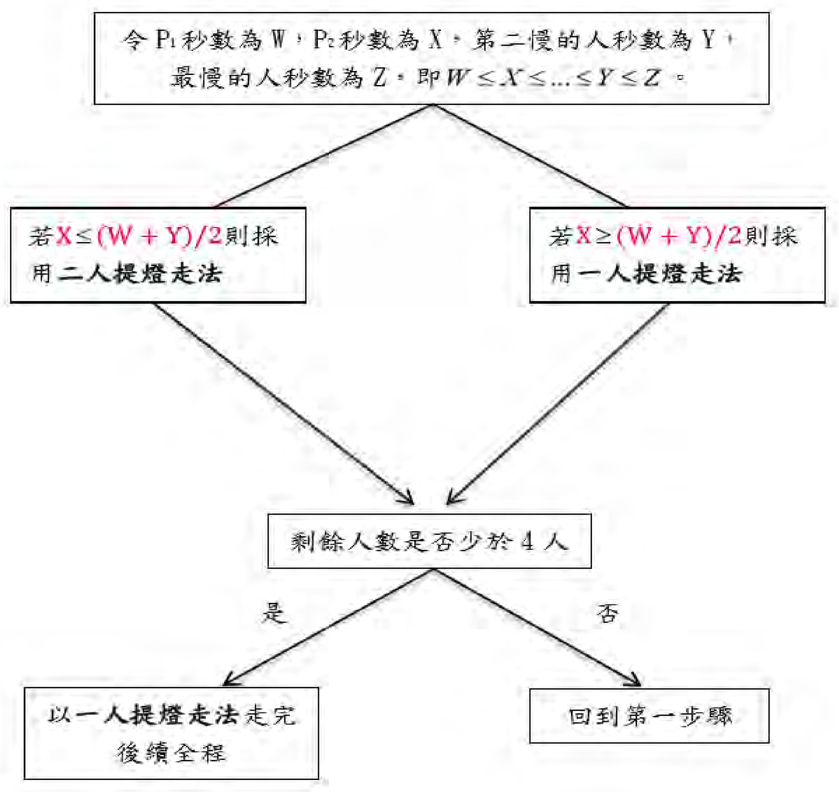
令剩餘人數所需秒數為R，則完整秒數公式為$6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+R$

A.n=2k，則m=$\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=3秒代入完整秒數公式可求得秒數為$m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+3$

B.n=2k+1，則m=$\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=6+t秒代入完整秒數公式可求得秒數為$m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+6+t$

# 陸、結論

**一、結論一：速度規則不一走法公式**




**二、結論二：秒數為等差規則走法公式**

A.n=2，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=1+d秒代入完整秒數公式可求得秒數為 $m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(1+d)$ 。

B.n=2k+1，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=3d+3秒代入完整秒數公式可求得秒數為 $m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(3d+3)$ 。

**三、結論三：秒數為等比規則走法公式**

A.n=2k，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=r+1秒代入完整秒數公式可求得秒數為$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r+1$ 。

B.n=2k+1，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=$r^2$+r+1秒代入完整秒數公式可求得秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r^2+r+1$ 。

**四、結論四：秒數為階差規則走法公式**

A.n=2k，則m=$\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為$P_1P_2$ 2人，需要R=3秒代入完整秒數公式可求得秒數為$6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+3$ 。

B.n=2k+1，則m=$\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為$P_1P_2+P_3$ 3人，需要R=6+t秒代入完整秒數公式可求得秒數為$6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+6+t$ 。

我在過橋的公式推算中，成功找出秒數為等差、等比、階差規則走法與最簡秒數公式。

# 柒、參考資料


無作者(無日期)。樂和遊戲-過橋遊戲。民國106年3月10日取自：http://www.novelgames.com/zh-HK/spgames/bridge/

王靖富(民106年)。過橋遊戲餘數分類解法。嘉義市第三十五屆中小學科展作品說明書。

蔡玗真(民103年)。過橋遊戲探討。嘉義市第三十二屆中小學科學展覽會作品說明書。

陳淵琮(民92年)。如何最快。中華民國第四十三屆中小學科學展覽會作品說明書。

張蒔曦(民97年)。過橋問題。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會作品說明書。

Gunter Rote(民91年)。Crossing the bridge at night。https://www.researchgate.net/publication/220530399_Crossing_the_Bridge_at_Night