中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030406

「弧」思亂想

學校名稱：新北市立永和國民中學

作者：	指導老師：
國二 林詩凱 國二 童彥廷 國二 王君又	徐佳安

關鍵詞：圓弧、光滑、軌跡

壹、 前言

一、摘要

本研究在探討一種特定類別的曲線集合 ： 給定平面上 n 個點 $\{A_1,\dots,A_n\}$，我們想要找 n 段圓弧，使得 n 段圓弧分別以 $\{A_1,A_2\}$、$\{A_2,A_3\}$、 … 、$\{A_{n-1},A_n\}$、$\{A_n,A_1\}$ 為端點，且 n 段圓弧光滑的相連，我們將此 n 段圓弧形成的圖形稱為光滑解。主要研究發現為 ：

1. n 為奇數時，這些圓弧存在的充分必要條件以及滿足條件的圓弧組數量

2. n 為偶數時，這些圓弧存在的充分必要條件以及滿足條件的圓弧組數量

3. 光滑解自交不可避免

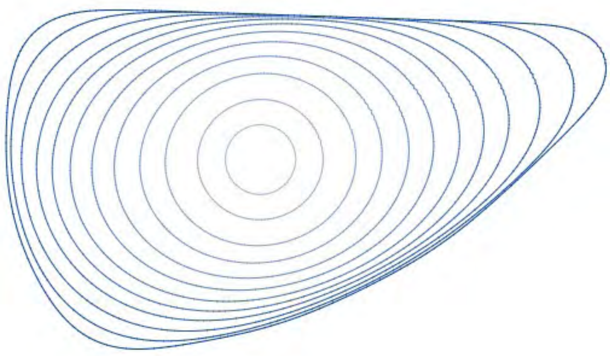
4. 上述圓弧組不存在時，可透過增加一個新點使圓弧組存在

5. 增加新點的軌跡是圓

二、研究動機

想要研究圓弧光滑連接平面上相異點，是源自於微分幾何的一種特定問題：想像我們拉動一條橡皮筋，使它富有彈性位能(曲率平方在曲線上的積分值，可由虎克定律得到)。放開手之後，橡皮筋會傾向於回到平衡態，即原本無外力作用時的狀態，而此變動過程彈性位能會不斷下降，因此橡皮筋所形成的曲線會隨著時間而變動。數學上我們一般會使用流的概念來描述此變化過程，其定義如下：考慮群 $\mathbb{R}$ 作用在特定的曲線集合，實數表示時間參數 $\boldsymbol{t}$。給定一曲線 $\boldsymbol{C}$，其作用結果 $\boldsymbol{tC}$ 的意義為曲線 $\boldsymbol{C}$ 在經過時間 $\boldsymbol{t}$ 之後的樣子。在定義好單位時間的參數下，給定某一時刻的曲線以及定義在某些曲線上的能量泛函，例如:長度、彈性位能，我們可以透過找出能量泛函的最小元素，來定義出下一個時刻的曲線，進而定義一個流。以這種方式所定義出的流被稱為梯度流(**gradient flow**)，即曲線以能量下降最快的方向變化的流。

在我們所考慮的情境之下，我們要透過彈性位能定義流，所以會需要計算曲線曲率。有意思的是，**Gage − Hamilton − Grayson** 定理證明了，若使用長度來定義流，則平面曲線的形狀最終會趨近於圓(周長平方和面積的比值會趨近於 $\boldsymbol{4\pi}$)。如圖一



圖一

之後，有一些數學家試圖把上述問題「離散化」：考慮時間離散化或曲線離散化。曲線離散化的情境如下：給定空間中 n 個點，在定義能量的情況下探討點會如何變動，並期望得到類似 $\text{Gage}-\text{Hamilton}-\text{Grayson}$ 定理的結果(n 個點會趨近於正 n 邊形的頂點)。

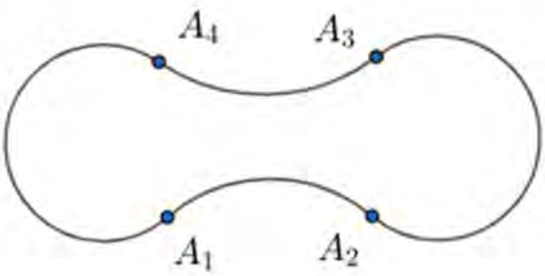
在定義離散的 n 個點的能量時，數學家試圖推廣 $\text{Gage}-\text{Hamilton}-\text{Grayson}$ 定理，改用彈性位能定義流，因此第一個問題就是如何定義離散曲線的曲率。於是我們就想使用一些曲線接上離散的 n 個點，且其中每段曲線都是可以計算曲率的，而曲率最好計算的曲線就是圓，所以問題就定為「如何使用圓弧光滑的連接空間中相異的 n 個點」。而為了便利之後流的計算，更進一步希望曲線不自交。

在上述研究的歷程中，如果光滑的圓弧組不存在，我們想透過「增加點」的方式，來讓光滑圓弧組存在。所以我們第二個問題定為「在光滑圓弧組不存在時，增加適當的新點，讓光滑圓弧組存在」。

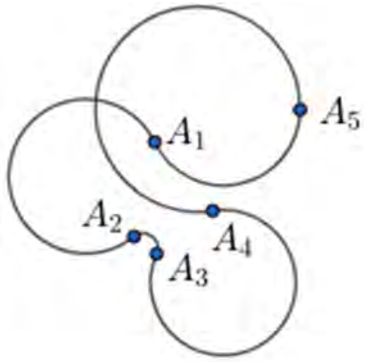
最後，由於空間中的問題過於困難，我們將問題簡化，只探討平面上的問題。對於空間的一般狀況，我們只透過作圖提出一些猜想。

三、名詞定義

給定 $n \in \mathbb{N}$，再給平面上的 n 個點 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$。我們的目標就是要找此 n 個點的光滑解，如圖二、三。



圖二



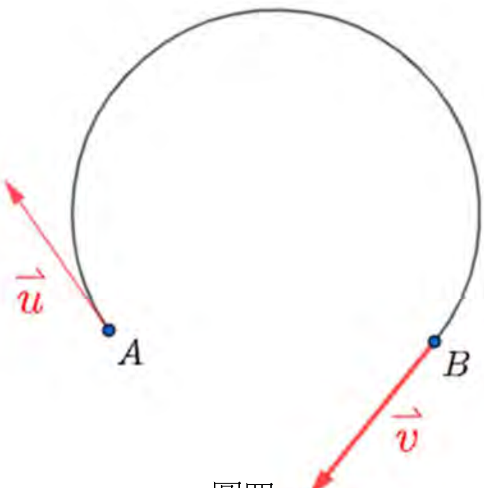
圖三

定義 1.1 本研究只要談到給定平面上 n 個點 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$，都額外要求$A_1A_2A_3 \dots A_n$ 是簡單多邊形。

定義 1.2 給定兩點 A、B 以及通過 A、B 的弧，我們定義：

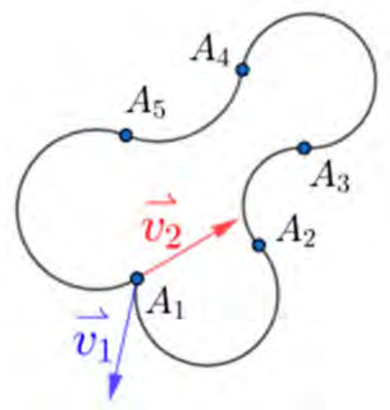
a. 於 B 點之「有向切向量」是順著圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 由 A 點移動到 B 點，在 B 點最後的瞬時方向，如圖四的向量 $\vec{v}$。

b. 同理，於 A 點之「有向切向量」 是順著圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 由 A 點移動到 B 點，在 A 點最初的瞬時方向，如圖四的向量 $\vec{u}$。注意「有向切向量」的方向是唯一。

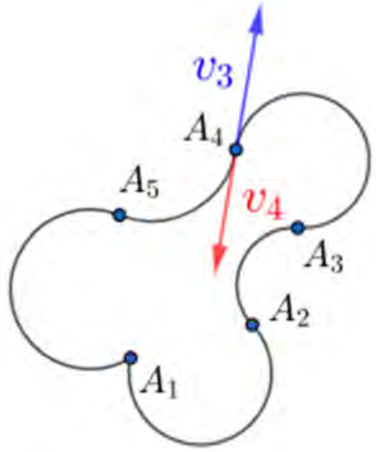


圖四

定義 1.3 我們說曲線上一點 P 光滑，是指從 P 點兩側沿曲線走向 P 點，在 P 點的有向切向量剛好「方向相反」。在圖五中，A_1 的有向切向量 $\overrightarrow{v_1}$ 和 $\overrightarrow{v_2}$ 的方向並非相反，所以曲線在 A_1 不光滑；圖六在 A_4 是光滑的。



圖五



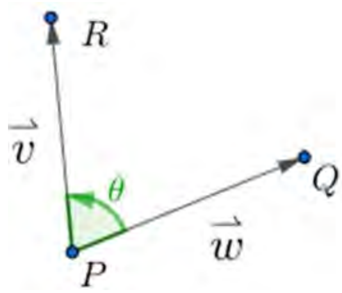
圖六

定義 1.4 給定平面上 n 個點 $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$，若存在 n 個圓弧所組的圖形，其中每個圓弧分別以 $\{A_1, A_2\}$、$\{A_2, A_3\}$、 … 、$\{A_{n-1}, A_n\}$、$\{A_n, A_1\}$ 為端點，且整個圖形是光滑的。我們就稱這 n 個圓弧形成的圖形為此 n 個點的光滑解，有時簡稱解。如上圖二、圖三。

定義 1.5 當我們說一組光滑解自交，是指解當中的 n 段圓弧，在端點以外至少有一處相交，如上圖二。

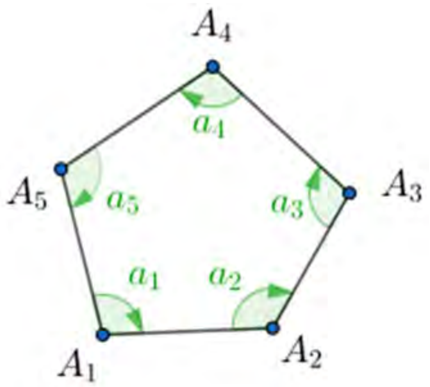
定義 1.6 給定平面上兩向量，$\vec{v} = \overrightarrow{PR}$、$\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$，則「$\vec{w}$ 和 $\vec{v}$ 的有向夾角」定義為 $\theta = \angle QPR$，其中 θ 滿足 $-\pi < \theta \le \pi$ (順時針為正)，如下圖七。

注意「$\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 的有向夾角」與「$\vec{w}$ 和 $\vec{v}$ 的有向夾角」剛好差了一個負號。



圖七

定義 1.7 給定簡單多邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$，所謂有向內角是指順時鐘方向的內角角度，我們用 α_i 來表示角 A_i 的有向內角，如圖八。注意 $0<\alpha_i<2\pi$ 。



圖八

四、研究架構與目的

給定平面上 n 個點 $\{A_1,\dots,A_n\}$，假設此 n 個點形成一個簡單 n 邊形的頂點。我們的目的有：

(一) 找 $\boldsymbol{n}$ 段圓弧，使 $\boldsymbol{n}$ 段圓弧分別以 $\{\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2}\}$、$\{\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3}\}$、…、$\{\boldsymbol{A_{n-1}},\boldsymbol{A_n}\}$、$\{\boldsymbol{A_n},\boldsymbol{A_1}\}$ 為端點，並且 $\boldsymbol{n}$ 段圓弧在 $\boldsymbol{A_1},\dots,\boldsymbol{A_n}$ 是光滑的相連。

(二) 找到這些圓弧存在的充分必要條件。

(三) 找出這些圓弧組的數量。

(四) 研究 $\boldsymbol{n}$ 段圓弧不相交的可能性。

(五) 若上述圓弧不存在時，找尋令其存在的變動 (增加一個點)。

(六) 研究上述變動的性質。

而有了這些研究目的後，以下是我們的研究架構和研究方法：

(一) 要透過有向角的定義與計算，以及一些基本的幾何性質來了解 $\boldsymbol{n=3}$ 的情形。

(二) 將上述方法一般化，並將其分成奇數和偶數點的情形，找出圓弧存在的必要條件。

(三) 在圓弧存在的情況下，利用 **GeoGebra** 作圖，觀察圓弧的自交情形。

(四) 在圓弧不存在的情形下，利用尺規作圖找第 $\boldsymbol{n+1}$ 個點，使得存在 $\boldsymbol{n+1}$ 段圓弧滿足原始問題。

(五) 利用基礎幾何找出上述的第 $\boldsymbol{n+1}$ 個點可能位置所形成的軌跡。

(六) 探討加入新的點後，兩段新的圓弧的一些性質。

貳、研究工具

一、研究工具

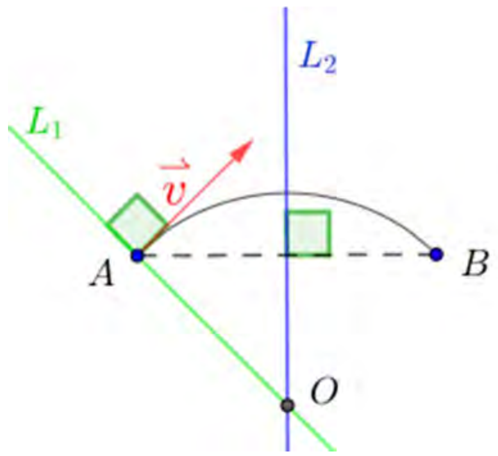
紙、筆、電腦、GeoGebra

參、研究方法與結果

一、基本構圖

(一) 圓弧基本構圖

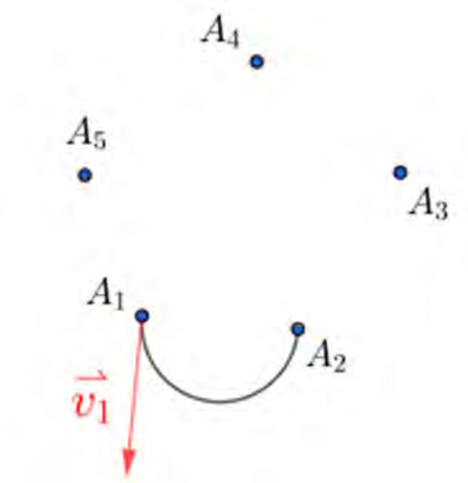
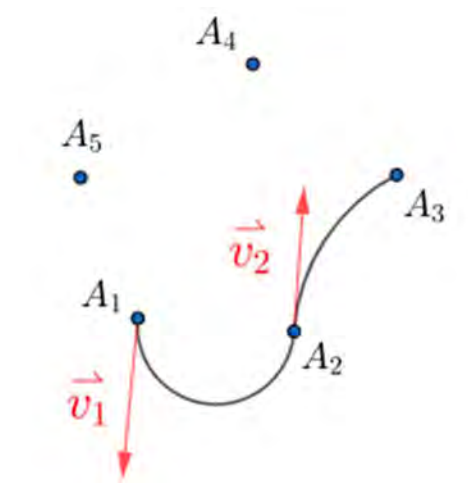
表 1　圓弧的基本構造步驟

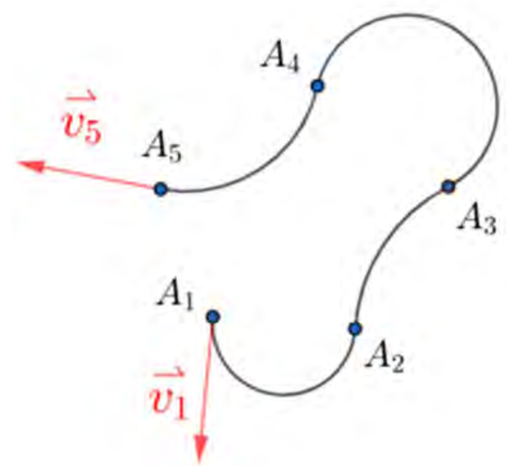
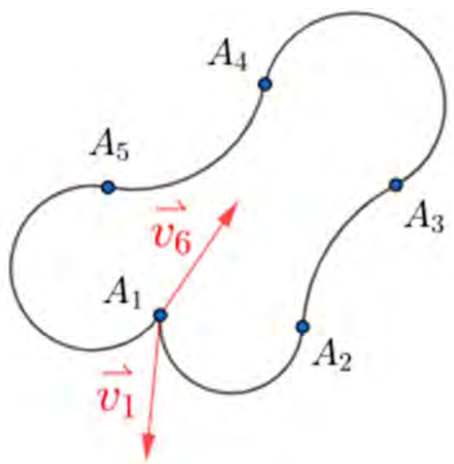
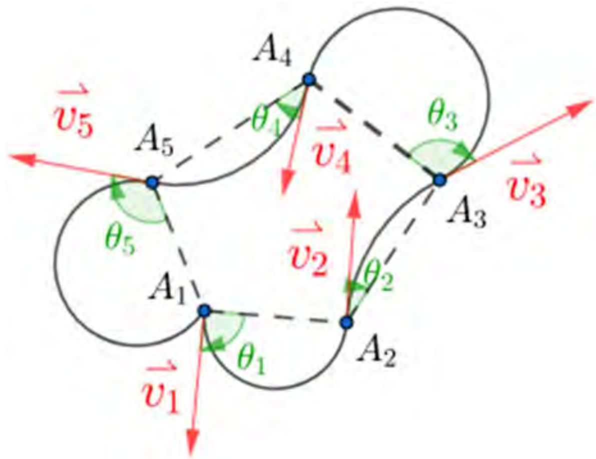
構造方法	圖例
【步驟 1】 任意給定平面上 A、B 兩點，並且給一個通過 A 點的向量 $\vec{v}$。	
【步驟 2】 作過 A 點垂直向量 $\vec{v}$ 之直線及 $\overline{AB}$ 之中垂線 L_1、L_2。令 L_1、L_2 交於 O 點，以 O 點為圓心，$\overline{AO}$ 為半徑畫圓弧。	

(二) 初始向量旋轉

要找平面上點集合 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 的光滑解，可照上述討論，並依表 2 操作之步驟，即可找到平面上點集合 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 的光滑解。

表 2 初始向量基本旋轉之作圖步驟

構造方法	圖例
【步驟 1】 在 A_1 上決定任一個向量 $\overrightarrow{v_1}$ (命名為初始向量)，並依據上述討論，作唯一的 $\overset{\frown}{A_1A_2}$，使得 $\overrightarrow{v_1}$ 是 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 在 A_1 的有向切向量。	
【步驟 2】 注意為了使 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 和 $\overset{\frown}{A_2A_3}$ 光滑相連，取 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 於 A_2 的有向切向量 $\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_2}$ 必須是 $\overset{\frown}{A_2A_3}$ 在 A_2 的有向切向量，再依照上述討論後，使得 $\overset{\frown}{A_2A_3}$ 會被唯一決定。	

<table>
<tr>
<td>【步驟 3】
重複 $n-1$ 次上述操作，我們就能決定 $n-1$ 段圓弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$、⋯、$\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ 以及 n 個有向切向量 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$。並且這些圓弧在 $A_1,A_2,A_3,\dots,A_{n-1}$ 都是光滑的相連。</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>【步驟 4】
將 $\overrightarrow{v_n}$ 作同樣操作，則會得到 $\overset{\frown}{A_nA_1}$ 及此弧在 A_1 上的有向切向量 $\overrightarrow{v_{n+1}}$。假使 $\overrightarrow{v_{n+1}}$ 與 $\overrightarrow{v_1}$ 同方向，則此 n 個點存在光滑解；反之，$\overrightarrow{v_{n+1}}$ 與 $\overrightarrow{v_1}$ 不同方向，則此 n 個點不存在以 $\overrightarrow{v_1}$ 做為初始向量的光滑解。</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>【步驟 5】
為了方便討論，我們現在統一符號：
(1) 將有向切向量依序命名$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{v_{n+1}}$。
(2) $\overrightarrow{A_2A_1}$、$\overrightarrow{A_3A_2}$、⋯、$\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$ 和 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_n}$ 分別的有向夾角命名為 $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n$。</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

【討論】

如果 $n=3$，因為三點不共線，所以此三點形成的三角形必有一個外接圓。此外接圓三段圓弧形成一組解。很明顯的，此解為三個點的「不自交光滑解」。

現在有個自然的問題：外接圓是 $n=3$ 的唯一解嗎？我們之後會完整的回答此問題。

二、光滑解存在條件

利用 GGB 觀察後，我們發現給定平面上相異點，其實並不一定有解。而初始向量及平面上 n 個點不可任意決定，且奇數及偶數點情況不同。所以我們的問題為「奇數點及偶數點分別的光滑解存在條件為何？」

要回答這個問題，我們先來看以下引理：

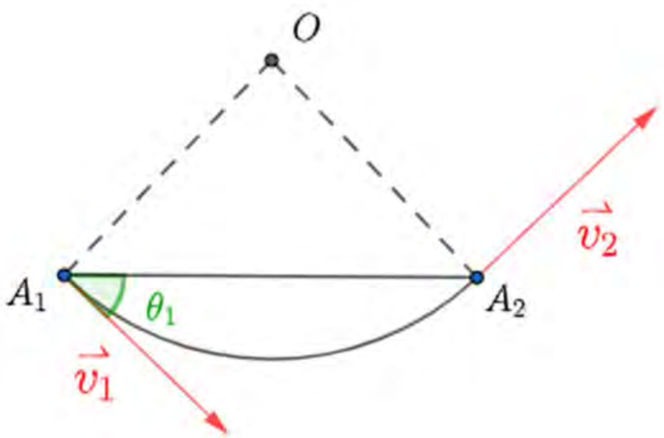
引理 1.1 給定平面上 n 個點，存在以 $\overrightarrow{v_1}$ 為初始向量的光滑解若且唯若

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\theta_i} \equiv \mathbf{0} \ (\boldsymbol{mod\ \pi})$$

證明.

如圖九，先找到 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 的圓心 O。很明顯的，$\angle A_1OA_2$為 $-2\theta_1$，故 $\overrightarrow{v_1}$ 向量旋轉 $-2\theta_1$ 後，即可得到 $\overrightarrow{v_2}$ 向量；同理，$\overrightarrow{v_i}$ 旋轉 $-2\theta_i$ 可得 $\overrightarrow{v_{i+1}}$。

上面說明了存在以 $\overrightarrow{v_1}$ 為初始向量的光滑解若且唯若 $\overrightarrow{v_{n+1}}=\overrightarrow{v_1}$，$\sum_{i=1}^{n}-2\theta_i \equiv 0(\text{mod}\,\pi)$，化簡後即得證。



圖九

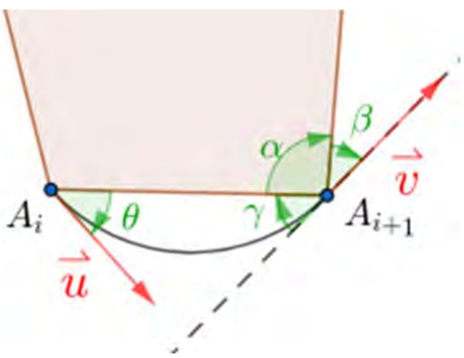
引理 1.2 給定平面上 n 個點，對 $i\ \epsilon\{1,2,\dots,n\}$，我們有：

$$\theta_i+\theta_{i+1}+\alpha_{i+1}\equiv 0\ \ (mod\ \ \pi)，其中\ \ \alpha_{n+1}=\alpha_1。$$

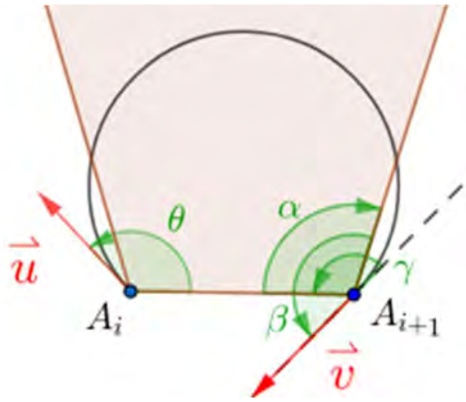
證明.

為了省略下標，將 θ_i 記為 θ；θ_{i+1} 記為 β；α_{i+1} 記為 α；$\overrightarrow{v_\iota}$ 記作 $\vec{u}$；$\overrightarrow{v_{\iota+1}}$ 記作 $\vec{v}$ 。令 $-\vec{v}$ 和 $\overline{A_\iota A_{\iota+1}}$ 的有向夾角為 γ，則 $\gamma=\theta$。接著由圖十可知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$。

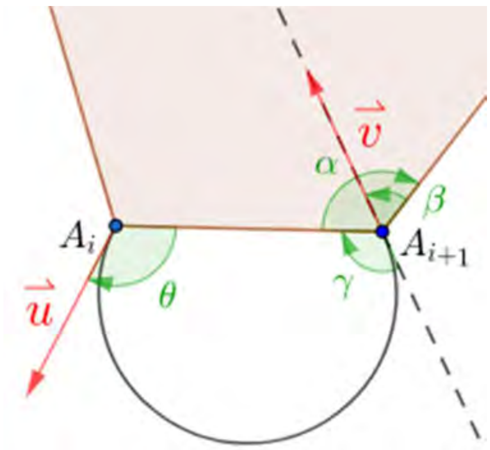
另外，由圖十一可知 $\alpha+\beta+\gamma=-\pi$。其他情形也類似，如圖十二到十四，證畢。



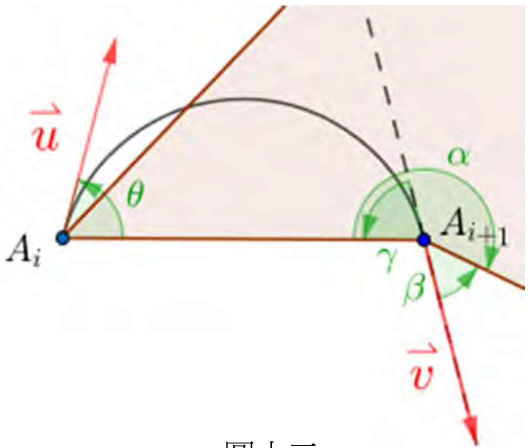
圖十



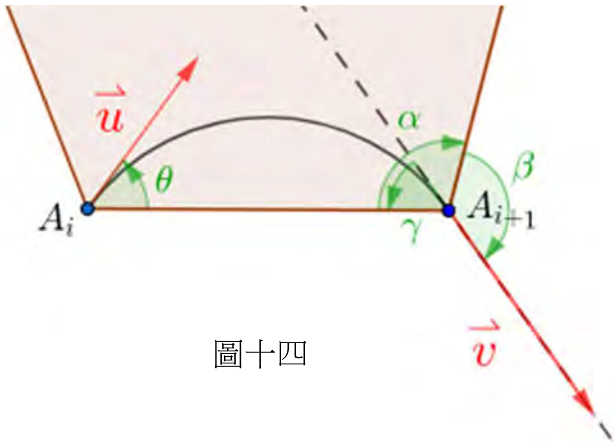
圖十一



圖十二



圖十三



圖十四

【討論】

將引理 **1.2** 帶 $n=3$ 運算，可得在三點的情況之中，光滑解存在若且唯若

$0\equiv\sum_{i=1}^{3}\theta_i\equiv\theta_1-\alpha_3(\bmod\pi)$，即 $\theta_1\equiv\alpha_3(mod\ \pi)$。

表示初始切向量 $\overrightarrow{v_1}$ 在 A_1 必須與外接圓在 A_1 的切線平行。因此，我們得出三個點的解必為其外接圓(其一解軌跡為外接圓，另一解為外接圓繞 2 圈)。

再來我們做一般化推導：

引理 1.3 延續上述符號，對任一正整數 n，我們有: $\sum_{i=1}^{2n-1}\theta_i\equiv\theta_1-\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j-1}(\bmod\pi)$

引理 1.4 延續上述符號，對任一正整數 n，我們有: $\sum_{i=1}^{2n}\theta_i\equiv-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{2j}(\bmod\pi)$

證明.

而由上述引理，我們得出 $\theta_i\equiv-\theta_{i-1}-\alpha_i(mod\ \pi)$。再透過將 n 個式子相加，即可得到 $\theta_i\equiv(-1)^{i+1}\theta_1+(-1)^i\sum_{j=2}^{i}(-1)^{i+1}\alpha_j(\bmod\pi)$，證畢。

合併引理 **1.1**、**1.3**、**1.4**，我們就可以得出**定理 1.5**、**1.6**：

定理 1.5 延續上述符號，給定平面上 n 個點，我們有：若 n 為奇數，則必定存在光滑解。但$\overrightarrow{A_2A_1}$與 $\overrightarrow{v_1}$ 的夾角 θ_1 必須滿足 $\theta_1\equiv\alpha_3+\ \alpha_5+\cdots+\alpha_n(mod\ \pi)$。

定理 1.6 若 n 為偶數，則有光滑解若且唯若內角滿足 $\alpha_2+\alpha_4+\cdots+\alpha_n\equiv0(mod\ \pi)$。在解存在的情況下，初始向量 $\overrightarrow{v_1}$ 可以是任意的。

【討論】

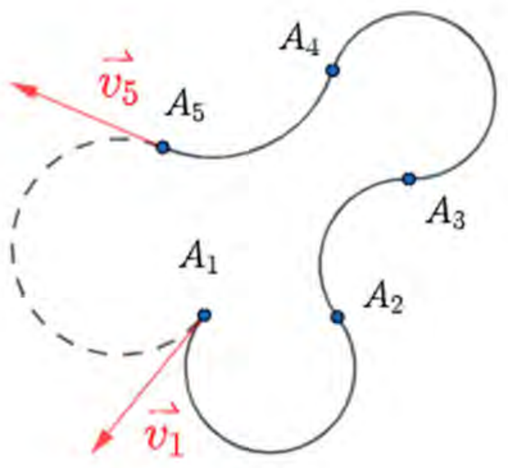
由**定理 1.5**，**1.6** 可得知：

如果 n 是奇數，那給定平面上任意 n 個點，一定存在光滑解，且解只有兩個(因為初始向量有 2 個選擇)；如果 n 是偶數，那給定平面上任意 n 個點，並不會都有光滑解，必須於該 n 個點所形成的 n 邊形內角滿足特定條件才有解。而在偶數點有解的情況下，會有無限多組解(因為初始向量可以是任意的)。

三、解不存在時

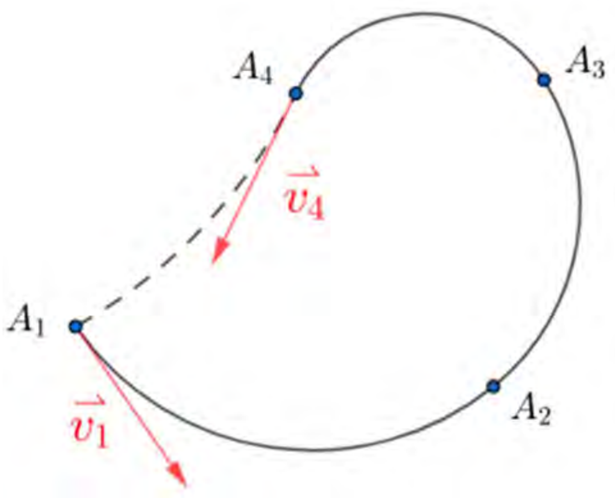
(一) 當解不存在時的可能操作

定理 1.6 告訴我們，奇數點的情況下必定有兩組光滑解，而這兩個解可以由初始向量來決定。反過來說，一旦初始向量方向不對，就做不出光滑解，如圖十五。



圖十五

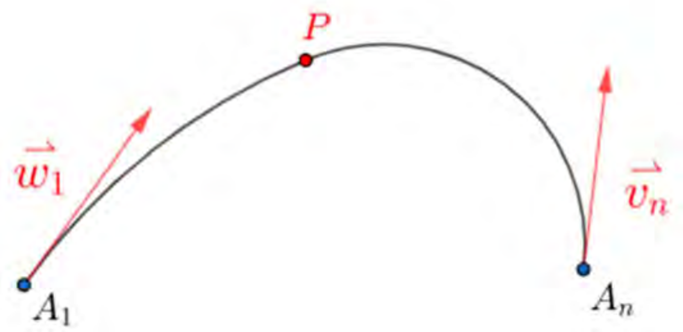
同理，任意給的偶數點可能沒有光滑解，所以任意決定一個初始向量可能做不出光滑解，如圖十六。



圖十六

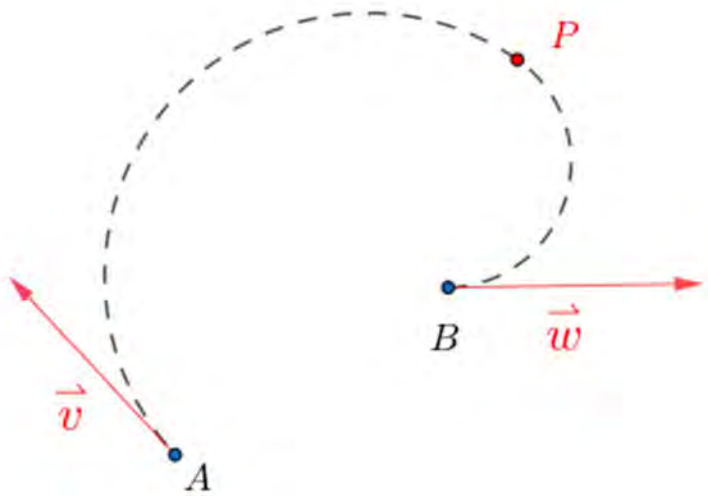
在上述情境中，我們有個自然的問題：是否可以加入一個適當的點，使得光滑解存在？注意，我們是在初始向量給定的情況下加點，希望找到光滑解滿足那個初始向量。

因為一旦決定初始向量 $\overrightarrow{v_1}$，那麼 $\overrightarrow{v_n}$ 也就決定了，所以我們其實是要找一點 P，使得 $\overset{\frown}{A_nP}$ 在 A_n 的有向切向量是 $\overrightarrow{v_n}$、$\overset{\frown}{A_1P}$ 在 A_1 的有向切向量是 $-\overrightarrow{v_1}$，而且 $\overset{\frown}{A_nP}$ 和 $\overset{\frown}{A_1P}$ 在 P 點是光滑相連的，如圖十七($\overrightarrow{w_1} = -\overrightarrow{v_1}$)。



圖十七

接著為了簡化符號，我們令 $A = A_1$、$B = A_n$、$\overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_1}$、$\vec{w} = \overrightarrow{v_n}$。如圖十八。



圖十八

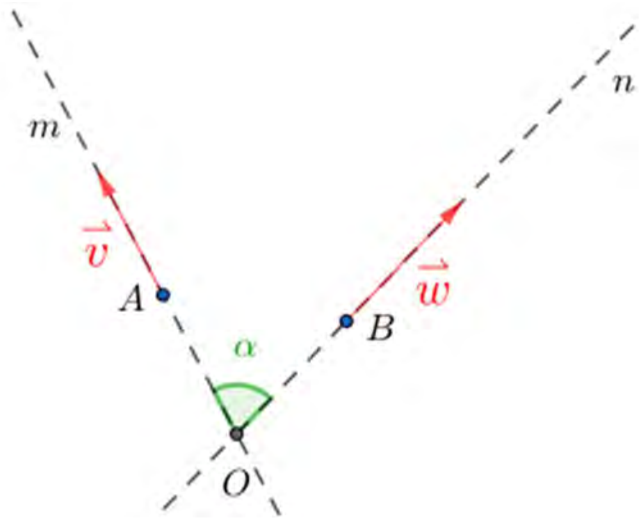
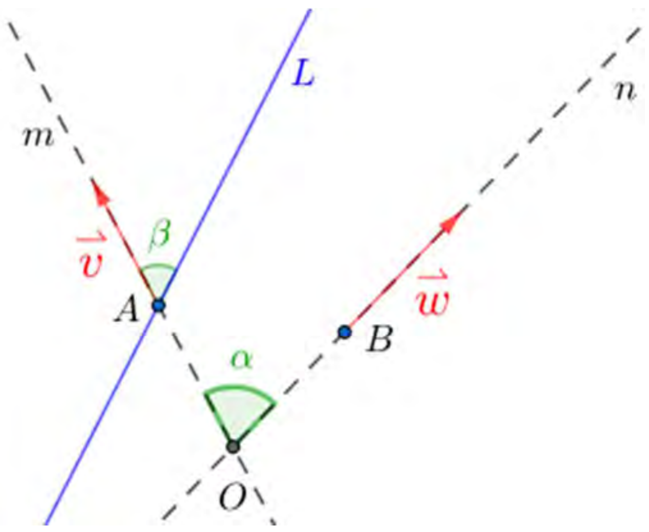
接下來，我們著手證明這種 P 點(命名為中繼點)的存在性，以及找出尺規作圖中繼點的方法。網路上可找到相關操作，關鍵字為「biarc」。我們所蒐集到 biarc 的資料都是使用三角函數與矩陣來處理這個問題，而我們只使用古典幾何。

而在嘗試尺規作圖出中繼點時，我們發現了：

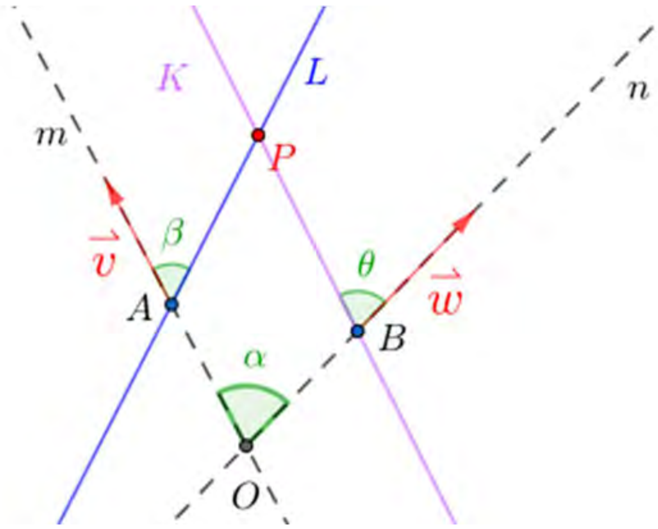
定理 2.1 (存在性) 給定 A、B 兩點和 A、B 上的兩向量 $\vec{v}$、$\vec{w}$。存在一點 P 及圓弧 $\overset{\frown}{AP}$、$\overset{\frown}{BP}$，使得 $\overset{\frown}{AP}$ 在 A 點的有向切向量為 $\vec{v}$；$\overset{\frown}{BP}$ 在 B 點的有向切向量為 $\vec{w}$。且兩段圓弧在 P 點光滑相連。

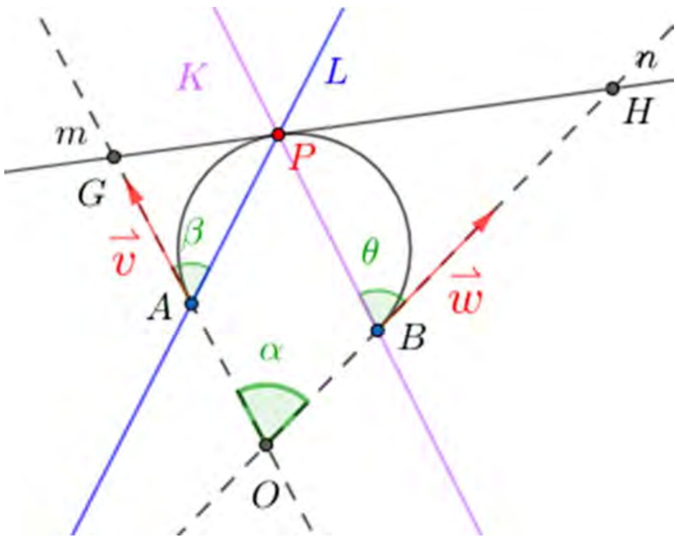
表 3 為我們證明中繼點存在時的構圖之作圖步驟

表 3　證明中繼點存在時的構圖之作圖步驟

構造方法	圖例
【步驟 1】 作與 $\vec{v}$ 向量平行且通過 A 點的直線 m，以及與 $\vec{w}$ 向量平行且通過 B 點的直線 n 交於 O 點，並令交點的一、三象限夾角為 α。	
【步驟 2】 通過 A 點做任意直線 L，令 L 和 m 交角為 β。	

<table>
<tr>
<td>【步驟 3】

再通過 B 點做直線 K 使得 K 和 n 的夾角 θ 滿足$\theta = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - \beta$。</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>【步驟 4】

直線 K 和 L 的交點 P 即為所求。</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

證明.

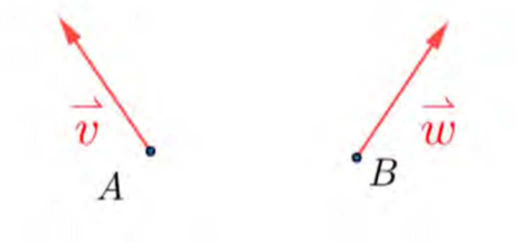
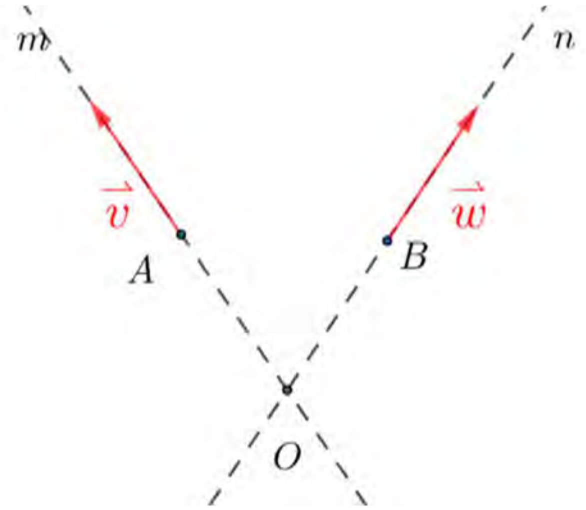
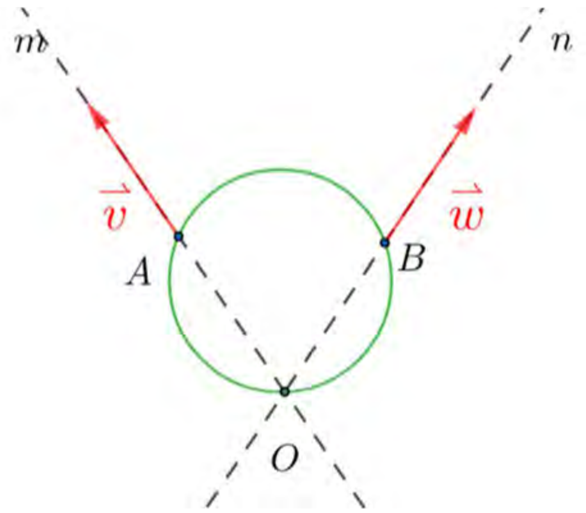
過 P 點作 $\overset{\frown}{AP}$ 切線，令其分別交 m,n 於 G,H 兩點，則 $\angle OGH = 180^\circ - 2\beta$，且 $\angle OHG = 180^\circ - \alpha - \angle OGH = 2\beta - \alpha$。故 $\angle HPB = 180^\circ - \theta - (2\beta - \alpha) = \theta$ 。所以 $\overline{HP} = \overline{HB}$，推得 $\overleftrightarrow{PH}$ 為 $\overset{\frown}{BP}$ 的切線。

(二) 尺規作圖

為了找到符合兩個初始向量的光滑圓弧，我們可以增加一個適當的點當作這兩段圓弧的中繼點，使得這兩段圓弧光滑。在上述的存在性證明當中，可以看出中繼點 P 點並不是唯一的，所以我們再來要用尺規作圖作出所有可能的 P 點，並證明中繼點的軌跡為「圓」。

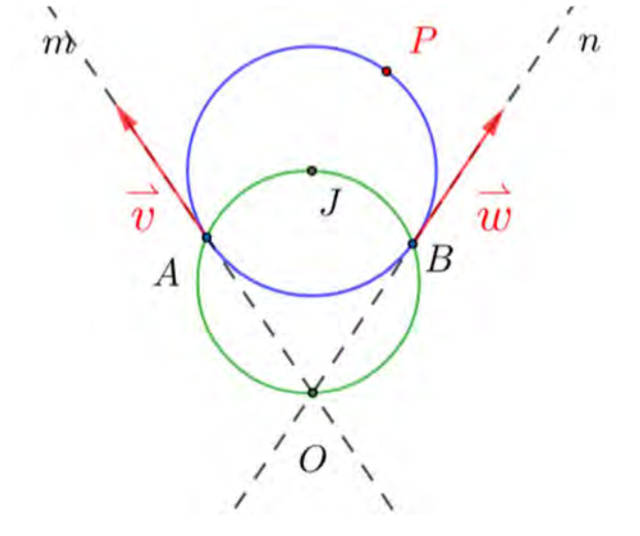
我們發現可利用尺規作圖來找出中繼點 P ，表 4 為我們的尺規作圖操作之步驟

表 4　尺規作圖操作之步驟

構造方法	圖例
【步驟 1】 給定 A,B 兩點以及向量 $\vec{v}$、$\vec{w}$。	
【步驟 2】 過 A,B 兩點分別作和向量 $\vec{v},\vec{w}$ 平行的直線 m,n，令其交於 O 點。	
【步驟 3】 作通過 O,A,B 三點的圓，如圖中的綠色圓。	

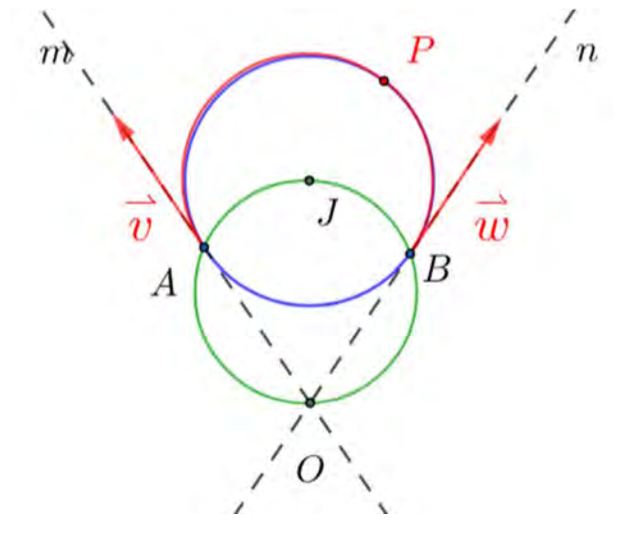
【步驟 4】

取 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點 J (落在 $\vec{v}$、$\vec{w}$ 交出的第一或第三象限中)，並作以 J 為圓心， $\overline{JA}$ 為半徑的圓，如右圖中的藍色圓。

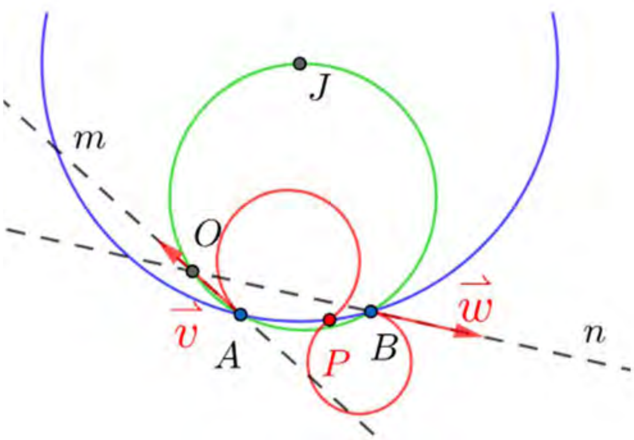


【步驟 5】

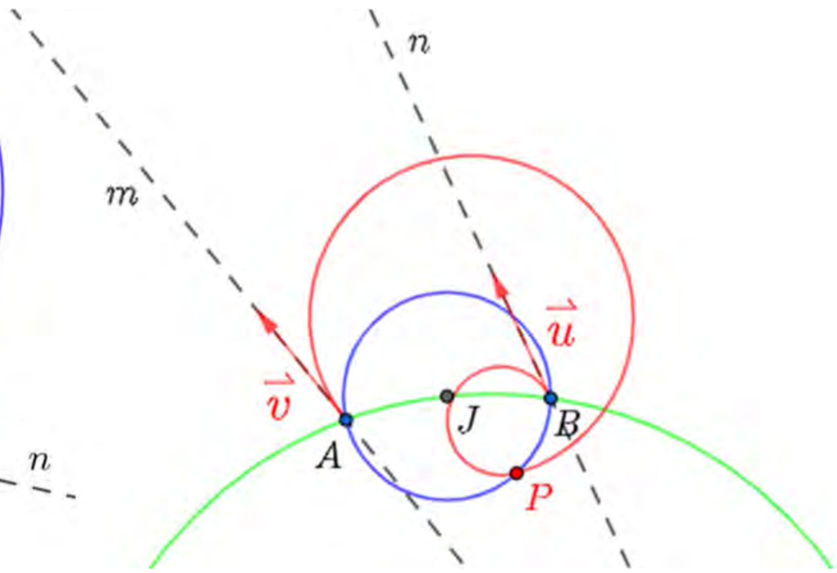
圓 J 上任一點都是可選擇的中繼點，如右圖兩段紅色圓弧。



注意上圖中的藍色圓並沒有與 m,n 兩直線相切，下圖十九、二十更為明顯。



圖十九



圖二十

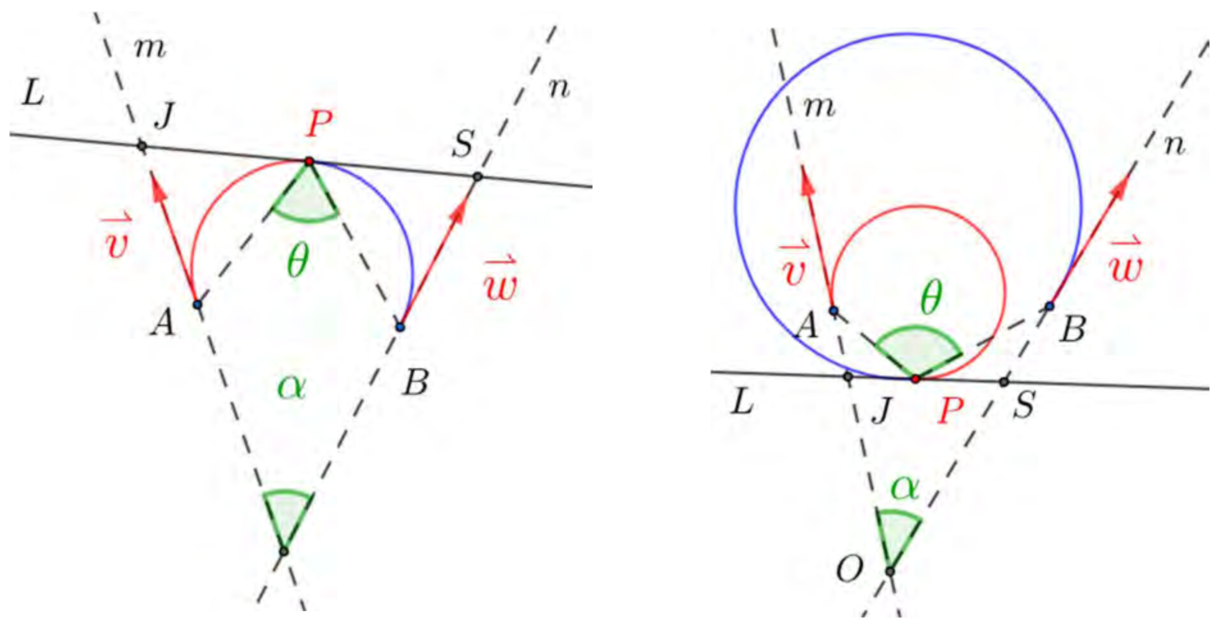
在證明此尺規作圖正確之前，我們先來證明一個引理：

> **引理 2.2** 給定點 A、B 和 A、B 上的兩向量 $\vec{v},\vec{w}$。過 A、B 兩點分別作和向量 $\vec{v},\vec{w}$ 平行的直線 m,n，令其交於 O 點、令交點的一、三象限夾角為 α。則 P 點為中繼點若且唯若 $\angle APB = 90^\circ \pm \frac{1}{2}\alpha$。

證明.

假設 P 點為中繼點，如圖二十一，過 P 點作兩圓弧切線 L 分別交 m,n 於 J,S 兩點，欲證明 $\theta \coloneqq \angle APB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$。令 $\angle JAP = x, \angle SBP = y$，則 $180^\circ = \alpha + \angle AJP + \angle BSP = \alpha + (180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y)$，推得 $x + y = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$，故 $\theta = 180^\circ - (x+y) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$。

另外，如圖二十二，設 $\angle APB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha =: \theta$。先做 $\overset{\frown}{AP}$，再做過 P 點與 $\overset{\frown}{AP}$ 相切的直線 L，令其分別交 m,n 於 J,S 兩點。令 $\angle JAP = x$，則 $\angle SPB = 180^\circ - \theta - x = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - x$；而 $\angle SBP = 180^\circ - \angle SPB - \angle PSB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + x - \angle PSB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + x - (2x - \alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - x = \angle SPB$。故存在以 $\overleftrightarrow{PS}$ 和 n 為切線的 $\overset{\frown}{BP}$，故 P 點為中繼點。



圖二十一　　　　圖二十二

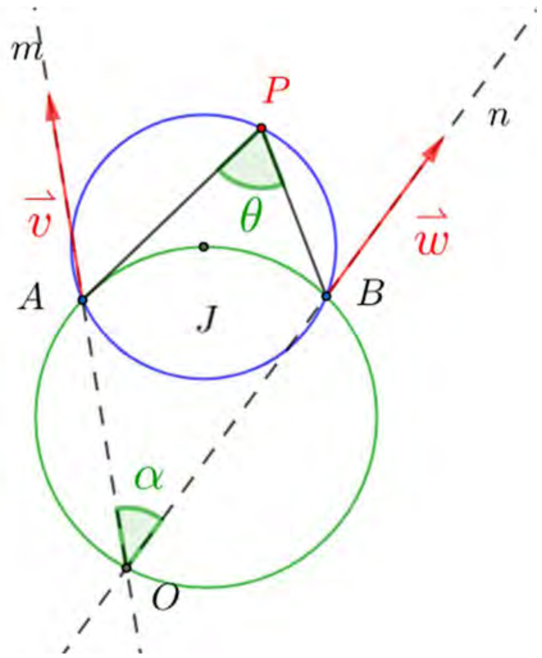
定理 **2.3** 上述尺規作圖是正確的，且圓 J 上的點即為所有中繼點。

證明.

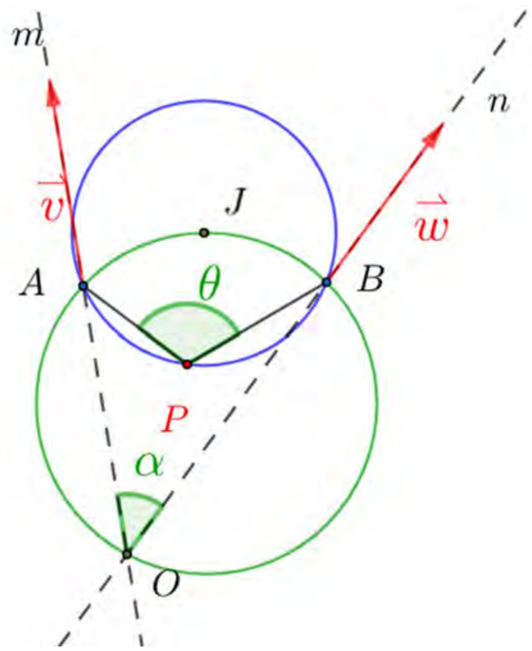
延續上述符號，給定 A、B 兩點以及分別通過 A、B 的向量 $\vec{v},\vec{w}$。令過 A 點和 $\vec{v}$ 平行的線為 m、過 B 點和 $\vec{w}$ 平行的線為 n；m、n 交於 O 點；$\vec{v},\vec{w}$ 夾角為 α。上述尺規作圖中，我們先做過 A、B、O 三點的圓(如圖二十三綠圓)，再取落在第一或第三象限的中點 J，並以 J 為圓心 $\overline{JA}$ 為半徑作圓(如圖二十三藍圓)。我們想要證明：

$$\text{對圓 } J \text{ 上任一點 } P\text{，} \angle APB = 90^\circ \pm \frac{1}{2}\alpha\text{。}$$

因為 A、O、B、J 四點共圓，所以 $\angle AJB = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - \alpha$。又因為 $\angle AJB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 在圓 J 的圓心角，而 $\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ (兩種可能)在圓 J 的圓周角，所以$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AJB$ 或 $\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AJB$，化簡後即為所求(如圖二十三、二十四)。由上述討論加上引理 **2.2**，我們已經證明了圓 J 上所有點都是中繼點。注意所有滿足 $\angle APB = 90^\circ \pm \frac{1}{2}\alpha$ 的 P 點也恰巧就是整個圓，所以除了圓 J 上的點外，沒有其他的中繼點，證畢。



圖二十三



圖二十四

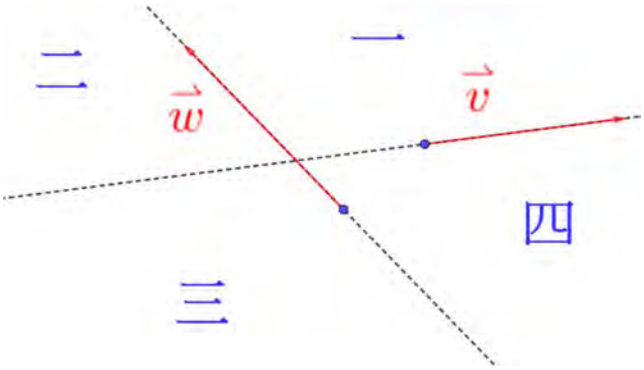
【討論】

在尺規作圖中，我們有提到要取 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點，但是中點會有兩個。

我們由引理 **2.2** 的證明（ $90^{\circ} \pm \frac{1}{2}\alpha$ 的情形)可得知，若**定理 2.3** 成立，則 $\angle AJP$、$\angle BSP$ 以及 α 必形成一個三角形，又因為 α 必位於第一、三象限夾角。所以只可取位於第一、三象限的中點作為圓心。

性質 2.4 增點後的圓弧走向有規律

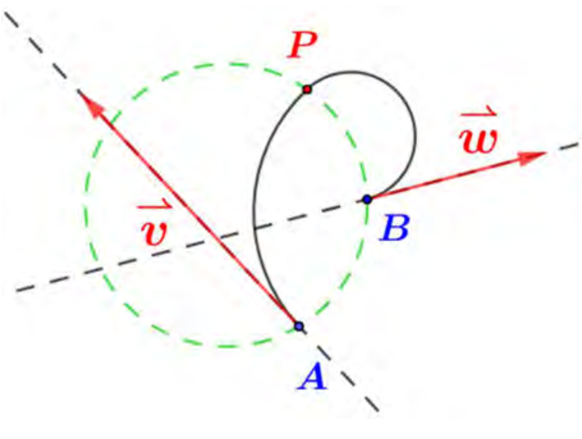
設兩向量 $\vec{v},\vec{w}$ 分別為 x、y 軸的正向(固定始點)，將平面分為第一、二、三、四象限(如圖二十五)**定理 2.3** 得知所有中繼點 P 的軌跡為一圓。



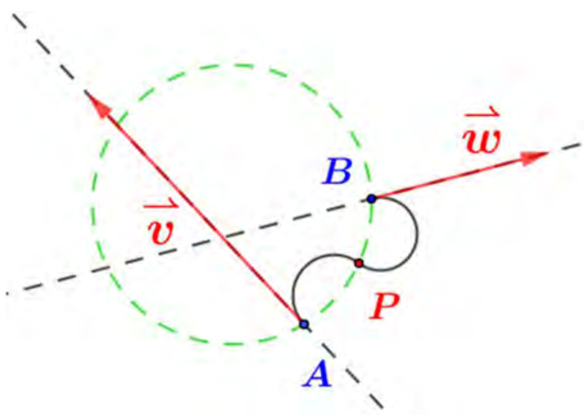
圖二十五

依據此圓與 4 個象限相交情形，兩段圓弧的走向有以下規則(如圖二十六、二十七)：

我們觀察到 P 點落在第一、三象限時，則兩段圓弧趨勢會相同，而當 P 點落在第二、四象限時，則兩段圓弧的趨勢就會相反。



圖二十六



圖二十七

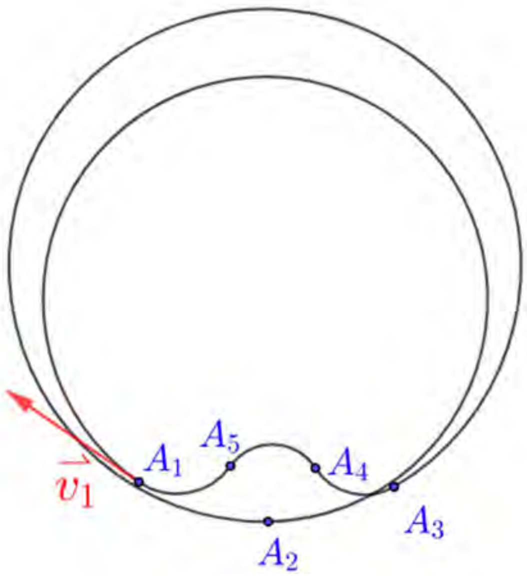
其中圓弧的走向如下表：

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
B 點至 A 點	逆逆	逆順	順順(不存在)	順逆
A 點至 B 點	順順	逆順	逆逆	順逆

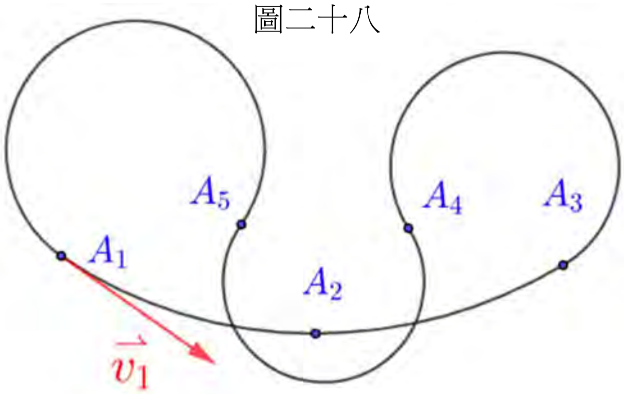
上述性質成立的理由很單純：因為圓必定落在其切線的同側，所以如果 P 點落在向量 $\vec{v}$ 的右側，則由 A 點走到 P 點的圓弧必定是順時針；而若 P 點落在向量 $\vec{v}$ 的左側，則由 A 點走到 P 點的圓弧必定是逆時針。同理可知向量 $\vec{w}$ 的兩種狀況，將 $\vec{v}$、$\vec{w}$ 分別的兩種情形互相組合即是上述兩種狀況。注意一律從 x 軸出發。

四、自交情形討論

接著我們來討論自交的情形，給定平面上任 n 點，$n \geq 3$ 且 n 為奇數，已知必存在 2 組光滑解。我們發現有可能兩組解都自交，如圖二十八、圖二十九。



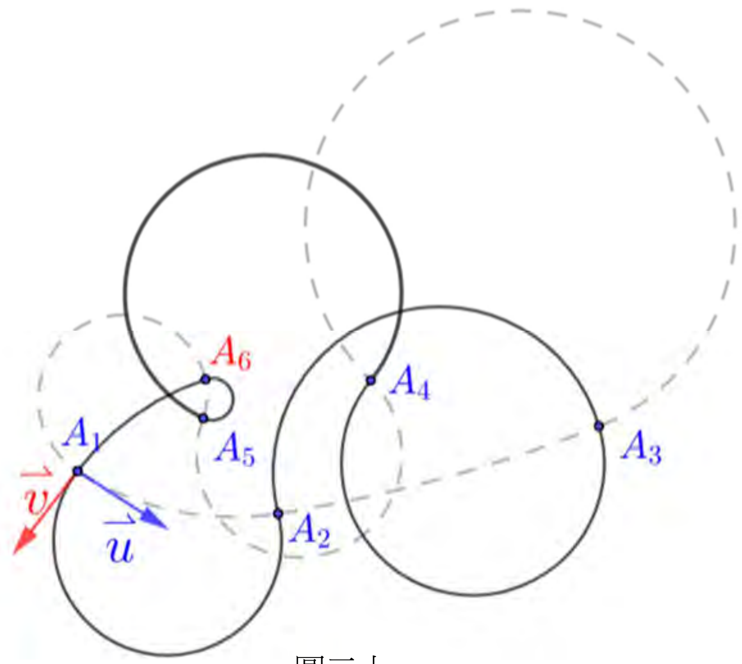
圖二十八



圖二十九

是否偶數點有較好的性質呢？偶數點有解的情況下，有無限多組解。我們自然的猜測在無限多組解中，可能存在一組不自交。

很不幸的，我們找到了 6 個存在無限組解的點，而在這所有解當中，沒有任何一組解是不自交的，如圖三十。



圖三十

我們將上述兩個觀察寫成定理：

定理 3.1 給定正整數 n，n 個點的光滑解可能都自交。

經過上述討論，自交看來是無法避免的。我們在此做出一個猜想: 可以透過「加入」一些新的點，來讓圖形不自交。直覺可以感受到只要加夠多個點，圖形就會趨近於這些點所連成的曲線。所以可以透過這個技巧來找到不自交的解。但究竟要加入幾個點以及加入的位置在哪還有待討論。

五、三維空間中的光滑解

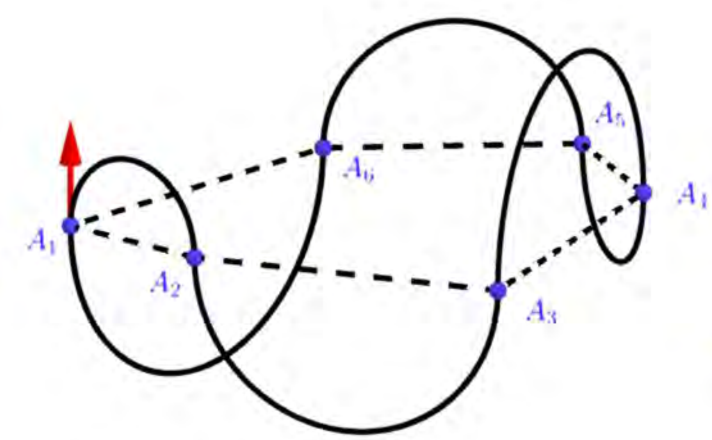
我們先觀察三維空間中的兩個特例：

1. 給定空間中「落在同一平面 M」的「奇數」點，則由**定理 1.5** 可以知道必定存在光滑解。
2. 給定空間中「落在同一平面 M」的「偶數」點，則可由以下方法找到光滑解(如圖三十一、三十二)：

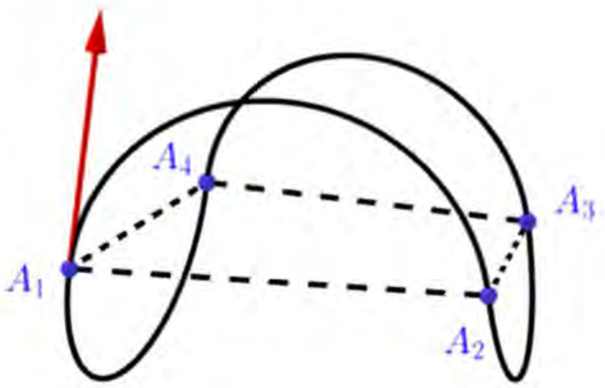
   (1) 作以 A_1、A_2 為直徑，且垂直平面 M 的半圓弧(有 2 種可能)。

   (2) 作以 A_2、A_3 為直徑，且垂直平面 M、與圓弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 在平面 M 不同側的半圓弧(此圓弧唯一)。

   (3) 重複上述步驟直到圓弧接回 A_1。

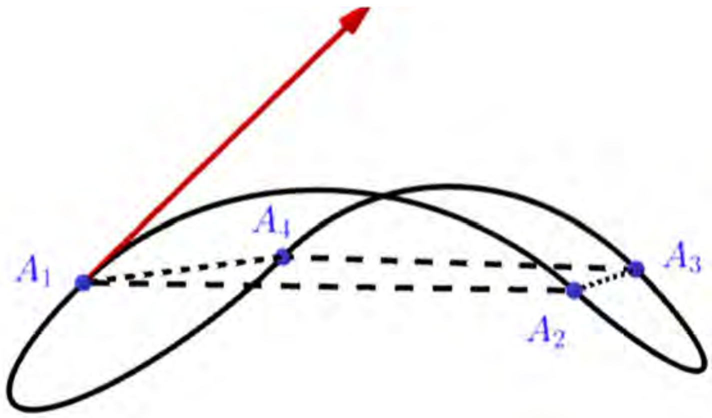


圖三十一



圖三十二

上述操作成立是利用了「偶數」點以及垂直面的性質，恰巧湊出光滑解，其實還有其它光滑解，如圖三十三。



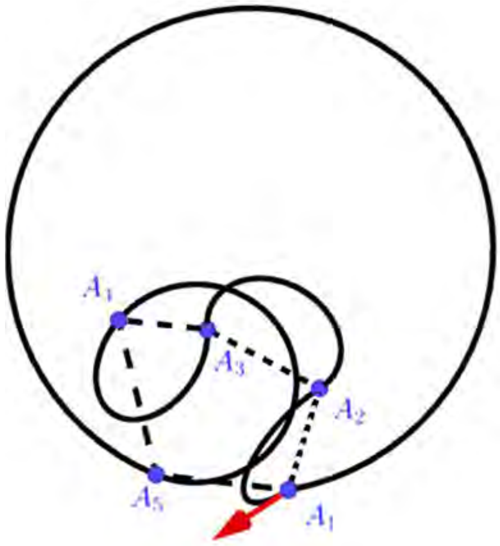
圖三十三

最後，我們寫下我們利用Geogebra作圖觀察到的現象，並寫成猜想：

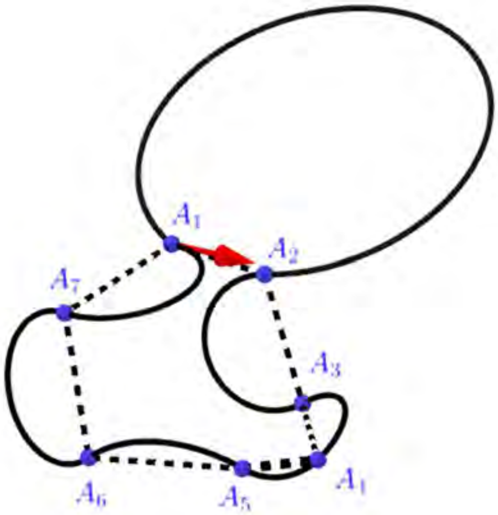
猜想一 給定三維空間中的 n 個點，如果 n 為奇數，則必定存在光滑解；若 n 為偶數且光滑解存在，則存在無限多組光滑解。

說明.

我們使用附錄說明的方法作圖，發現在空間中任選奇數個點(不共平面)都有光滑解，如圖三十四、三十五。

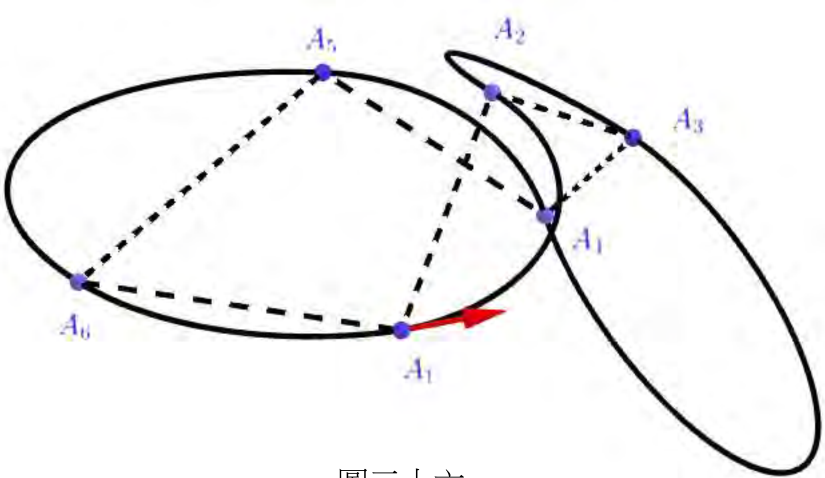


圖三十四



圖三十五

而偶數點若有光滑解，則初始向量取法有無限多種(非任意)，如圖三十六。再結合平面的結論，我們才提出此猜想。

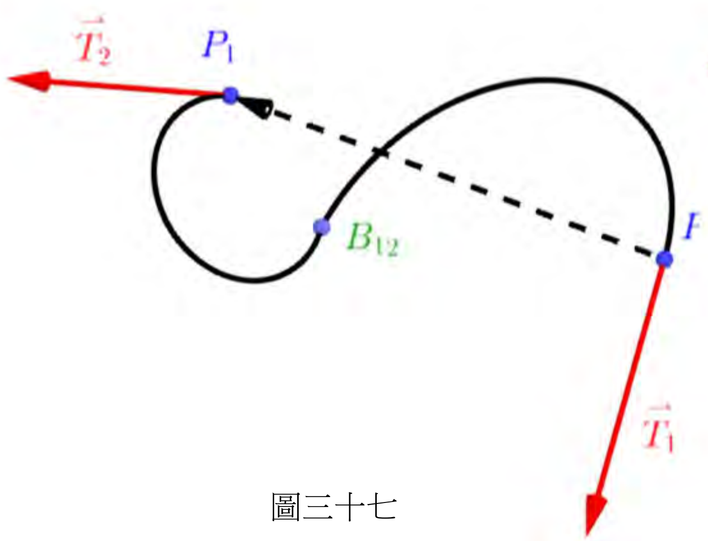


圖三十六

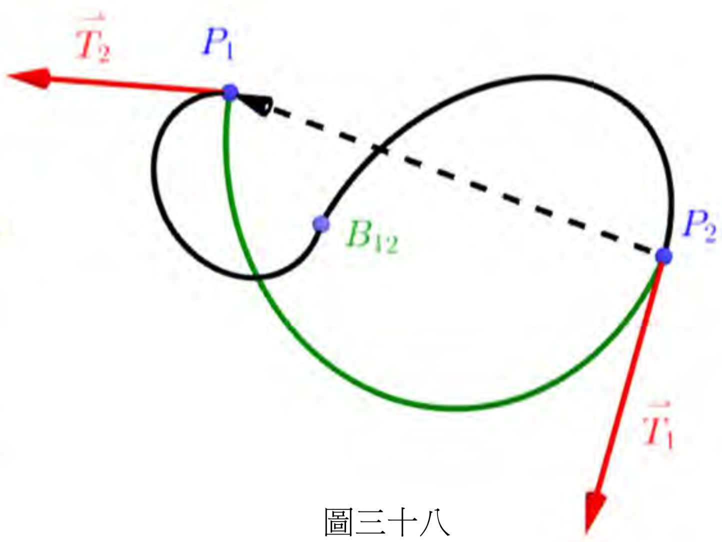
猜想二 空間中的中繼點軌跡為二次曲線局部

說明.

我們使用附錄說明的三維 Biarc 作圖，得到很多類似下圖三十七、圖三十八的結果，圖中綠色軌跡就是中繼點。再結合平面的結論，我們才提出此猜想。



圖三十七



圖三十八

肆、結論

一、$\boldsymbol{n}$ 為奇數時，必定存在光滑解，且恰有 **2** 組解

二、$\boldsymbol{n}$ 為偶數時，光滑解不一定存在，解存在的情形下有無限多組解

三、自交情形不可避免

四、可透過增加點來達到光滑

五、可透過增加點來達到不自交增加的新點軌跡為圓

伍、討論與未來展望

我們已找到光滑解存在的充分必要條件，也找到不自交解的找法。唯「至少要加幾個點」及「究竟要加在哪」才能達到不自交，都是尚未討論的問題。期待日後繼續研究。

另外，關於三維空間中的光滑解，我們在畫圖以及觀察後，提出了兩個猜想，希望日後能夠做出完整證明或給出反例。

最後，關於「流」的計算，希望將來學習更多數學工具後，能夠進行實際的計算，並得到類似光滑曲線連續變動的收斂結果。

陸、參考文獻

一、 國中數學課本第四冊第二章：平面幾何圖形。南一書局

二、 國中數學課本第五冊第二章：圓的性質。南一書局

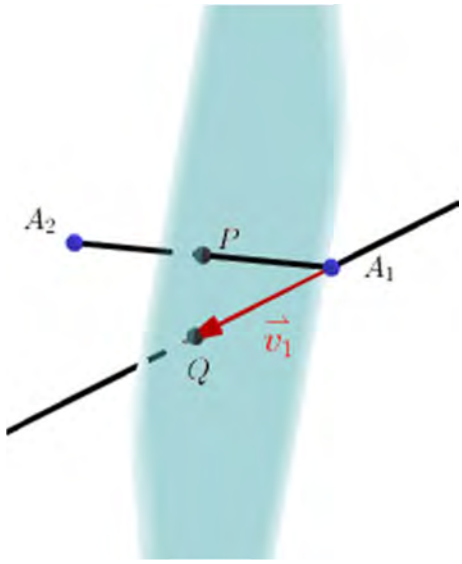
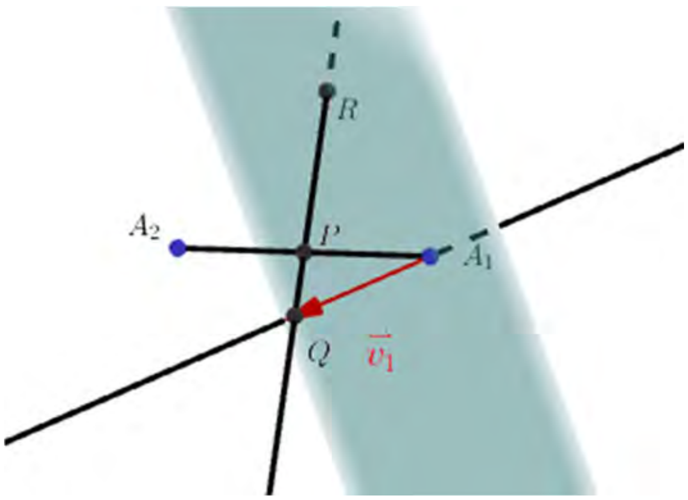
三、 $J.H. Maddocks, P. Buser, S. Hidebrandt, A. Quarteroni, G. Wanner$ (2004). $Global\ Radii\ of\ Curvature, and\ The\ Biarc\ Approximation\ of\ Space\ Curves: In\ Rursuit\ of\ Ideal\ Knot\ Shapes, pp$ 39-53.

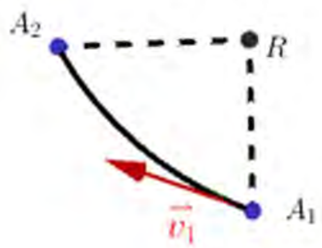
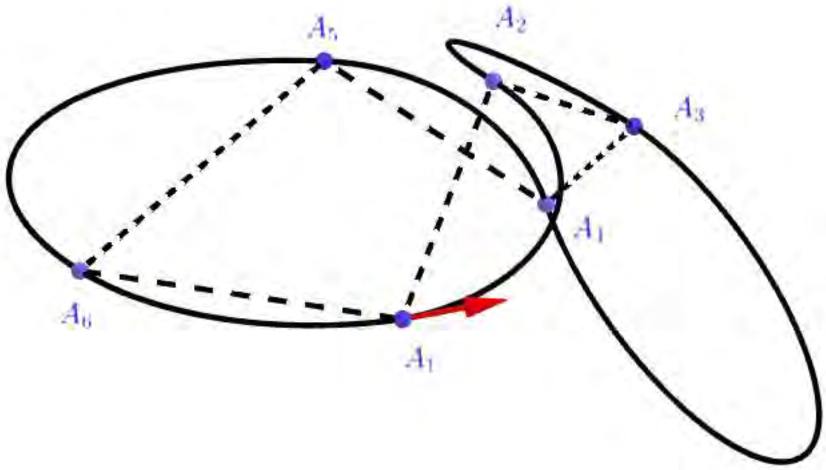
四、 $Haken\ Tiftikci$ (2009). $Biarc\ Curve\ Fitting$.

柒、附錄

一、三維空間下構造圓弧之步驟

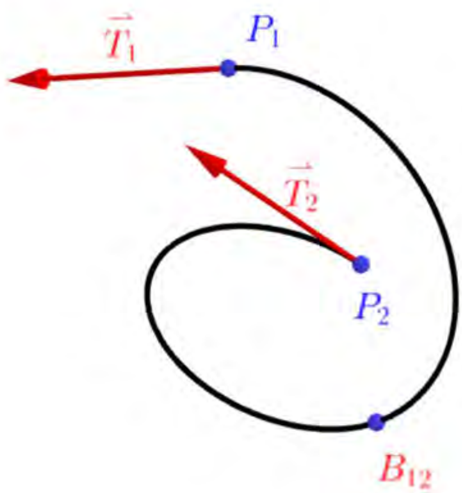
表 5 三維空間下構造圓弧之步驟

構造方法	圖例
【步驟 1】 在三維空間中決定 n 個點，並在 A_1 上決定初始向量 $\overrightarrow{v_1}$。	
【步驟 2】 作 $\overline{A_1A_2}$ 中點 P，並作垂直 $\overline{A_1A_2}$ 於 P 點之垂面 M。初始向量延伸與垂面 M 交於一點 Q，將 P、Q 兩點連線。	
【步驟 3】 作垂直初始向量 v_1 於 A_1 之垂面 N，垂面 N 與 $\overline{PQ}$ 交於一點 R。	

【步驟 4】 以 R 點為圓心，$\overline{A_1R}$ 為半徑畫圓弧。	
【步驟 5】 之後重複上述步驟 $n-1$ 次後，回到 A_1 上，如右圖為一光滑解例子。	

五、空間中的 Biarc

我們一樣先給定空間中的兩點 P_1、P_2 以及通過 P_1、P_2 的兩單位向量 T_1、T_2。目標就是要找一點 B_{12} 以及 $\overset{\frown}{P_1B_{12}}$、$\overset{\frown}{B_{12}P_2}$ 使得兩段圓弧在 B_{12} 光滑的相連且分別以 T_1、T_2 為端點的有向切向量，如下圖三十九。



圖三十九

如圖四十，為了方便計算，我們令兩段圓弧的圓心分別為 C_1、C_2。$\widehat{P_1B_{12}}$ 在 P_1 及B_{12} 的切線交於 B_1、$\widehat{B_{12}P_2}$ 在 B_{12} 以及 P_2 的切線交於 B_2。令 $\overline{P_1B_1}$ 長度為 a_1、$\overline{P_2B_2}$ 長度為 a_2、$P_2 - P_1 = S$。

則 $B_1 = P_1 + a_1T_1$ 且 $B_2 = P_2 - a_2T_2$ 且 $|B_2 - B_1| = a_1 + a_2$

而中繼點 B_{12} 座標為

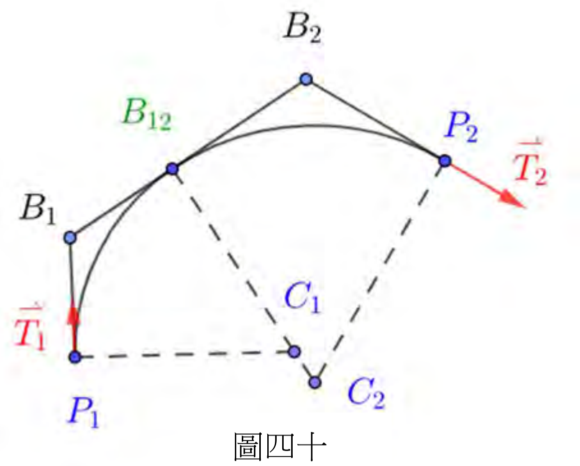
$$B_{12} = \frac{a_1B_2 + a_2B_1}{a_1 + a_2}$$

再來，我們計算

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2)^2 = |B_2 - B_1|^2 &= (B_2 - B_1) \cdot (B_2 - B_1) \\ &= (P_2 - P_1 - (a_1T_1 + a_2T_2)) \cdot (P_2 - P_1 - (a_1T_1 + a_2T_2)) \\ &= |S|^2 - 2S \cdot (a_1T_1 + a_2T_2) + |a_1T_1 + a_2T_2|^2 \\ &= |S|^2 - 2a_1S \cdot T_1 - 2a_2S \cdot T_2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2T_1 \cdot T_2\end{aligned}$$

化簡可得

$$a_2 = \frac{a_1S \cdot T_1 - \frac{1}{2}|S|^2}{a_1(T_1 \cdot T_2 - 1) - S \cdot T_2}$$



圖四十

由上面的式子可知，在 P_1、P_2 以及 T_1、T_2 給定的情況下，一旦決定 a_1 的值，即可以計算出 a_2。接著我們就可以利用 a_1 和 T_1 作圖出 B_1；同理可以作圖出 B_2。接著就可以利用 B_1、B_2 和 a_1、a_2 作出中繼點 B_{12}。

前面的猜想二，就是利用這種作圖方法，在調整 a_1 的數值得到中繼點的軌跡。

【評語】030406

考慮對於給定平面上的 n 個點 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，是否能將$\{A_1,A_2\}$, $\{A_2,A_3\},\cdots, \{A_{n-1},A_n\}, \{A_n,A_1\}$兩兩用圓弧相連,使得圓弧在相接時，接點的『平滑性』(兩段圓弧在相接點的切向量方向一致的性質)維持不變的問題。針對解(滿足條件的 n 段圓弧)存在的條件、如果解是存在的該如何建構、解不存在時能否透過增加額外的點(中繼點)來保證解的存在性、以及此時新增的點該如何選取等問題作者作了一些分析，給出了說明答案。作者們也透過一些分析手法，針對解是否存在、如果存在該如何建構這兩個問題給出了答案。對於解不存在的狀況,也利用增加一個新的點的方式來保證解的存在性，這些結果的呈現都值得肯定。但相關的研究圍繞著哪些主題?有沒有哪些是與本作品的研究結果相關?如果能在介紹問題時增加一些對於相關文獻的說明會更好。索引資料需加強來原及出處，若能提出研究的應用，更可加強研究的動機。

作品海報

壹、前言

一、研究動機

本研究源自數學中「流」(flow)的結構：流可以描述物件隨著時間的變動，所發生的改變。由於物理狀態喜歡處於能量小的情況，所以定義好一個物件的初始能量，物件將隨著時間而有變化，這種變動可用流來描述。而本研究所探討的圓弧，是源自定義離散點能量時遇到的問題。在這種情境中，我們需要計算曲線的曲率，而圓弧的曲率是最好計算的，所以很自然的，我們想要取的曲線集合是蒐集圓弧連接成的封閉曲線。為了便利之後流的計算，我們更進一步希望曲線要光滑又不自交。

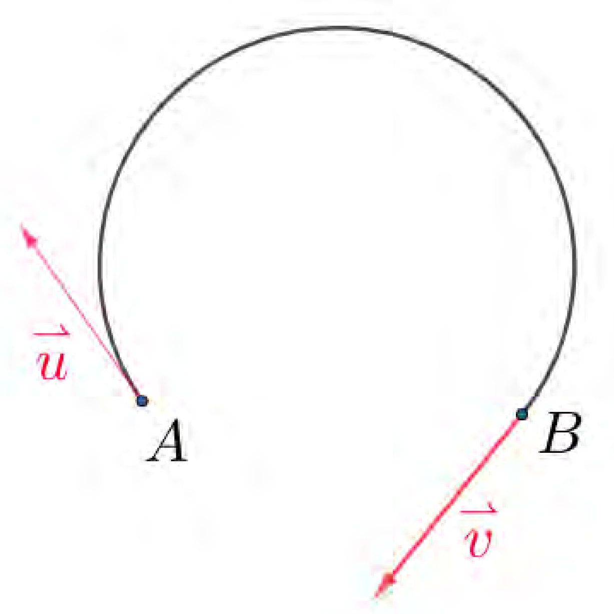
為了找出上述的平面曲線集合，我們使用如下策略：先給定n個點，並假設此n個點連接成一個簡單多邊形，再找 n 段圓弧，使 n 個圓弧分別以 $\{A_1,A_2\}$、$\{A_2,A_3\}$、 … 、$\{A_{n-1},A_n\}$、$\{A_n,A_1\}$ 為端點，並且 n 個圓弧是光滑相連的。

二、研究目的

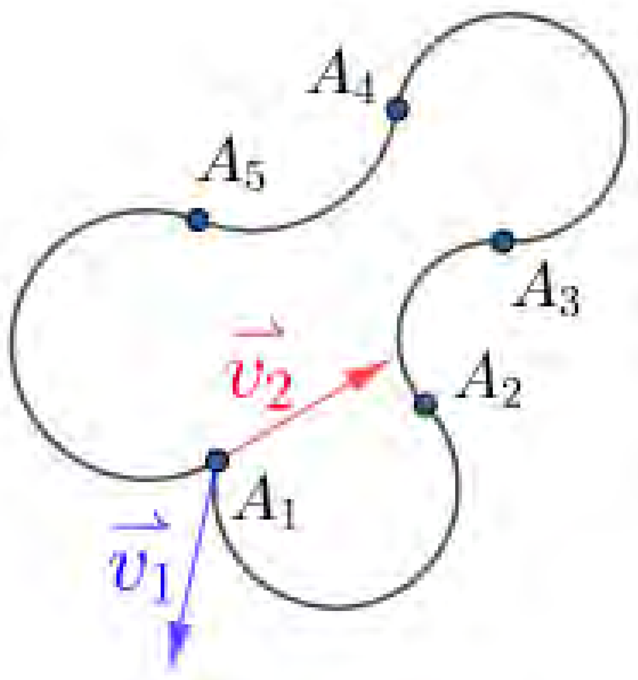
(一) 找出這些光滑解存在的充分必要條件
(二) 上述圓弧不存在時，找尋令其存在的變動
(三) 研究 n 段圓弧不相交的可能性

三、名詞定義及解釋

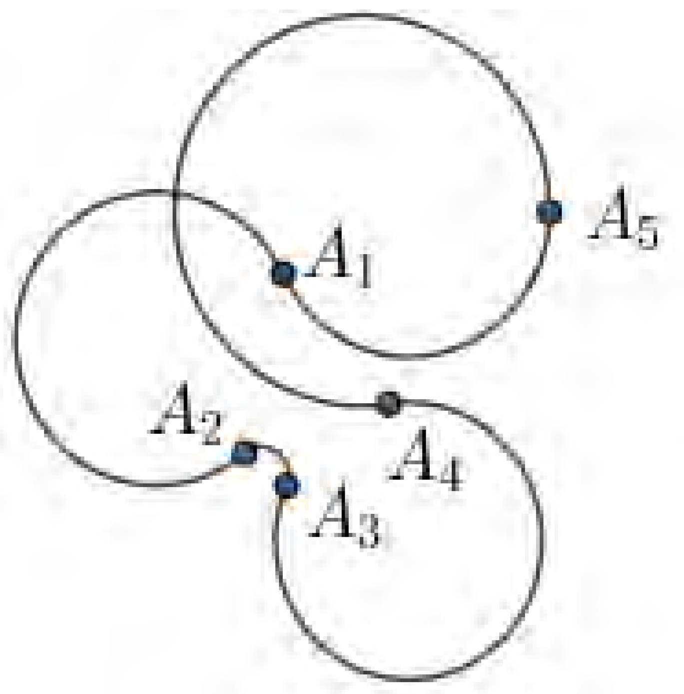
平面上 n 個點：給定 $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$，都額外要求 $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ 是簡單多邊形。
有向切向量：如圖一，給定兩點 A、B 以及通過 A、B 的弧，我們定義：
(一) 於 B 點之「有向切向量」$\vec{u}$ 是順著 A 點移動到 B 點的有向切向量於 B 點的最後瞬時方向。
(二) 同理，於 A 點之「有向切向量」$\vec{v}$ 是為順著 A 點移動到 B 點的有向切向量於 A 點的最初瞬時方向。
上述說明中，「有向切向量」是唯一的。
(三) 命名每一個有向切向量依序為 $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$，如圖六。
光滑：我們說曲線上一點 P 光滑，是指從 P 點兩側沿曲線走向 P 點，在 P 點的有向切向量剛好「方向相反」。
圖二中，A_1 的有向切向量 $\overrightarrow{v_1}$ 和 $\overrightarrow{v_2}$ 方向並非相反，所以曲線在 A_1 不光滑；在 A_4 是光滑的。
光滑解：給定平面上 n 個點，存在 n 段圓弧，其中每段圓弧分別以 $\{A_1,A_2\}$、⋯、$\{A_n,A_1\}$ 為端點，且整個圖形是光滑的。
我們就稱這 n 段圓弧成的圖形為光滑解，如圖三。
自交：我們說一組光滑解自交，是指解當中的 n 段圓弧，在端點之外至少有一處相交，如圖三。
有向夾角：給定平面上兩向量，$\vec{v}=\overrightarrow{PR}$、$\vec{w}=\overrightarrow{PQ}$，則「$\vec{w}$ 和 $\vec{v}$ 的有向夾角」定義為 $\theta=\angle QPR$，
其中 θ 滿足 $-\pi<\theta\le\pi$(順時針為正)，如圖四。
有向內角：$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n\}$，如圖五。
有向切向量 $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 與 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$ 的**有向角**：$\{\theta_1,\theta_2,\dots\theta_n\}$，如圖六。



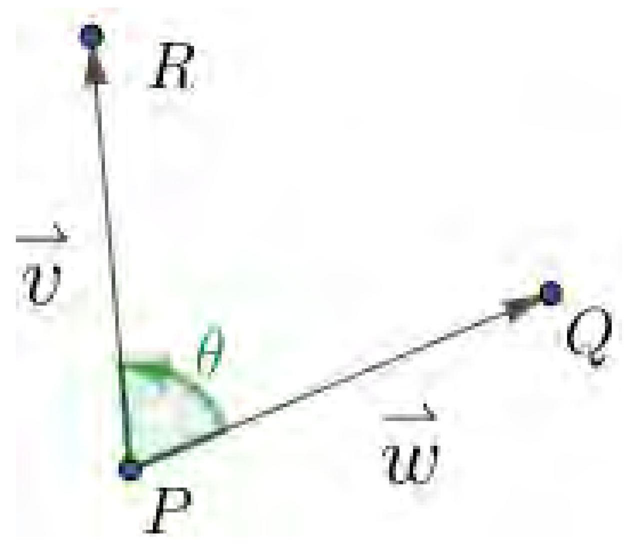
圖一



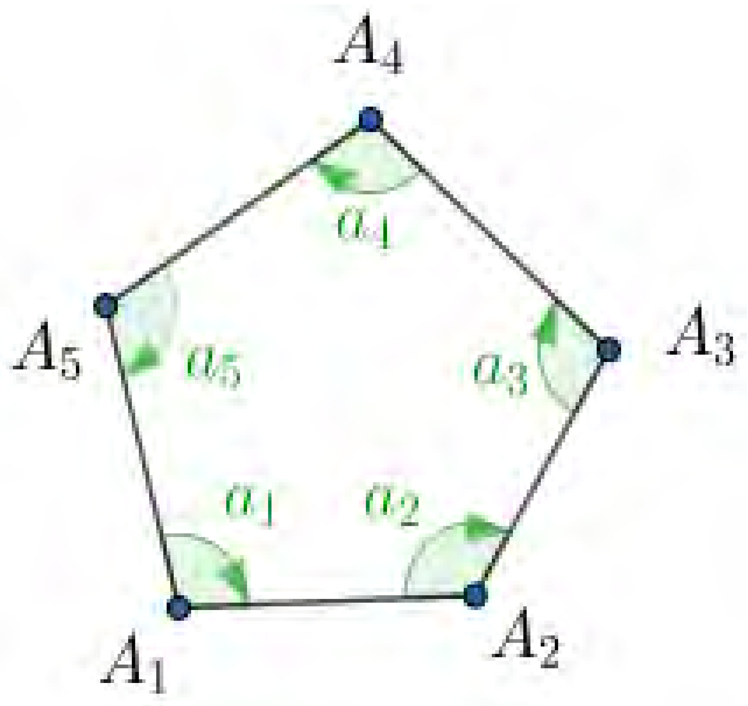
圖二



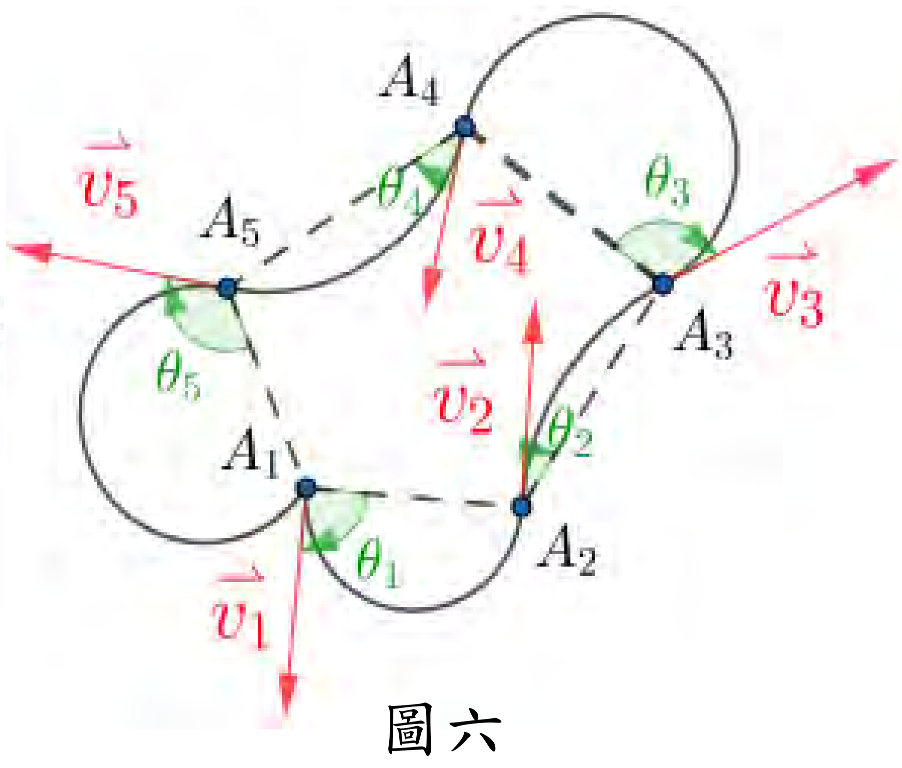
圖三



圖四



圖五



圖六

四、研究設備及器材

紙、筆、電腦、geogebra

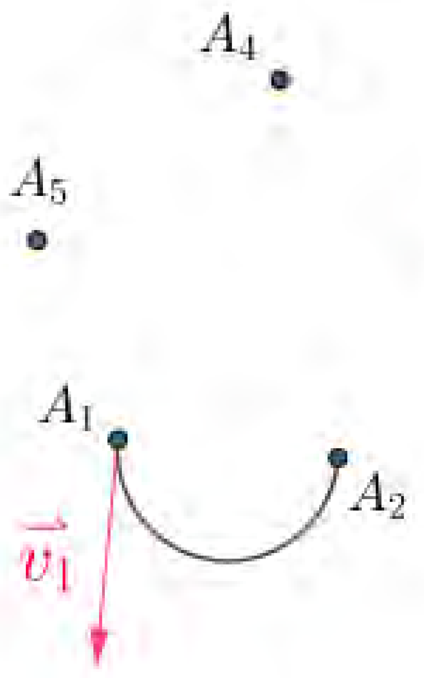
貳、研究結果

一、研究問題

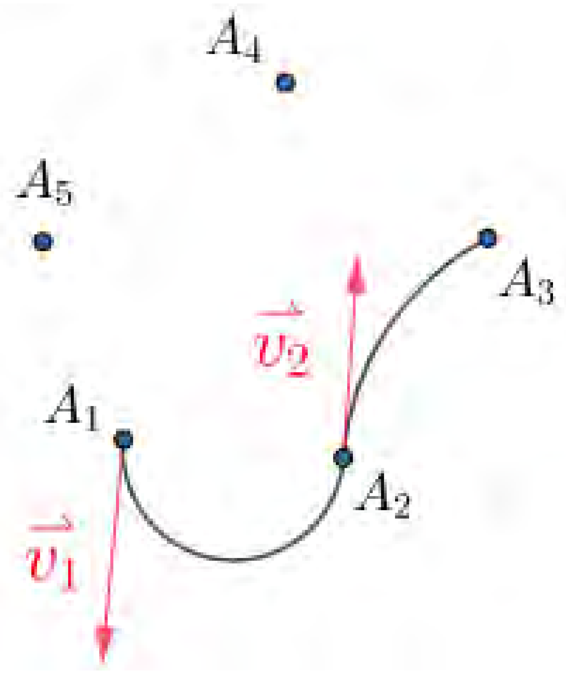
(一) $\boldsymbol{n}$ 為奇數時，圓弧存在光滑解有哪些充分必要條件及滿足條件的圓弧組數量?
(二) $\boldsymbol{n}$ 為偶數時，圓弧存在光滑解有哪些充分必要條件以及滿足條件的圓弧組數量?
(三) 光滑解不存在時如何解決?
(四) 解決方法的性質及規律為何?
(五) 推廣到三維空間的情況為何?
(六) 自交存在時如何解決?

二、初始向量的旋轉

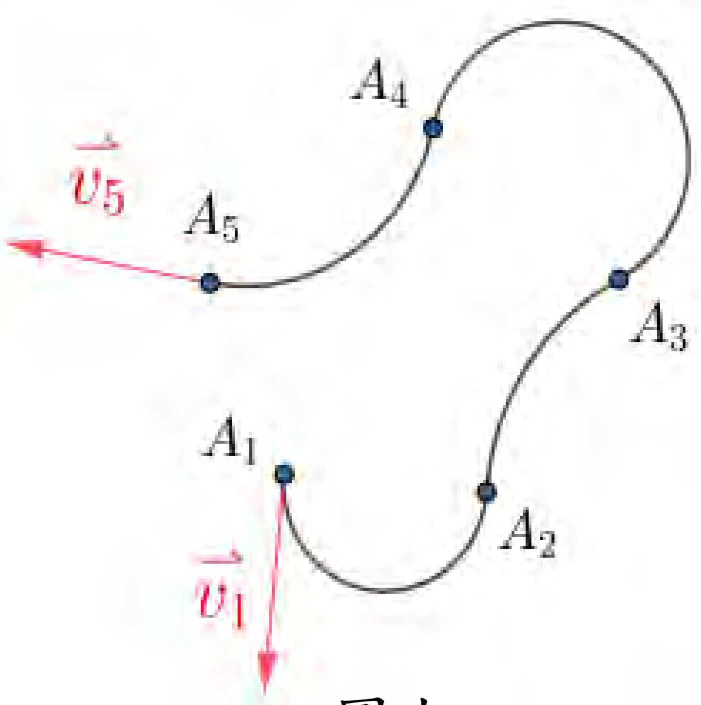
如果要找多邊形 $\{A_1,A_2,A_3,\dots,A_n\}$ 的光滑解，可依照以下方法：



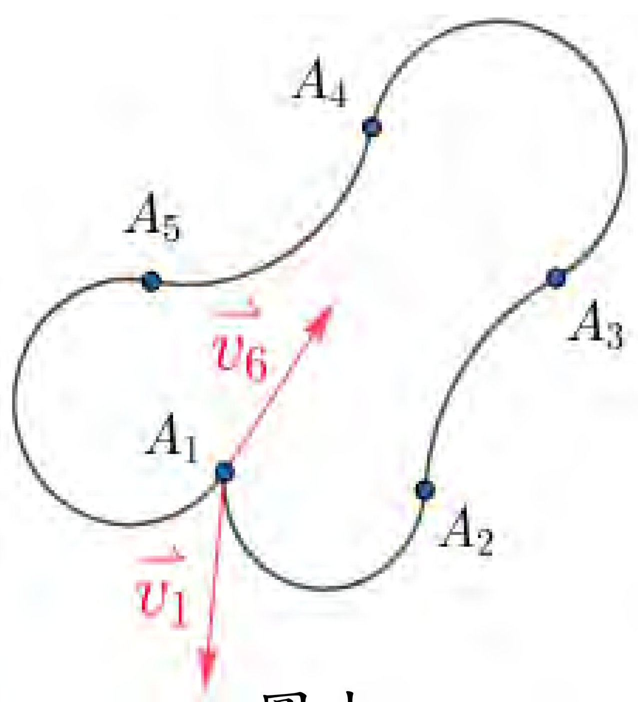
圖七



圖八



圖九

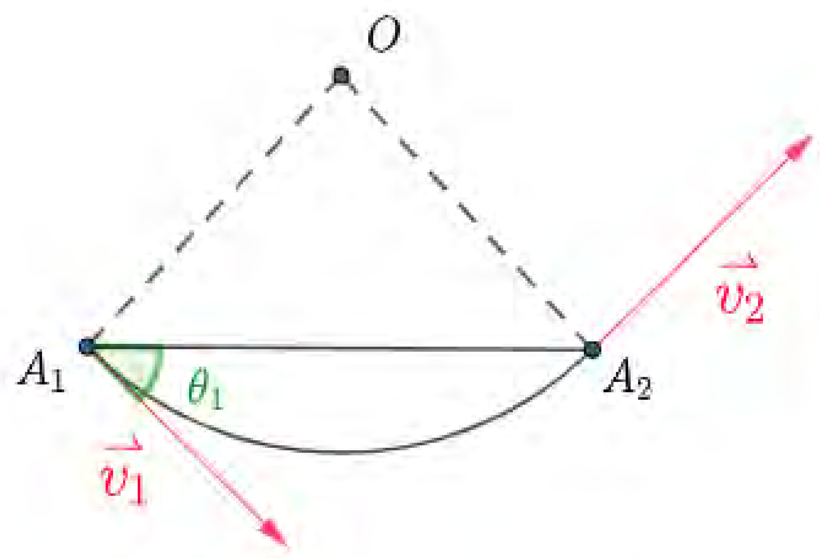


圖十

三、三個點的情況及一般化

引理1.1 給定平面上 n 個點，存在以 $\overrightarrow{v_1}$ 為初始向量的光滑解若且唯若 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i \equiv 0\ (mod\ \pi)$ ，如圖十一

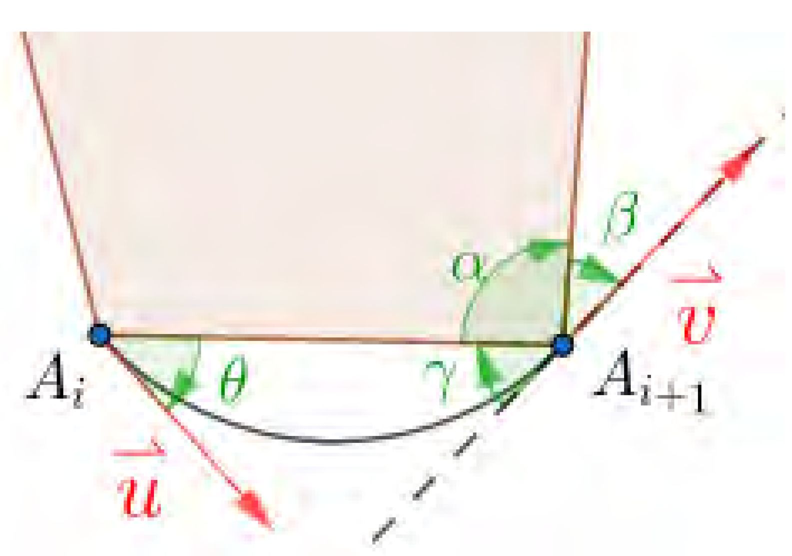
證明：先找到 A_1A_2 的圓心 O。很明顯的，$\angle A_1OA_2$ 為 $-2\theta_1$，故 $\overrightarrow{v_1}$ 向量旋轉 $-2\theta_1$ 即可得到向量 $\overrightarrow{v_2}$；同理，以 $\overrightarrow{v_i}$ 旋轉 $-2\theta_i$ 可得 $\overrightarrow{v_{i+1}}$。上面說明了存在以 $\overrightarrow{v_1}$ 為初始向量的光滑解若且唯若 $\overrightarrow{v_{n+1}}=\overrightarrow{v_1}$，化簡後即為所求。



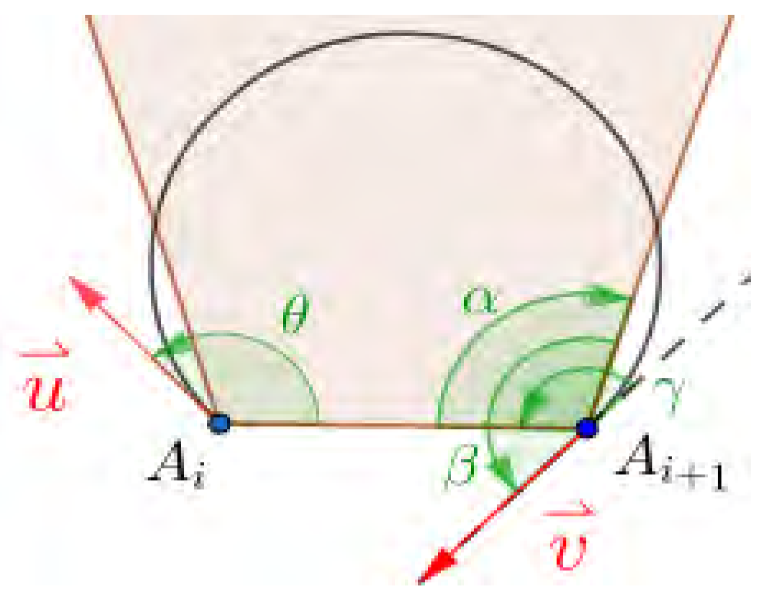
圖十一

引理1.2 給定平面上 n 個點，對 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$，我們有 $\theta_i+\theta_{i+1}+a_{i+1}\equiv 0(mod\ \pi)$。

由圖十二、圖十三可明顯得出上述定理是正確的，且其他情況也一樣，證畢。



圖十二



圖十三

將上述定理代入 $n=3$ 運算，可得在三點的情況中，光滑解存在，若且唯若 $0\equiv\sum_{i=1}^{3}\theta_i\equiv\theta_1-\alpha_3(mod\ \pi)$，即 $\theta_1\equiv\alpha_3(mod\ \pi)$。表示初始切向量 v_1 在 A_1 必須與外接圓在 A_1 的切線平行。因此，我們可以推出三個點的解必為其外接圓(其一軌跡為外接圓，另一為線段重合的外接圓)。

引理1.3 延續上述符號，對任一正整數 n，我們有：

(1) $\sum_{i=1}^{2n-1}\theta_i\equiv\theta_1-\sum_{j=2}^{n}\alpha_{2j-1}(mod\ \pi)$

(2) $\sum_{i=1}^{2n}\theta_i\equiv-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{2j}(mod\ \pi)$

由於上述兩式較難閱讀，我們將其寫成：

1. 若 n 是奇數，則 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i\equiv\theta_1-\alpha_3-\alpha_5-\cdots-\alpha_n(mod\ \pi)$
2. 若 n 是偶數，則 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i\equiv-a_2-a_4-\cdots-a_n(mod\ \pi)$

定理1.4 延續上述符號，給定平面上 n 個點，我們有：

(1) 若 n 為奇數，則必定存在光滑解，但 $\overline{A_1A_2}$ 與初始向量 v_1 的夾角 θ_1 必須滿足 $\theta_1\equiv\alpha_3+\alpha_5+\cdots+\alpha_n(mod\ \pi)$。

(2) 若 n 為偶數，則存在光滑解若且唯若內角滿足 $\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_n\equiv 0(mod\ \pi)$。在解存在的情況下，初始向量 v_1 可以是任意的。

四、尺規作圖

因為隨便選一個初始向量大多是沒有光滑解的，如圖十四。所以我們希望透過增加新點來使此圖形光滑。

為了找到符合兩個初始向量的光滑圓弧，我們希望透過增加一個適當的點當作中繼站(如圖十五)，利用兩段光滑圓弧來達成。我們利用尺規作圖找出該新點的方法：

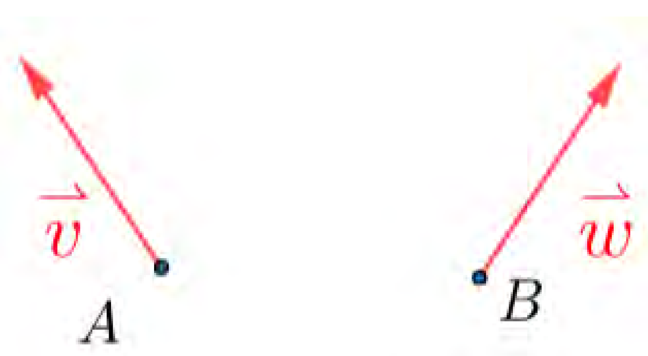
1.給定 A、B 兩點以及向量 $\vec{v}$、$\vec{w}$。

2.過 A、B 兩點分別作和向量 $\vec{v}$、$\vec{w}$ 平行的直線 m、n，令其交於 O 點。

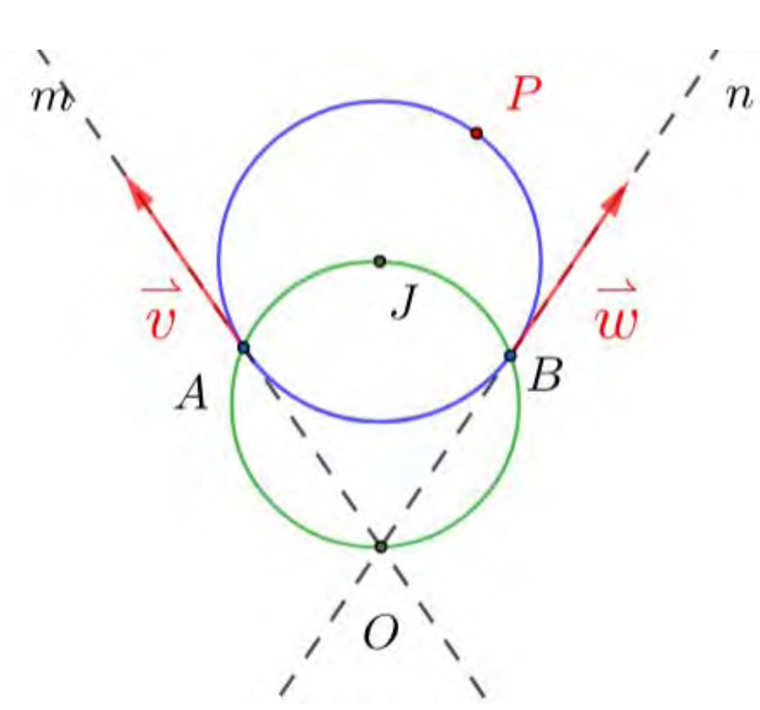
3.作過 O,A,B 三點的圓。

4.取 AB 的中點 J，並以 J 為圓心、$\overline{JA}$ 為半徑作圓。

5.圓 J 上任一點都是可選擇的中繼點。



圖十四



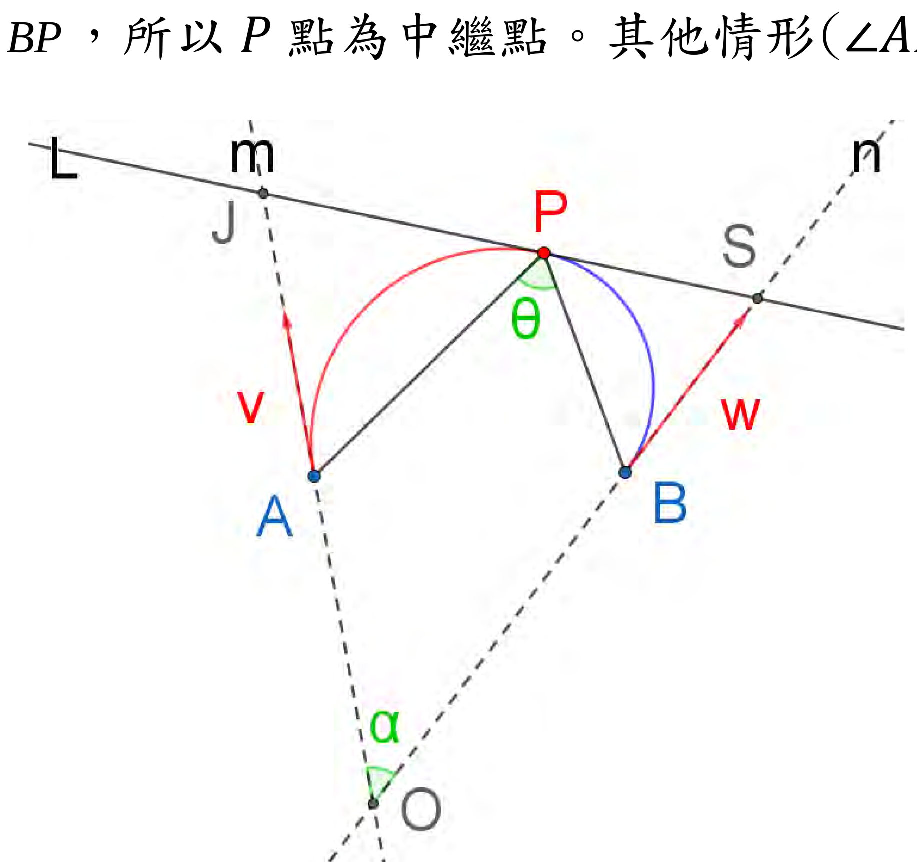
圖十五

五、尺規作圖證明

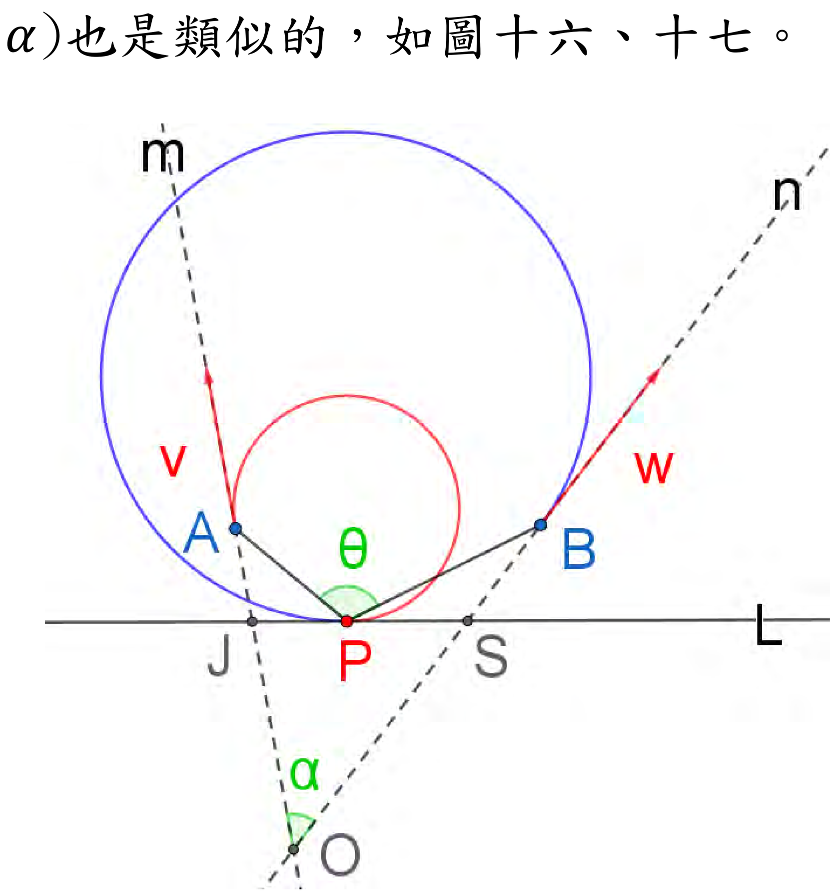
引理2.1 給定 A、B 兩點和 A、B 上的兩向量 $\vec{v}$、$\vec{w}$。

過 A、B 兩點作分別平行向量 $\vec{v}$、$\vec{w}$ 的直線 m、n，令其交於 O 點、$\angle AOB=\alpha$，則 P 點為中繼點若且唯若 $\angle APB=90^\circ\pm\frac{1}{2}\alpha$。

存在以 $\overleftrightarrow{PS}$ 和 n 為切線的 BP，所以 P 點為中繼點。其他情形($\angle APB=90^\circ\pm\frac{1}{2}\alpha$)也是類似的，如圖十六、十七。



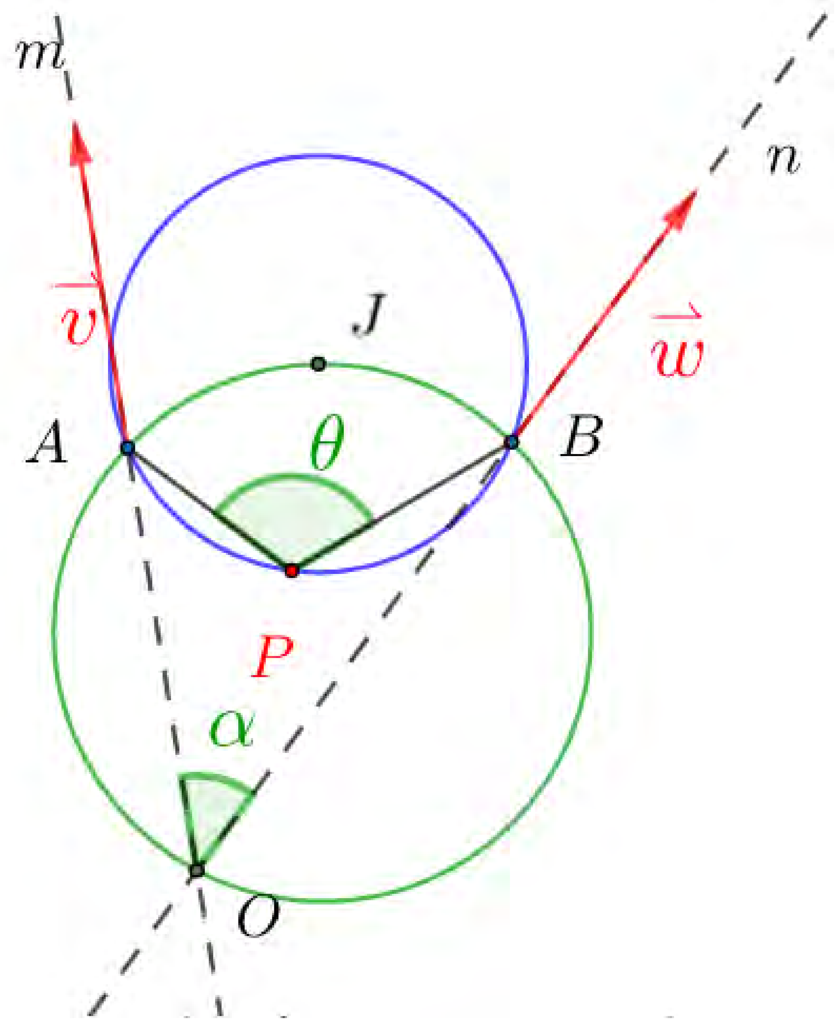
圖十六



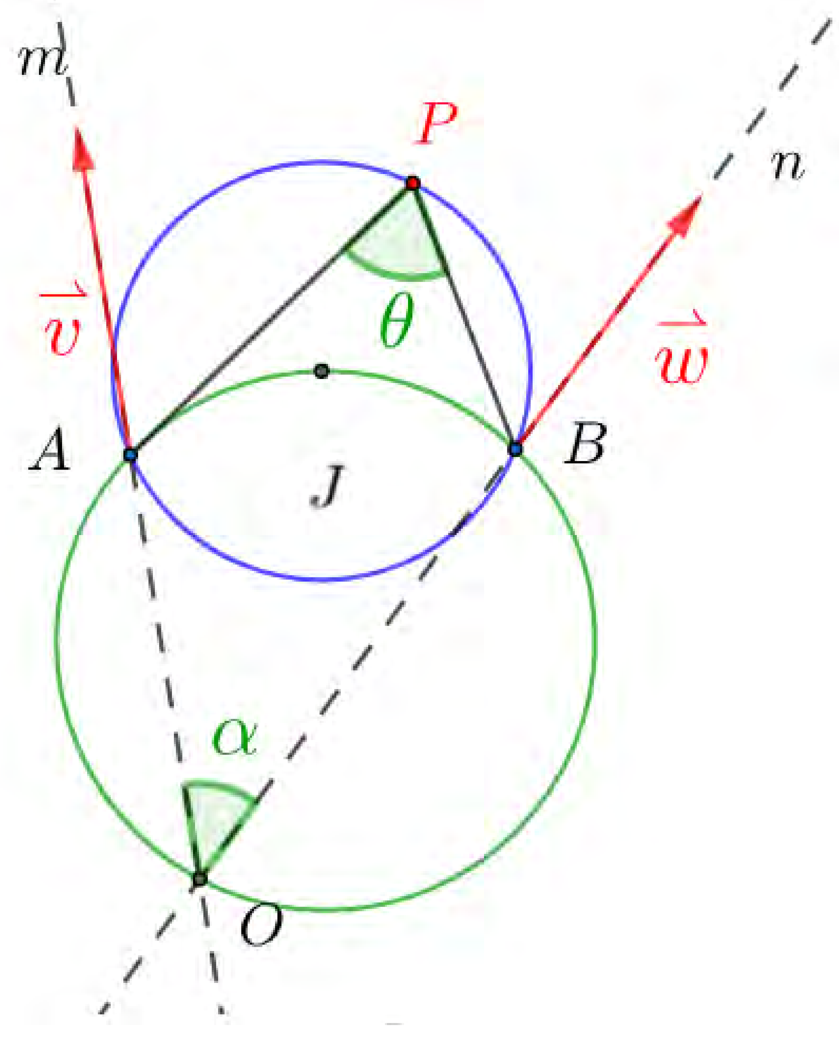
圖十七

定理2.2 上述尺規作圖是正確的，且圓 J 上的點即為所有中繼點。

說明：利用四點共圓、圓心角及圓周角的關係，證明出圓 J 上的每一點都是$90°\pm\frac{1}{2}\alpha$；且除了圓 J 上的點，沒有其他的點滿足 $90°\pm\frac{1}{2}\alpha$。接著再套用上面的引理 2.1，即得證。



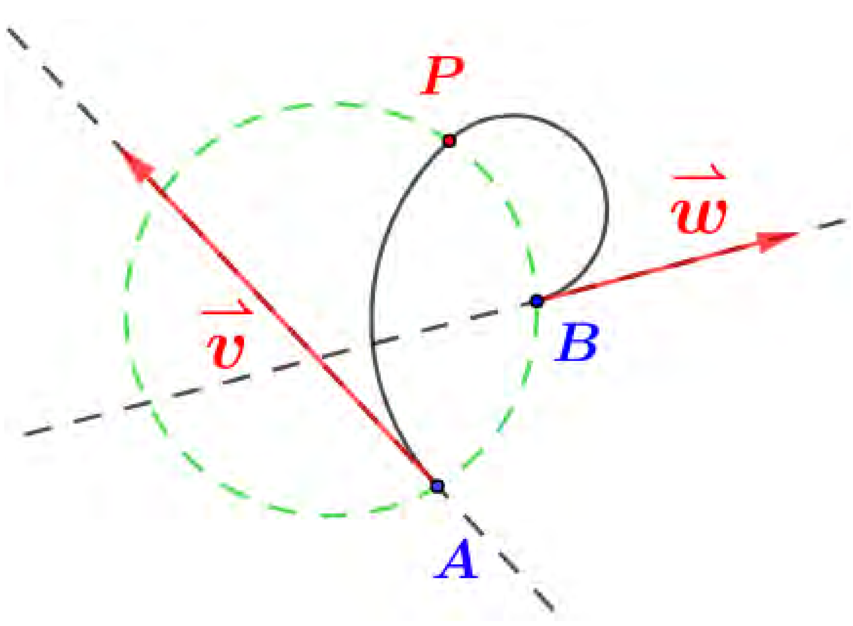
圖十八



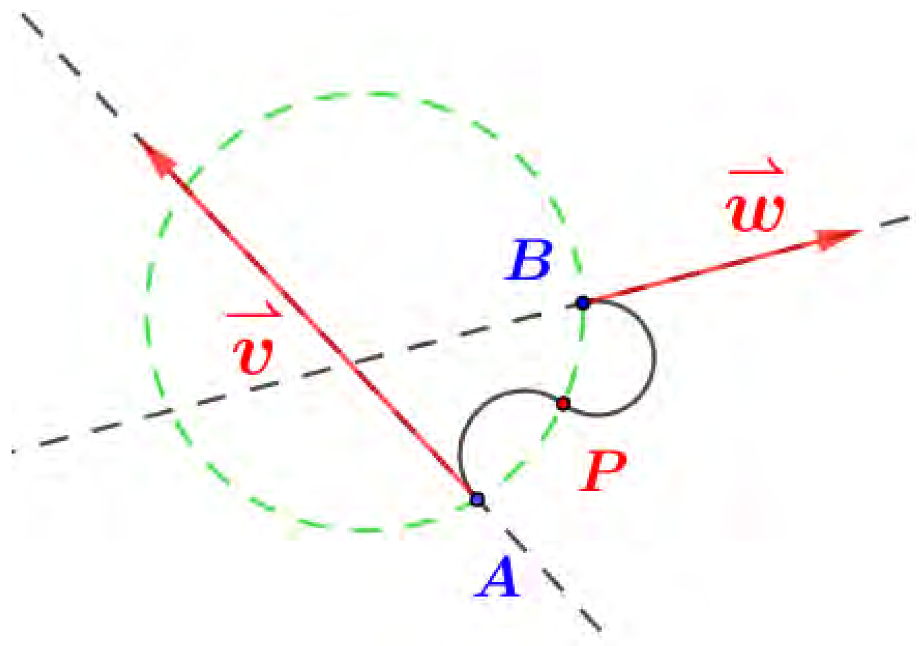
圖十九

六、增點後的圓弧走向

(一)若中繼點 P 落在第一、三象限，則兩段圓弧順、逆時針趨勢相同，如圖二十。
(二)若中繼點 P 落在第二、四象限，則兩段圓弧順、逆時針趨勢相反，如圖二十一。



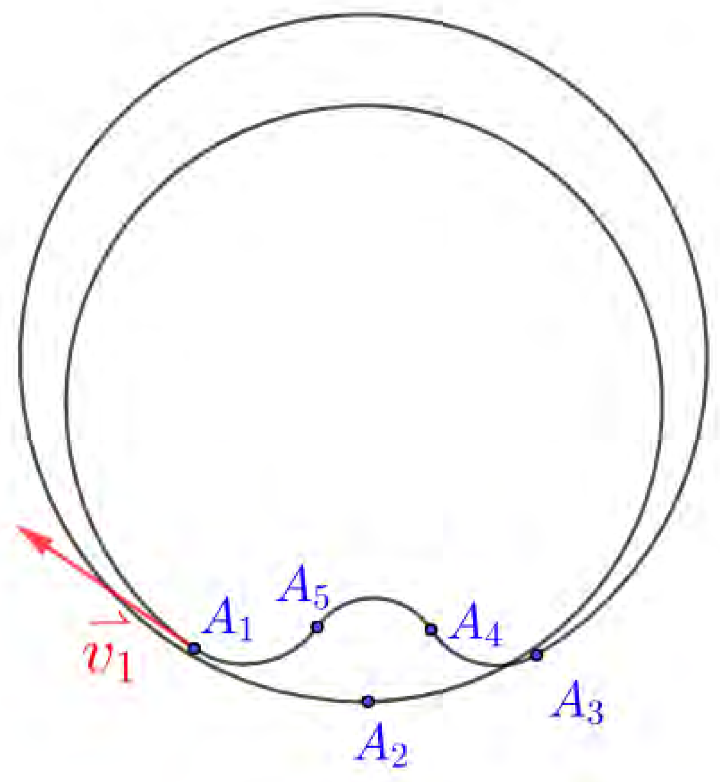
圖二十



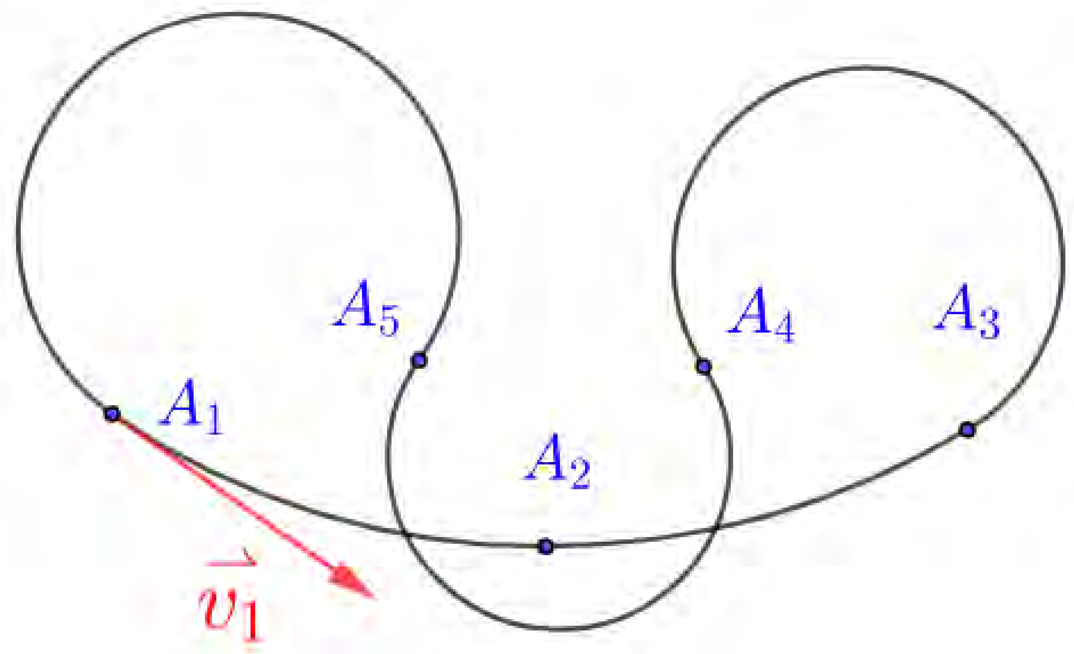
圖二十一

七、自交情形討論

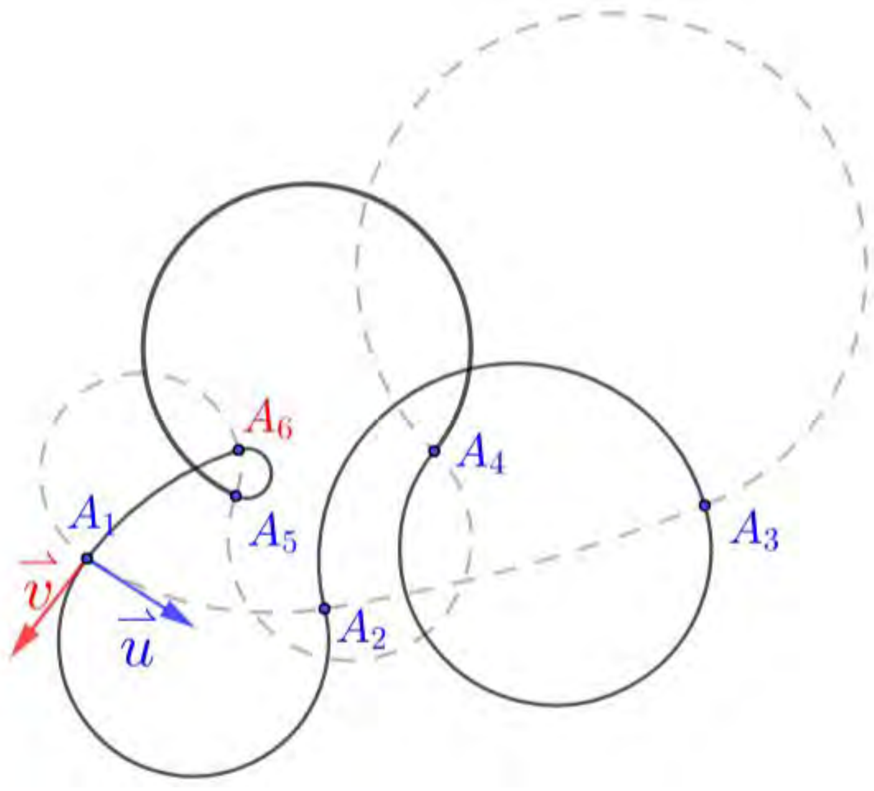
(一) 給定平面上任 n 點，$n\geq 3$ 且為奇數，已知必存在 2 組光滑解。我們發現有可能兩組解都自交，如圖二十二、二十三。
(二) 偶數點並沒有較好的性質。即使在偶數點存在無限組解的情形，也可能當中並沒有任何一組解是不自交的，圖二十四中，無限多個解都會自交。



圖二十二



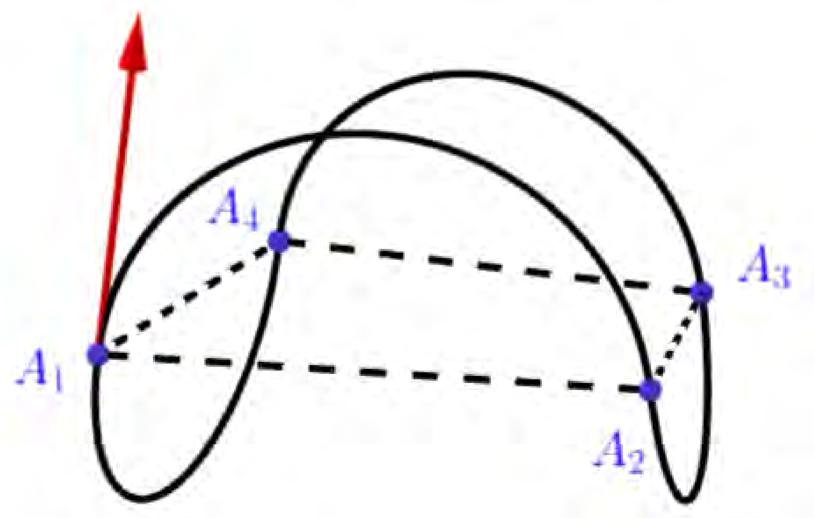
圖二十三



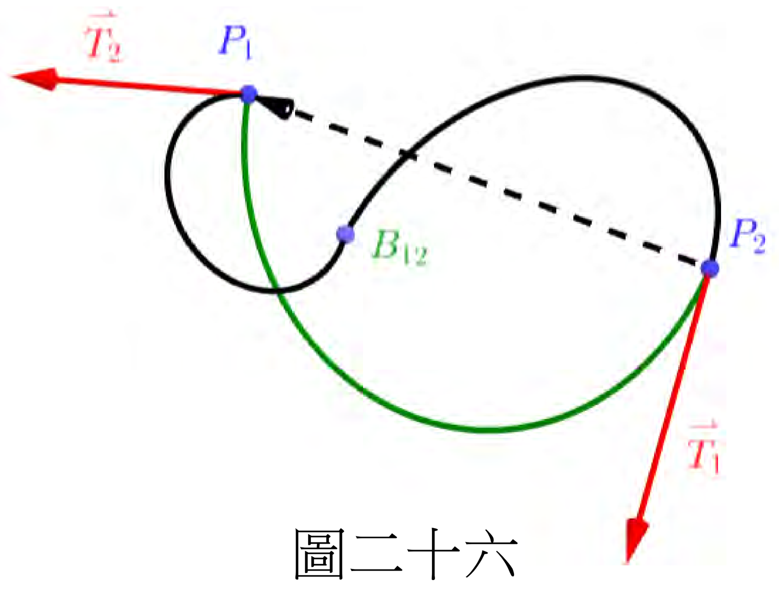
圖二十四

八、三維的猜想

猜想一 給定三維空間中的 n 個點，如果 n 為奇數，則必定存在光滑解；若 n 為偶數且光滑解存在，則存在無限多組光滑解。且空間中的中繼點軌跡為二次曲線局部。



圖二十五



圖二十六

參、結論

一、平面上存在奇數點時，必定存在光滑解，且恰有 2 組解
二、平面上存在偶數點時，光滑解不一定存在，解存在的情形下有無限多組解
三、自交情形不可避免
四、可透過增加點來達到不自交
五、增加的新點軌跡是圓

肆、未來展望

我們已經完成光滑解存在的充分必要條件，也找到光滑解不存在的解決方法。唯「至少要加幾個點」才能達到不自交，我們尚未討論。期待日後繼續研究。

伍、參考資料

一、國中數學課本第四冊第二章：平面幾何圖形。南一書局
二、國中數學課本第五冊第二章：圓的性質。南一書局
三、J. H. Maddocks, P. Buser, S. Hidebrandt, A. Quarteroni, G. Wanner (2004). *Global Radii of Curvature, and The Biarc Approximation of Space Curves: In Rursuit of Ideal Knot Shapes*, pp 39-53.
四、Haken Tiftikci (2009). *Biarc Curve Fitting.*