中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030408

三角形周長平分線之探討

學校名稱：新北市立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳韋鈞	洪駿源
國二 林東穎	陳怡君
國二 劉建吾	

關鍵詞：等周線、包絡曲線、角平分線

壹、　摘要

我們藉由尺規作圖尋找三角形的等周線並且推導出等周線包絡曲線的方程式為一拋物線圖形。此外，為了簡化複雜的方程式計算，我們透過圖形的「旋轉」以及「平移」的方式模擬繪圖於 GeoGebra 上，找到分別對應於三個角的等周線包絡曲線拋物線圖形。最後，我們延伸尋找包絡曲線拋物線與三角形之間的相關性質，並且加以證明。

貳、　研究動機

在讀完三角形等面積線的探討(鄭再添,1987)一篇關於三角形面積平分線所形成包絡曲線的探討與證明後，我們覺得也許可以試著藉此證明三角形等周線的相關性質，例如：包絡線、周長平分線、角平分線等等，是否有關連性？於是我們就開始探討關於這方面的知識。

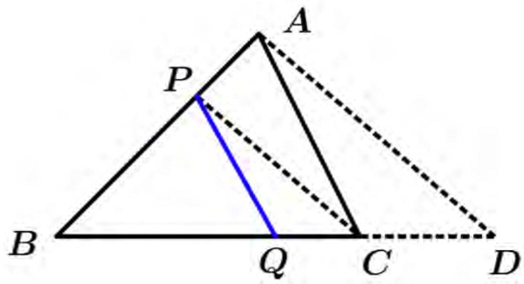
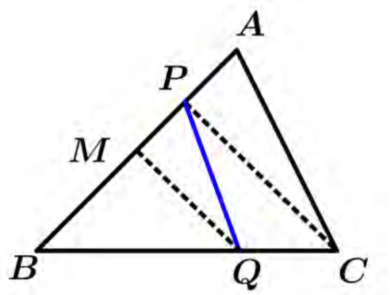
參、　研究目的

1. 三角形的等周線作法之探討。
2. 三角形等周線之包絡曲線方程式之推導。
3. 三角形等周線之包絡曲線方程式之判別。
4. 三角形等周包絡曲線的性質與證明。

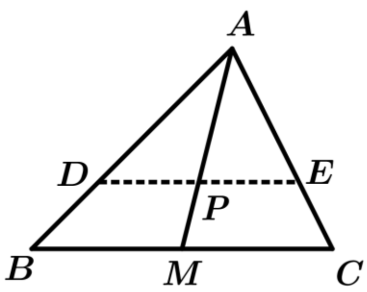
肆、 文獻探討

在「三角形等面積線的探討」（鄭再添，1987）的這篇文章中，首先談到了等積線的做法，共有作者認為最為精簡的兩種，如下表所示。

表 1　三角形等積線的作法

等積線作法	圖例
【作法一】 step 1 連 $\overline{PC}$ step 2 過 A 作 $\overrightarrow{AD}$ // $\overline{PC}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 交於 D 點 step 3 取 $\overline{BD}$ 中點 Q step 4 連 $\overline{PQ}$ step 5 則 $\overline{PQ}$ 平分 $\triangle ABC$ 的面積	
【作法二】 step 1 連 $\overline{PC}$ step 2 取 $\overline{AB}$ 中點 M step 3 過 M 作 $\overline{MQ}$ // $\overline{PC}$ 並與 $\overline{BC}$ 交於 Q 點 step 4 連 $\overline{PQ}$ step 5 則 $\overline{PQ}$ 平分 $\triangle ABC$ 的面積	

接著討論：P 點若在形內，而不是在邊上呢？首先，作者猜測「是否過重心的直線都是面積平分線?」但隨後證明是作者所假設是錯的，如下圖所示。



$\because \overline{AD}:\overline{AB} = \overline{AP}:\overline{AM} = 2:3$

$\therefore \triangle ADE:\triangle ABC = \overline{AD}^2:\overline{AB}^2 = 4:9$

故 $\overline{DE}$ 過重心 P 但未平分 $\triangle ABC$。

圖 1　過重心的直線並非都是等周線的證明

接下來，作者進行第二個猜測「是否對形內點而言，可以有許多條面積平分線通過

它?」作者採用釜底抽薪的方法，依序列出下表中的四張圖：

1. 圖 2圖 3 表示 P 點自 A 點往 B 點移動，則等積線 $\overline{PQ}$ 自中線 $\overline{AM}$ 延某未知曲線移動，當 P 點到達 O 點（$\overline{AB}$ 中點）時，$\overline{PQ}$ 即成中線 $\overline{CO}$。
2. 圖 2圖 3 表示則指 P 點自 O 點再向 B 點移動，$\overline{PQ}$ 自 $\overline{CO}$ 對 $\triangle ABC$ 移動至 $\overline{BN}$ 處。
3. 圖 4圖 5 表示 P 點再由 B 點向 M 處移動，則 $\overline{PQ}$ 又回到 $\overline{AM}$，至此已將所有等積線畫出。
4. 圖 4圖 5 則是將以上三圖疊合後的樣貌。

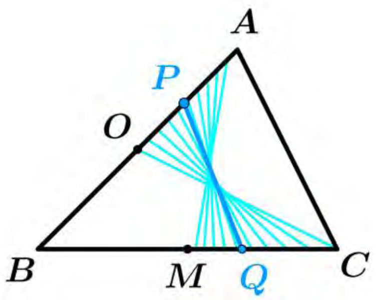


圖 2

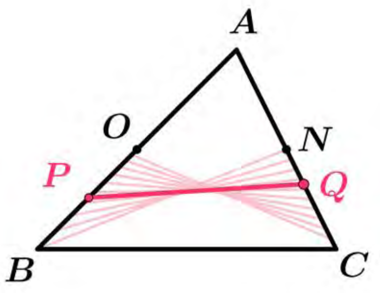


圖 3

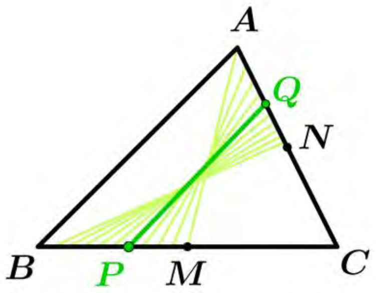


圖 4

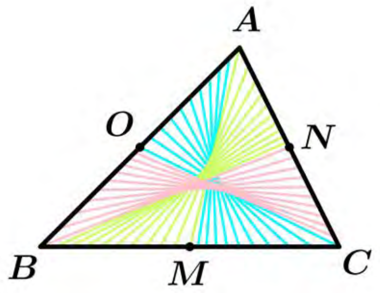


圖 5

最後作者利用坐標化和極限的方式推導出方程式，並在解聯立後得知三角形等積線的包絡曲線為雙曲線。

伍、 研究工具與流程

一、 研究工具

(一) GeoGebra

(二) 紙、筆、電腦

二、 研究流程

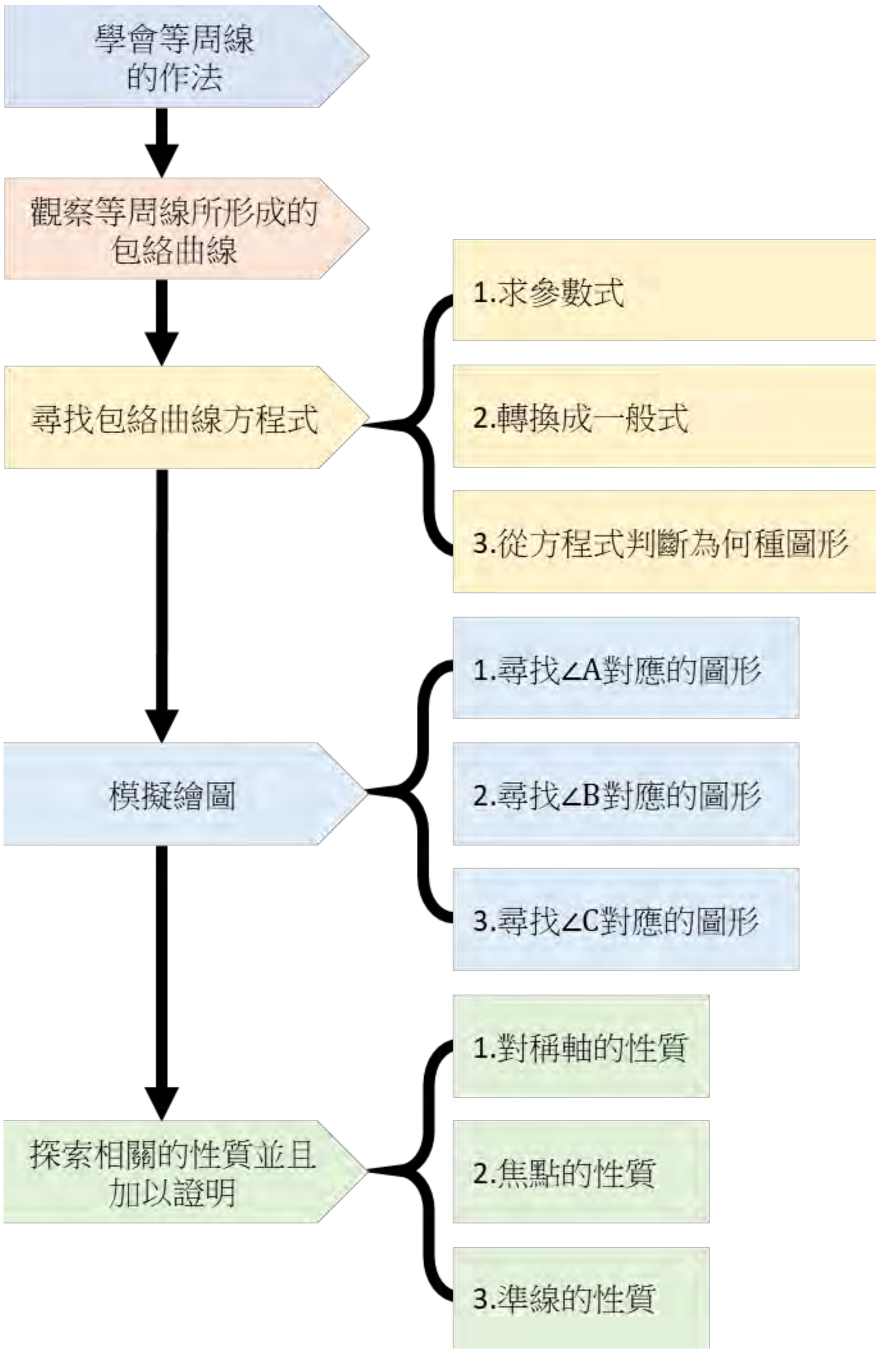


圖 6

陸、　結果與討論

一、三角形的等周線作法之探討

(一)　過頂點的等周線尺規作圖

目的：尋找過三個頂點的等周線。

作法：

1. 做任一 $\triangle ABC$ 。
2. 延長 $\overline{AB}$ 成直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 。
3. 分別以 A、B 為圓心，$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 為半徑做兩個圓。
4. 設兩圓交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 D、E 兩點。
5. 設 $\overline{DE}$ 中點 M。
6. 連 $\overline{CM}$ ，則過頂點 C 的等周線形成，如圖 7 所示。
7. 以同樣方法找出通過 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的等周線。

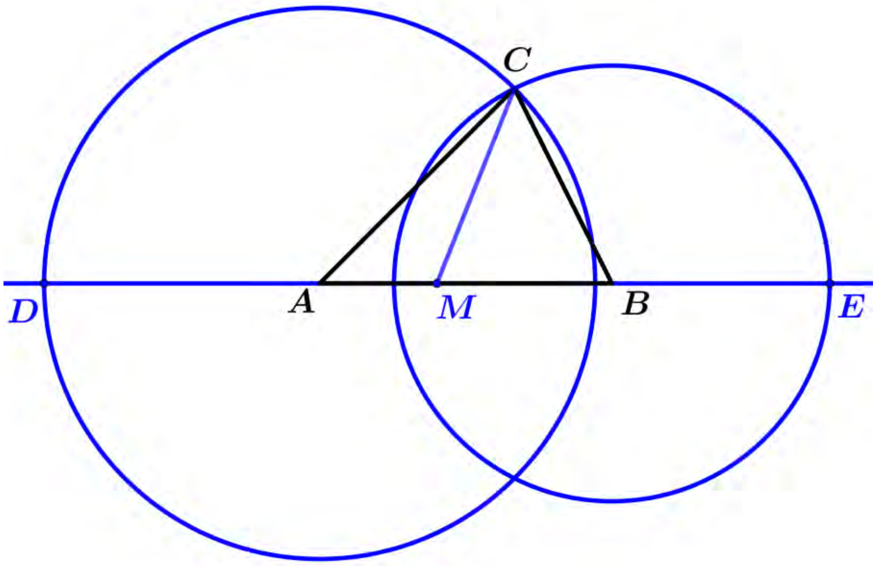


圖 7

說明：

因為 $\overline{AC}=\overline{AD}$、$\overline{BC}=\overline{BE}$，又 M 為 $\overline{DE}$ 中點，所以 $\overline{AD}+\overline{AM}=\overline{BM}+\overline{BE}$。

由此可知，$\overline{AC}+\overline{AM}=\overline{BM}+\overline{BC}$，因此 $\overline{CM}$ 為 $\triangle ABC$ 的等周線。

(二)　未過頂點的等周線尺規作圖

目的：尋找未通過頂點的等周線 $\overline{PQ}$。

作法：

1. 利用過頂點等周線作法作出過 C 點的等周線。
2. 在$\overline{AC}$間找一個動點 P，且 $\overline{CP} < \overline{MB}$。
3. 以 M 為圓心，$\overline{PC}$ 為半徑作圓，交 $\overline{AB}$ 得點 Q。
4. 連 $\overline{PQ}$ ，則未過頂點的一條等周線形成，如圖 8 所示。

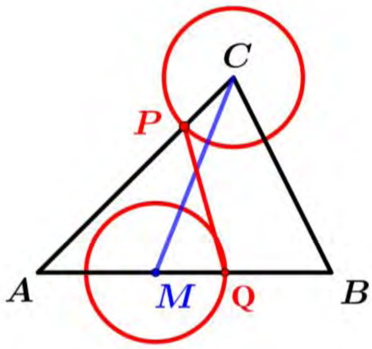


圖 8

說明：

$\because$ $\overline{CM}$為一等周線，

$\therefore \overline{CA} + \overline{AM} = \overline{BM} + \overline{CB}$

又 $\overline{CP} = \overline{MQ}$

$\Rightarrow \overline{CP} + \overline{PA} + \overline{AM} = \overline{MQ} + \overline{QB} + \overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{MQ} + \overline{PA} + \overline{AM} = \overline{CP} + \overline{QB} + \overline{BC}$

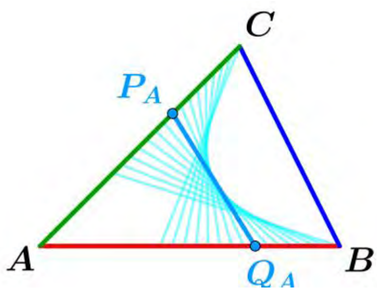
$\Rightarrow \overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{PC} + \overline{BC} + \overline{BQ}$

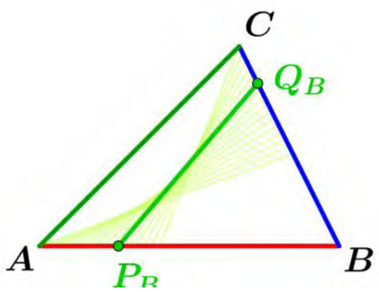
因此得知$\overline{PQ}$也為一條等周線

二、 等周線所形成包絡曲線之探究

(一) 顯示並觀察等周線所形成之包絡曲線

1. 利用等周線作圖方法作出一條等周線 $\overline{P_A Q_A}$
2. 顯示 $\overline{P_A Q_A}$ 軌跡圖並拉動動點 P_A，形成藍色區塊的包絡線，如





3. 圖 9 所示。
4. 同理可得對應 $\angle B$ 所形成的等周線包絡線，如圖 10 所示。
5. 同理可得對應 $\angle C$ 所形成的等周線包絡線，如**錯誤! 找不到參照來源。**所示。
6. 將以上三圖疊合後如 圖 11 圖 12 所示。

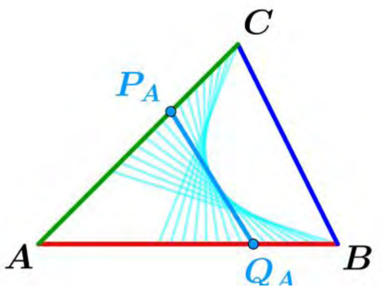


圖 9

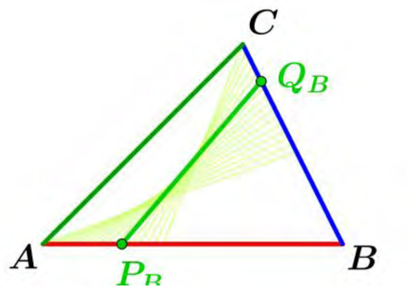


圖 10

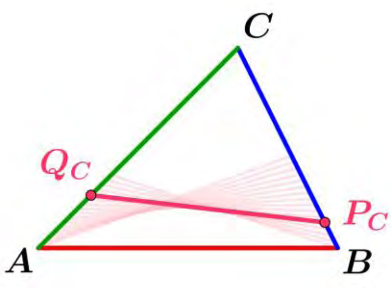


圖 11

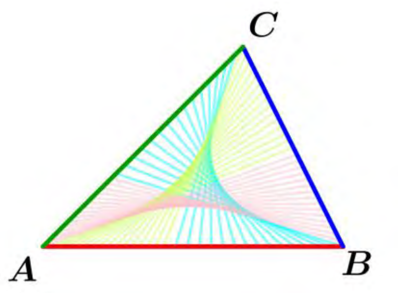


圖 12

(二)　等周線所形成的包絡曲線方程式推導

我們可以由上述軌跡圖形發現：等周線所形程的軌跡包絡曲線圖形應為拋物線，接下來則繼續探討是否其包絡曲線為拋物線。首先，我們利用「三角形等面積線的探討」（鄭再添，1987）所使用的方法，整理等周包絡曲線的方程式。

定理 2-1 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$。

若 A 為原點 $(0,0)$、b 為 $(b,\ 0)$，且 C 在第一象限，則 $\angle A$ 所對等周包絡曲線方程式為

$$x^2-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}xy+\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2y^2-2sx+2s\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}y+s^2=0$$

證明：

以下為求方便，將周長的一半設為 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$、$\angle A=\theta$。

Step 1 求一條等周線 $\overline{PQ}$ 直線方程式：

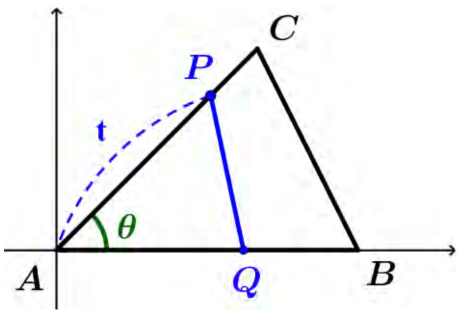


圖 13

在 $\overline{AC}$ 邊上取一點 P，且 $\overline{AP}=t$。

則 $P=(t\cos\theta\,,t\sin\theta)$、$Q=(s-t,0)$。

計算 $\overline{PQ}$ 率 $m=\frac{t\sin\theta}{t\cos\theta-s+t}$，

由點斜式我們令等周線方程式 $\overleftrightarrow{PQ}$ 為 $y=\frac{t\sin\theta}{t\cos\theta-s+t}x-\frac{t\sin\theta}{t\cos\theta-s+t}(s-t)$

經整理得 $t\sin\theta\,x-(t\cos\theta-s+t)y=t\sin\theta\,(s-t)\quad\ldots(1)$

Step 2 計算包絡曲線的參數式：

考慮在 $\overline{AC}$ 邊上另一點 P'，且 $\overline{AP}=t+\Delta t$

等周線 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 的方程式為

$$(t+\Delta t)\sin\theta\, x-[(t+\Delta t)\cos\theta-s+t+\Delta t]y=(t+\Delta t)\sin\theta\,(s-t-\Delta t) \quad \dots(2)$$

將 $(1)\times(t+\Delta t)-(2)\times t$ 解聯立方程式：

$$\begin{cases} t(t+\Delta t)\sin\theta\, x-(t+\Delta t)(t\cos\theta-s+t)y=t(t+\Delta t)\sin\theta\,(s-t) & \dots(1)\times(t+\Delta t) \\ t(t+\Delta t)\sin\theta\, x-t[(t+\Delta t)\cos\theta-s+(t+\Delta t)]y=t(t+\Delta t)\sin\theta\,(s-t-\Delta t) & \dots(2)\times t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{(t+\Delta t)s-(t+\Delta t)t-[ts-t(t+\Delta t)]\}y=(t+\Delta t)t\sin\theta\,\Delta t$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{s}(t+\Delta t)t\sin\theta \quad \dots(3)$$

又將$(2)-(1)$解聯立方程式：

$$\begin{cases} (t+\Delta t)\sin\theta\, x-[(t+\Delta t)\cos\theta-s+t+\Delta t]y=(t+\Delta t)\sin\theta\,(s-t-\Delta t) & \dots(2) \\ t\sin\theta\, x-(t\cos\theta-s+t)y=t\sin\theta\,(s-t) & \dots(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta t\sin\theta\, x-(\Delta t\cos\theta+\Delta t)y=-t\sin\theta\,\Delta t+\Delta t\sin\theta\,(s-t-\Delta t)$$

$$\Rightarrow \sin\theta\, x=(\cos\theta+1)y-t\sin\theta+\sin\theta\,(s-t-\Delta t)=\sin\theta\,(s-2t-\Delta t)$$

將 (3) 代入可得

$$\Rightarrow \sin\theta\, x=(\cos\theta+1)\frac{1}{s}(t+\Delta t)t\sin\theta+\sin\theta\,(s-2t-\Delta t)$$

$$\Rightarrow x=\frac{t(t+\Delta t)}{s}(\cos\theta+1)+(s-2t-\Delta t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{t(t+\Delta t)}{s}(\cos\theta+1)+(s-2t-\Delta t) \\ y=\frac{1}{s}(t+\Delta t)t\sin\theta \end{cases}$$

考慮 P' 很接近 P，則 $\Delta t\to 0$

$$\begin{cases} x=\frac{t^2}{s}(\cos\theta+1)+(s-2t) \\ y=\frac{1}{s}t^2\sin\theta \end{cases} \quad \dots(4)$$

Step 3 將包絡曲線的參數式轉換為一般式：

將 (4) 整理

$$\Rightarrow \begin{cases} x - s - \frac{t^2}{s}(\cos\theta + 1) = -2t & \dots(5) \\ t^2 = \frac{s}{\sin\theta} y & \dots(6) \end{cases}$$

將 (6) 代入 (5)：

$$\Rightarrow x - s - \frac{(\cos\theta + 1)}{\sin\theta} y = -2t$$

令 $k = \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$

$$\Rightarrow \ x - s - ky = -2t$$

$$\Rightarrow (x - s - ky)^2 = (-2t)^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}^2 - 2kxy + k^2y^2 - 2sx + 2sky + s^2 = 4t^2 \quad \dots(7)$$

再次將 (6) 代入 (7)：

$$\Rightarrow \mathrm{x}^2 - 2kxy + k^2y^2 - 2sx + 2sky + s^2 = \frac{4s}{\sin\theta} y$$

$$\Rightarrow x^2 - 2kxy + k^2y^2 - 2sx + \left(2sk - \frac{4s}{\sin\theta}\right) y + s^2 = 0 \quad \dots(8)$$

最後將 $k = \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$ 代回式 (8)：

$$\Rightarrow x^2 - 2\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} xy + \left(\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}\right)^2 y^2 - 2sx + \left(2s\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} - \frac{4s}{\sin\theta}\right) y + s^2 = 0$$

$\angle A$ 所對等周包絡曲線方程式即為

$$x^2 - 2\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} xy + \left(\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}\right)^2 y^2 - 2sx + 2s\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} y + s^2 = 0 \quad \dots(9)$$

(三)　判斷等周線所形成的包絡曲線為拋物線

定理 2-2　三角形個角所對應的等周線包絡曲線為拋物線。

利用高中課本（民 90）所提及的二次曲線的判別法判別方程式的圖形：

Step 1　計算判別式 $b^2-4ac=0$ ，判斷圖形類別：

根據式 (9) ，計算$b^2-4ac=\left(-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2-4\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2=0$，

因此方程式為拋物線型的圖形。

Step 2　確認圖形為拋物線：

接著將配方法將二次式表示成一次式的平方，

$$x^2-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}xy+(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta})^2y^2-2sx+\left(2s\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}-\frac{4s}{\sin\theta}\right)y+s^2=0$$

$$\Longrightarrow\left(x-\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}y\right)^2-2s\left[x-\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}-\frac{2}{\sin\theta}\right)y\right]+s^2=0$$

因為 $x-\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}y$ 及 $x-\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}-\frac{2}{\sin\theta}\right)y$ 兩式的 x、y 項係數不成比例，無法繼續分解，由此可知此方程式為一拋物線圖形

三、 延伸模擬

求得方程式後，我們將其輸入 Geogebra 指令列，模擬畫出$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所分別對應的等周線包絡曲線。

(一) 尋找對應$\angle A$所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形：

將 A 放置於原點，B 在正向 x 軸，C 在第一項線，由式 (8) 可以整理出對應$\angle A$ 所形成的等周線 $\overline{P_AQ_A}$ 包絡曲線方程式指令如下（依序複製貼上於 Geogebra 指令列），圖形如圖 14 所示。

指令輸入：

1. α=Angle(B, A, C)

2. s=(a+b+c)/2

3. x^2-2 (cos(α)+1)/sin(α) x y+((cos(α)+1)/sin(α))^2 y^2-2s x+2 s (cos(α)-1)/sin(α) y+s^2=0

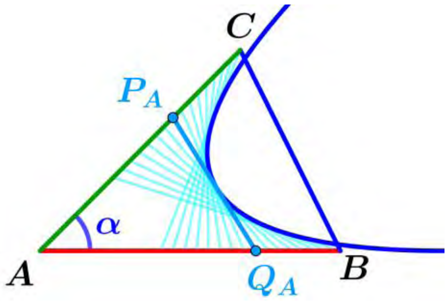


圖 14　利用指令列輸入得$\angle A$所對應的等周線包絡曲線

(二)　尋找對應$\angle C$所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形：

旋轉與平移介紹：在完成上述「∠A所對應等周線包絡曲線圖形」是以$\angle A$在坐標平面中的原點所繪製出。接續，為了方便尋找$\angle B$、$\angle C$所對應的等周線包絡曲線，我們透過將三角形旋轉與平移使得頂點C與頂點B移至原點，進而藉由前述步驟畫出$\angle C$、$\angle B$所對應的等周線包絡曲線。

Step 1　接續圖 14　利用指令列輸入得$\angle A$所對應的等周線包絡曲線，以$\angle A$為旋轉中心，逆時針旋轉$(180-\alpha)°$

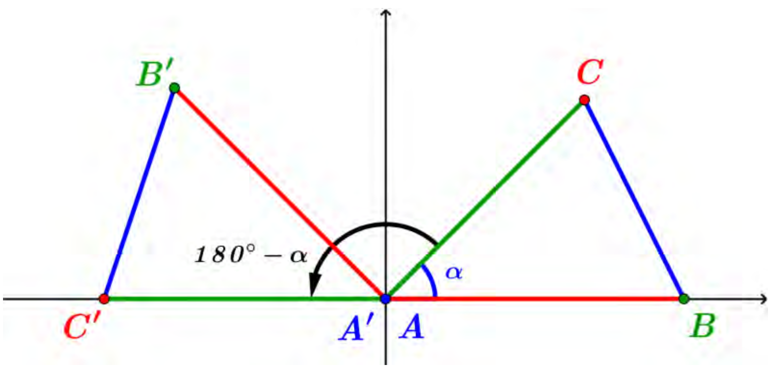


圖 15

Step 2 將 $\triangle A'B'C'$ 沿著 x 軸平移，使得 C' 平移至原點 A

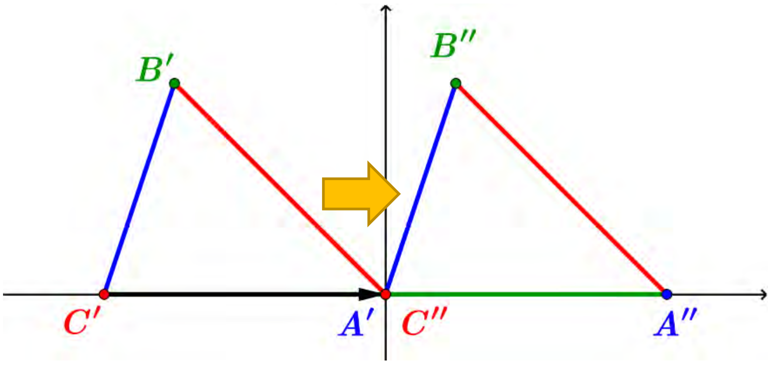


圖 16

Step 3 利用前面推導出來的公式與指令，畫出 C'' 的等周包絡曲線

指令輸入：

1. γ =Angle(A, C, B)
2. s=(a+b+c)/2
3. x^2-2 (cos(γ)+1)/sin(γ) x y+((cos(γ)+1)/sin(γ))^2 y^2-2s x+2 s (cos(γ)-1)/sin(γ) y+s^2=0

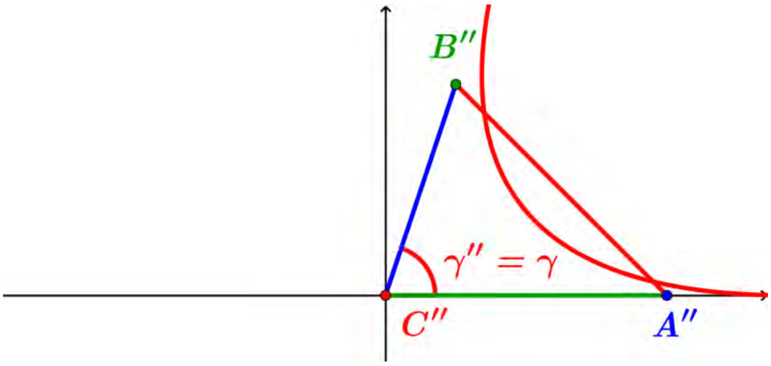


圖 17

Step 4 將 $\triangle A''B''C''$ 及拋物線沿著 $\boldsymbol{x}$ 軸向左平移，使得 C'' 平移回至 C'

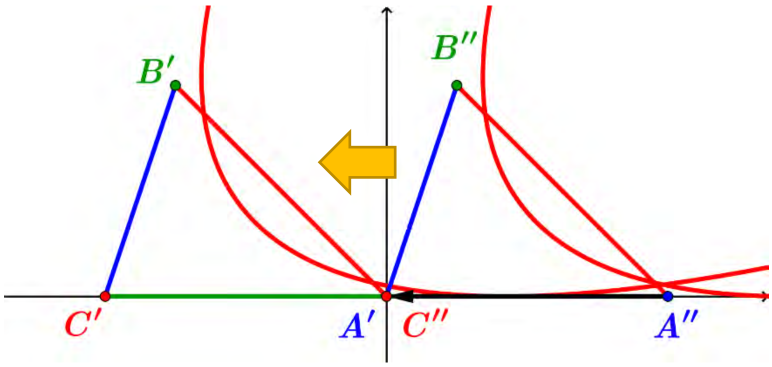


圖 18

Step 5 將 $\triangle A''B''C''$ 及拋物線以 A' 為旋轉中心，順時針旋轉 $(180-\alpha)°$

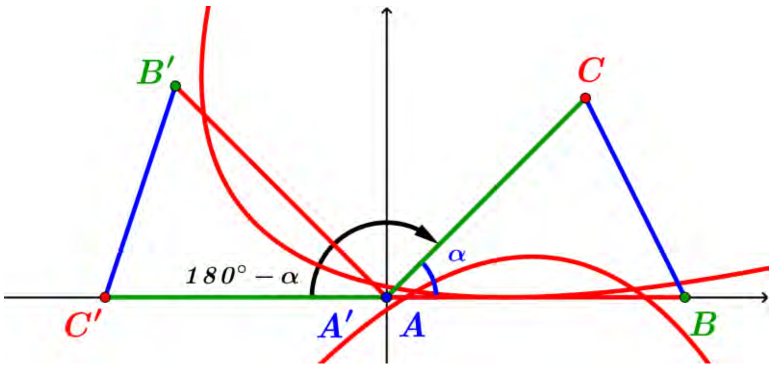


圖 19

Step 6 對應 $\angle C$ 所形成等周線包絡曲線即為所求。

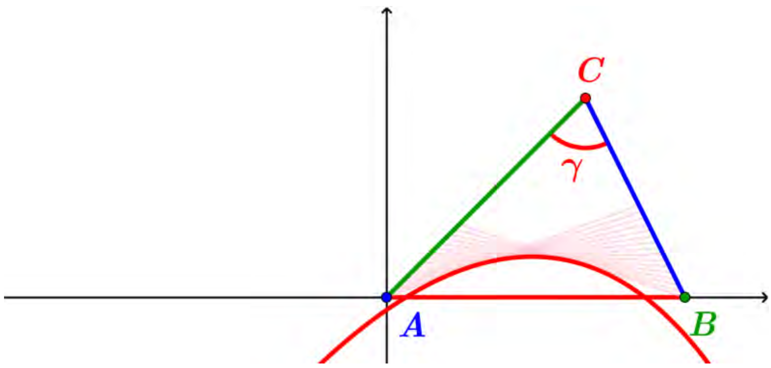


圖 20

(三)　尋找對應$\angle B$所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形：

同尋找對應$\angle \mathrm{C}$所形成等周線包絡曲線方法，依序操作。

Step 1 接續圖 14　利用指令列輸入得$\angle A$所對應的等周線包絡曲線，以$\angle B$為旋轉中心，順時針旋轉$(180-\beta)°$

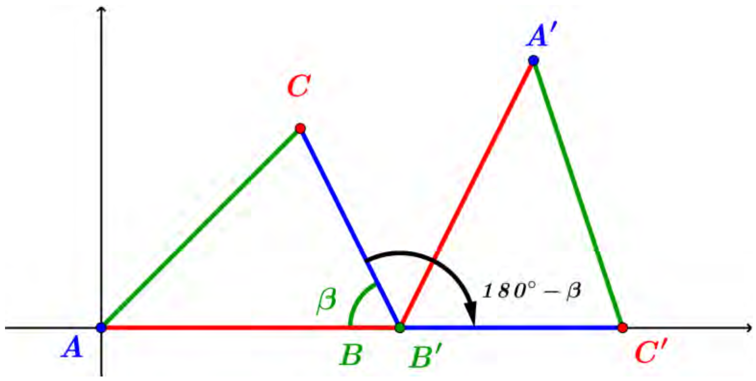


圖 21

Step 2 將$\triangle A'B'C'$沿著x軸平移，使得B'平移至原點A

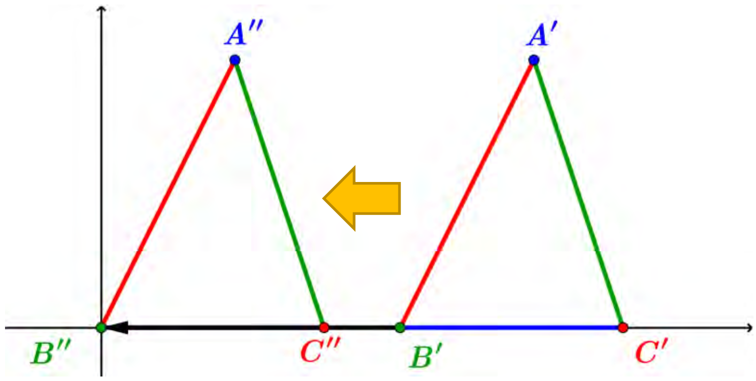


圖 22

Step 3 利用前面推導出來的公式，畫出對應$\angle B''$的等周線包絡曲線

指令輸入：

1. β=Angle(A, C, B)
2. s=(a+b+c)/2
3. x^2-2 (cos(β)+1)/sin(β) x y+((cos(β)+1)/sin(β))^2 y^2-2s x+2 s (cos(β)-1)/sin(β) y+s^2=0

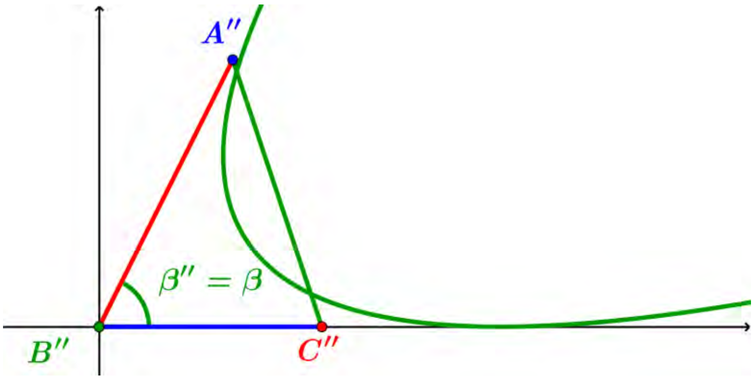


圖 23

Step 4 將 $\triangle A''B''C''$ 沿著 x 軸向右平移，使得 B'' 平移回至 B'

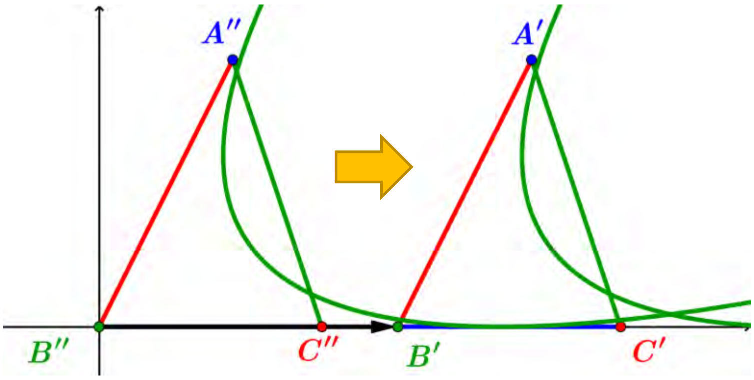


圖 24

Step 5 將 $\triangle A''B''C''$ 及拋物線以 B' 為旋轉中心，逆時針旋轉 $(180-\beta)°$

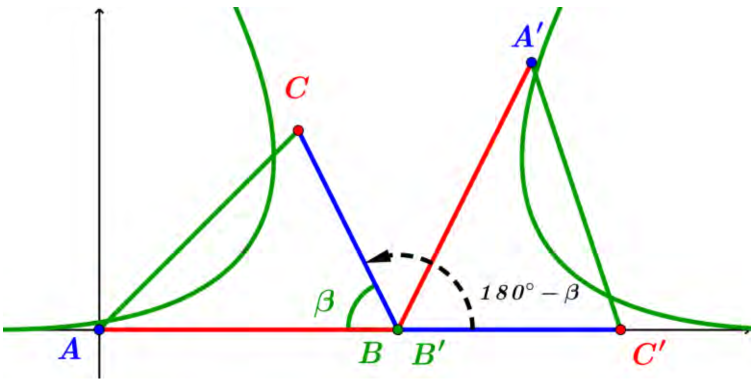


圖 25

Step 6 對應∠B 所形成等周線包絡曲線即為所求。

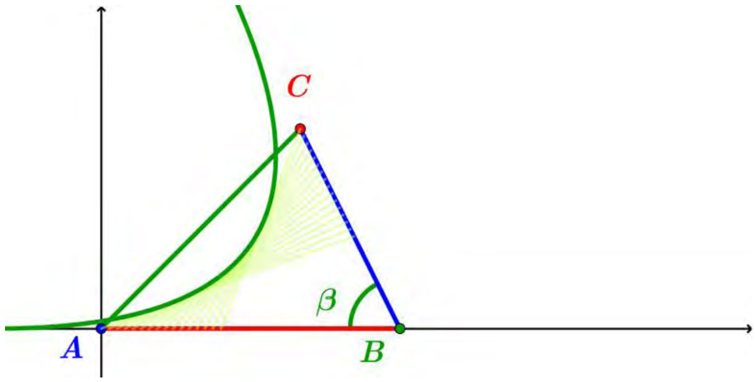


圖 26

(四) 將圖 14 利用指令列輸入得∠A 所對應的等周線包絡曲線、圖 20、圖 26 疊合後，及指出三個角所對應的等周線包絡曲線。

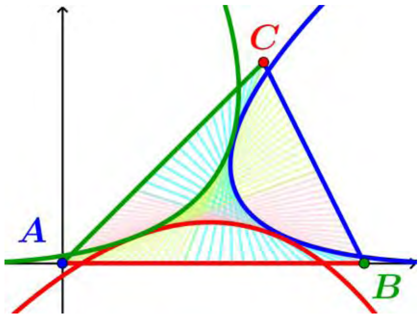


圖 27

四、 等周線包絡曲線所形成之拋物線的對稱軸、焦點、準線之性質

性質 4-1 三條角平分線分別為三條拋物線的對稱軸

我們透過 Geogebra 的模擬，由圖可得的三條角平分線分別為三條拋物線的對稱軸。

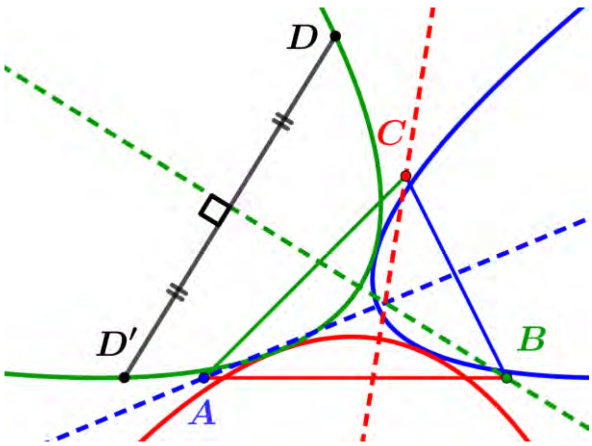


圖 28

性質 4-2 等周線的中垂線恰交於包絡曲線的焦點。

分別作出 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所對應的拋物線並且作出其拋物線焦點，可以發現等周線的中垂線會交於焦點。

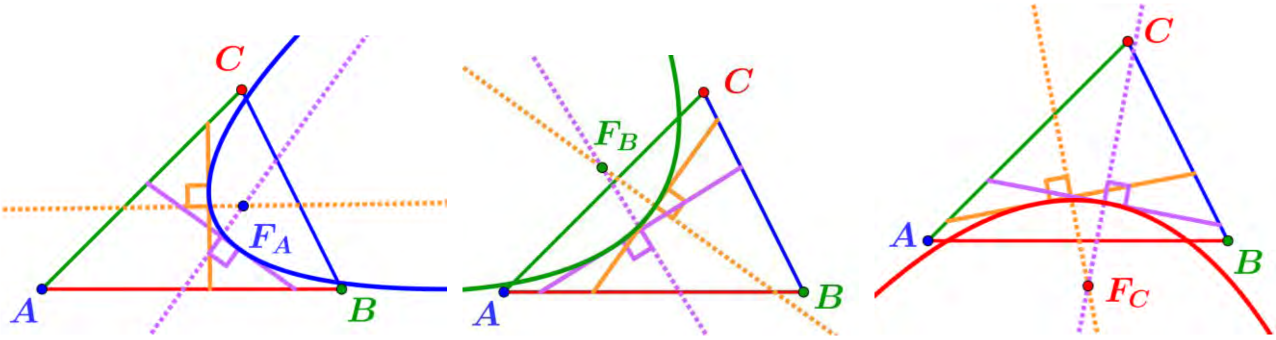


圖 29

性質 4-3 包絡曲線所形成之拋物線，其準線及其對應頂角所夾的兩邊，形成之三角形必為等腰三角形。

分別作出 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所對應的拋物線並且作出其拋物線準線，經由測量，可以發現等周線的中垂線會交於焦點。

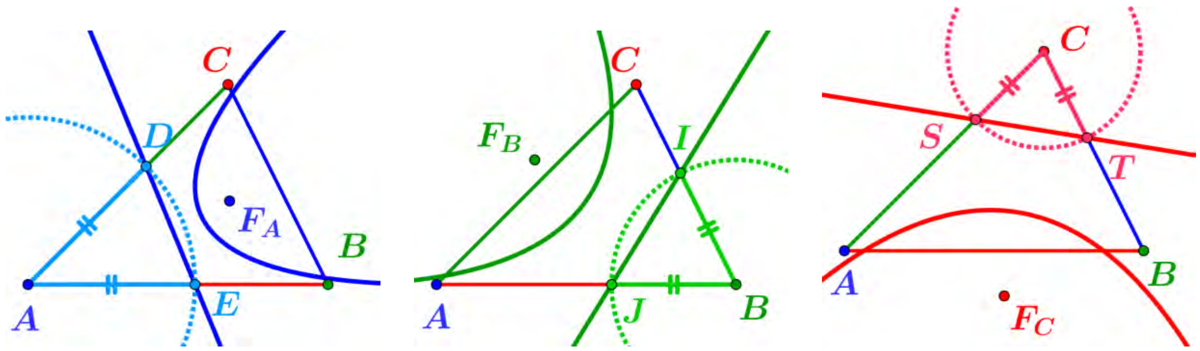


圖 30

綜合證明：

$\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$、$\angle A=\theta$。設定 A 為原點 $(0,0)$、b 為 $(b,\ 0)$，且 C 在第一象限。

Step 1 證明所有等周線之中垂線皆交於一點 F：

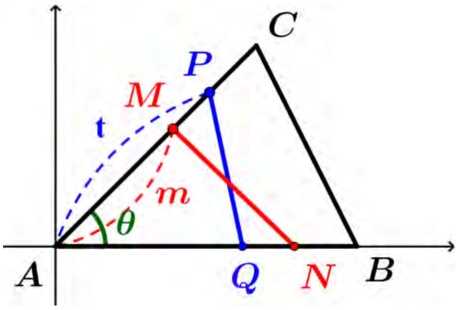


圖 31

在 $\overline{AC}$ 邊上取一點 P、Q 兩點，使 $\overline{PA}=p$、$\overline{MA}=m$

根據式 (1) 知過 P 點等周線 $\overline{PQ}$ 方程式為 $p\,sin\,\theta\, x-(p\,cos\,\theta-s+p)y=p\,sin\,\theta\,(s-p)$

$\Longrightarrow y=\frac{p\,sin\,\theta}{p\,cos\,\theta-s+p}x-\frac{p\,sin\,\theta}{p\,cos\,\theta-s+p}(s-p)$

因此設等周線 $\overline{PQ}$ 中垂線方程式為 $y=\frac{t\cos\theta-s+p}{p\sin\theta}x+r$

又 $\overline{PQ}$ 中點坐標 $(\frac{p\cos\theta+s-p}{2},\frac{p\sin\theta}{2})$

代入得等周線 $\overline{PQ}$ 的中垂線方程式為 $y=\frac{p\cos\theta-s+p}{p\sin\theta}x+\frac{2ps-s^2}{2p\sin\theta}$

轉換成一般式為 $2(p\cos\theta-s+p)x+2p\,sin\,\theta\, y=2ps-s^2$ $\quad\ldots(10)$

同理等周線 $\overline{MN}$ 中垂線方程式為 $2(m\cos\theta-s+m)x+2m\,sin\,\theta\, y=2ms-s^2$ $\quad\ldots(11)$

將兩式解聯立 $(10)\times m-(11)\times p$

$$\begin{cases}2(pm\cos\theta-ms+pm)x+2pm\,sin\,\theta\, y=2pms-m\,s^2 & \ldots(10)\times m\\ 2(pm\cos\theta-ps+pm)x+2pm\,sin\,\theta\, y=2pms-p\,s^2 & \ldots(11)\times p\end{cases}$$

$\Rightarrow -2(m-p)sx=-(m-p)s^2$

$\Rightarrow x=\frac{s}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{y}=-\frac{p\cos\theta-s+p}{p\sin\theta}\times\frac{s}{2}+\frac{2ps-s^2}{2p\sin\theta}=\frac{-ps\cos\theta+ps}{2p\sin\theta}=\frac{s(1-\cos\theta)}{2\sin\theta}=\frac{s\,\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$

因此兩條中垂線交點為一固定點 $F\left(\frac{s}{2},\frac{s\,\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$

Step 2 求等周包絡曲線與∠A 的角平分線方程式：

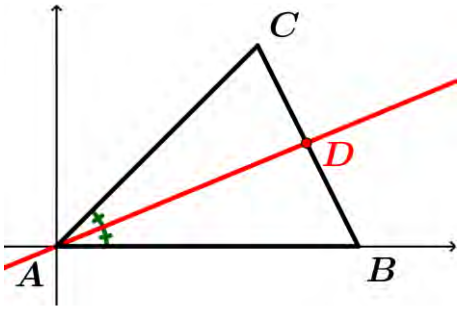


圖 32

設 $\overline{AD}$ 為∠A 的角平分線，且 D 在 $\overline{BC}$ 上

根據三角形內分比性質可知 $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{CD}:\overline{BD}=b:c$

因此根據分點公式可得 D 點坐標為 $\left(\frac{bc+bc\cos\theta}{b+c},\ \frac{bc\sin\theta}{b+c}\right)$

因∠A 的角平分線過 $A\ (0,0)$，故設角平分線方程式為 $y=mx$

將 D 點代入得 $\frac{bc\sin\theta}{b+c}=m\ \frac{bc+bc\cos\theta}{b+c}$

$\Rightarrow m=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

因此∠A 的角平分線方程式為 $y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x \quad \ldots(12)$

Step 3 求等周包絡曲線與∠A 的角平分線與∠A 所對等周包絡曲線的交點 V：

以下為方便計算先令 $k=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

因∠A 的角平分線方程式為 $y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x=\frac{1}{k}x$

$\Longrightarrow x=ky \quad \ldots(13)$

又∠A 所對等周線形成包絡曲線方程式為

$$x^2-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}xy+\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2y^2-2sx+\left(2s\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}-\frac{4s}{\sin\theta}\right)y+s^2=0$$

$$\Rightarrow x^2-2kxy+k^2y^2-2sx+\left(2sk-\frac{4s}{\sin\theta}\right)y+s^2=0 \quad \ldots(14)$$

(13) 代入 (14) 解聯立

$\Rightarrow (ky)^2 - 2k^2y^2 + k^2y^2 - 2sky + \left(2sk - \frac{4s}{\sin\theta}\right)y + s^2 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{s}{4}\sin\theta$

$$\Rightarrow x = \frac{ks}{4}sin\theta = \frac{s}{4}sin\theta \cdot \frac{cos\theta + 1}{sin\theta} = \frac{s}{4}(cos\theta + 1)$$

V 坐標為 $\left(\frac{s}{4}(cos\theta + 1), \frac{s}{4}\sin\theta\right)$

Step 4 計算以 $V\left(\frac{s}{4}(cos\theta + 1), \frac{s}{4}\sin\theta\right)$ 為頂點及以 $F\left(\frac{s}{2}, \frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$ 為焦點的拋物線方程式：

以下為方便計算先令 $k = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

1. 求此拋物線的對稱軸：

   將 F 代入 $\angle A$ 的角平分線方程式 $y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x = \frac{1}{k}x$

   $\Rightarrow \frac{1}{k} \times \frac{s}{2} = \frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$

   $\Rightarrow V$、F 兩點皆在 $y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$ 直線上

   因此 $\angle A$ 的角平分線為 $y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$ 對稱軸

2. 求此拋物線的準線：

   根據拋物線性質，準線與對稱軸垂直，且對稱軸與準線的交點 L 滿足 $\overline{LV} = \overline{VF}$，且對稱軸與準線互相垂直，如圖 33 所示。

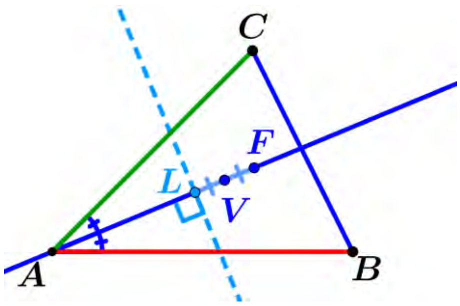


圖 33

因此 L 坐標為 $\left(\frac{s}{2}\cos\theta\,,\ \frac{s\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$

$\Rightarrow L\ \left(\frac{s}{2}\cos\theta\,,\ \frac{s}{2k}\cos\theta\right)$

設準線方程式為$y=-kx+r$

L 代入得 $\frac{s}{2k}\cos\theta=-\frac{ks}{2}\cos\theta+r$

$\Rightarrow r=\frac{s}{2k}\cos\theta+\frac{ks}{2}\cos\theta=\frac{s}{2}\cos\theta\left(\frac{1}{k}+k\right)=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s$

得準線方程式為 $y=-kx+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s$

3. 利用定義求拋物線方程式：

根據高中課本的定理，計算點 (p,q) 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離為 $\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，又根據拋物線的定義「設平面上有一直線 L 與直線 L 外一點 F。則平面上**到直線 L 的距離等於到點 F 的距離**的所有點所形成的圖形，稱為拋物線。」

可以寫出方程式 $\frac{\left|kx+y-\frac{cos\theta}{sin\theta}\cdot s\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{(x-\frac{s}{2})^2+(y-\frac{s}{2k})^2}$

兩邊同時平方並移項

$\Rightarrow (k^2+1)x^2+(k^2+1)y^2-s(k^2+1)x-\frac{s}{k}(k^2+1)y+\left(\frac{s^2}{4}+\frac{s^2}{4k^2}\right)(k^2+1)-$

$\left[k^2x^2+y^2+\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2-2ks\frac{cos\theta}{sin\theta}x-2s\frac{cos\theta}{sin\theta}y+2kxy\right]=0$

最後整理各項係數：

x^2 項係數	$(k^2+1)-k^2=1$
xy 項係數	$-2k=-2\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$
y^2 項係數	$k^2+1-1=k^2=\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

x 項係數	$-s(k^2+1)+2k\frac{cos\theta}{sin\theta}s$ $=-sk^2-s+2k\frac{cos\theta}{sin\theta}s$ $=sk\left(-k+\frac{2\,cos\theta}{sin\theta}\right)-s$ $=s\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}\left(-\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}+\frac{2\,cos\theta}{sin\theta}\right)-s$ $=s\ \frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}\left(\frac{cos\,\theta-1}{sin\,\theta}\right)-s$ $=-s\ \frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}\frac{1-cos\,\theta}{sin\,\theta}-s$ $=-s\frac{sin^2\,\theta}{sin^2\,\theta}-s=-2s$
y 項係數	$-\frac{s}{k}(k^2+1)+2s\frac{cos\theta}{sin\theta}$ $=-s\left(k+\frac{1}{k}\right)+2s\frac{cos\theta}{sin\theta}$ $=-s\left[\left(\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}+\frac{sin\,\theta}{1+cos\,\theta}\right)-2\frac{cos\theta}{sin\theta}\right]$ $=-s\frac{1+2\,cos\,\theta+cos^2\theta+sin^2\,\theta-2\,cos\,\theta-2cos^2\theta}{sin\theta(1+cos\,\theta)}$ $=-2s\frac{1-cos^2\theta}{sin\,\theta(1+cos\,\theta)}=2s\frac{cos\,\theta-1}{sin\,\theta}$
常數項	$\left(\frac{s^2}{4}+\frac{s^2}{4k^2}\right)(k^2+1)-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $=\frac{s^2}{4}\frac{k^2+1}{k^2}(k^2+1)-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $=\frac{s^2}{4}\left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $=\frac{s^2}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $=\frac{s^2}{4}\left(\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}+\frac{sin\,\theta}{1+cos\,\theta}\right)^2-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $=\frac{s^2}{4}\left[\frac{1+2\,cos\,\theta+cos^2\theta+sin^2\,\theta}{sin\theta(1+cos\,\theta)}\right]^2-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$

	$= \frac{s^2}{4}\left[\frac{2+2\cos\theta}{sin\theta(1+\cos\theta)}\right]^2 - \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $= \frac{s^2}{4}\left(\frac{2}{sin\theta}\right)^2 - \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $= \frac{1-cos^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $= \frac{sin^2\theta}{sin^2\theta}s^2$ $= s^2$

可以得到以 $V\left(\frac{s}{4}(cos\theta+1),\ \frac{s}{4}\sin\theta\right)$為頂點及以 $F\left(\frac{s}{2},\ \frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$為焦點的拋物線方程式為 $x^2 - 2\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}xy + \left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 y^2 - 2sx + 2s\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}y + s^2 = 0 \quad \ldots(14)$

5. 式 (14) 與定理 2-1 中 $\angle A$ 所對等周包絡曲線方程式相同，因此

(1) $\angle A$ 所對等周包絡曲線的對稱軸為 $y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$，即為 $\angle A$ 的角平分線

(2) $\angle A$ 所對等周包絡曲線的焦點為 F，即為 $\angle A$ 所對之所有等周線中垂線的交點

(3) $\angle A$ 所對等周包絡曲線的準線與 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 分別交於 D、E 兩點，且與對稱軸交於 L，如圖所示。

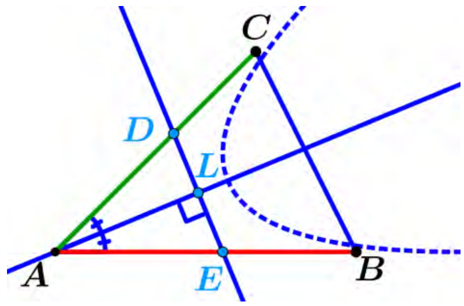


圖 34

$\because\ \overline{AL} \perp \overline{DE}$、$\overline{AL} = \overline{AL}$、$\overline{DL} = \overline{EL}$

$\therefore \triangle ALD \cong \triangle ALE$ （ASA 全等），

$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{AE}$

因此，若 $\angle A$ 的等周線包絡曲線的準線交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 E、D 兩點，則 $\overline{AE}$=$\overline{AD}$。

同理，若 $\angle$B 的等周線包絡曲線的準線交 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 於 J、I 兩點，則 $\overline{BJ}$=$\overline{BI}$，

若 $\angle C$ 的等周線包絡曲線的準線交 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 於 T、S 兩點，則 $\overline{CT}$=$\overline{CS}$

柒、 結論

在本文研究的探討中，我們藉由三角形的等周線及其軌跡作圖可以得到

1. 等周線軌跡的包絡曲線
2. 且其包絡曲線方程式為一拋物線
3. 並且由最後的 Geogebra 旋轉及平移作圖法可略知三角形等周線包絡曲線所形成之拋物線的對稱軸、焦點、準線之性質

   性質 1：三條角平分線分別為三條拋物線的對稱軸

   性質 2：等周線的中垂線恰交於包絡曲線的焦點

   性質 3：包絡曲線所形成之拋物線，其準線及其對應頂角所夾的兩邊，形成之三角形必為等腰三角形

捌、 未來發展

一、 尋找三角形乃至於多邊形等周線的包絡線圖形為何？

二、 並且判斷其包絡曲線的方程式，是否仍然為拋物線？

玖、 參考資料

[1]第四十五屆科展國中組數學科「同時平分三角形、四邊形的周長和面積之研究」。

[2]高中數學課本/第四冊/拋物線、橢圓、雙曲線。

[3]鄭再添。三角形面積平分線探討。

【評語】030408

討論由三角形頂點或邊上一點作周長等分線的具體作法。針對這些周長等分線所具有的特性，以及它們與包絡曲線間的關連性做了分析，這是一個有趣的問題。作者們觀察到三角形的周長等分線具有非常特別的性質，藉由解析幾何的分析手法，針對觀察到的特性給出了完整的說明，值得嘉許。其實類似的主題已經被討論過了（四十六屆全國中小學科展國中組數學科第三名作品-三角形周長等分線的作圖與數量分佈），相關的一些結果在先前的作品中也都曾經被提及，不同的是分析的方式有所不同。作者們藉由解析幾何的方式來分析這個問題，在某種程度上其實也為進一步分析這個問題提供了一些想法，但如果能在已有的基礎上，針對更一般化的問題做深入的討論探究應會是一件不錯的作品。

作品海報

壹、 摘要

我們推導出等周線包絡曲線的方程式為拋物線圖形。且為了簡化複雜的方程式計算，我們透過「旋轉」以及「平移」找到對應三個角的等周線包絡曲線拋物線圖形。最後尋找包絡曲線拋物線與三角形間的性質並證明。

貳、 研究動機

在讀完三角形等積線的探討（鄭再添，1987）一篇關於三角形面積平分線的探討與證明後，我們覺得也許可以試著藉此證明三角形等周線的相關性質。

參、 研究目的

1. 三角形的等周線作法之探討。
2. 三角形等周線之包絡曲線方程式之推導。
3. 三角形等周線之包絡曲線方程式之判別。
4. 三角形等周包絡曲線的性質與證明。

肆、 討論與結果

一、三角形的等周線作法之探討

(一) 過頂點的等周線尺規作圖

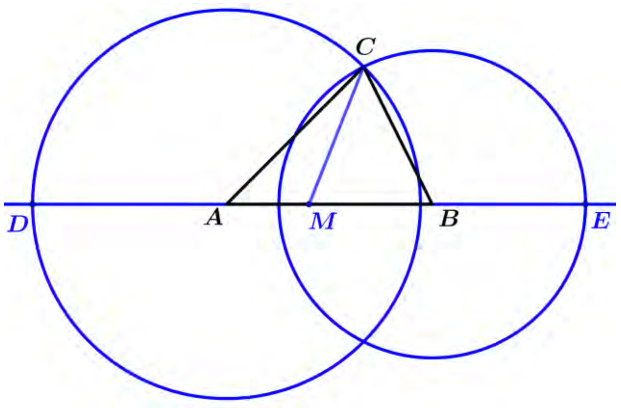


圖 1 過頂點的等周線尺規作圖

(二) 未過頂點的等周線尺規作圖

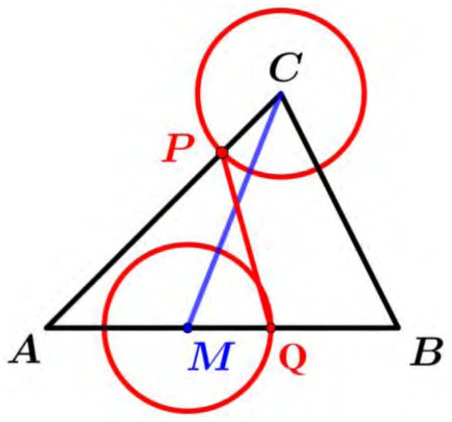


圖 2 未過頂點的等周線尺規作圖

二、等周線所形成包絡曲線之探究

(一) 繪製對應角的等周線包絡曲線

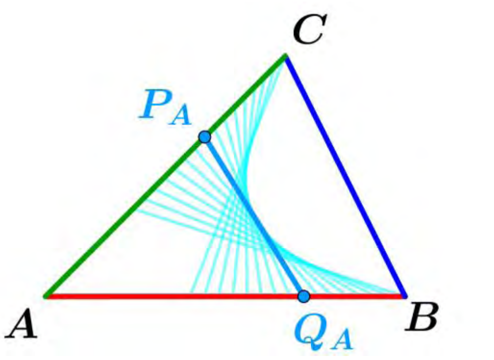


圖 3 對應 $\angle A$ 形成的等周線包絡線

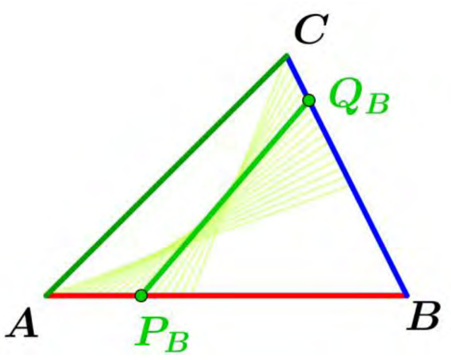


圖 4 對應 $\angle B$ 形成的等周線包絡線

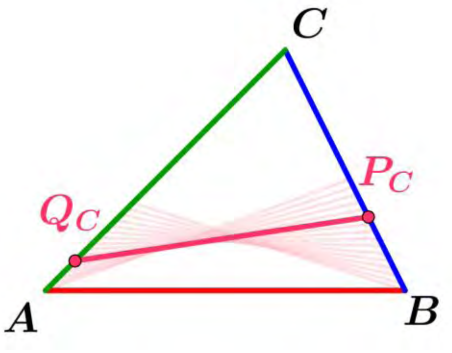


圖 5 對應 $\angle C$ 形成的等周線包絡線

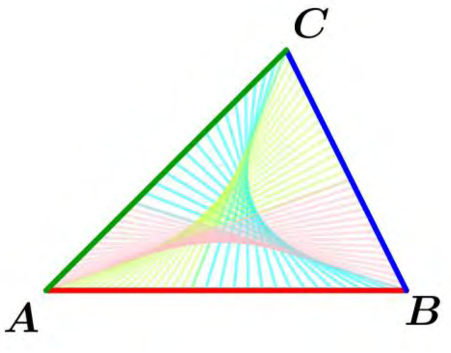


圖 6 三圖疊合

(二) 等周線所形成的包絡曲線方程式推導

定理 2-1 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$。若 A 為原點 $(0,0)$、b 為 $(b,\ 0)$，且 C 在第一象限，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$、$\angle A=\theta$，則 $\angle A$ 所對等周包絡曲線方程式為 $x^2-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}xy+\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2y^2-2sx+2s\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}y+s^2=0$。

Step 1 求等周線 $\overline{PQ}$ 方程式 $t\sin\theta\, x-(t\cos\theta-s+t)y=t\sin\theta\,(s-t)$。

Step 2 利用周線 $\overline{PQ}$ 方程式及周線 $\overline{P'Q'}$ 方程式解聯立，計算包絡曲線的參數式

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{t(t+\Delta t)}{s}(\cos\theta+1)+(s-2t-\Delta t) \\ y=\frac{1}{s}(t+\Delta t)t\sin\theta \end{cases},$$

因 P' 很接近 P，則 $\Delta t\to 0\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{t^2}{s}(\cos\theta+1)+(s-2t) \\ y=\frac{1}{s}t^2\sin\theta \end{cases}$。

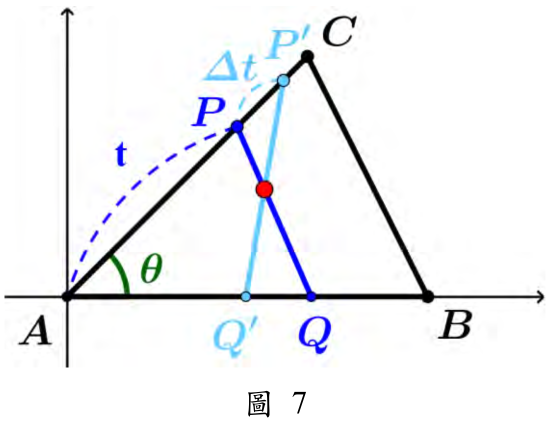


圖 7

Step 3 將包絡曲線的參數式轉換為一般式得 $\angle A$ 所對應等周包絡曲線方程式為：

$x^2-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}xy+\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2y^2-2sx+2s\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}y+s^2=0$。

(三) 判斷等周線所形成的包絡曲線為拋物線

定理 2-2 三角形個角所對應的等周線包絡曲線為拋物線。

Step 1 計算判別式 $b^2-4ac=\left(-2\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2-4\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2=0$ 得 $\angle A$ 所對應等周包絡曲線方程式為拋物線型的圖形。

Step 2 整理方程式 $\left(x-\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}y\right)^2-2s\left[x-\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}-\frac{2}{\sin\theta}\right)y\right]+s^2=0$，得此方程式為拋物線圖形。

三、延伸模擬

我們利用 Geogebra 指令輸入，畫出 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 對應的等周線包絡曲線。

(一) 尋找對應 $\angle A$ 所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形：

A 置於原點，B 在正向x軸，C 在第一象限，對應 $\angle A$ 形成的等周線 $\overline{P_AQ_A}$ 包絡曲線方程式輸入於 Geogebra 指令列，得 $\angle A$ 對應的等周線包絡曲線圖形。

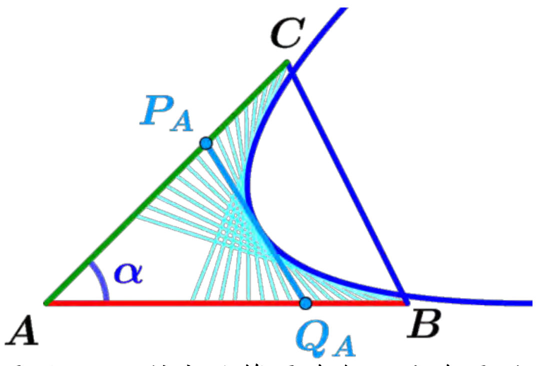


圖 8 $\angle A$ 對應的等周線包絡曲線圖形

(二) 利用旋轉與平移尋找對應 $\angle C$ 所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形：

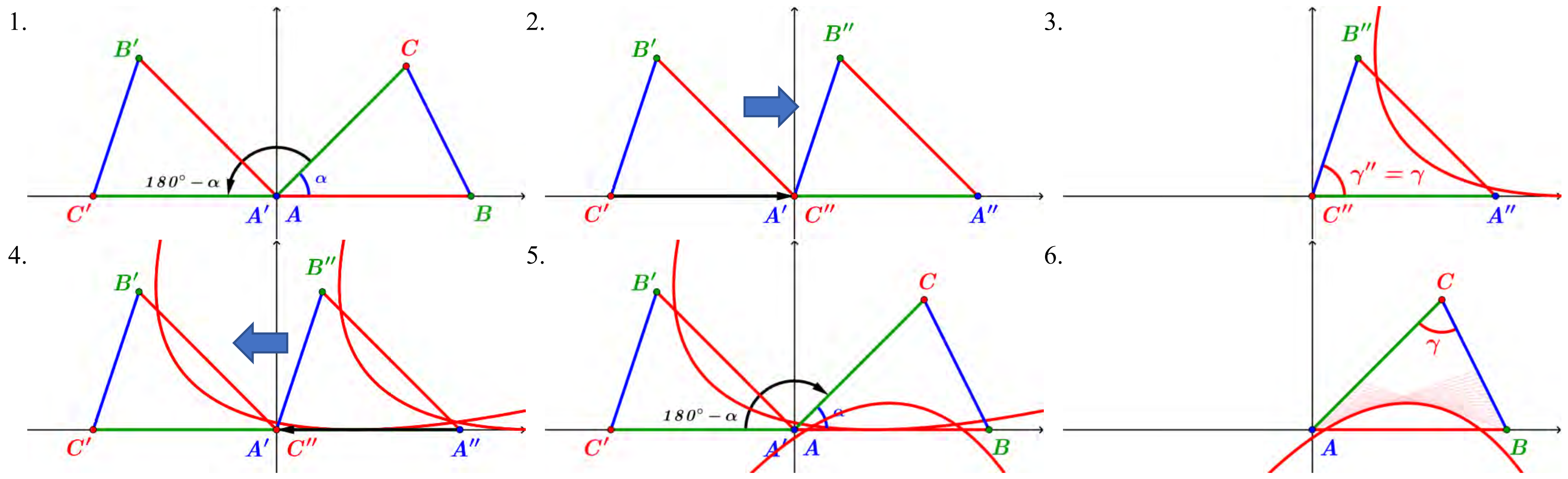


圖 9 尋找對應 $\angle C$ 所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形的過程

(三) 利用旋轉與平移尋找對應 $\angle B$ 所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形：

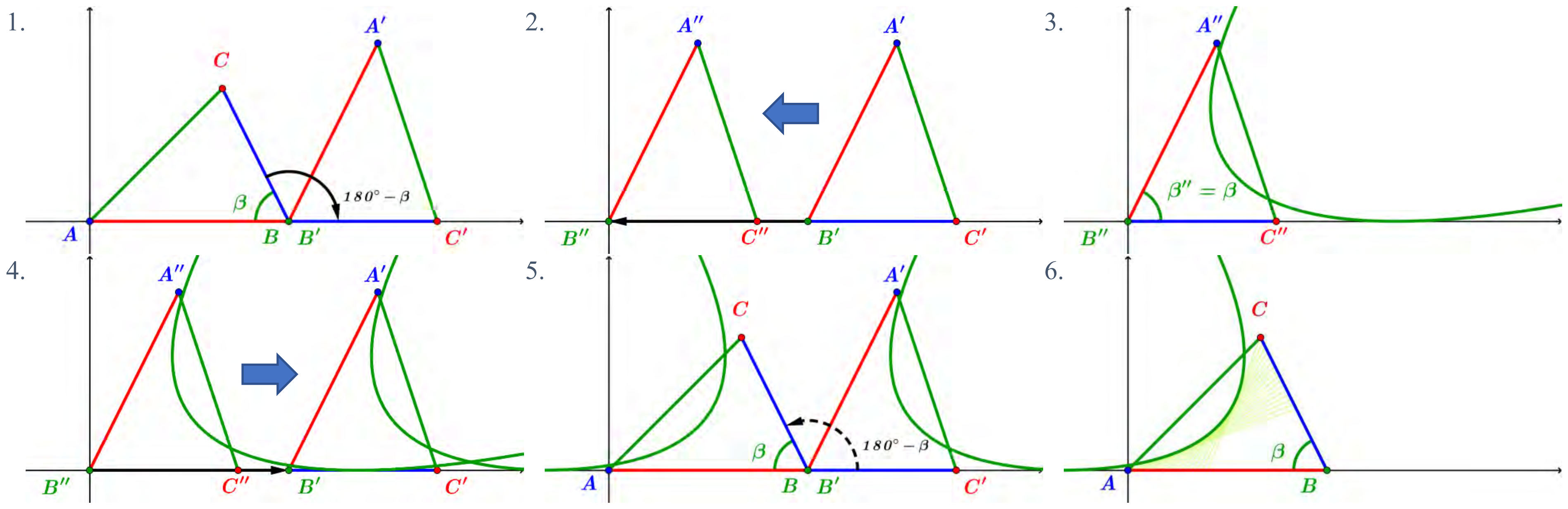


圖 10 尋找對應 $\angle B$ 所形成等周線包絡曲線方程式及拋物線圖形的過程

(四) 將分別對應三個角的包絡曲線疊合後，及指出三個角所對應的等周線包絡曲線。

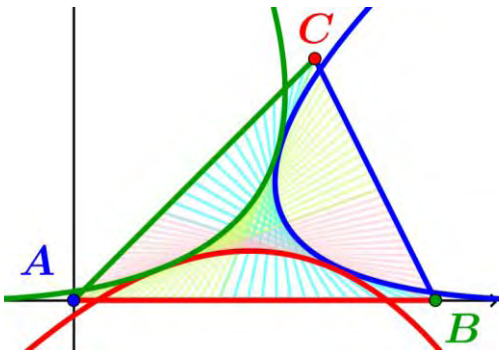


圖 11 對應三個角的包絡曲線疊合，及三個角所對應的等周線包絡曲線

四、等周線包絡曲線所形成之拋物線的對稱軸、焦點、準線之性質

性質 4-1 三條角平分線分別為三條拋物線的對稱軸。

性質 4-2 等周線的中垂線恰交於包絡曲線的焦點。

性質 4-3 包絡曲線所形成之拋物線，其準線及其對應頂角所夾的兩邊，形成之三角形必為等腰三角形。

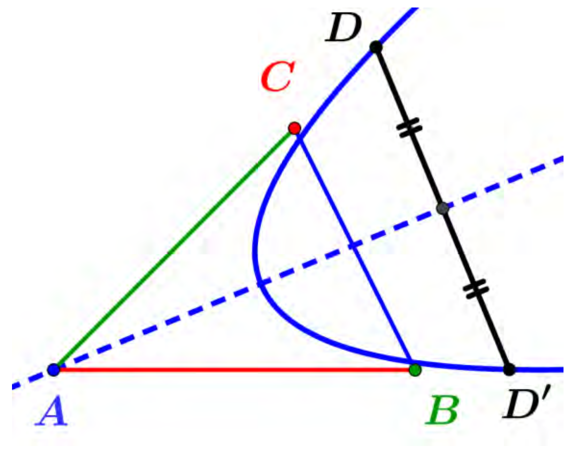


圖 12 三角形的角平分線為包絡曲線所形成之拋物線的對稱軸。

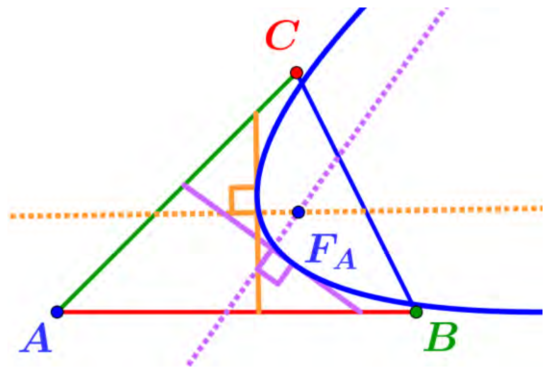


圖 13 等周線的中垂線恰交於包絡曲線所形成之拋物線的焦點。

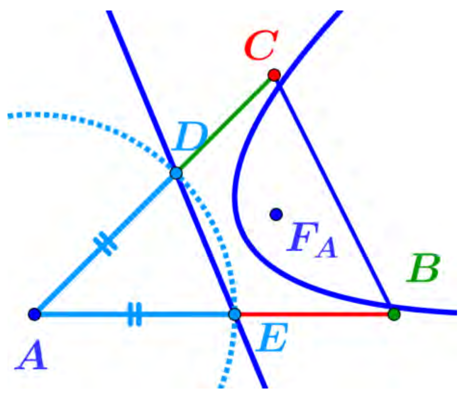


圖 14 包絡曲線所形成之拋物線，其準線及其對應頂角所夾的兩邊，形成之三角形必為等腰三角形。

綜合證明：

$\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$、$\angle A=\theta$。

設定 A 為原點 $(0,0)$、b 為 $(b,\ 0)$，且 C 在第一象限。

Step 1 利用等周線方程式計算等周線中垂線方程式，並證明所有等周線中垂線皆交於一點 $F\left(\frac{s}{2},\frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$。

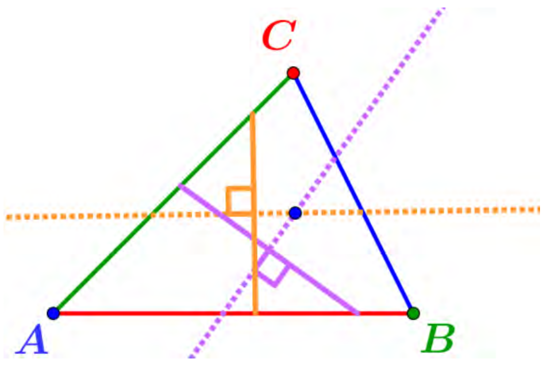


圖 15

Step 2 計算 $\angle A$ 角平分線方程式，且求角平分線與 $\angle A$ 所對等周包絡曲線的交點 V 坐標為 $\left(\frac{s}{4}(cos\theta+1),\ \frac{s}{4}\sin\theta\right)$。

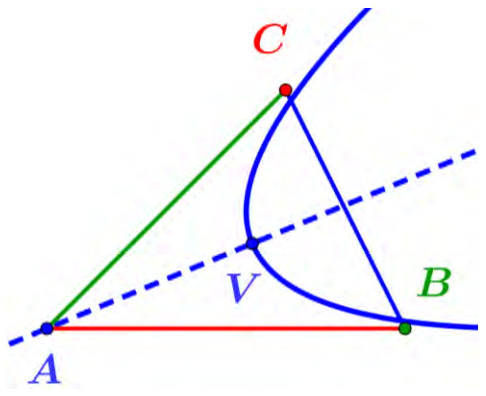


圖 16

Step 3 計算以 $V\left(\frac{s}{4}(cos\theta+1),\ \frac{s}{4}\sin\theta\right)$ 為頂點及以 $F\left(\frac{s}{2},\ \frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$ 為焦點的拋物線方程式：

1. 計算可知 V、F 兩點皆在 $y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$ 直線上，因此可將 $\angle A$ 的角平分線 $y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$ 視為對稱軸。

2. 根據拋物線性質，對稱軸與準線的交點L滿足 $\overline{LV}=\overline{VF}$，且對稱軸與準線互相垂直，

求得準線方程式為 $y=-kx+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s$ （$k=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$）。

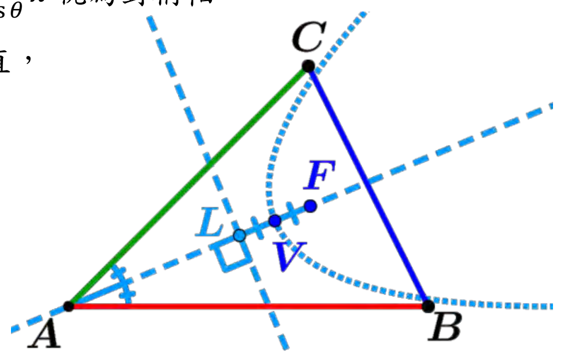


圖 17

3. 利用定義求拋物線方程式：

根據拋物線的定義寫出拋物線方程式 $\frac{\left|kx+y-\frac{cos\theta}{sin\theta}\cdot s\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{(x-\frac{s}{2})^2+(y-\frac{s}{2k})^2}$ ，

經整理得以 $V\left(\frac{s}{4}(cos\theta+1),\ \frac{s}{4}\sin\theta\right)$ 為頂點 $F\left(\frac{s}{2},\ \frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$ 為焦點的拋物線方程式為

$$x^2-2\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}xy+\left(\frac{1+cos\,\theta}{sin\,\theta}\right)^2y^2-2sx+2s\frac{cos\,\theta-1}{sin\,\theta}y+s^2=0，，$$

與定理 2-1 中 $\angle A$ 所對等周包絡曲線方程式相同。

4. 因此 $\angle A$ 的角平分線 $y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}x$ 為 $\angle A$ 所對等周包絡曲線的對稱軸；

中垂線焦點 $F\left(\frac{s}{2},\ \frac{s\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$ 為 $\angle A$ 所對等周包絡曲線的焦點；

$y=-kx+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s$ （$k=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$）為 $\angle A$ 所對等周包絡曲線的準線。

Step 4 證明準線及其對應頂角所夾的兩邊，形成之三角形必為等腰三角形：

設 $\angle A$ 所對等周包絡曲線的準線與 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的交點分別為 D、E，準線與對稱軸焦點為 L。

$\because \overline{AL}\perp\overline{DE}$、$\overline{AL}=\overline{AL}$、$\overline{DL}=\overline{EL}$

$\therefore \triangle ALD\cong\triangle ALE$（ASA 全等）$\Rightarrow \overline{AD}=\overline{AE}$

因此，若 $\angle A$ 的等周線包絡曲線的準線交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 E、D 兩點，則 $\triangle ADE$ 為等腰三角形。

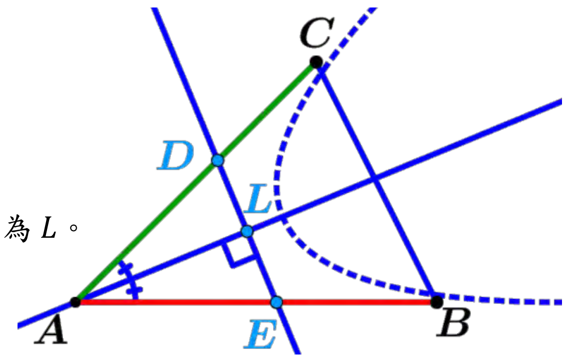


圖 18

伍、 結論

在本文研究的探討中，我們藉由三角形的等周線及其軌跡作圖可以得到：

1. 等周線軌跡的包絡曲線。
2. 且其包絡曲線方程式為一拋物線。
3. 並且由最後的 Geogebra 旋轉及平移作圖法可略知三角形等周線包絡曲線所形成之拋物線的對稱軸、焦點、準線之性質。

   性質 1：三條角平分線分別為三條拋物線的對稱軸。

   性質 2：等周線的中垂線恰交於包絡曲線的焦點。

   性質 3：包絡曲線所形成之拋物線，其準線及其對應頂角所夾的兩邊，形成之三角形必為等腰三角形。

陸、 未來展望

1. 證明拋物線三個焦點形成之三角形，其面積為 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{4}$ 倍。
2. 尋找等周包絡曲線拋物線之準線及頂點是否和原三角形 $\triangle ABC$ 還有其他相關性質？
3. 尋找三角形乃至於多邊形等周線的包絡線圖形為何？
4. 並且判斷其包絡曲線的方程式，是否仍然為拋物線？

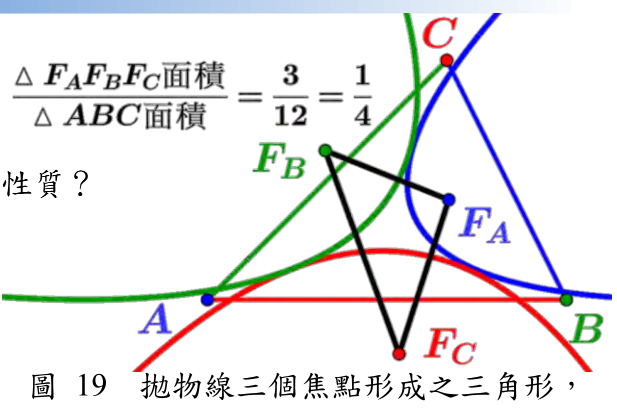


圖 19　拋物線三個焦點形成之三角形，其面積為原三角形 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{4}$ 倍。

柒、 參考資料

1. 鄭再添（1987）。**三角形面積平分線探討**。數學傳播，44，73-83。
2. 游森彭（主編）(民 100)。**高中數學第四冊**。台南市：翰林。
3. 林福來（主編）(民 90）。**高中數學（甲）**。台南市：南一。
4. 劉易青、史宜平、林彥辰、李屹。**同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究**。中華民國第四十五屆中小學科學展覽會。