

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

第三名

030405

「金」螺想窈窕，「多」切要合度

學校名稱：桃園市立中壢國民中學

作者： 國二 溫堉佑	指導老師： 蔡牧航 鄭宇清
---------------	---------------------

關鍵詞：黃金比例、黃金切割、螺線

摘要

本研究旨在探討：

- (一) 藉由黃金切割的基本原則推廣至黃金多邊形，並求出其螺線方程式。
- (二) 透過產出極點的方式作出黃金多邊形中 α 任意值的黃金螺線，並推導出黃金螺線方程式 $r = ae^{b\theta}$ 中的係數 b 與 α 的關係式。
- (三) 由矩形的切割點特殊情形，延伸探討黃金多邊形特殊情形時的 α 值，並將這些角度與 α_n 最小臨界值作分析，找出這些特殊 α 的規則與 α_n 區間規律。

壹、 研究動機

以前就聽過黃金比例這個名詞，在好奇心的驅使下，我上網搜尋相關資料，無意間看到黃金三角形，靈光一閃：那麼五邊形、六邊形、甚至是多邊形是否也能產出黃金切割？其條件又是甚麼？是否都能產出黃金螺線？若是，產出的螺線又是否存在某種規則？

貳、 研究目的

- 一、歸納多邊形黃金切割的基本原則。
- 二、以黃金切割基本原則，作出五邊形的黃金切割，證明其可切割性，並整理其性質。
- 三、以五邊形切割的結果探討四邊形與三角形的切割。
- 四、以五邊形切割的結果探討六邊形的切割。
- 五、探討多邊形的黃金切割。
- 六、探討切割點的特殊情形。
- 七、 α 值探討。
- 八、探討黃金多邊形的黃金極點。
- 九、探討黃金螺線方程式與 α 的關係。

參、文獻探討

一、黃金比例(φ)

李維歐(2002)著作中提及黃金比例的定義為： $(a + b) : a = a : b = \varphi : 1$ ，若以 $b = 1$ 代入並整理成一元二次方程式用公式解求得 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。且從方程式得黃金比例的具以下特性：

$$(一) \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$(二) \quad \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

根據第(一)項特性，在自己運算後得出以下結果：

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi(\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi(2\varphi + 1) = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = \varphi \cdot \varphi^4 = \varphi(3\varphi + 2) = 3\varphi^2 + 2\varphi = 5\varphi + 3$$

$$\varphi^6 = \varphi \cdot \varphi^5 = \varphi(5\varphi + 3) = 5\varphi^2 + 3\varphi = 8\varphi + 5$$

$$\varphi^7 = \varphi \cdot \varphi^6 = \varphi(8\varphi + 5) = 8\varphi^2 + 5\varphi = 13\varphi + 8$$

⋮

$$\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1} (F_n \text{ 為費氏數列第 } n \text{ 項, } n \in \mathbb{N}, \text{ 費氏數列首項為 } 1; \text{ 第 } 0 \text{ 項為 } 0 (\text{Fibonacci numbers}[7]))$$

二、黃金矩形

黃金矩形是長寬符合黃金比例的矩形(圖 4-1)。(白啟光[2])

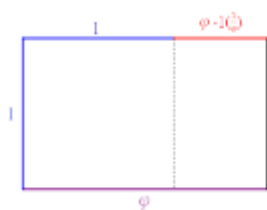


圖 4-1

白啟光(2002)論及一個黃金矩形可以不斷地被分為正方形及較小的黃金矩形，通過這些正方形的端點(黃金分割點)，可以描出一條黃金螺線，而螺線的中心正好是第一個黃金矩形及第二個黃金矩形的對角線交點，也是第二個黃金矩形與第三個黃金矩形的對角線交點(圖 4-2)。

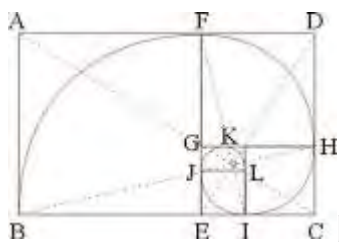


圖 4-2

三、黃金三角形

黃金三角形是底與腰的長度比為黃金比值的等腰三角形(蘇惠玉[3])，有 $108^\circ-36^\circ-36^\circ$ (以下簡稱 108° 黃金三角形)(圖 4-3)和 $36^\circ-72^\circ-72^\circ$ (以下簡稱 36° 黃金三角形)(圖 4-5)兩種，兩者皆可依規律無限切割劃出黃金螺線。

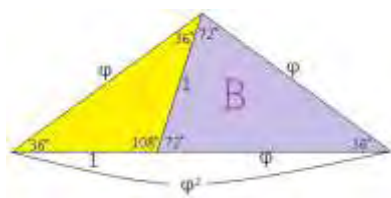


圖 4-3

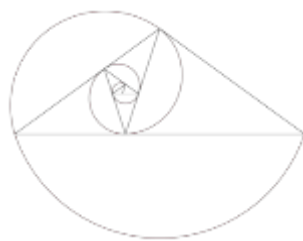


圖 4-4

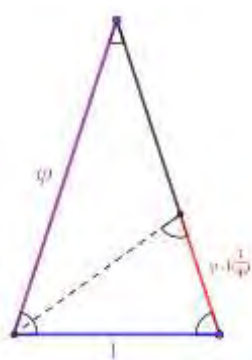


圖 4-5

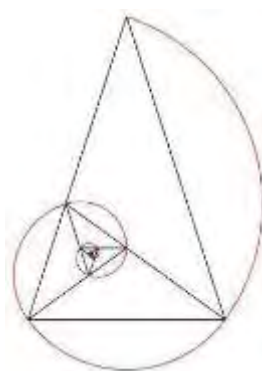


圖 4-6

四、黃金螺線

趙文敏(2002)談及將黃金矩形或黃金三角形可連接各對應點形成黃金螺線(除非特別註明，本研究所謂「螺線」即為黃金螺線)，黃金螺線具有以下性質：

- (一) 黃金螺線以一點為中心向內旋繞逼近，這點稱為「極點」。
- (二) 黃金螺線是自我相似的。
- (三) 穿過極點的任意直線與黃金螺線相交的角永遠相等，故又名「等角螺線」。
- (四) 以極點為圓心的任意圓與黃金螺線相交的角永遠相等，此角度為「傾斜度」。
- (五) 黃金螺線的方程式為 $r = ae^{b\theta}$ (a, b 為常數； e 為自然對數底數)，故又名「對數螺線」。

五、科展相關作品分析、比較

比較了兩篇與本研究有相關的科展作品，其基本資料如表 4-1：

屆數	組別	作品名稱	作者	得獎狀況
三十四	高中組	有趣的對數螺線	王聖文	第二名
五十四	國中組	空間螺線的代數分析	許浩鳴	佳作

表 4-1

(一) 有趣的對數螺線

這篇研究先分析平面上的對數螺線，再推廣到空間的情形。由於本研究的方向與空間的關係較小，因此分析、比較這篇研究以第(一)部分平面上的對數螺線為主。

這篇研究有探討黃金矩形、 36° 黃金三角形的黃金螺線方程式。王聖文（1994）判別是否可形成對數螺線的方法是：一系列多邊形串旋繞向內一點 O ， O 與多邊形串的各對應頂點分別連線，這些線段若成一定比例不斷縮放，即為對數螺線性質，則此圖形可形成對數螺線。

以黃金矩形為例：如圖 4-7，經證明得 $\triangle BOD \sim \triangle DOF \sim \triangle FOH \sim \triangle HOI \cdots$ ，因此可得： $\frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OF} =$

$\frac{OF}{OH} = \frac{OH}{OJ} = \varphi$ ，此即為對數螺線性質。

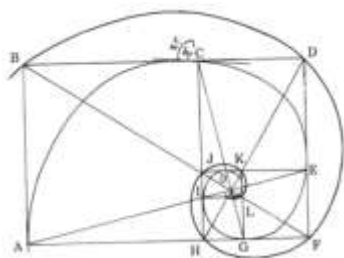


圖 4-7

這篇研究的黃金螺線是以螺線極點至多邊形上一點的射線為極坐標軸來建構黃金螺線方程式，但我認為以這種方式，不同多邊形的黃金螺線之間統一性不夠大，較難用來觀察不同圖形螺線係數之間的關係，因此本研究以黃金螺線極點為極坐標原點，以過極點平行直角坐標 x 軸、向 x 軸正向的射線為極坐標軸，統一不同多邊形螺線的極座標軸方向。

(二) 空間螺線的代數分析

這篇研究的分為七個部分探討，前三部分探討正多面體的外型、個數、體積的代數關係，後四部分則是探討阿基米德螺線與等角螺線建構再三維與正多面體的狀況，並比較兩者的重合狀況。

這篇研究是以立體出發，並將螺線研究著重在正四面體螺線方程式係數的探討，本研究則是以平面圖形為出發點，螺線研究以係數與角度的關係為探討重點，有所差異。

這篇研究建構的螺線系統性的定義與解釋較不明確，以不同數字逐一代入檢驗求係數，僅只以 GeoGebra 觀察點是否在螺線上，並未以解方程式方式求係數，嚴謹性也較不足。

肆、研究過程及方法

一、名詞定義

- (一) **黃金多邊形**：符合黃金切割基本原則的多邊形。
- (二) **切割線**：將黃金多邊形做黃金切割時表示分割的線段，即本研究的 \overline{ST} 。
- (三) **切割點**：黃金多邊形切割線與該圖形會有兩個交點，依據作圖方式，其中一點是不會因為 α 值的不同而改變位置(即本研究的 T)；另一點會因 α 值的不同而改變位置(即本研究的 S)，這一點便是本研究所謂的切割點。
- (四) **頂邊**：黃金多邊形中，與切割線相交於切割點的邊。
- (五) **底邊**：與切割線交於另外一點(非切割點)的邊。
- (六) **指定角**：任意黃金多邊形在作圖時須給定的角，其角度為 α 。

二、符號意義

- (一) φ ：黃金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。
- (二) α ：指定角角度。
- (三) α_n ：黃金 n 邊形的指定角角度。
- (四) β ： α 的補角。
- (五) A (斜體字)：以 GeoGebra 在繪圖區直接作圖方式作出的黃金多邊形頂點 A 。
- (六) A_x ：以 GeoGebra 試算表輸入方式作出的黃金多邊形，切割後第 x 個頂點 A 的對應點，與直接作圖的黃金多邊形頂點名稱有所差異。第一個黃金多邊形的頂點 A 定義為 A_1 。以 G_x 表示任意黃金多邊形切割後第 x 個切割點的對應點；以 V_x 表示任意黃金多邊形第 x 個頂點的對應點(切割點除外)。

三、黃金切割的性質

綜合比較黃金矩形與黃金三角形，歸納黃金矩形與黃金三角形切割的共同特性如下：

- (一) 黃金切割後的圖形與原圖形必為相似形。
- (二) 黃金切割後的圖形與原圖形的對應邊邊長比為 $1:\varphi$ 。
- (三) 任意黃金多邊形依規律可以無限切割產出無限多個相似的黃金多邊形。

這三項特性在本研究稱為「黃金切割的基本原則」(以下簡稱「基本原則」)，接下來研究中所有的黃金多邊形皆必須符合這三項基本原則。

四、五邊形的黃金切割

根據基本原則，原始的五邊形與切割後的五邊形必須相似。黃金三角形能切割出一個黃金三角形，加上一個三角形；黃金矩形切割出一個黃金矩形，加上一個矩形；但兩個圖多邊形結合，最多只能消去兩個角，因此推展到五邊形，便無法切割出一個黃金五邊形加上一個五邊形，只能在切割後產生一個五邊形加一個四邊形(圖 5-1)。

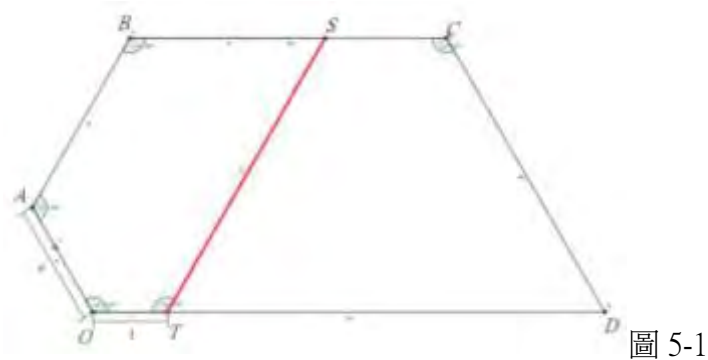


圖 5-1

由於切割翻轉過後的五邊形必須與原五邊形相似，即五邊形 $TOABS$ 與五邊形 $OABCD$ 相似，且其對應邊長比為黃金比例， $\angle STO$ 的對應角為 $\angle DOA$ ； $\angle TOA$ 的對應角為 $\angle OAB$ ； $\angle OAB$ 的對應角為 $\angle ABC$ ； $\angle ABS$ 的對應角為 $\angle BCD$ ，以上這些角(綠色)的角度必須相等，本研究將這些角定義為指定角，其角度為 α 。

發現 α 有一定的範圍限制，為了找尋 α 的最小臨界值(當 S 與 B 重合時，圖形變為四邊形)及最大值，使用 GeoGebra 的角度滑桿功能，將 α 值設為變數，尋找其最小臨界值及最大值，求得 α 最小臨界值介於 105.54° 及 105.55° 之間；最大值大約值介於 124.19° 及 124.2° 之間。

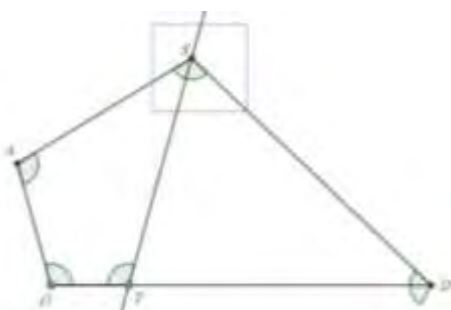


圖 5-2： α 最小臨界值， S 與 B 重合 C 與 D 重合

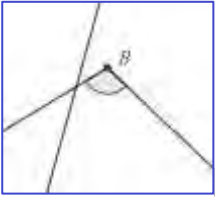


圖 5-3 : $\alpha = 105.54$



圖 5-4 : $\alpha = 105.55$

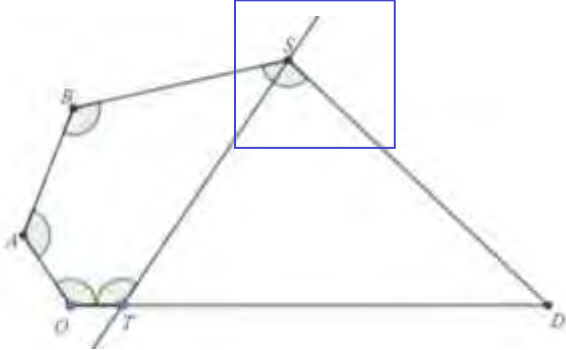


圖 5-5 : α_s 最大值, S 與 C 重合

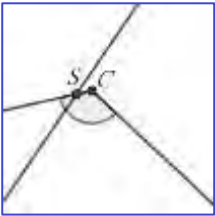


圖 5-6 : $\alpha = 124.19$

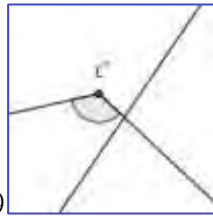


圖 5-7 : $\alpha = 124.2$

當 α_s 為最大值時, $\overline{SC} = 0$, 且 $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \varphi$, 且此時能切割出一個五邊形加上一個三角形。

為證明在 α 為任意角時的切割線與原五邊形的對應邊呈黃金比例, 故改以三角函數表示各點座標及邊長(圖 5-8) :

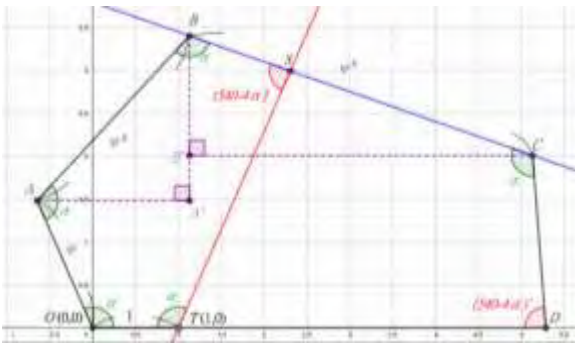


圖 5-8

$$\overline{OT} = 1, \overline{OA} = \varphi, \overline{AB} = \varphi^2, \overline{BC} = \varphi^3$$

$A(\varphi \cos \alpha, \varphi \sin \alpha)$, 在 B 往下(x 座標不變)與 A 往右(y 座標不變)的交會點設一點 A' , 則 BAA' 為一直角三角形, 其中 $\angle OAA' = (180 - \alpha)^\circ$; $\angle BAA' = \alpha - \angle OAA' = (2\alpha - 180)^\circ$

求得 $A'(\varphi \cos \alpha + \varphi^2 \cos(2\alpha - 180)^\circ, \varphi \sin \alpha) \rightarrow A'(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha, \varphi \sin \alpha)$

又 $\overline{A'B} = \varphi^2 \sin(2\alpha - 180)^\circ = -\varphi^2 \sin 2\alpha$, 且 B 與 A' 的 x 座標相同,

則 $B(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha)$

在 B 往下(x 座標不變)與 C 往左(y 座標不變)的交會點設一點 B' ，則 $\triangle CBB'$ 為直角三角形，其中 $\angle ABB' = (180 - \angle BAA' - 90)^\circ = (270 - 2\alpha)^\circ$ ； $\angle CBB' = \alpha - \angle ABB' = (3\alpha - 270)^\circ$

$$\overline{BB'} = \varphi^3 \cos(3\alpha - 270)^\circ = -\varphi^3 \sin 3\alpha$$

$$\text{求得 } B' (\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha + \varphi^3 \sin 3\alpha)$$

$$\text{又 } \overline{B'C} = \varphi^3 \sin(3\alpha - 270)^\circ = \varphi^3 \cos 3\alpha, \text{ 且 } C \text{ 與 } B' \text{ 的 } y \text{ 座標相同,}$$

$$\text{則 } C(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha + \varphi^3 \cos 3\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha + \varphi^3 \sin 3\alpha)$$

$$\text{斜率 } \overline{CD} = \tan(180 - \angle CDO)^\circ = \tan 4\alpha$$

代入 C 點，求得 \overline{CD} 的直線方程式：

$$y - (\varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha + \varphi^3 \sin 3\alpha) = \tan 4\alpha [x - (\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha + \varphi^3 \cos 3\alpha)]$$

$$\text{以 } y = 0 \text{ 代入, 得 } x = \frac{\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)}{\tan 4\alpha}$$

$$D\left(\frac{\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)}{\tan 4\alpha}, 0\right)$$

$$\text{斜率 } \overline{BC} = -\tan(90 - \angle CBB')^\circ = \tan 3\alpha$$

代 $B(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha)$ ，求得 \overline{BC} 的直線方程式：

$$y - (\varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha) = \tan 3\alpha [x - (\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha)]$$

$$\text{斜率 } \overline{ST} = \tan(180 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha$$

代 $T(1,0)$ ，求得 \overline{ST} 的直線方程式： $y = -\tan \alpha (x - 1)$

列出聯立方程式，求 \overline{BC} 與 \overline{ST} 的交點 S ：

$$\begin{cases} y - (\varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha) = \tan 3\alpha [x - (\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha)] \textcircled{1} \\ y = -\tan \alpha (x - 1) \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{以 } y = -\tan \alpha (x - 1) \text{ 代入式 } \textcircled{1}, \text{ 得 } x = \frac{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}$$

$$\text{將 } x \text{ 值代入式 } \textcircled{2} \text{ 得 } y = \frac{\tan \alpha [-\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) + \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}$$

$$S\left(\frac{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}, \frac{\tan \alpha [-\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) + \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}\right)$$

在角度為 α 時的各點座標：

$$O(0,0), A(\varphi \cos \alpha, \varphi \sin \alpha), B(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha)$$

$$C(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha + \varphi^3 \cos 3\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha + \varphi^3 \sin 3\alpha)$$

$$D\left(\frac{\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)}{\tan 4\alpha}, 0\right)$$

$$S\left(\frac{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}, \frac{\tan \alpha[-\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) + \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}\right)$$

$$T(1,0)$$

用畢氏定理求得在角度為 α 時 \overline{ST} 長：

$$\begin{aligned} \overline{ST} &= \sqrt{\left[\frac{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan 3\alpha} - 1\right]^2 + \left\{\frac{\tan \alpha[-\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) + \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}\right\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2} [\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) - \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha} \\ \frac{\overline{DO}}{\overline{ST}} &= \frac{\frac{\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)}{\tan 4\alpha}}{\frac{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2} [\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) - \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}} \\ &= \frac{(-\cos \alpha + \sin \alpha \tan 3\alpha) [\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)]}{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) - \tan 3\alpha} \end{aligned}$$

由於式子過於複雜無法再作化簡，於是將這串式子輸入到 Wolfram Alpha 去計算，但

Wolfram Alpha 卻無法理解代數 φ 的意義，以致無法正確計算。將 φ 以 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 代入，式子過長無法輸入。以 k 取代 φ ，計算失敗。因此改以 1,2,1.6,1.7 的順序代入，逐漸逼近 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，發現 φ 代入 1 得 1；代入 2 得 2；代入 1.6 得 1.6；代入 1.7 得 1.7。推論：以 φ 表示，其值為 φ 。

由於以坐標方式呈現線段長的三角函數式子過於複雜，以致難以化簡，因此又以幾何證明方式說明其相似性(圖 5-9、5-10)：

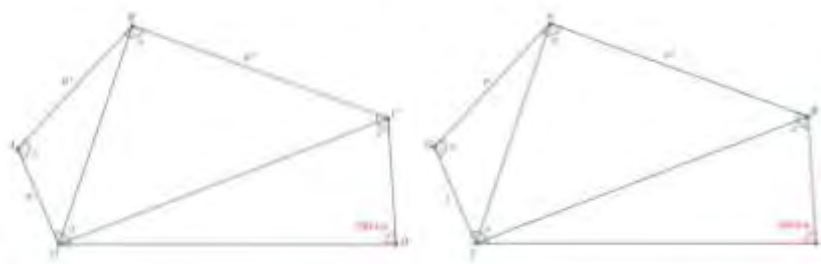


圖 5-9：五邊形 $OABCD$ 圖 5-10：五邊形 $TOABS$

將五邊形 $OABCD$ 與五邊形 $TOABS$ 分開，並切成三個三角形，其中 $\frac{\overline{OA}}{\overline{TO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \varphi$ 且

$\angle OAB = \angle TOA = \alpha$ ，以三角形 SAS 相似性質得證 $\triangle OAB \sim \triangle TOA$ 。由上述結果可知 $\overline{OB} = \varphi \overline{TA}$ ，

$\angle OBC = \angle TAB = \alpha - \angle ABO = \alpha - \angle OAT$ 又 $\frac{OB}{TA} = \frac{BC}{AB} = \varphi$ ，以三角形 SAS 相似性質得證

$\triangle OBC \sim \triangle TAB$ 。 $\angle CDO = \angle BST = 540 - 4\alpha$ 且 $\angle OCD = \angle SBT = \alpha - \angle BCO = \alpha - \angle ABT$ ，

以三角形 AA 相似性質得證 $\triangle OCD \sim \triangle TBS$ ，又 $\frac{OC}{TB} = \varphi$ ，得證 $\frac{OD}{TS} = \varphi$ 。

得證五邊形 $OABCD \sim$ 五邊形 $TOABS$

黃金五邊形切割的對應邊長比的比值為 φ ；其面積比值為 φ^2 ，且可依規律無限切割，每次切割產生的五邊形皆是黃金五邊形。

五、四邊形與三角形的黃金切割

以黃金五邊形的作圖方式套用到四邊形上，作出黃金四邊形，且當黃金四邊形 $\alpha = 90^\circ$ 時，圖形便是黃金矩形。

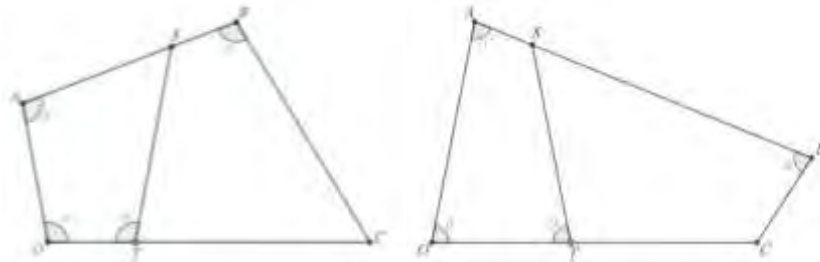


圖 5-11： $\alpha > 90^\circ$ 圖 5-12： $\alpha > 90^\circ$

在四邊形指定角範圍內，不管 α 為多少，皆能產出黃金切割。

接著尋找黃金四邊形指定角角度限制。若 α_5 小於等於黃金五邊形指定角角度最小臨界值，便無法成功作出五邊形，換句話說： α_4 最大值即是 α_5 的最小臨界值，介於 105.53° 及 105.54° 之間；至於 α_4 最小臨界值，同樣以 GeoGebra 角度滑桿功能，發現在 α 為 72° 時， A 與 S 重合、 B 與 C 重合， α_4 的最小值恰為 72° (圖 5-13)。

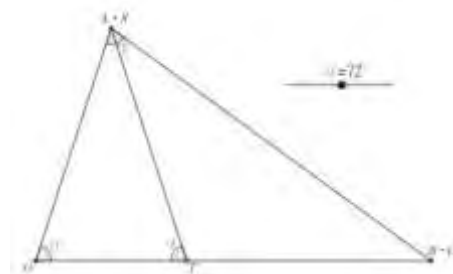


圖 5-13： α_4 的最小臨界值，此圖形即是

$36^\circ-72^\circ-72^\circ$ 的黃金三角形

依相同方式作出三角形的黃金切割(圖 5-14)，本來以為 α_3 的範圍為 $0^\circ \leq \alpha_3 \leq 72^\circ$ ，但將角度滑桿拉至 36° 以下，便無法順利產出符合基本原則的三角形，固得： $36^\circ \leq \alpha_3 \leq 72^\circ$ 。由於黃金三角形是已定義名詞，因此以下提到符合黃金三切割基本原則的三角形改稱為「黃金切割三角形」。

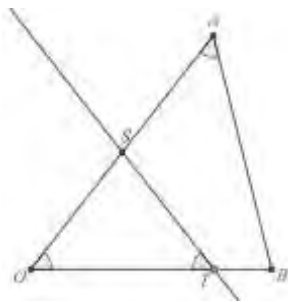


圖 5-14： $\triangle OST \sim \triangle ABO$

六、六邊形的黃金切割

以相同的作圖方式作出黃金六邊形(圖 5-15)。

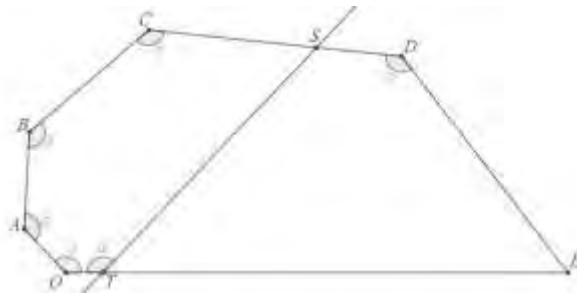


圖 5-15

α_6 的最小臨界值便是 α_5 的最大值，介於 124.19° 與 124.2° 之間 α_6 的最大值介於 135.82° 與 135.83° 之間。

七、多邊形的黃金切割

黃金切割三角形 $\alpha = 36^\circ$ (α_3 最小值) 時，圖形便是 108° 黃金三角形；黃金切割三角形 $\alpha = 72^\circ$ (α_3 最大值，也是 α_4 最小臨界值) 時，圖形便是 36° 黃金三角形，這也是黃金兩種三角形可以切出一個三角形加上一個三角形的原因；黃金四邊形 $\alpha = 90^\circ$ 時，圖形便是黃金矩形，這三種已定義的圖形包含在本研究定義的黃金多邊形中，是黃金多邊形 α 在特定值下的結果。

三角形、四邊形、五邊形、六邊形皆可以相同的方式做黃金切割，因此以這種方式可順利產出七邊形、八邊形、九邊形……甚至是多邊形。

在作黃金多邊形時，作圖方式皆是下列步驟：

- (一) 先作出 \overline{TO}
- (二) \overline{TO} 旋轉 α 作一條等長的線段
- (三) 以 \overline{TO} 為 1 作黃金比例線段 \overline{OA}
- (四) \overline{OA} 旋轉 α 作一條等長的線段
- (五) 以 \overline{OA} 為 1 作黃金比例線段 \overline{AB}

⋮

依照邊數重複動作

在黃金三角形和黃金矩形無限切割後，連接各對應點形成黃金螺線，黃金多邊形各對應點連接形成的曲線，具有向中心極點旋繞逼近以及向外旋繞遠離的現象，且極點極點至各對應點的距離成黃金比例倍數改變，因此過這些點形成一條螺線，由黃金多邊形的作圖方式可以得知，其兩線段形成的角度相同，因此判斷所有黃金多邊形連接對應點皆會形成黃金螺線。

黃金多邊形邊數越大， α 也會越大，也就是說，當黃金多邊形邊數趨近於無限大時， α 會趨近 180° ，此時的黃金多邊形的外緣與其各對應點繞出的等角螺線會趨近重合。

八、切割點特殊情形

在黃金四邊形， $\alpha = 90^\circ$ 時(黃金矩形)會發現一個特殊情形： S 是 \overline{AB} 的黃金分割點(圖 5-16)。

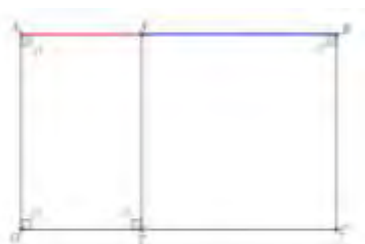


圖 5-16： $\overline{AS} : \overline{SB} = 1 : \varphi$

在黃金切割三角形 $\alpha = 36^\circ$ 時(即 108° 黃金三角形)也有此一特殊情形(圖 5-17)。

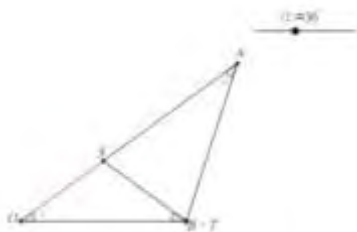


圖 5-17： $\overline{OS} : \overline{AB} = 1 : \varphi$

在 $\alpha = 72^\circ$ 時(即 $36^\circ-72^\circ-72^\circ$ 黃金三角形)切割線的另一交點也是原三角形其中一邊的黃金分割點，但該點非切割點，分割的邊為底邊非頂邊(圖 5-18)，與黃金矩形及 $36^\circ-72^\circ-72^\circ$ 黃金三角形的狀況不同，且當 α 值越來越大(假設黃金多邊形邊數會跟著適當增加)， B 離 T 會越來越遠，永遠不可能再發生相同情形，故不再討論這種特殊狀況。

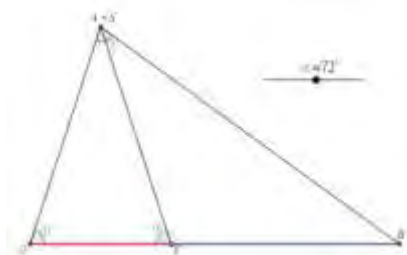


圖 5-18： $\overline{OT} : \overline{TB} = 1 : \varphi$

在黃金五邊形 $\alpha = 120^\circ$ 時，切割點為頂邊的黃金切割點，但 $\overline{BS} : \overline{SC} = \varphi : 1 \neq 1 : \varphi$ 因此不是本研究要尋找的特殊情形(圖 5-19)。為了尋找五邊形的特殊情形，以三角函數座標列式求

反函數。在之前研究計算出指定角角度為 α 時的各點座標，以及部分線段直線方程式(圖 5-20)。

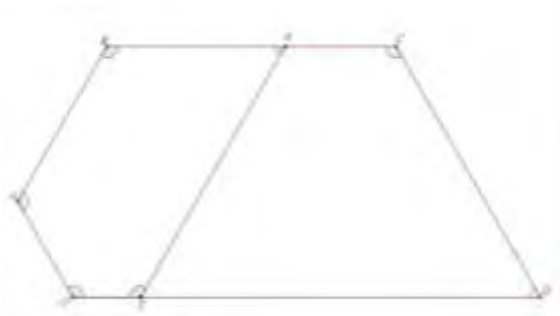


圖 5-19 : $\overline{BS} : \overline{SC} = \varphi : 1 \neq 1 : \varphi$

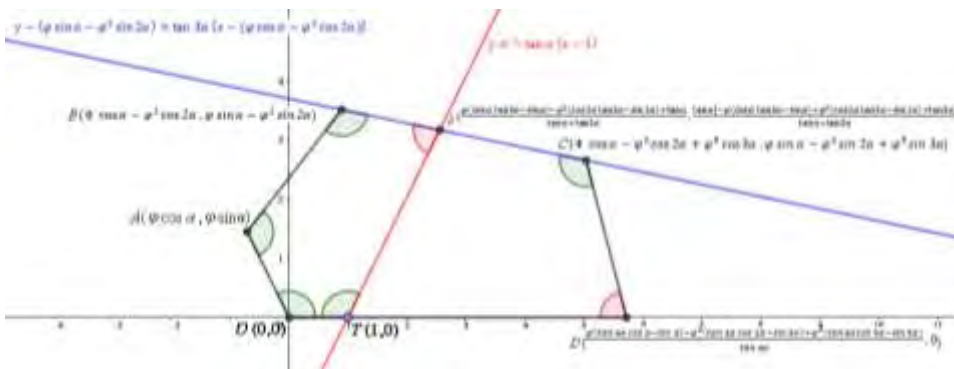


圖 5-20

$$\text{列式經 Wolfram Alpha 化簡得: } \varphi \sqrt{\frac{(1+\varphi^2-2\varphi \cos \alpha+2\varphi^2 \cos 2\alpha)^2}{\cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\varphi^2-2(\varphi+\varphi^3) \cos \alpha+2\varphi^2 \cos 2\alpha-2\varphi^3 \cos 3\alpha)^2}{\cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha}}$$

輸入到 Wolfram Alpha 計算卻算出不合理的答案—— $\alpha = 228^\circ$ ，因此用 GeoGebra 測量距離功能求出 \overline{BS} 與 \overline{SC} 的邊長近似值，發現當 $\overline{BS} : \overline{SC} = 1 : \varphi$ 時， α 介於 115° 與 116° 之間，在繼續逼近將使角度求到小數點後第二位，測量距離到小數點後第三位，發現在 $\alpha = 115.68^\circ$ 時， \overline{BS} 與 \overline{SC} 的長度分別為 1.618 及 2.618 其比例接近 $1 : \varphi$ ，於是將長度測量至小數點後第 15 位，並以輸入數值的方式給定 α 值，以逼近法求更精準的 α 近似值，得 $\alpha \approx 115.682268170753 \dots^\circ$ (圖 5-21)。雖然以輸入方式輸入角度位數沒有限制，但由於長度測量最多只能到小數點後第 15 位，因此 α 值輸入更多位的小數，不會造成長度測量的改變。

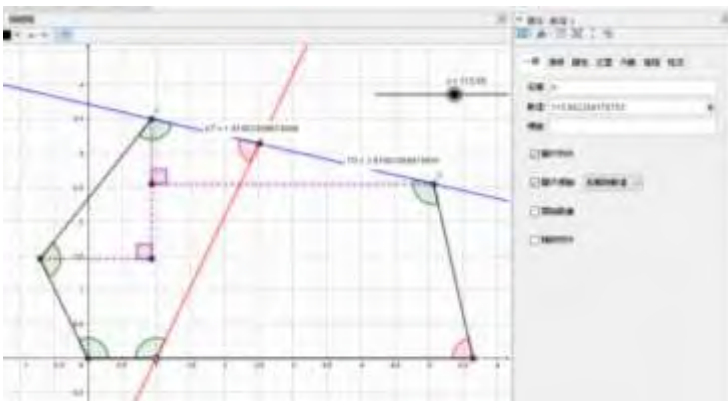


圖 5-21

黃金五邊形 $\alpha=120^\circ$ 時， $\overline{BS} : \overline{SC} = \varphi : 1$ ， α 恰為一個整數值，因此加以探討黃金多邊形「切割點為頂邊之黃金切割點，且將頂邊分割為左邊線段：右邊線段 = $\varphi : 1$ 」時， α 的角度。
 在 $\alpha=60^\circ$ 時， $\overline{OS} : \overline{SA} = \varphi : 1$ ，且此圖形恰巧為正三角形(圖 5-22)。

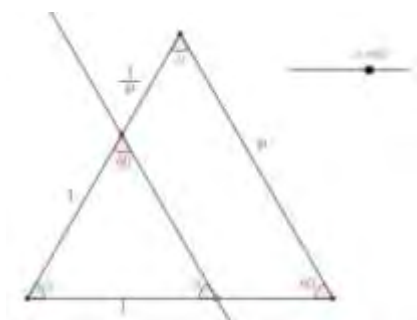


圖 5-22

為了避免和前幾次一樣由於式子過於複雜而無法計算，在找黃金四邊形特殊狀況($\varphi : 1$)時，直接以 GeoGebra 逼近法求兩線段(\overline{AS} 與 \overline{SB})的近似值，得 $\alpha \approx 98.48100096843102 \dots^\circ$ 。

九、 α 值探討

前面的研究有略提 α_n 的範圍，目前已知的概念 α_n 的最小臨界值為 α_{n-1} 的最大值。以前面求黃金多邊形特殊情形的方法來求 α_n 的最小臨界值至 α_{20} 。

之前有探討在角度為某特定數值時，黃金多邊形的特殊情形，將這些數值也拿來探討。黃金多邊形的特殊情形有二：切割點為頂邊的黃金切割點且將其分割為左邊線段：右邊線段 = $1 : \varphi$ (以下簡稱「特殊情形一」)； S 為頂邊的黃金切割點且將其分割為左邊線段：右邊線段 = $\varphi : 1$ (以下簡稱「特殊情形二」)。將 n 為 3~20 的 α_n 最小臨界值，以及特殊情形時 α 值求出、列表(表 5-1)。

n	α_n 最小值	特殊情形一， α	特殊情形二， α
3	36°	36°	60°
4	72°	90°	$98.48100096843102 \dots^\circ$
5	$105.53599424 \dots^\circ$	$115.68226817075300 \dots^\circ$	120°
6	$124.19220405 \dots^\circ$	$130.50274632872573 \dots^\circ$	$133.10997694109343 \dots^\circ$
7	$135.82244999 \dots^\circ$	$140.05453386513099 \dots^\circ$	$141.79152159540554 \dots^\circ$
8	$143.66961725 \dots^\circ$	$146.67324715166323 \dots^\circ$	$147.90777251335980 \dots^\circ$
9	$149.27580034 \dots^\circ$	$151.50212313920404 \dots^\circ$	$152.42104733804110 \dots^\circ$
10	$153.45689271 \dots^\circ$	$155.16432063955598 \dots^\circ$	$155.87264903840510 \dots^\circ$
11	$156.68122132 \dots^\circ$	$158.02713426862440 \dots^\circ$	$158.58834427780296 \dots^\circ$
12	$159.23520630 \dots^\circ$	$160.32033851252303 \dots^\circ$	$160.77499649555140 \dots^\circ$
13	$161.30307815 \dots^\circ$	$162.19459548018095 \dots^\circ$	$162.56978870862268 \dots^\circ$
14	$163.00829298 \dots^\circ$	$163.75253168478512 \dots^\circ$	$164.06700280068349 \dots^\circ$
15	$164.43643517 \dots^\circ$	$165.33340367608660 \dots^\circ$	$165.06629679464988 \dots^\circ$
16	$165.64855347 \dots^\circ$	$166.18798469288016 \dots^\circ$	$166.41748854665409 \dots^\circ$
17	$166.68927003 \dots^\circ$	$167.15607744156780 \dots^\circ$	$167.35526603277780 \dots^\circ$
18	$167.59189574 \dots^\circ$	$167.99957100853590 \dots^\circ$	$168.17398798283736 \dots^\circ$
19	$168.38176042 \dots^\circ$	$168.74069685552213 \dots^\circ$	$168.89462895185120 \dots^\circ$
20	$169.07844129 \dots^\circ$	$169.39676447906457 \dots^\circ$	$169.53357515059813 \dots^\circ$

表 5-1

將表 5-1 求出的結果以折線圖呈現(表 5-2)，發現黃金多邊形邊數越大， α_n 的最小臨界值及最大值(即 α_{n+1} 的最小臨界值)差距會越小，兩特殊情形時 α 值的差距也會越來越小，故推測：黃金多邊形，當邊數趨近無限大時， α_n 的最小臨界值及最大值的差距會趨近相等；兩特殊情形時 α 值的差距也會趨近 0，若推論正確，則可以說：黃金多邊形，當邊數趨近於無限大時， α_n 的最小臨界值、最大值、兩特殊情形時 α 值四者會近乎於同一角度值。

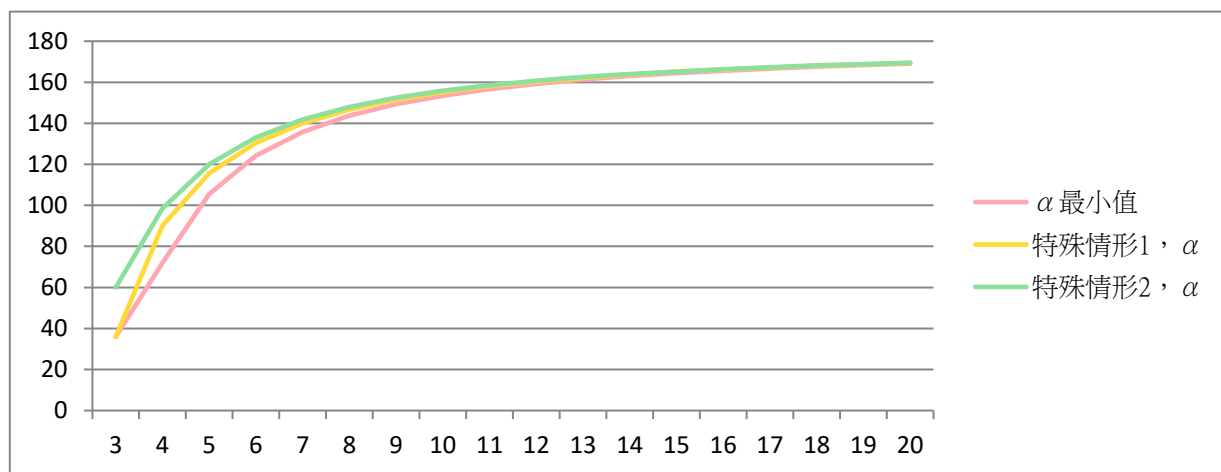


表 5-2

將表 5-1 求出的結果輸入至 Microsoft Excel，並計算一些可能找出規則的運算模式，包括：差、二階差、比值、補角。(表 5-3~5-8)

下列表格計算方式： 差：後項-前項 比值：後項/前項								
	α 最小值	α 最小值差	最小值差比值	最小值二階差	二階差比值	α 補角	α 補角階差	補角階差比值
n=3	36					144		
n=4	72	36	0.9315554	-2.46400576		108	-36	0.9315554
n=5	105.53599424	33.5359942	0.55630406	-14.8797844	6.03885943	74.4640058	-33.5359942	0.55630406
n=6	124.19220405	18.6562098	0.62339811	-7.02596387	0.47218183	55.807796	-18.6562098	0.62339811
n=7	135.82244999	11.6302459	0.67472066	-3.78307868	0.53844266	44.17755	-11.6302459	0.67472066
n=8	143.66961725	7.84716726	0.71442126	-2.24098417	0.59237049	36.3303828	-7.84716726	0.71442126
n=9	149.27580034	5.60618309	0.74580018	-1.42509073	0.63592182	30.7241997	-5.60618309	0.74580018
n=10	153.45689271	4.18109236	0.77116895	-0.95676376	0.671137042	26.5431073	-4.18109236	0.77116895
n=11	156.68122132	3.2243286	0.79209824	-0.6703436	0.70063649	23.3187787	-3.2243286	0.79209824
n=12	159.23520630	2.553985	0.80966486	-0.4861131	0.72517005	20.7647937	-2.553985	0.80966486
n=13	161.30307815	2.0678719	0.82462303	-0.3626571	0.74603441	18.6969218	-2.0678719	0.82462303
n=14	163.00829298	1.7052148	0.83751455	-0.2770726	0.7640071	16.991707	-1.7052148	0.83751455
n=15	164.43643517	1.4281422	0.84873782	-0.2160239	0.77966533	15.5635648	-1.4281422	0.84873782
n=16	165.64855347	1.2121183	0.85859318	-0.1714018	0.79343906	14.3514465	-1.2121183	0.85859318
n=17	166.68927003	1.0407165	0.8673118	-0.1380908	0.80565548	13.31073	-1.0407165	0.8673118
n=18	167.59189574	0.9026257	0.87507446	-0.112761	0.81657142	12.4081043	-0.9026257	0.87507446
n=19	168.38176042	0.7898647	0.88202562	-0.0931838	0.82638324	11.6182396	-0.7898647	0.88202562
n=20	169.07844129	0.6966809				10.9215587	-0.6966809	

表 5-3： α 最小值的各種運算結果

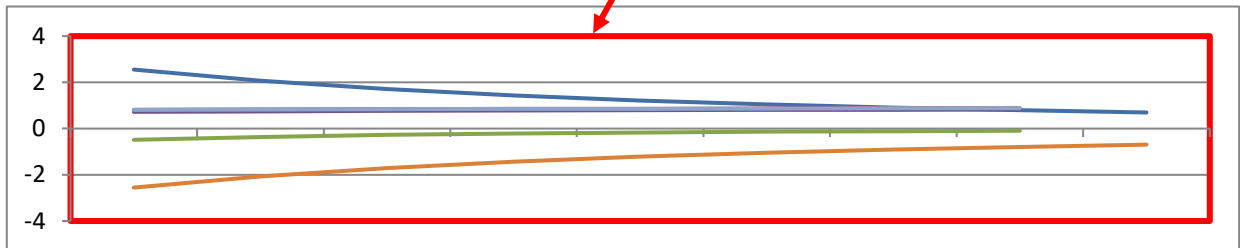
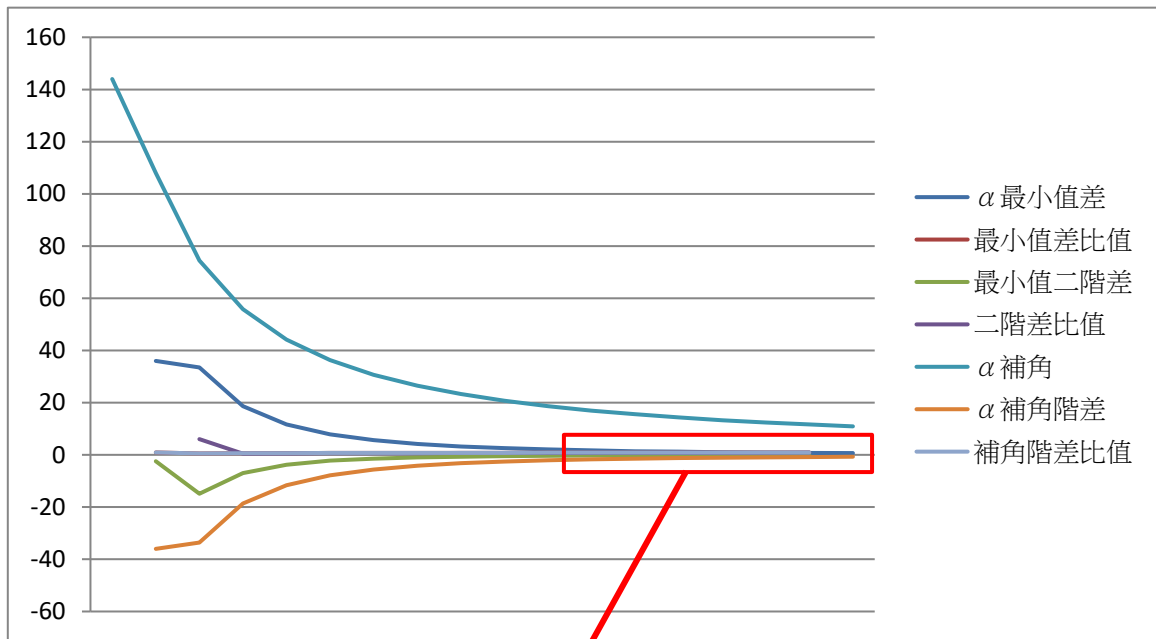


表 5-4：以折線圖呈現表 5-3 結果

	特殊情形一， α	α 值差	α 值差比值	α 值二階差	二階差值比值	α 補角	α 補角階差	補角階差比值
n=3	36					144		
n=4	90	54	0.475597559	-28.31773183		90	-54	0.475597556
n=5	115.6822682	25.68226817	0.577070454	-10.86179001	0.383568503	64.3177318	-25.6822682	0.57707045
n=6	130.5027463	14.82047816	0.644499282	-5.268690622	0.485066514	49.4972537	-14.8204782	0.64449928
n=7	140.0545339	9.551787536	0.692929283	-2.93307425	0.556698896	39.9454661	-9.55178754	0.69292928
n=8	146.6732472	6.618713287	0.729579267	-1.789837299	0.610225704	33.3267528	-6.61871329	0.72957927
n=9	151.5021231	4.828875988	0.758395426	-1.166678527	0.651834961	28.4978769	-4.82887599	0.75839543
n=10	155.1643206	3.662197461	0.781720191	-0.799383761	0.685179115	24.8356794	-3.66219746	0.78172019
n=11	158.0271343	2.8628137	0.801031587	-0.5696095	0.71256076	21.9728657	-2.8628137	0.80103159
n=12	160.3203385	2.2932042	0.817309248	-0.4189472	0.735498969	19.6796615	-2.2932042	0.81730925
n=13	162.1945955	1.874257	0.831228695	-0.3163208	0.755037389	17.8054045	-1.874257	0.83122869
n=14	163.7525317	1.5579362	0.843272722	-0.2441711	0.771909719	16.2474683	-1.5579362	0.84327272
n=15	165.0662968	1.3137651	0.85379639	-0.1920772	0.786650017	14.9337032	-1.3137651	0.85379639
n=16	166.1879847	1.1216879	0.863067793	-0.1535952	0.799653473	13.8120153	-1.1216879	0.86306779
n=17	167.1560774	0.9680927	0.871294247	-0.1245991	0.811217408	12.8439226	-0.9680927	0.87129425
n=18	167.999571	0.8434936	0.878638439	-0.1023677	0.82157656	12.000429	-0.8434936	0.87863844
n=19	168.7406969	0.7411259	0.885230971	-0.0850583	0.830909554	11.2593031	-0.7411259	0.88523097
n=20	169.3967645	0.6560676				10.6032355	-0.6560676	

表 5-5：特殊情形一， α 值的各種運算結果

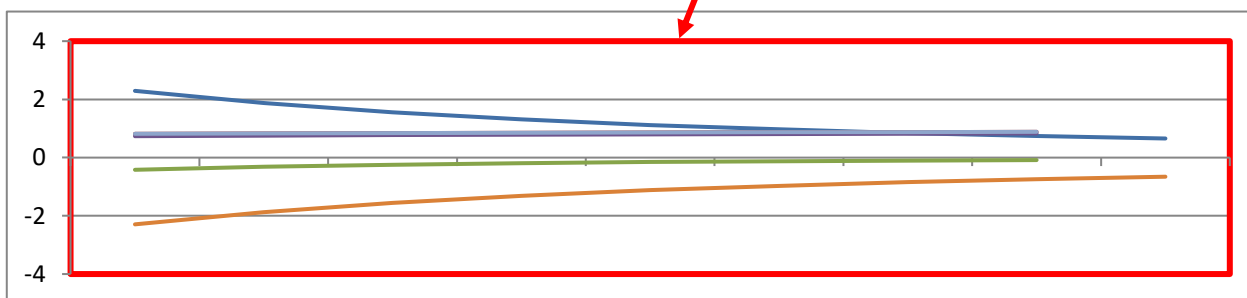


表 5-6：以折線圖呈現表 5-5 結果

	特殊情形二， α	α 值差	α 值差比值	α 值二階差	二階差值比值	α 補角	α 補角階差	補角階差比值
n=3	60					120		
n=4	98.48100097	38.481001	0.559211	-16.9620019		81.51899903	-38.48100097	0.559211
n=5	120	21.518999	0.60922801	-8.40902209	0.49575646	60	-21.51899903	0.609228009
n=6	133.1099769	13.1099769	0.66220899	-4.42843229	0.52662869	46.89002306	-13.10997694	0.662208995
n=7	141.7915216	8.68154465	0.70451183	-2.56529374	0.57927808	38.2084784	-8.681544654	0.704511831
n=8	147.9077725	6.11625092	0.73791525	-1.60297609	0.62487039	32.09222749	-6.116250918	0.73791525
n=9	152.4210473	4.51327482	0.76476656	-1.06167316	0.66231378	27.57895266	-4.513274825	0.76476656
n=10	155.872649	3.45160166	0.78679279	-0.73590636	0.69315717	24.127351	-3.451601662	0.78679279
n=11	158.5883443	2.7156953	0.80519055	-0.5290431	0.71890002	21.4116557	-2.7156953	0.805190553
n=12	160.7749965	2.1866522	0.82079455	-0.39185999	0.74069578	19.2250035	-2.1866522	0.82079455
n=13	162.5697887	1.79479221	0.83419913	-0.29757812	0.75939908	17.43021129	-1.794792209	0.834199126
n=14	164.0670028	1.49721409	0.84583822	-0.23081319	0.77563899	15.9329972	-1.497214091	0.845838219
n=15	165.3334037	1.2664009	0.85603603	-0.1823161	0.78988596	14.6665963	-1.2664009	0.856036031
n=16	166.4174885	1.0840848	0.86504072	-0.1463073	0.80249248	13.5825115	-1.0840848	0.865040724
n=17	167.355266	0.9377775	0.87304505	-0.1190555	0.81373588	12.644734	-0.9377775	0.873045045
n=18	168.173988	0.818722	0.88020232	-0.098081	0.82382586	11.826012	-0.818722	0.880202315
n=19	168.894629	0.720641	0.88663593	-0.0816948	0.83293196	11.105371	-0.720641	0.886635926
n=20	169.5335752	0.6389462				10.4664248	-0.6389462	

表 5-7：特殊情形二， α 值的各種運算結果

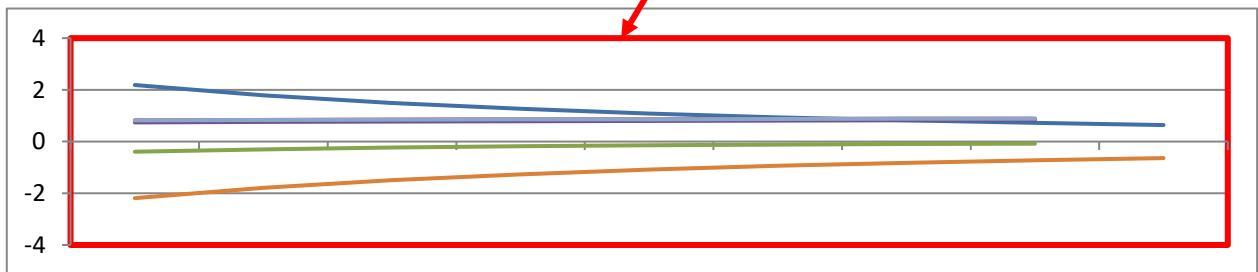
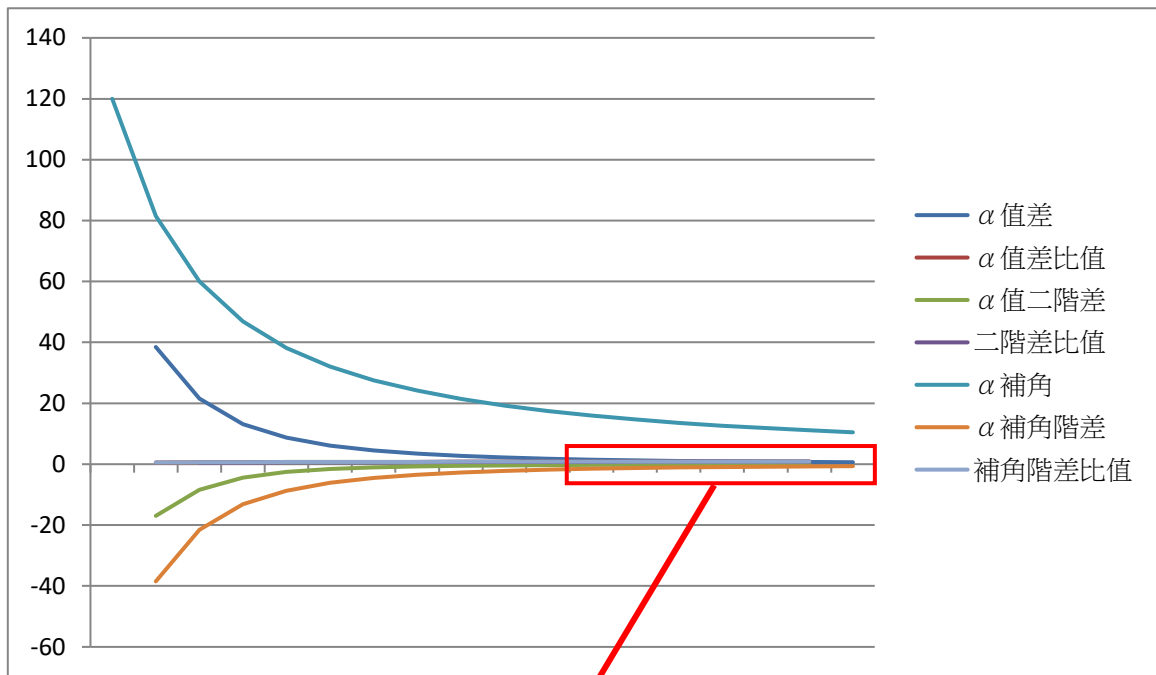


表 5-8：以折線圖呈現表 5-7 結果

由於黃金螺線的方程式應為 $r = ae^{b\theta}$ (a,b 為常數；e 為自然對數底數)，角度 θ 位於指數，據推論應與 α 有關，因此嘗試將 e 加進來做分析，定義 EXP 欄 $=\text{EXP}((\alpha * 2 * \text{PI})/360)$ ，並做運算分析(表 5-9~表 5-11)。

	α 最小值	EXP	差	差的比值	二階差	二階差比值	比值
n=3	36	1.87445609					
n=4	72	3.51358562	1.63912954				1.87445609
n=5	105.53599424	6.30883214	2.79524652	1.70532374	1.15611698		1.79555383
n=6	124.19220405	8.73696492	2.42813278	0.86866499	-0.36711374	-0.31754031	1.38487833
n=7	135.82244999	10.7032662	1.96630132	0.80979975	-0.46183146	1.25800647	1.22505542
n=8	143.66961725	12.2743026	1.57103635	0.79898047	-0.39526497	0.8558641	1.14678102
n=9	149.27580034	13.536019	1.26171646	0.80311093	-0.30931989	0.78256339	1.10279333
n=10	153.45689271	14.5607279	1.0247089	0.81215466	-0.23700755	0.76622151	1.07570238
n=11	156.68122132	15.4036299	0.84290193	0.82257696	-0.18180697	0.76709356	1.05788872
n=12	159.23520630	16.1057868	0.70215691	0.83302325	-0.14074502	0.77414536	1.04558386
n=13	161.30307815	16.6976803	0.59189356	0.8429648	-0.11026335	0.7834263	1.03675037
n=14	163.00829298	17.2020992	0.50441882	0.85221205	-0.08747474	0.79332557	1.03020892
n=15	164.43643517	17.6362634	0.43416426	0.86072178	-0.07025456	0.80314112	1.02523903
n=16	165.64855347	18.0133412	0.37707774	0.868514	-0.05708652	0.81256679	1.02138082
n=17	166.68927003	18.3435239	0.33018269	0.87563558	-0.04689506	0.82147335	1.0183299
n=18	167.59189574	18.6347922	0.2912683	0.88214284	-0.03891439	0.82981868	1.01587854
n=19	168.38176042	18.8934655	0.2586733	0.88809287	-0.032595	0.83760776	1.0138812
n=20	169.07844129	19.1246006	0.23113512	0.89354071	-0.02753817	0.84485893	1.0122336

表 5-9

	特殊情形一， α	EXP	差	差的比值	二階差	二階差比值	比值
n=3	36	1.87445609					
n=4	90	4.81047738	2.93602129				2.5663324
n=5	115.6822682	7.531065	2.72058762	0.92662394	-0.21543368		1.5655546
n=6	130.5027463	9.75424531	2.22318031	0.81716916	-0.49740731	2.30886515	1.29520132
n=7	140.0545339	11.5237803	1.76953494	0.79594756	-0.45364536	0.9120199	1.18141177
n=8	146.6732472	12.9349259	1.41114565	0.79746696	-0.35838929	0.79002084	1.1224551
n=9	151.5021231	14.0723358	1.13740993	0.8060188	-0.27373573	0.76379438	1.08793324
n=10	155.1643206	15.0011712	0.92883534	0.8166232	-0.20857459	0.76195605	1.06600435
n=11	158.0271343	15.769754	0.76858282	0.8274694	-0.16025252	0.76832233	1.05123485
n=12	160.3203385	16.4137232	0.6439692	0.83786572	-0.12461362	0.77760789	1.04083572
n=13	162.1945955	16.9595267	0.54580346	0.84756145	-0.09816573	0.78776085	1.03325287
n=14	163.7525317	17.4270019	0.46747525	0.85649006	-0.07832822	0.79791815	1.02756417
n=15	165.0662968	17.8312113	0.40420936	0.86466473	-0.06326589	0.80770234	1.02319443
n=16	166.1879847	18.1837349	0.35252369	0.87213144	-0.05168567	0.81695953	1.01977004
n=17	167.1560774	18.493585	0.30985006	0.87894818	-0.04267363	0.82563764	1.01703996
n=18	167.999571	18.7678567	0.27427168	0.88517552	-0.03557837	0.83373194	1.01483064
n=19	168.7406969	19.0121974	0.24434074	0.89087118	-0.02993095	0.84126802	1.01301911
n=20	169.3967645	19.2311485	0.21895108	0.89608914	-0.02538966	0.8482744	1.01151635

表 5-10

	特殊情形二， α	EXP	差	差的比值	二階差	二階差比值	比值
n=3	60	1.874456088					
n=4	98.48100097	4.810477381	2.936021293				2.566332395
n=5	120	7.531064998	2.720587617	0.926623939	-0.215433677		1.565554601
n=6	133.1099769	9.754245307	2.223180309	0.817169164	-0.497407307	2.308865145	1.295201317
n=7	141.7915216	11.52378025	1.769534945	0.795947561	-0.453645364	0.912019903	1.181411774
n=8	147.9077725	12.93492591	1.411145654	0.79746696	-0.358389291	0.790020839	1.122455099
n=9	152.4210473	14.07233583	1.137409928	0.806018802	-0.273735725	0.763794376	1.087933239
n=10	155.872649	15.00117117	0.928835337	0.816623201	-0.208574592	0.76195605	1.066004347
n=11	158.5883443	15.76975399	0.76858282	0.827469401	-0.160252517	0.768322331	1.051234854
n=12	160.7749965	16.41372319	0.643969198	0.83786572	-0.124613622	0.777607895	1.040835716
n=13	162.5697887	16.95952665	0.545803465	0.847561446	-0.098165733	0.787760853	1.033252874
n=14	164.0670028	17.4270019	0.467475245	0.856490065	-0.07832822	0.797918147	1.027564168
n=15	165.3334037	17.83121126	0.404209358	0.864664734	-0.063265887	0.807702341	1.023194429
n=16	166.4174885	18.18373495	0.35252369	0.872131439	-0.051685669	0.816959527	1.019770036
n=17	167.355266	18.493585	0.309850056	0.878948182	-0.042673634	0.825637638	1.017039957
n=18	168.173988	18.76785669	0.274271685	0.885175521	-0.035578371	0.833731939	1.014830639
n=19	168.894629	19.01219743	0.244340739	0.890871178	-0.029930946	0.841268017	1.013019107
n=20	169.5335752	19.23114851	0.218951084	0.896089145	-0.025389655	0.848274401	1.011516348

表 5-11

列表計算結果，並未找出可觀規則。

如前述，由於黃金螺線的方程式應為 $r = ae^{b\theta}$ (a, b 為常數； e 為自然對數底數)，角度 θ 位於指數，據推論應與 α 有關，因此 α 的變化應該是跟指數函數變化有相關性，但必須先找出 α 與螺線方程式之間的關係，才能進一步尋找 α 的相關規律。

十、黃金多邊形黃金螺線極點

黃金多邊形的黃金螺線會隨多邊形的不斷切割往內旋轉不斷逼近一點(即極點)，在黃金多邊形不斷切割的同時，各對應點也跟著不斷往內旋繞，且兩者的中心同為極點。

將之前的作圖改以在 GeoGebra 試算表輸入指令的方式作黃金多邊形，以便之後研究可以往內作大量相似圖形，增加研究效率。試算表作圖步驟(以五邊形為例)：

- (一) 作 $A_1=(1,0)$; $B_1=(0,0)$
 - (二) 作 $C_1=\text{Dilate}(\text{Rotate}(A_1, \alpha, B_1), \varphi, B_1)$, 先將 A_1 以 B_1 為中心逆時針旋轉 α , 再以 B_1 為中心伸縮 φ 倍
 - (三) 重複第(二)步驟 , 作 D_1 、 E_1 、 F_1
 - (四) 作 $G_1(\text{切割點})=\text{Intersect}(\text{Line}(E_1, F_1), \text{Line}(A_1, B_1))$, $\overline{E_1F_1}$ 與 $\overline{A_1 B_1}$ 的交點
 - (五) 作 $H_1(\text{多邊形})=\text{Polygon}(B_1, C_1, D_1, E_1, G_1)$
 - (六) 作 $A_2=\text{Dilate}(\text{Rotate}(B_1, -\alpha, A_1), 1/\varphi, A_1)$, 先將 B_1 以 A_1 為中心順時針旋轉 α , 再以 A_1 為中心伸縮 φ 倍
 - (七) 作 $B_2=A_1$ 、 $C_2=B_1$ ……類推作 D_2 、 E_2 、 F_2
 - (八) 以 G_1 推 G_2
- 接下來依此類推

圖 5-23 黃金矩形的極點是第一個矩形的右上頂點與與第三個矩形的對應點連線；第二個與第四個對應點連線，兩線段交點。

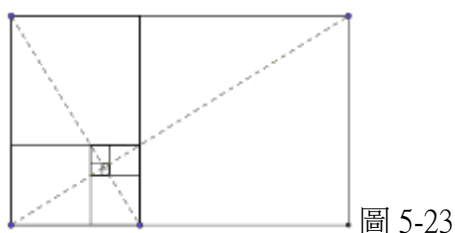


圖 5-23

圖 5-24 36° 黃金三角形將第一個黃金三角形的右下那點與第六個黃金三角形的對應點，兩點連線；再將第二個與第七個對應點兩點做線段，兩線段交點即為極點。

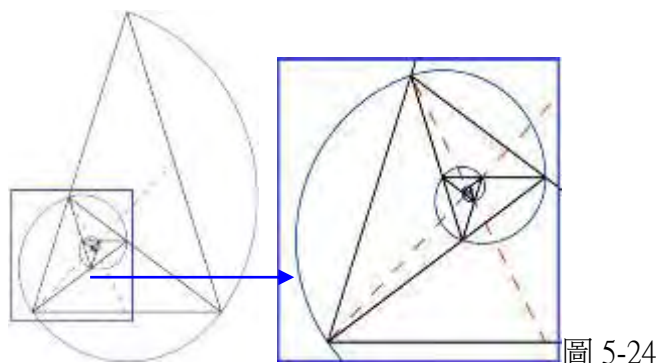


圖 5-24

接著將以 GeoGebra 試算表繪製好的黃金五邊形往內切割，發現在 $\alpha = 120^\circ$ 不斷旋轉的其中一點似乎是與 $\overline{E_2 E_5}$ 的交點(圖 5-25)，於是作 $\overline{E_1 E_4}$ 與 $\overline{E_2 E_5}$ 的交點並繼續以試算表新增多個 A 點對應點，發現這些點都繞著 $\overline{E_1 E_4}$ 與 $\overline{E_2 E_5}$ 的交點並不斷逼近(圖 5-26)，因此可以推論 $\overline{E_1 E_4}$ 與 $\overline{E_2 E_5}$

的交點便是 $\alpha = 120^\circ$ 時黃金五邊形的極點。

由於切割的關係，試算表上第一個黃金五邊形 $B_1C_1D_1E_1G_1$ 切割一次後的對應點分別為 $B_2C_2D_2E_2G_2$ ，即是 $A_1B_1C_1D_1G_2$ ，因此可以說，除了 G 以外，其他的點皆可以視為 A, B, C, D, E 其中一點在不斷切割後的對應點，因此在黃金五邊形 $\alpha = 120^\circ$ 時，除了 G 以外黃金五邊形任一頂點與其的四個對應點所連成的線段，皆會通過黃金五邊形 $\alpha = 120^\circ$ 時的極點，並且發現 $\overline{G_x G_{x+3}}$ 也會通過極點，因此黃金五邊形 $\alpha = 120^\circ$ 時，任一頂點與其第四個對應點連成線段皆會通過極點。

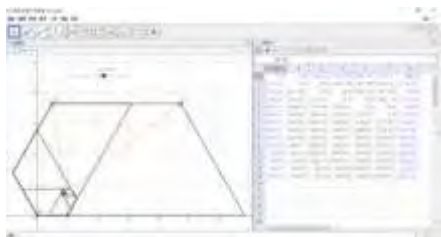


圖 5-25



圖 5-26

發現在 α 為某些特殊值時黃金多邊形之所以能用兩對應點連線與另外兩對應點連線的交點來尋找極點是因：任一黃金多邊形繞出黃金螺線其實就是各頂點(稱為 V_x)或切割點(稱為 G_x) 旋繞 β 且兩對應點距離不斷縮小至原來 $\frac{1}{\phi}$ 倍的移動軌跡，若 $k\beta = 180^\circ$ 的倍數 ($k \in \mathbb{N}$)，若各點繞 β 稱為一次，那麼當各點旋繞 k 次後(旋繞至 V_{1+k})便會與原本的點(V_1)形成一個平角，此時 V_{1+k} 、 V_1 與極點三點共線。若 $k\beta = 360^\circ$ 的倍數 ($k \in \mathbb{N}$)，則在各點旋繞 k 次後 V_k 、 V_1 形成一個周角，但極點並不再兩點連成的的線段上，不過 $\overline{V_1 V_{1+k}}$ 仍會通過極點。綜合以上可知：一黃金多邊形，若符合 $k\beta = 360^\circ h + 180^\circ$ ($k, h \in \mathbb{N}$)， $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點；若符合 $k\beta = 360^\circ h$ ($k, h \in \mathbb{N}$)， $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點。

接著尋找一些比較特殊的 α ，在 α 為這些角度值時， $k \leq 9$ 。仔細觀察過後發現 $k\beta = 360^\circ h + 180^\circ$ ($k, h \in \mathbb{N}$) 可以看成是 $k\beta = 180^\circ(2h + 1)$ ($k, h \in \mathbb{N}$)，即 $k\beta$ 為 180 的奇數倍； $k\beta = 360^\circ h$ ($k, h \in \mathbb{N}$) 可以看成是 $k\beta = 180^\circ \cdot 2h$ ($k, h \in \mathbb{N}$)，即 $k\beta$ 為 180 的偶數倍，又 $\frac{180^\circ(2h+1)}{k} = \beta$ 或 $\frac{180^\circ \cdot 2h}{k} = \beta$ 且 $k \leq 9$ ，且 $\beta < 180^\circ$ ，180 乘上的倍數(2h+1 或 2h，以 h 表示) 至多只能除以 9 才能得到符合條件的 β ，因此只要從 $180^\circ \times 1$ 求到 $180^\circ \times 8$ 再列出 $1 \leq k \leq 9$ 中能整除前面 180° 倍數的所有 k 值可能，再以 180° 倍數去除以 k ，便能得出所有符合條件的 β 值，取其補角便是 α 值。將計算情形列表(表 5-12)。

$k\beta$	180°	360°	540°	720°	900°	1080°	1260°	1440°
除以 1								
除以 2	90°							
除以 3	60°	120°						
除以 4	45°	90°	135°					
除以 5	36°	72°	108°	144°				
除以 6	30°	60°	90°	120°	150°			
除以 7								
除以 8		45°		90°			135°	
除以 9	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°

表格顏色意義：
 符合條件，取其結果 無法整除 符合條件但 β 的結果出現第二次，取第一次(即 k 較小)的結果
 $\beta > 180^\circ$ $180^\circ > \beta > 144^\circ$ 180 奇數倍 180 偶數倍

表 5-12

將表 5-9 的結果進一步整理(表 5-13)。

α	β	黃金多邊形	通過極點的線段或直線
36°	144°	$n=3$	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+5}}$
40°	140°	$n=3$	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+9}}$
45°	135°	$n=3$	$\overline{V_x V_{x+4}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+4}}$
60°	120°	$n=3$	$\overline{V_x V_{x+3}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+3}}$
72°	108°	$n=3$	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+5}}$
80°	100°	$n=4$	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+9}}$
90°	90°	$n=4$	$\overline{V_x V_{x+2}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+2}}$
100°	80°	$n=4$	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+9}}$
108°	72°	$n=5$	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+5}}$
120°	60°	$n=5$	$\overline{V_x V_{x+3}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+3}}$
135°	45°	$n=6$	$\overline{V_x V_{x+4}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+4}}$
140°	40°	$n=7$	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+9}}$
144°	36°	$n=8$	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+5}}$
150°	30°	$n=9$	$\overline{V_x V_{x+6}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+6}}$
160°	20°	$n=12$	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+5}}$

表 5-13

除了表 5-13 紀錄的特殊角度外， β 為任意角度時， $\overline{V_x V_{x+180}}$ 或 $\overline{G_x G_{x+180}}$ 皆會通過極點。

以 GeoGebra 試算表定義極點為 $\overline{A_1 A_{181}}$ 與 $\overline{A_2 A_{182}}$ 的交點，達成任意角皆可作極點，接著讓角度滑桿 α ($0^\circ \sim 360^\circ$) 動畫、顯示軌跡，發現隨著 α 的變化，極點變動的軌跡形成一個圓(圖 5-27)，進一步以 α 為 60° 、 90° 、 120° 的極點三點求圓，發現此圓為圓心座標 $(\varphi, 0)$ 的單位圓。

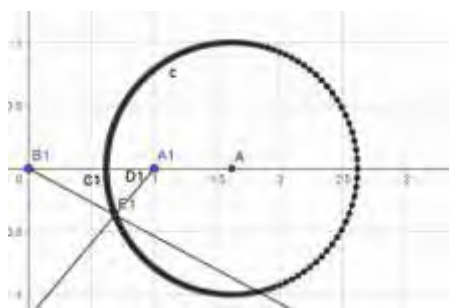


圖 5-27

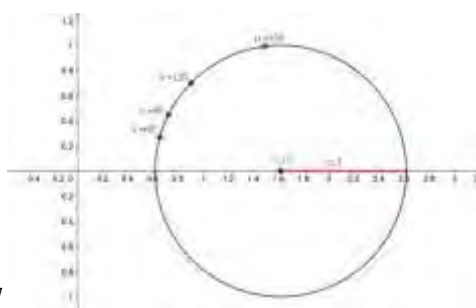


圖 5-28

將 α 為 36° 、 60° 、 90° 、 120° 、 150° 的螺線極點座標求出，並算出這些極點與 $(\varphi, 0)$ 的距離皆為 1，所以在 α 為這些角度值的螺線極點皆在圓心為 $(\varphi, 0)$ 的單位圓上。

由圖 5-28 可發現 α 呈 30° 等差，但極點間的距離有遞增的趨勢，我將四個極點互相與圓心的夾角求出，以試算表做運算試圖找出其中規則(表 5-14)，但並未有可觀結果。

	極點夾角	差	差的比值	二階差	三階差	e^{\wedge} (極點夾角)	差	差的比值	二階差	三階差
60~90	11.0426°					1.2126				
90~120	17.9125°	6.8699°				1.3670	0.1545			
120~150	38.2837°	20.3713°	2.9653	13.5014°		1.9507	0.5837	3.7786	0.4292	
150~180	97.2388°	58.9550°	2.8940	38.5838°	25.0824°	5.4583	3.5076	6.0097	2.9240	2.4948

表 5-14

十一、黃金螺線方程式與 α 的關係

文獻探討中有提及黃金螺線的方程式為 $r = ae^{b\theta}$ (a, b 為常數； e 為自然對數底數)，其中兩個常數 a, b 與 α 的關係是接下來要探討的目標。由於本研究中黃金多邊形是逆時針切割，因此螺線是以順時針往外擴大，因此 b 恆為負數，又自然對數底數 e 為正數，且極坐標中的 r 坐標必為正數，故 a 恆為正數。

先找尋在 $\alpha = 90^\circ$ (黃金矩形) 的黃金螺線方程式，以之前求黃金螺線極點的方式，求得黃金矩形螺線極點的座標，接著定義極點為極座標的原點，並找到 $O(0,0)$, $T(1,0)$ 兩點的極座標(圖 5-29)，接著代入 $r = ae^{b\theta}$ 列出兩道式子，並求得 a, b 之值：

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{4\varphi+3}}{\varphi+2} = ae^{b(\frac{3}{2}\pi - \tan^{-1}\varphi)} \\ \frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2} = ae^{b(2\pi - \tan^{-1}\varphi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\frac{2 \tan^{-1}\varphi - 4\pi}{\pi}} \\ b = \frac{\ln \varphi^{-2}}{\pi} \end{cases}$$

求得黃金矩形的螺線方程式： $r = \frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\frac{2 \tan^{-1}\varphi - 4\pi}{\pi}} e^{\left(\frac{\ln \varphi^{-2}}{\pi}\right)\theta}$

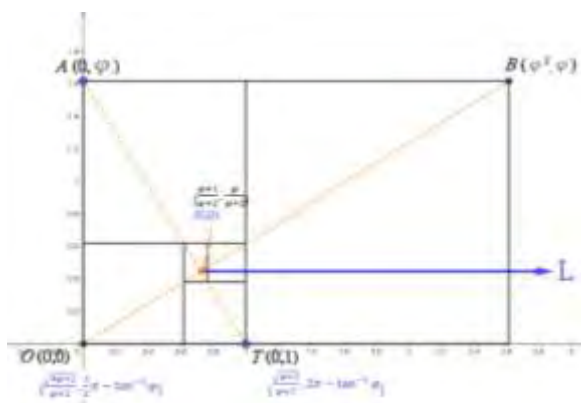


圖 5-29：藍色座標為極座標

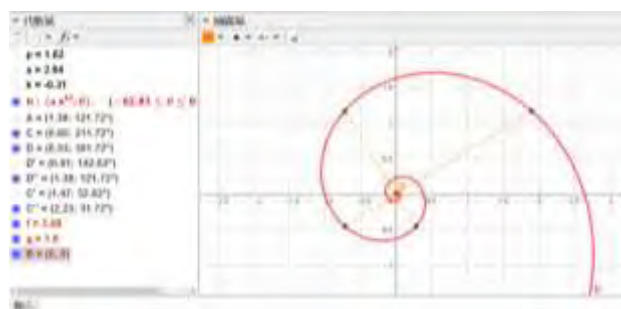


圖 5-30：以 GeoGebra 輸入方程式繪製的黃金矩形黃金螺線

接著以同樣的方式找尋 $\alpha = 120^\circ$ (黃金五邊形) 的黃金螺線方程式：

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{2}(2\varphi+1)}{\sqrt{5}(2\varphi+1)+1} = ae^{b(\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5})} \\ \frac{2\sqrt{2}(\varphi+1)}{\sqrt{5}(2\varphi+1)+1} = ae^{b[\tan^{-1}(-\sqrt{3}(2\varphi+1))]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\frac{\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}}{\varphi - \tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}-\pi}} \\ b = \frac{\ln \varphi^{-1}}{\tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)-\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}+\pi} \end{cases}$$

求得黃金五邊形 $\alpha = 120^\circ$ 的螺線方程式：
$$r = \frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\frac{\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}}{\varphi - \tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}-\pi}} e^{\left(\frac{\ln \varphi^{-1}}{\tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)-\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}+\pi}\right)\theta}$$

黃金切割三角形 $\alpha = 60^\circ$ 時係數：

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\varphi}{2} = ae^{b(\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = ae^{b[\tan^{-1}(\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3})]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{\tan^{-1}(\sqrt{3}\varphi^3)-\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3}}} \\ b = \frac{\ln \varphi}{\tan^{-1}(\sqrt{3}\varphi^3)-\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3}} \end{cases}$$

黃金切割三角形 $\alpha = 60^\circ$ 時黃金螺線方程式：
$$r = \frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{\tan^{-1}(\sqrt{3}\varphi^3)-\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3}}} e^{\left(\frac{\ln \varphi}{\tan^{-1}(\sqrt{3}\varphi^3)-\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3}}\right)\theta}$$



圖 5-31： $\alpha = 120^\circ$ 黃金螺線

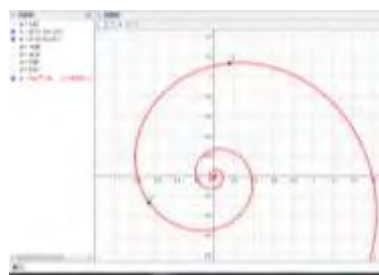


圖 5-32： $\alpha = 60^\circ$ 黃金螺線

將以上三個結果在 GeoGebra 的試算表計算，找尋其中規則(表 5-15)，發現隨著 α 增加， a 會遞增； b 會遞減。又發現 b 值計算結果中差的比值與比值的比值兩項結果分別為 2 與 1.125。

α	a	b
60°	$\frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{\tan^{-1}(\sqrt{3}\varphi^3)-\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3}}}$	$\frac{\ln \varphi}{\tan^{-1}(\sqrt{3}\varphi^3)-\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\varphi^3}}$
90°	$\frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\varphi\left(\frac{2\tan^{-1}\varphi-4\pi}{\pi}\right)}$	$\frac{\ln \varphi^{-2}}{\pi}$
120°	$\frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\frac{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}}{\varphi - \tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}-\pi}\right)}}{\varphi - \tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}-\pi}}$	$\frac{\ln \varphi^{-1}}{\tan^{-1}(-\sqrt{3}\varphi^3)-\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}+\pi}$

表 5-15(1)

	a	b	差	二階差	比值	差	二階差	比值
$\alpha=60^\circ$	1.59109705609491	-0.229761721897525						
$\alpha=90^\circ$	2.63862253797332	-0.306348962530033	1.04752548187841		1.65836680287084	-0.0765872406325		1.333333333
$\alpha=120^\circ$	6.56089041830225	-0.459523443795052	3.92226788032891	2.87474239845050	2.48648312666258	-0.1531744812650	-0.0765872406325	1.500000000
			3.74431739196983 (差的比值)		1.49935654908079 (比值的比值)	2 (差的比值)		1.125 (比值的比值)

表 5-15(2)

圖 5-33 顯示黃金矩形連接不同點所形成的黃金螺線，兩條螺線的極點是同一點， B_2 是 B_1 旋轉 90° 並縮小 φ 倍的結果， B_1 以這種方式(旋轉且兩對應點間的距離不斷縮小至原來的 $\frac{1}{\varphi}$ 倍)移動到 B_2 的同時， B_2 也以同樣的方式移動到 B_3 …… B_x 以同樣的方式移動到 B_{x+1} ，這些點移動的軌跡便是圖 5-35 中的紅色螺線； A_2 是 A_1 旋轉 90° 並縮小 φ 倍的結果， A_1 以這種方式(旋轉且兩對應點間的距離不斷縮小至原來的 $\frac{1}{\varphi}$ 倍)移動到 A_2 的同時， A_2 也以同樣的方式移動到 A_3 …… A_x 以同樣的方式移動到 A_{x+1} ，這些點移動的軌跡便是圖 5-35 中的藍色螺線，可知紅色螺線與藍色螺線縮放倍數相同，旋繞的角度也相同，因此判定這兩條螺線是同一種黃金螺線經旋轉位移，但紅色螺線連接的是各切割點；藍色螺線連接的則是各切割點以外的頂點。

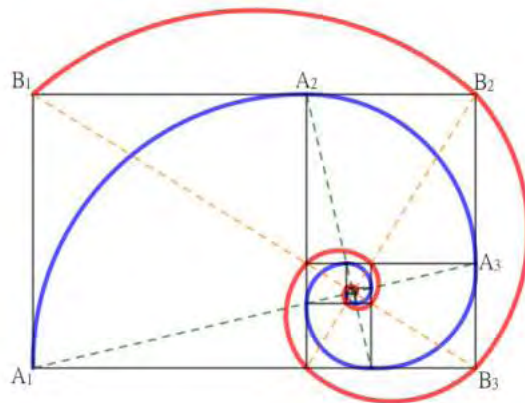


圖 5-33

若黃金多邊形 α 為 α_n 的最大值，則無限切割後切割點的各對應點即是黃金多邊形的頂點，也就是說連接各頂點的黃金螺線與連接各對應切割點形成黃金螺線相同。

圖 5-33 兩條螺線的圖形不重合，故方程式係數不能視為完全相同，但係數 b 控制螺線旋繞的角度，因此在 α 相同時，係數 b 應該相同，因此只要代一個切割點的極座標接著用已知的 b 代入，求得 a 係數(為了區分兩種螺線的 a 係數，本研究將連接頂點螺線方程式的 a 係數稱為 a_1 ；連接切割點者稱為 a_2 ， a 係數則同時包括兩者)。求得 α 為 60° 、 90° 、 120° 時的 a_2 值，並求出 α 為 150° 時三個係數值，再整理、觀察(表 5-16)。發現係數 b 皆可化為分子為 $\ln \varphi$ 的分數，且分母隨著 α 增加 30° (即 $\frac{\pi}{6}$)，呈現 $\frac{\pi}{6}$ 的等差，且其分母為 $(\alpha - 180^\circ)$ 轉徑度，故推測 $b = \frac{\ln \varphi}{\alpha - 180^\circ}$ (分母轉徑度)。

α	a_1	a_2	b
60°	$\frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{-\frac{2\pi}{3}}\right)}$	$\frac{1}{\varphi\left(\frac{2\pi+\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{\varphi^3}}{-\frac{2\pi}{3}}\right)}$	$\frac{\ln \varphi}{-\frac{2\pi}{3}}$
90°	$\frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)}$	$\frac{\frac{\sqrt{8\varphi+6}}{\varphi+2}}{\varphi\left(\frac{\tan^{-1}\varphi^3}{-\frac{\pi}{2}}\right)}$	$\frac{\ln \varphi}{-\frac{\pi}{2}}$
120°	$\frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}}{-\frac{\pi}{3}}\right)}$	$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\varphi\left(\frac{2\pi+\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\varphi^4+\varphi-\sqrt{5}}}{-\frac{\pi}{3}}\right)}$	$\frac{\ln \varphi}{-\frac{\pi}{3}}$
150°	$\frac{\frac{\sqrt{(440+200\sqrt{3})\varphi+280+120\sqrt{3}}}{16\varphi+120}}{\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{(10+4\sqrt{3})\varphi+5+3\sqrt{3}}{(2+4\sqrt{3})\varphi-1+3\sqrt{3}}+\pi\right)}{-\frac{\pi}{6}}\right)}$	$\frac{\frac{\sqrt{(8686080+4855680\sqrt{3})\varphi+5368320+3000960\sqrt{3}}}{48\varphi+36}}{\varphi\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\left(\frac{(10+4\sqrt{3})\varphi+5+3\sqrt{3}}{(402+300\sqrt{3})\varphi+249+185\sqrt{3}}\right)}{-\frac{\pi}{6}}\right)}$	$\frac{\ln \varphi}{-\frac{\pi}{6}}$

表 5-16

為了驗證 $b = \frac{\ln \varphi}{\alpha-180^\circ}$ (分母轉徑度)，因此求 $\alpha=36^\circ$ 的螺線方程式係數，代 $b = \frac{\ln \varphi}{-\frac{4\pi}{5}}$ ，得 $a_1 =$

$$\frac{\frac{\sqrt{36\varphi+46-2\sqrt{5}}}{12\varphi-4}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{6\varphi}}{-\frac{4\pi}{5}}\right)}$$

，以 GeoGebra 輸入方程式，成功得到 $\alpha=36^\circ$ 的黃金螺線圖形(圖 5-34)。



圖 5-34

由於螺線方程式只有 a,b 兩係數，有五個結果符合推論，故本研究對於 $b = \frac{\ln \varphi}{\alpha-180^\circ}$ 的猜測應該正確度極高。

得到 α 任意角求螺線方程式 b 係數的方法後，我嘗試找出 a 係數的求法。前面的 a 係數皆是用到 b 係數來做運算，因此 a 係數間應該也存在某種關係，a 係數的式子皆複雜，但觀察

過後可發現 a 係數的結構是相似的： $\frac{\text{分子(只含根式、整數或分數)}}{\left(\frac{\text{含 } \pi \text{ 及 Arctan 的式子}}{\alpha-180^\circ}\right)}$ ，於是我將分子、分母、 φ 的指數(含

$\alpha-180^\circ$)、 φ 的指數(不含 $\alpha-180^\circ$) 四者分別觀察規則，結果並未發現可觀的規則。

a_2 值在 α 為 90° 與 60° 的差大於 1，但在 120° 與 90° 的差卻小於 100， 150° 與 120° 的差甚至 >17000 ，差異甚大； a_1 的差在 150° 與 120° 也有顯著差異。新增一個計算列 [α 相同 a_2/a_1]，發現其增長的幅度也變化極大(表 5-17)。

	a ₁	差	a ₂	差	a ₂ /a ₁
$\alpha = 60^\circ$	1.5910970560949		0.9396510409		0.590568021778
$\alpha = 90^\circ$	2.6386225379733	1.0475254818784	1.8130542748	0.8734032339	0.687121499445
$\alpha = 120^\circ$	6.5608904183022	3.9222678803289	101.8615176328	100.0484633581	15.525563016365
$\alpha = 150^\circ$	55.1312888409133	48.5703984226110	17224.1316990855	17122.2701814527	312.420261909484

表 5-17：a₁,a₂ 相關運算(近似值)

嘗試在黃金矩形螺線方程式中增加一個參數 t，讓螺線方程式變為 $r = ae^{b(\theta+t)}$ ，並以 GeoGebra 的數值滑桿來表示 t，發現在 t 為 2π 時螺線是成立的，因此又將 t 定義為 $2n\pi$ ，其中 n 為整數滑桿，發現不管 n 為多少，螺線皆能產生並通過對應點。

本研究螺線方程式在 GeoGebra 給定的指令為 $\text{Curve}((ae^{k(\theta+2n\pi)}); \theta), \theta, -20\pi, 20\pi)$ ，其中藍字部份表示 θ 的範圍： $-20\pi \leq \theta \leq 20\pi$ ，故螺線會繞 20 圈，發現 n 的值每增加 1，螺線便會往內縮一圈，但由於理論上黃金螺線是可以像內向外無限延伸的，因此不會因此而影響螺線的成立。

其中 $e^{b(\theta+2n\pi)}$ 可以轉化為 $e^{b\theta}e^{2bn\pi}$ 可將後者併入 a 值得 $ae^{2bn\pi}$ ，因此可以說：一螺線的 a 係數有無限多個，且每個 a 係數之間呈 $e^{2bn\pi}$ 的等比。

	a ₁				a ₂			
	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=120^\circ$	$\alpha=150^\circ$	$\alpha=60^\circ$	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=120^\circ$	$\alpha=150^\circ$
n=-4	512.3283	5823.4388	680246.2403	592658991120.416	302.5647	4001.4100	10561205.8702	185158677228851
n=-3	120.9443	849.6283	37908.8237	1840573624.9773	71.4258	583.7978	588555.8313	575032493979.109
n=-2	28.5511	123.9591	2112.5863	5716122.2891	16.8614	85.1750	32799.0923	1785832422.6585
n=-1	6.7400	18.0854	117.7304	17752.1038	3.9804	12.4269	1827.8308	5546116.9155
n=0	1.5911	2.6386	6.5609	55.1313	0.9397	1.8131	101.8615	17224.1317
n=1	0.3756	0.3850	0.3656	0.1712	0.2218	0.2645	5.6765	53.4916
n=2	0.0887	0.0562	0.0204	0.0005	0.0524	0.0386	0.3163	0.1661
n=3	0.0210	0.0082	0.0011		0.0124	0.0056	0.0176	0.0005
n=4	0.0049	0.0012	0.0001		0.0029	0.0008	0.0010	

表 5-18：a₁,a₂ 合理值的探究(近似值)，空格處的小數位數過多不列出

為了解決前述幅度過大的問題，以 $\alpha=90^\circ$ 時的係數為基準，配合前面闡述過「隨著 α 增加，a 會遞增；b 會遞減」取最接近的係數值(表 5-18 中深色網底)來做計算，但仍未有可觀結果(表 5-19)。

	a ₁	差	二階差	差的比值	比值	比值	ln a ₁	差	比值
60°	1.5911						0.4644		
90°	2.6386	1.0475			1.6587		0.9703	2.0892	0.5058
120°	6.5609	3.9223	2.8747	3.7443	2.4865	1.4994	1.8811	1.9388	0.9109
150°	55.1313	48.5704	44.6481	12.3832	8.4030	3.3795	4.0097	2.1316	2.1286
	a ₂	差	二階差	差的比值	比值	比值	ln a ₂	差	比值
60°	0.9399						-0.0622		
90°	1.8131	0.8734			1.9295		0.5950	0.6573	-9.5589
120°	5.6765	3.8635	2.9901	4.4235	3.1309	1.6227	1.7363	1.1413	2.9182
150°	53.4916	47.8151	43.9516	12.3761	9.4233	3.0097	3.9795	2.2432	2.2919

表 5-19

伍、 研究結果

一、 多邊形的黃金切割基本性質如下：

(一) 黃金切割後的圖形與原圖形必為相似形。

(二) 黃金切割後的圖形與原圖形的對應邊邊長比為 $1:\varphi$ 。

(三) 任意黃金多邊形依規律可以無限切割產出無限多個相似的黃金多邊形。

二、 符合黃金切割的黃金五邊形確實可行，但其角度有範圍限制。

三、 黃金四邊形必須符合「 $72^\circ < \alpha \leq \alpha_5$ 的最小值」，當 $\alpha = 90^\circ$ 時，圖形即為黃金矩形；

三角形也存在非黃金三角形的黃金切割，但必須符合「 $36^\circ \leq \alpha \leq 72^\circ$ 」。

四、 黃金多邊形當邊數趨近於無限大時 α 應該會趨近 180° ，黃金多邊形本身的外緣也趨近黃金螺線。

五、 黃金多邊形作切割，在 α 為特定值時，切割點會恰巧是頂邊的黃金切割點，在 α 為 36° (三角形)、 90° (矩形) 時，符合特殊情形一；在 α 為 60° (三角形)、 120° (五邊形) 時，符合特殊情形二，五邊形特殊情形一及四邊形特殊情形二 α 非整數值。

六、 隨著邊數(n)的增加， α_n 的最小臨界值與最大值會越來越趨近同一角度值。

七、 一黃金多邊形，符合 $k\beta = 180h$ ($k, h \in \mathbb{N}$)，若 h 為奇數，則 $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點；若 h 為偶數，則 $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點；隨著 α 的改變，極點的軌跡呈現一個圓心為 $(\varphi, 0)$ 的單位圓。

八、 黃金切割三角形 $\alpha=60^\circ$ 螺線方程式為 $r = \frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{-\frac{2\pi}{3}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{2\pi}{3}}\right)\theta}$ ；

黃金矩形的螺線方程式為 $r = \frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)\theta}$ ；

黃金五邊形 $\alpha=120^\circ$ 螺線方程式為 $r = \frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}}{-\frac{\pi}{3}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{3}}\right)\theta}$ 。

黃金多邊形黃金螺線方程式中的 b 係數符合 $b = \frac{\ln\varphi}{\alpha-180^\circ}$ (分母轉徑度)。

九、 綜合上述，本研究成功將黃金切割的基本性質擴展到黃金多邊形，且成功建立部分黃金多邊形的螺線方程式，並找出 α 任意角黃金螺線方程式的 b 係數。

陸、 討論

(一) α_n 區間的規律

本研究嘗試尋找各種可能發現規則的運算模式(表 5-2~表 5-11)，但皆未發現可觀規則，當時檢視黃金螺線方程式，推測 α 與螺線方程式 $r = ae^{b\theta}$ 中的指數 $b\theta$ 具有相關性，因此先嘗試找出螺線方程式的一般式，再回頭探討 α_n 區間的規律，但最終並未推導出螺線方程式的一般式，亦未獲得其他可推斷 α_n 區間的規律的線索。

(二) 極點軌跡

觀察出在 α 改變時，黃金螺線極點變動軌跡呈現一個以 $(\varphi, 0)$ 為圓心單位圓，即所有黃金多邊形的螺線極點皆在以 $(\varphi, 0)$ 為圓心的單位圓上，但本研究並未找出方法證明這個現象，僅檢查一些特殊角度值，並配合 GeoGebra 動態軌跡判斷。

原本希望求出 α 任意角的極點通式，隨著 α 不斷增加，極點在圓周上的軌跡也會往同方向變動，故猜測極點以 $(\varphi, 0)$ 為中心與 x 軸的夾角和 α 會呈函數 $f(\alpha)$ 關係，分析許多可能發現規則的運算模式(表 5-14)，皆未觀察出明顯規則。隨著 α 的改變，兩極點以 $(\varphi, 0)$ 為中心與 x 軸的夾角有迅速遞增的趨勢(圖 5-28)，猜測 $f(\alpha)$ 為指數函數，故假設 $f(\alpha) = pq^\alpha$ ，代 α 為 60° 、 90° 、 120° 的極點求 p, q ，但發現沒有一致的解。

(三) 黃金螺線方程式一般式

本研究並未找出 α 為任意值，黃金螺線方程式的一般式，但依研究結果，僅以 α 便能求出 b 係數。以本研究求螺線方程式係數的方法， α 為任意值可個別求螺線方程式，但礙於非特殊角各點座標及螺線極點尋找不易， α 非特殊角度值螺線方程式也具一定的困難度。

螺線的 a 係數不如 b 係數來的好觀察規則，起先嘗試尋找 60° 、 90° 、 120° 、 150° 的 a 係數之間的關係，試圖找出其中遞迴關係之後，再推出一般式，但計算各種可能的規則皆未找出可觀的規則，故難以繼續發展產出黃金螺線方程式一般式。

柒、 未來展望

- 一、本研究成功解釋多邊形黃金切割，並透過逼近的方式找到黃金 n 邊形， $3 \leq n \leq 20$ ， α_n 的最小臨界值及特殊情形時 α 值的近似值，但未找出規則，期望未來能找出 α_n 區間規律。
- 二、本研究對於「黃金多邊形螺線極點皆在圓心為 $(\varphi, 0)$ 的單位圓」並未成功作全面的證明，期望未來能配合極點函數 $f(\alpha)$ 、極點通式或其他方式來證明。
- 三、期望未來能求出極點函數 $f(\alpha)$ ，或找出極點的通式。
- 四、本研究僅求出 α 為任意值螺線方程式的 b 係數，但並未找出 α 任意值的 a 係數，期望未來能找出 α 與 a 係數的關係，甚至進一步推導出黃金多邊形螺線方程式的一般式。
- 五、本研究有提到黃金多邊形連接各頂點形成的螺線與連接各切割點形成的螺線會有所差異，連接各切點的螺線方程式在 α_n 為最小臨界值時會與連接各頂點的螺線重合，在 α 非最小臨界值時，兩螺線方程式係數是否具有任何相關性，值得繼續深入探討。

捌、 參考文獻

1. 李維歐 (2005) · 黃金比例 (初版) (邱宏義譯) · 臺北市：遠流出版社 · (原著出版年：2002 年)。
2. 白啟光 (2002) · 費氏數列及黃金切割 · 取自「數學嘉年華」：<https://ftt.tw/mUuJG>、<https://ftt.tw/Umzku>
3. 蘇惠玉 (2018) · 追本數源——你不知道的數學祕密 (出版) · 臺北市：三民書局。
4. 趙文敏 (2002) · 等角螺線及其他 · 取自「數學知識」：<https://ftt.tw/scvTU>、<https://ftt.tw/mGABz>
5. 王聖文 (1994) · 有趣的對數螺線 · 中華民國第三十四屆中小學科學展覽會。
6. 許浩鳴 (2014) · 空間螺線的代數分析 · 中華民國第五十四屆中小學科學展覽會。
7. Fibonacci numbers (2014, December 31). Retrieved from <https://ftt.tw/qMUba>

玖、 圖片來源

- 圖 4-2 白啟光 (2002) · 費氏數列及黃金切割 · 取自「數學嘉年華」：<https://ftt.tw/mUuJG>
- 圖 4-3 黃金三角形 (2016.04.08) · 取自「維基百科」：<https://ftt.tw/OMhYq>
- 圖 4-6 Hiroshi.Ogaw (2018.08.10) · 黃金三角形による螺旋 | Golden Triangle · 取自「jsdo.it」：<https://ftt.tw/kr8H6>
- 圖 4-7 王聖文 (1994) · 有趣的對數螺線 · 取自 <https://reurl.cc/2eoL9>
- 圖 5-24 黃金三角形 (2016.04.08) · 取自「維基百科」：<https://ftt.tw/OMhYq>

【評語】 030405

延伸黃金三角形與黃金矩形的概念，考慮『黃金多邊形』的一個作品。針對黃金五邊形、一般化的黃金三角形、黃金四邊形的一些要滿足的條件給出了說明，從黃金三角形與黃金矩形，聯想到用類似的旋轉縮放概念來定義所謂的『黃金多邊形』，並將黃金矩形與黃金三角形中的黃金切割的概念推廣到一般的多邊形上，作品具有創新創意的想法，值得鼓勵，同時對於黃金多邊形與對應的等角螺線的一些關係，也藉由電腦的輔助，給出了一些觀察的結果。比較可惜的是，與黃金三角形及黃金矩形相比，作者所給出的『黃金多邊形』的定義其實有點不太自然，這使得一些性質較難給出一個理論上的說明。作者藉由電腦的輔助『看到』一些現象，此乃是從事研究工作重要的一步，但更重要的是能針對觀察到的現象給出解釋。對於作品中提及的一些藉助輔助軟體所看到的結果，例如指定角的範圍，是不是可以透過計算或其它方式給出論證？如果能在這些部分多加著墨則此作品會更加有其價值性。

摘要

本研究旨在探討：

- (一)歸納黃金切割的基本原則並推廣至黃金多邊形，並求出其黃金螺線極坐標方程式。
- (二)在給定 α 的黃金多邊形中，透過極點的產生，作出其黃金螺線，並推導出黃金螺線方程式 $r = ae^{b\theta}$ 中的 b 與 α 的關係式。
- (三)由矩形的切割點特殊情形，延伸探討黃金多邊形特殊情形時的 α 值，並將這些角度與 α_n 最小臨界值作分析，找出這些特殊 α 的規則與 α_n 區間規律。

壹、研究目的

- 一、歸納多邊形黃金切割的基本原則。
- 二、以黃金切割基本原則，作出五邊形的黃金切割，證明其可切割性，並整理其性質。
- 三、以黃金五邊形的結果探討異於現有圖形的黃金四邊形與黃金切割三角形。
- 四、以黃金五邊形的結果探討黃金六邊形。
- 五、探討黃金多邊形。
- 六、探討切割點的特殊情形。
- 七、探討 α 值規則與 α_n 區間規律。
- 八、探討黃金多邊形所構成的黃金螺線旋繞中心極點的尋找方式與位置變化。
- 九、探討黃金多邊形所構成的黃金螺線極坐標方程式與 α 的關係。

貳、研究過程及方法

※名詞定義

- 1. **黃金多邊形**：符合黃金切割基本原則的多邊形。
- 2. **切割線**：將黃金多邊形做黃金切割時表示分割的線段，即本研究的 \overline{ST} 。
- 3. **切割點**：黃金多邊形切割線與該圖形會有兩個交點，依據作圖方式，其中一點不會因為 α 值的不同而改變位置(即本研究的 T)；另一點會因 α 值的不同而改變位置(即本研究的 S)，這一點便是本研究所謂的切割點。
- 4. **頂邊**：黃金多邊形中，與切割線相交於切割點的邊。
- 5. **指定角**：任意黃金多邊形在作圖時須給定的角，其角度為 α 。
- 6. **極點**：黃金螺線向內部旋繞逼近的中心點稱為「極點」。

※符號意義

- 1. φ ：黃金比例 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。
- 2. α ：指定角角度。
- 3. α_n ：黃金 n 邊形的指定角角度。
- 4. β ： α 的補角。
- 5. A (斜體字)：以GeoGebra在繪圖區直接作圖方式作出的黃金多邊形點 A 。
- 6. A_x ：以GeoGebra試算表輸入方式作出的黃金多邊形，切割後第 x 個點 A 的對應點，與直接作圖的黃金多邊形頂點名稱有所差異。第一個黃金多邊形的頂點 A 定義為 A_1 。以 G_x 表示任意黃金多邊形切割後第 x 個切割點的對應點；以 V_x 表示任意黃金多邊形第 x 個頂點的對應點。

一、黃金切割的基本原則

黃金切割的基本原則(以下稱「基本原則」)如下：

- (一)黃金多邊形切割後的圖形與原圖形必為相似形。
- (二)黃金多邊形切割後的圖形與原圖形的對應邊邊長比為 $1:\varphi$ 。
- (三)任意黃金多邊形可以依規律無限切割產出無限多個相似的黃金多邊形。

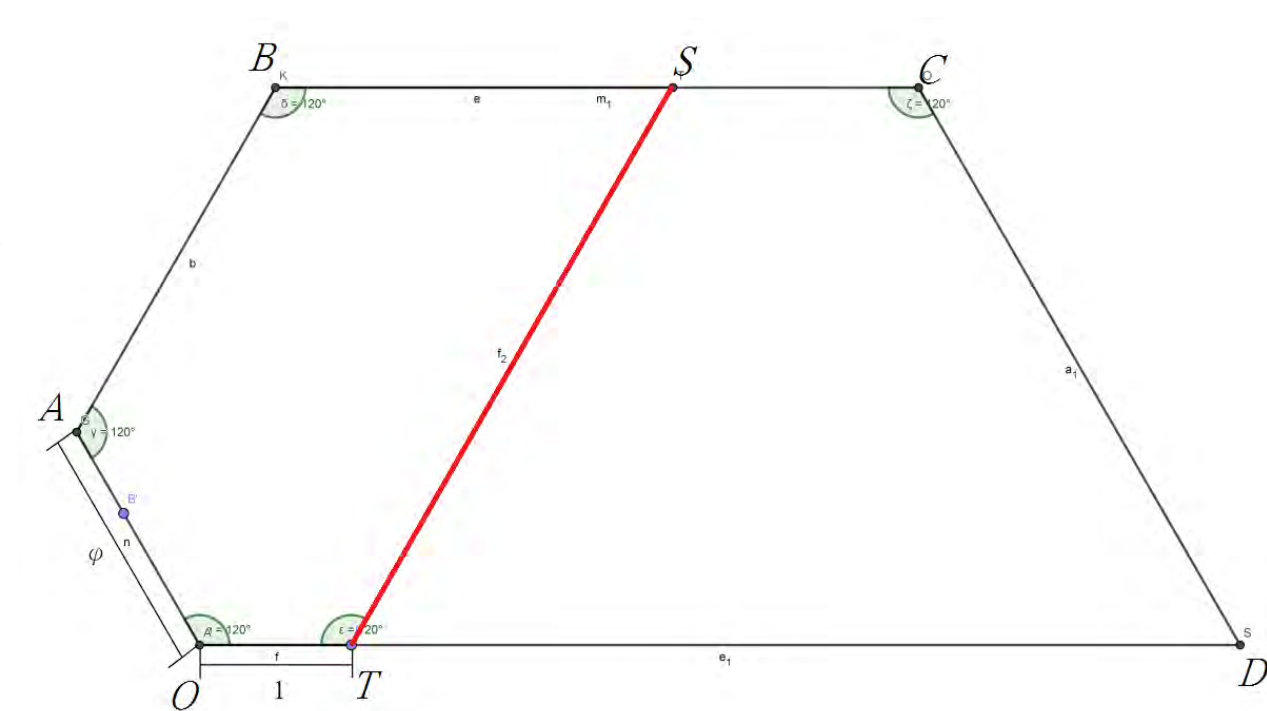
二、五邊形的黃金切割

兩個多邊形結合最多只能消去兩個角，因此五邊形的黃金切割無法切割出兩個五邊形，只能在切割後產生一個五邊形加一個四邊形。

由於切割翻轉過後的五邊形必須與原五邊形相似，因此圖中綠色角的角必須相等，我將這些角定義為**指定角**，其角度為 α 。

使用GeoGebra的角度滑桿功能，將 α 值設為變數，尋找其最小臨界值及最大值，求得 α_5 最小臨界值介於 105.54° 及 105.55° 之間；最大值大值介於 124.19° 及 124.2° 之間。

註： α_5 最小臨界值， S 與 B 重和， C 與 D 重和，圖形為四邊形； α_5 最大值， S 與 C 重和，圖形為五邊形。



以三角函數表示各點座標及邊長來證明在 α 為任意角時的切割線與原五邊形的對應邊呈黃金比例，在指定角角度為 α 時的各點座標：

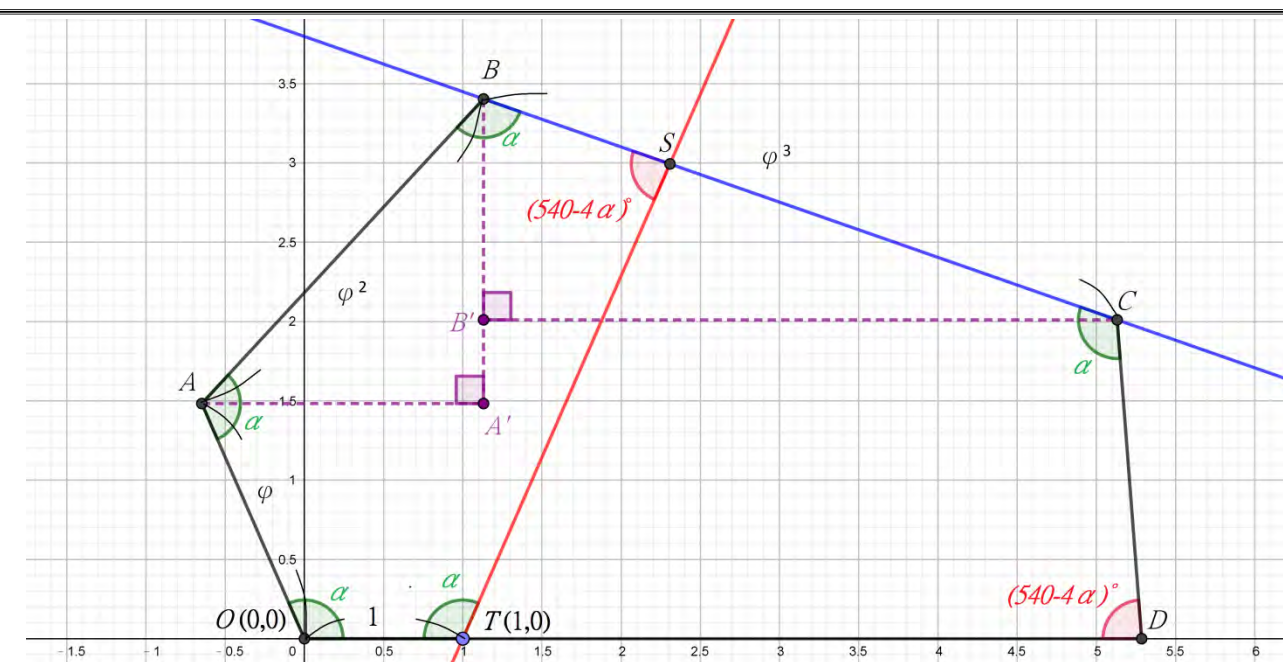
$$O(0,0) \quad T(1,0) \quad A(\varphi \cos \alpha, \varphi \sin \alpha) \quad B(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha)$$

$$C(\varphi \cos \alpha - \varphi^2 \cos 2\alpha + \varphi^3 \cos 3\alpha, \varphi \sin \alpha - \varphi^2 \sin 2\alpha + \varphi^3 \sin 3\alpha)$$

$$D\left(\frac{\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)}{\tan 4\alpha}, 0\right)$$

$$S\left(\frac{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}, \frac{\tan \alpha[-\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) + \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) + \tan 3\alpha]}{\tan \alpha + \tan 3\alpha}\right)$$

$$\text{求得 } \frac{\overline{DO}}{\overline{ST}} = \frac{(-\cos \alpha + \sin \alpha \tan 3\alpha)[\varphi(\tan 4\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\tan 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + \varphi^3(\tan 4\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha)]}{\varphi(\cos \alpha \tan 3\alpha - \sin \alpha) - \varphi^2(\cos 2\alpha \tan 3\alpha - \sin 2\alpha) - \tan 3\alpha}, \text{ 其值為 } \varphi。$$



以幾何方式證明其相似性：

將五邊形 $OABCD$ 與五邊形 $TOABS$ 分開， $\frac{\overline{OA}}{\overline{TO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \varphi$ 且 $\angle OAB = \angle TOA = \alpha$ ，

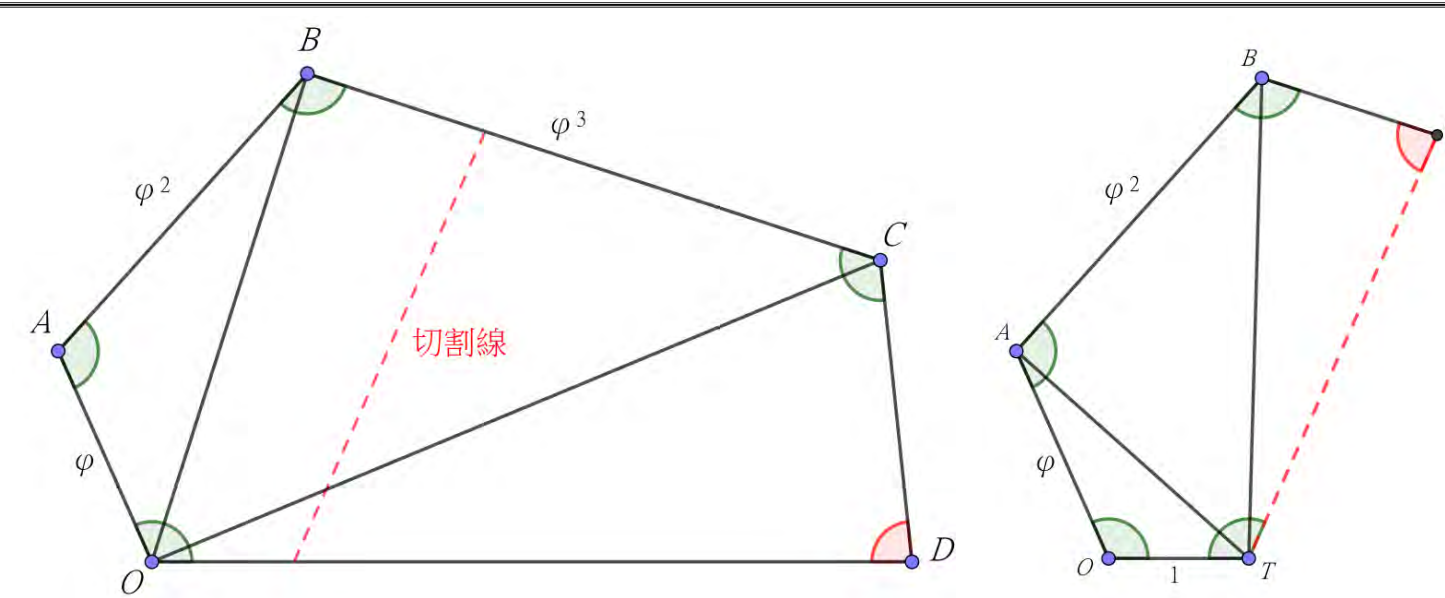
以三角形 SAS 相似性質得證 $\triangle OAB \sim \triangle TOA$ ，由上述結果可知 $\overline{OB} = \varphi \overline{TA}$ ，

$\angle OBC = \angle TAB = \alpha - \angle ABO = \alpha - \angle OAT$ 又 $\frac{\overline{OB}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \varphi$ ，

以三角形 SAS 相似性質得證 $\triangle OBC \sim \triangle TAB$ ，

$\angle CDO = \angle BST = 540 - 4\alpha$ 且 $\angle OCD = \angle SBT = \alpha - \angle BCO = \alpha - \angle ABT$ ，以三角形 AA 相似性質得證 $\triangle OCD \sim \triangle TBS$ ，又

$\frac{\overline{OC}}{\overline{TB}} = \varphi$ ，得證 $\frac{\overline{OD}}{\overline{TS}} = \varphi$ ，得證五邊形 $OABCD \sim$ 五邊形 $TOABS$



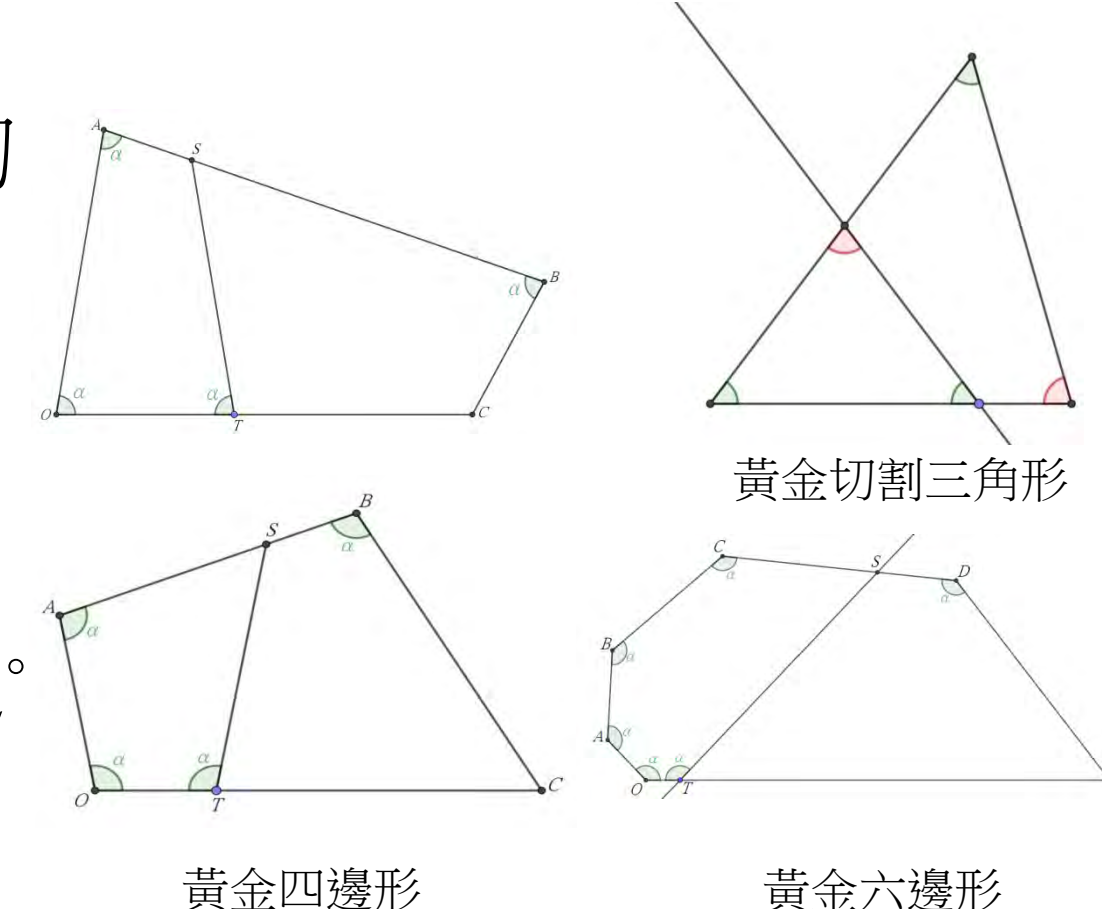
黃金五邊形切割的對應邊長比的比值為 φ ；其面積比值為 φ^2 ，且可以無限切割，每次切割產生的五邊形皆是黃金五邊形。

三、四邊形與三角形的黃金切割

以黃金五邊形的作圖方式成功作出不同於黃金矩形與黃金三角形的四邊形、三角形黃金切割，且 α_4 的最小臨界值為 72° ； α_3 的範圍： $36^\circ \leq \alpha_3 \leq 72^\circ$ ，黃金切割三角形(由於黃金三角形是已定義名詞，因此以下提到符合基本原則的三角形改稱為**黃金切割三角形**)在 α 為 36° 與 72° 時圖形便是已定義的黃金三角形；黃金四邊形 $\alpha = 90^\circ$ 時，圖形便是黃金矩形。

四、六邊形的黃金切割

以相同作圖方式作出黃金六邊形。 α_6 的最小臨界值便是 α_5 的最大值，介於 124.19° 與 124.2° 之間； α_6 的最大值介於 135.82° 與 135.83° 之間。



五、多邊形的黃金切割

在黃金三角形和黃金矩形無限切割後，連接各對應點構成黃金螺線。黃金多邊形各對應點連接構成的曲線，具有向中心極點旋繞逼近以及向外旋繞遠離的現象，因此過這些點構成一條螺線，由黃金多邊形的作圖方式可以得知，各對應點與中心極點所連成的線段，任兩相鄰線段的夾角相同，且其長度為以黃金比例為公比的等比數列，故判斷所有黃金多邊形連接對應點皆可構成黃金螺線。

黃金多邊形邊數越大， α 也會越大，當黃金多邊形邊數趨近於無限大時， α 會趨近 180° ，此時黃金多邊形的外緣與其各對應點繞出的等角螺線會趨近重合。

六、切割點特殊情形

1

在黃金四邊形 $\alpha=90^\circ$ 時(黃金矩形)會發現一個特殊情形： S 是 \overline{AB} 的黃金切割點。
 $\overline{AS} : \overline{SB} = 1 : \varphi$

2

在黃金切割三角形 $\alpha=36^\circ$ 時(即 $108^\circ-36^\circ-36^\circ$ 黃金三角形)也有此一特殊情形。
 $\overline{OS} : \overline{SA} = 1 : \varphi$

3

在 $\alpha=72^\circ$ 時(即 $36^\circ-72^\circ-72^\circ$ 黃金三角形)切割線的另一交點也是原三角形其中一邊的黃金切割點(但 $\overline{OT} : \overline{TB} = 1 : \varphi$)，但該點 T 為 \overline{OB} 的黃金分割點，與黃金矩形及 $36^\circ-72^\circ-72^\circ$ 黃金三角形的狀況不同，且當 α 值越來越大(假設黃金多邊形邊數會跟著適當增加)， B 離 T 會越來越遠，永遠不可能再發生相同情形，故我不再討論這種特殊狀況。

4

在黃金五邊形 $\alpha=120^\circ$ 時， S 恰為 \overline{BC} 的黃金切割點，但 $\overline{BS} : \overline{SC} = \varphi : 1 \neq 1 : \varphi$ ，因此不是我尋找的特殊情形。求出 \overline{BS} 與 \overline{SC} 的邊長近似值，發現當 $\overline{BS} : \overline{SC} = 1 : \varphi$ 時 α 介於 115° 與 116° 之間， $\alpha \approx 115.682268170753\dots$ 。

5

黃金五邊形 $\alpha=120^\circ$ 時， $\overline{BS} : \overline{SC} = \varphi : 1$ ， α 是個漂亮的整數值，進一步探討黃金多邊形「切割點為頂邊之黃金切割點，且將頂邊分割為左邊線段：右邊線段 $= \varphi : 1$ 」時指定角的角度。
 $\overline{BS} : \overline{SC} = \varphi : 1$

6

黃金切割三角形在 $\alpha=60^\circ$ 時， $\overline{OS} : \overline{SA} = \varphi : 1$ ，且此圖形恰巧是正三角形。

7

以十分逼近法求黃金四邊形「切割點為頂邊之黃金切割點，且將頂邊分割為左邊線段：右邊線段 $= \varphi : 1$ 」的 α 值，得 $\alpha \approx 98.48100096843102\dots$ 。

七、有關 α 的探討

前面的研究有略提 α_n 的範圍， α_n 的最小臨界值為 α_n 的最大值。我前面求切割點特殊情形的方法來求 α_n 的最小臨界值，目前已知的有： α_3 的最小值(仍為三角形)為 36° ； α_4 的最小臨界值為 72° 。 α_5 的最小臨界值以十分逼近法求得約為 $105.53599424\dots$ ； α_6 的最小臨界值約為 $124.19220405\dots$ 。僅有四個 α_n 的最小臨界值，對於觀察其關聯性的研究數量有所不足，因此我擴大找尋至 α_{20} 的最小臨界值以及前面尋找過的特殊情形時 α 值，求得結果如右(左表)，並繪製成折線圖(右表)，可以發現黃金多邊形，邊數越大， α_n 的範圍越小，即 α_n 的最小值與 α_n 的最大值會趨近相等，可以說黃金多邊形，當邊數趨近於無限大時， α_n 的最小臨界值、最大值、兩特殊情形時 α 值四者會趨近於同一角度值。

接著將這些數值輸入至Excel運算各種可能找出規則的運算模式。計算方式：差：後項-前項；比值：後項/前項

n	α_n 最小值	α_n 最大值	特殊情形一 α	特殊情形二 α
3	36	36	36	60
4	72	72	72	120
5	105.53599424	115.682268170753	115.682268170753	98.48100096843102
6	124.19220405	130.5027463282573	133.10997694109343	-
7	135.8244999	140.0543386513099	141.79152159540554	-
8	143.66961725	146.67324715166523	147.90777251333980	-
9	149.27589054	151.5021213930404	152.4310433804110	-
10	153.45689271	155.1643206395598	155.87264903840510	-
11	156.68121213	158.02713426862440	158.58834427780296	-
12	159.25206360	160.3203851252303	160.77499649555140	-
13	161.30107315	162.1945958018095	162.5697870862268	-
14	163.00829298	163.75253168478512	164.06702208088349	-
15	164.43663517	165.33340367608660	165.06629679464988	-
16	165.64855347	166.18798469288016	166.41748854665409	-
17	166.69927003	167.15607744156730	167.3526603777780	-
18	167.59159574	167.99957100853590	168.1798798283736	-
19	168.38176042	168.7406968552213	168.9462895185120	-
20	169.07844129	169.3967644790657	169.5357510509813	-

α_n 最小值運算結果

n	α_n 最小值	α_n 最大值	差	差值的比	二階差	二階差的比
3	36	36	0.0315554	-2.44609576	144	0.0315554
4	72	72	0.0315554	108	36	0.0315554
5	105.53599424	115.682268170753	0.03599424	-14.8797884	-0.0388943	-0.56304006
6	124.19220405	130.5027463282573	0.6339811	-7.2596387	0.47218183	0.62339811
7	135.8244999	140.0543386513099	0.6472066	-3.78307868	0.53844266	0.817755
8	143.66961725	146.67324715166523	0.72409417	-2.54098417	0.5927049	0.817755
9	149.27589054	151.5021213930404	0.6580018	-1.4250973	0.63582182	0.9618309
10	153.45689271	155.1643206395598	0.67116895	-0.95676376	0.67117042	1.0116859
11	156.68121213	158.02713426862440	0.7029824	-0.7029824	0.7029824	1.0116859
12	159.25206360	160.3203851252303	0.8966486	-0.4861131	0.72517005	0.8966486
13	161.30107315	162.1945958018095	0.8262571	-0.3626571	0.7460441	0.8262571
14	163.00829298	163.75253168478512	0.8731455	-0.2737784	0.7640071	0.8731455
15	164.43663517	165.33340367608660	0.8859318	-0.2116103	0.7796633	0.8859318
16	165.64855347	166.18798469288016	0.8859318	-0.1741018	0.7934306	0.8859318
17	166.69927003	167.15607744156730	0.8859318	-0.1391989	0.8065548	0.8859318
18	167.59159574	167.99957100853590	0.8859318	-0.1117561	0.8163742	0.8859318
19	168.38176042	168.7406968552213	0.8859318	-0.0931838	0.8263824	0.8859318
20	169.07844129	169.3967644790657	0.8859318	-0.0809609	0.8321587	0.8859318

特殊情形一， α 值運算結果

n	特殊情形一 α	α 差	α 值比	二階差	二階差的比	α 值	α 值比	二階差	二階差的比
3	36	54	0.45597559	-28.3173183	144	36	0.45597559		
4	72	90	0.57707054	-10.86179001	0.38356803	64.317738	-25.682268	0.57707054	
5	115.682268	25.682268	0.64449282	-5.26890622	0.48506514	49.4972537	-14.8204782	0.64449282	
6	130.502746	14.820478	0.69292923	-2.93307423	0.55698896	39.9454661	-9.5317854	0.69292923	
7	140.054339	9.531785	0.72897929	-1.78987999	0.60225294	33.296529	-6.6187139	0.72897929	
8	146.673247	6.618713	0.75835958	-1.16667857	0.63834961	28.4978769	-4.8287599	0.75835958	
9	151.502121	4.828759	0.78392491	-0.79938761	0.66817915	24.8556794	-3.6621946	0.78392491	
10	155.164320	3.662194	0.80101587	-0.569695	0.7256076	21.9726857	-2.8628137	0.80101587	
11	158.027134	2.862813	0.81730924	-0.418472	0.75459869	19.676615	-2.2932042	0.81730924	
12	160.320385	1.874257	0.83128695	-0.316208	0.75503789	17.8054045	-1.874257	0.83128695	
13	162.194595	1.559762	0.84322722	-0.240171	0.77199719	16.2414083	-1.559762	0.84322722	
14	163.752531	1.317651	0.85379639	-0.192072	0.78650017	14.9337032	-1.317651	0.85379639	
15	164.436635	1.121687	0.86306793	-0.153952	0.79965373	13.8120153	-1.121687	0.86306793	
16	165.164320	0.980927	0.87129427	-0.124399	0.81127408	12.8432926	-0.980927	0.87129427	
17	165.824499	0.848496	0.87863849	-0.102567	0.8217656	12.008429	-0.848496	0.87863849	
18	166.381760	0.740696	0.88523071	-0.085058	0.83099554	11.2593031	-0.740696	0.88523071	
19	166.859574	0.650676	0.88997599	-0.074582	0.8382335	10.626676	-0.650676	0.88997599	

特殊情形二， α 值運算結果

n	特殊情形二 α	α 差	α 值比	二階差	二階差的比	α 值	α 值比	二階差	二階差的比
3	60	120	1.87445698	-2.93621293	144	60	1.87445698		
4	98.48100097	38.481001	0.559211	-16.9620119	81.8189993	38.48100097	-38.48100097	0.559211	
5	120	21.518999	0.60922801	-8.4002209	0.49575646	60	-21.51899903	0.60922809	
6	133.1099769	13.1099769	0.6622089	-4.4244329	0.52662869	46.8002208	-13.10997694	0.66220895	
7	141.7915216	8.8144781	0.7045183	-2.5629274	0.57927808	38.200784	-8.8144781	0.70451833	
8	147.907725	6.1165092	0.73791525	-1.60297699	0.62483039	32.9922749	-6.11650918	0.73791525	
9	152.4310473	4.5132482	0.76476656	-1.06167316	0.66231378	27.5789266	-4.51324825	0.76476656	
10	155.872649	3.45160166	0.78679279	-0.7390636	0.69315717	24.127531	-3.45160166	0.78679279	
11	158.588344	2.7159593	0.8019055	-0.520411	0.7199602	21.411555	-2.7159593	0.80190553	
12	160.7749965	2.1866252	0.81049455	-0.368599	0.7406578	19.225005	-2.1866252	0.81049455	
13	162.569787	1.7949221	0.8149913	-0.2975781	0.7593908	17.4301129	-1.79492209	0.81499126	
14	164.067022	1.4927469	0.8183822	-0.2381119	0.7766309	15.923977	-1.4927469	0.8183822	
15	165.334037	1.2664009	0.82096003	-0.1823161	0.79088596	14.6465963	-1.2664009	0.82096003	
16	166.4174885	1.0840848	0.82504072	-0.1364073	0.80249248	13.5825115	-1.0840848	0.82504072	
17	167.3526603	0.9377725	0.8310486	-0.102955	0.81173758	12.644734	-0.9377725	0.8310486	
18	168.1798798	0.818722	0.8362593	-0.080981	0.82382586	11.826012	-0.818722	0.8362593	
19	168.9462895	0.720641	0.84065393	-0.061498	0.83491196	11.105371	-0.720641	0.84065392	
20	169.535751	0.6389462	0.84500914	-0.0464248	0.84500914	10.4664248	-0.6389462	0.84500914	

加入自然對數作分析的結果

列表計算結果，並未找出明顯規則。
 如前述，由於黃金螺線的方程式應為 $r = ae^{b\theta}$ (a, b 為常數； e 為自然對數底數)，角度 θ 位於指數，據推論應與 α 有關，因此 α 的變化應該是跟指數函數變化有相關性，但必須先找出 α 與螺線方程式之間的關係，才能進一步尋找 α_n 區間的相關規律。

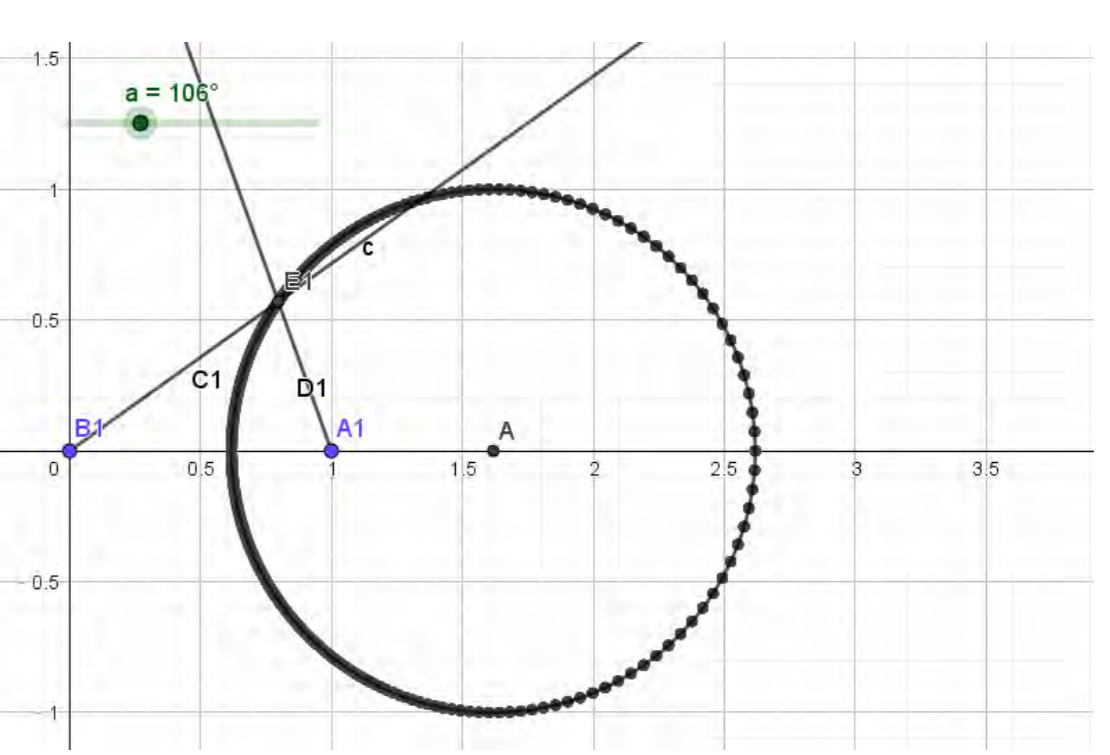
八、黃金多邊形所構成的黃金螺線極點

由於黃金多邊形的黃金螺線會隨該多邊形的不斷切割往內旋轉，且會不斷逼近同一點(即極點)，也就是說在黃金多邊形不斷切割的同時，螺線也跟著不斷往內旋繞，且各多邊形對應點旋繞中心與黃金螺線的旋繞中心同為極點。

一黃金多邊形，若符合 $k\beta = 360^\circ h + 180^\circ$ ($k, h \in \mathbb{N}$)， $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點，若符合 $k\beta = 360^\circ h$ ($k, h \in \mathbb{N}$)， $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點。特殊的 α 值如下表($k \leq 9$)。

α	β	黃金多邊形	通過極點的線段或射線	α	β	黃金多邊形	通過極點的線段或射線
36°	144°	三角形	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+5}}$	80°	100°	四邊形	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+9}}$
40°	140°	三角形	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+9}}$	90°	90°	四邊形	$\overline{V_x V_{x+2}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+2}}$
45°	135°	三角形	$\overline{V_x V_{x+4}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+4}}$	100°	80°	四邊形	$\overline{V_x V_{x+9}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+9}}$
60°	120°	三角形	$\overline{V_x V_{x+3}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+3}}$	108°	72°	五邊形	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+5}}$
72°	108°	三角形	$\overline{V_x V_{x+5}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+5}}$	120°	60°	五邊形	$\overline{V_x V_{x+3}}$ 和 $\overline{G_x G_{x+3}}$

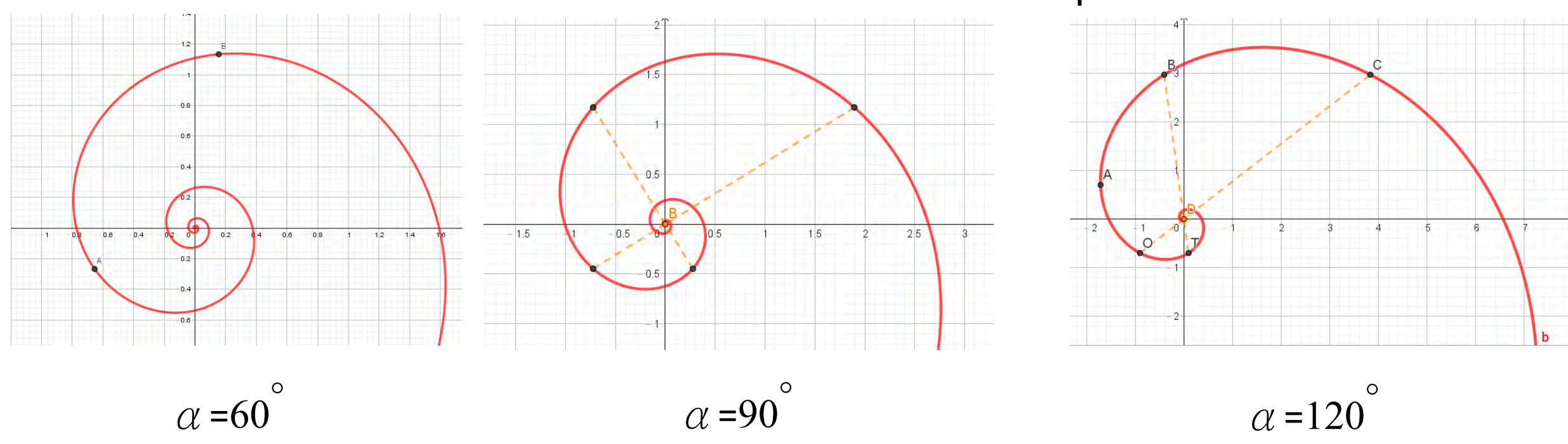
除了上表紀錄的特殊角度外，對給定的任意角 β ， $\overline{V_x V_{x+180}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+180}}$ 皆會通過極點。
 以GeoGebra試算表定義極點為 $A_1 A_{181}$ 與 $A_2 A_{182}$ 的交點，達成任意角皆可作極點，接著讓角度滑桿 $\alpha (0^\circ \sim 360^\circ)$ 動畫、極點顯示軌跡，發現隨著 α 的變化，極點變動的軌跡形成一個圓，進一步以 α 為 60° 、 90° 、 120° 的極點三點求圓，發現此圓為圓心座標 $(\varphi, 0)$ 的單位圓。
 將 α 為 36° 、 60° 、 90° 、 120° 、 150° 的螺線極點座標求出，算出這些極點與 $(\varphi, 0)$ 的距離皆為 1，所以在 α 為這些角度值的螺線極點皆在圓心為 $(\varphi, 0)$ 的單位圓上。
 發現雖說 α 呈 30° 等差，但極點間的距離卻有遞增的趨勢，我將四個極點 (30° 等差) 互相以 $(\varphi, 0)$ 為圓心與 x 軸的夾角求出，以試算表做運算試圖找出其中規則，但並未有明顯結果。



九、黃金螺線方程式與 α 的關係

由於本研究中黃金多邊形是逆時針切割，因此螺線是以順時針往外擴大，故 b 恆為負數，又自然對數底數 e 為正數，且極坐標中的 r 坐標必為正數，故 a 恆為正數。以先前研究求極點的方式求得特殊角黃金多邊形的極點，接著以極點為極坐標原點，求出其中兩個螺線通過多邊形頂點的極座標，再代入極坐標方程式 $r = ae^{b\theta}$ 列出聯立方程式，求其係數。得 α 為 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ 的螺線方程式：

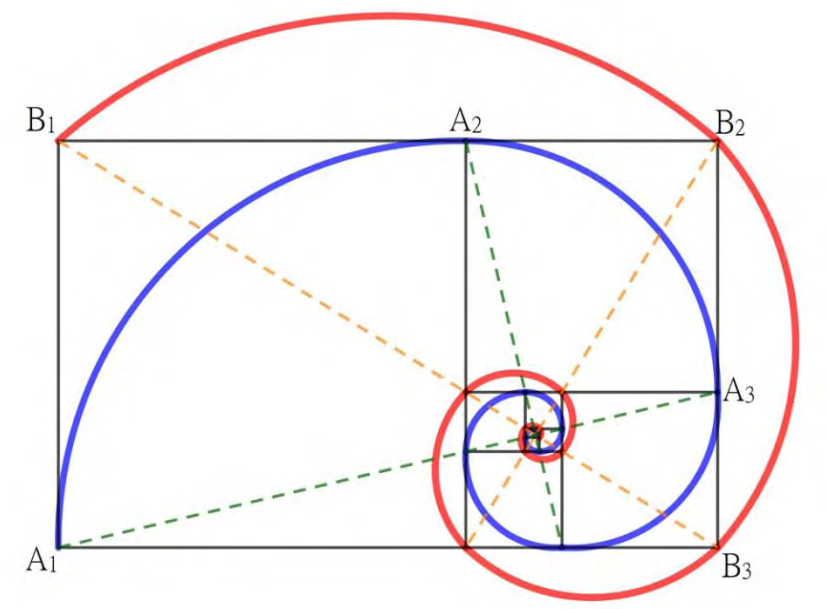
$$\alpha = 60^\circ : r = \frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{-\frac{2\pi}{3}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{2\pi}{3}}\right)\theta} ; \alpha = 90^\circ : r = \frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)\theta} ; \alpha = 120^\circ : r = \frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\sqrt{15}}{-\frac{\pi}{3}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{3}}\right)\theta}$$



將以上三個方程式的 a, b 兩係數在試算表作運算分析，試著找尋其中規則，發現隨 α 增加， a 會遞增； b 會遞減。又發現 b 係數計算結果中差的比值與比值的比值兩項結果分別為 2 與 1.125。

	a	b	差	二階差	比值	差	二階差	比值
$\alpha = 60^\circ$	1.59109705609491	-0.229761721897525						
$\alpha = 90^\circ$	2.63862253797332	-0.306348962530033	1.04752548187841		1.6583668287084	-0.0765872406325		1.333333333
$\alpha = 120^\circ$	6.56089041830225	-0.459523443795052	3.92226788032891	2.87474239845050	2.48648312666258	-0.1531744812650	-0.0765872406325	1.500000000
			3.74451739196083		1.49935654908079	2		1.125
			(原的比值)		(原的比值)	(原的比值)		(原的比值)

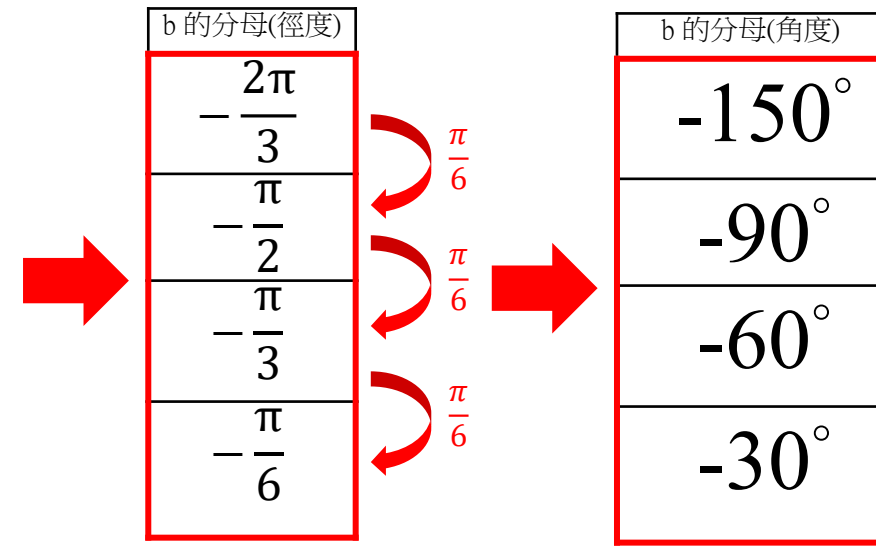
右圖顯示黃金矩形連接不同點所形成的黃金螺線，兩條螺線的極點是同一點， B_2 是 B_1 旋轉 90° 並縮小 φ 倍的結果， B_1 以這種方式(旋轉且兩對應點間的距離不斷縮小至原來的 $\frac{1}{\varphi}$ 倍)移動到 B_2 的同時， B_2 也以同樣的方式移動到 $B_3 \dots B_x$ 以同樣的方式移動到 B_{x+1} ，這些點移動的軌跡便是右圖中的紅色螺線； A_2 是 A_1 旋轉 90° 並縮小 φ 倍的結果， A_1 以這種方式(旋轉且兩對應點間的距離不斷縮小至原來的 $\frac{1}{\varphi}$ 倍)移動到 A_2 的同時， A_2 也以同樣的方式移動到 $A_3 \dots A_x$ 以同樣的方式移動到 A_{x+1} ，這些點移動的軌跡便是右圖中的藍色螺線，可知紅色螺線與藍色螺線縮放倍數相同，旋繞的角度也相同，因此判定這兩條螺線是同一種黃金螺線經旋轉位移，但紅色螺線連接的是各切割點；藍色螺線連接的則是各頂點。連接切割點的螺線和連接個頂點的螺線 a 係數不同，但 b 係數相同。



黃金多邊形 α 為 α_n 的最大值時，切割點的各對應點即是黃金多邊形的頂點，此時黃金多邊形的黃金螺線只有一條。

求出 α 為 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ 的 a_1 (連接頂點), a_2 (連接切割點), b 後，推導出 b 與 α 的關係式，嘗試尋找 a 係數的規則卻未有結果。

α	a_1	a_2	b
60	$\frac{2\sqrt{2}\varphi}{\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{-\frac{2\pi}{3}}\right)}$	$\frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)}$	$-\frac{\ln\varphi}{-\frac{2\pi}{3}}$
90	$\frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{-\frac{2\pi}{3}}\right)}$	$\frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)}$	$-\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{2}}$
120	$\frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\sqrt{15}}{-\frac{\pi}{3}}\right)}$	$\frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)}$	$-\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{3}}$
150	$\frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\sqrt{15}}{-\frac{\pi}{3}}\right)}$	$\frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)}$	$-\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{6}}$



$$\alpha - 180^\circ \rightarrow \text{對給定的任意角度 } \alpha, b = \frac{\ln\varphi}{(\alpha - 180^\circ) \times \frac{\pi}{180^\circ}} = \frac{\ln\varphi}{-\beta \times \frac{\pi}{180^\circ}}$$

觀察到不同 α 之間 a 係數差異有大幅遞增的現象，加入參數，使方程式變為 $r = ae^{b(\theta+t)}$ 經分析轉換為 $r = ae^{b(\theta+2n\pi)}$ ($n \in \mathbb{N}$)，發現一螺線的 a 係數有無限多個，且每個 a 係數之間呈 $e^{2bn\pi}$ 的等比，即原來的 a 係數乘上 $e^{2bn\pi}$ 後也是同一條螺線的 a 係數。

n	a	b	a	b	a	b	a	b
$n=4$	512.3283	5823.4388	680246.2403	592658991120.416	302.5647	4001.4100	10561205.8702	18515867228851
$n=3$	120.9443	849.6283	37908.8237	1840573624.9773	71.4258	583.7978	58855.8313	575032493979.109
$n=2$	28.5511	123.9591	2112.5863	5716122.2891	16.8614	85.1750	32799.0923	1785832422.6585
$n=1$	6.7400	18.0854	117.7304	17752.1038	3.9804	12.4269	1827.8308	5546116.9155
$n=0$	1.5911	2.6386	6.5609	55.1313	0.9397	1.8131	101.8615	17224.1317
$n=1$	0.3756	0.3850	0.3656	0.1712	0.2218	0.2645	5.6765	53.4916
$n=2$	0.0887	0.0562	0.0204	0.0005	0.0524	0.0386	0.3163	0.1661
$n=3$	0.0210	0.0082	0.0011	0.0001	0.0124	0.0056	0.0176	0.0005
$n=4$	0.0049	0.0012	0.0001		0.0029	0.0008	0.0010	

取表中深色網底的數值作分析，仍未有可觀結果 \rightarrow

	a	差	二階差	差的比值	比值	比值	$\ln a$	差	比值
60	1.5911						0.4644		
90	2.6386	1.0475			1.6587		0.9703	2.0892	0.5058
120	6.5609	3.9223	2.8747	3.7443	2.4865	1.4994	1.8811	1.9388	0.9109
150	55.1313	48.5704	44.6481	12.3832	8.4030	3.3795	4.0097	2.1316	2.1286

	a_n	差	二階差	差的比值	比值	比值	$\ln a_n$	差	比值
60	0.9399						-0.0622		
90	1.8131	0.8734			1.9295		0.5950	0.6573	-9.5589
120	5.6765	3.8635	2.9901	4.4235	3.1309	1.6227	1.7363	1.1413	2.9182
150	53.4916	47.8151	43.9516	12.3761	9.4233	3.0097	3.9795	2.2432	2.2919

參、研究結果

一、多邊形的黃金切割基本性質如下：

- (一) 黃金切割後的圖形與原圖形必為相似形。
- (二) 黃金切割後的圖形與原圖形的對應邊長比為 $1:\varphi$ 。
- (三) 任意黃金多邊形依規律可以無限切割產出無限多個相似的黃金多邊形。

二、符合基本原則的黃金五邊形確實可行，但其角度有範圍限制。

三、黃金四邊形必須符合「 $72^\circ < \alpha \leq \alpha_5$ 的最小臨界值」，當 $\alpha = 90^\circ$ 時，圖形即為黃金矩形；三角形也存在非黃金三角形的黃金切割，但必須符合「 $36^\circ \leq \alpha \leq 72^\circ$ 」。

四、在 α 為適當範圍內，可依方式作黃金多邊形，並可連接各對應點構成黃金螺線，且黃金多邊形當邊數趨近於無限大時 α 會趨近 180° ，黃金多邊形本身的外緣也趨近黃金等角螺線。

五、隨著 n 的增加， α_n 的最小臨界值與最大值會越來越趨近同一角度值。

六、一黃金多邊形，符合 $k\beta = 180h$ ($k, h \in \mathbb{N}$)，若 h 為奇數，則 $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點；若 h 為偶數，則 $\overline{V_x V_{x+k}}$ 與 $\overline{G_x G_{x+k}}$ 皆會通過極點；隨著 α 的改變，極點的軌跡呈現一個圓心為 $(\varphi, 0)$ 的單位圓。

七、黃金切割三角形 $\alpha = 60^\circ$ 螺線方程式為 $r = \frac{\frac{\sqrt{2}\varphi}{2}}{\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{3}\varphi^3}{-\frac{2\pi}{3}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{2\pi}{3}}\right)\theta}$ ；黃金矩形的螺線方程式為 $r = \frac{\frac{\sqrt{\varphi+2}}{\varphi+2}}{\left(\frac{2\pi-\tan^{-1}\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{2}}\right)\theta}$ ；

黃金五邊形 $\alpha = 120^\circ$ 螺線方程式為 $r = \frac{\frac{2\sqrt{2}\varphi^3}{\sqrt{5}\varphi^3+1}}{\left(\frac{\pi+\tan^{-1}\sqrt{15}}{-\frac{\pi}{3}}\right)} e^{\left(\frac{\ln\varphi}{-\frac{\pi}{3}}\right)\theta}$ ；黃金多邊形黃金螺線方程式中的 b 係數符合 $\frac{\ln\varphi}{(\alpha - 180^\circ) \times \frac{\pi}{180^\circ}}$ 。

綜合上述，本研究成功將黃金切割的基本原則擴展到黃金多邊形，得到任意黃金多邊形螺線極點的尋找方式，成功建立部分黃金多邊形的螺線方程式，並找出 b 係數與 α 的關係式。

肆、討論

一、 α_n 區間規律

本研究推測 α 與螺線極座標方程式 $r = ae^{b\theta}$ 中的指數 $b\theta$ 有關，因此先嘗試找出螺線方程式的一般式，再回頭探討 α_n 區間的規律，但最終並未推導出螺線方程式的一般式，亦未獲得其他可推斷 α_n 區間的規律的線索。

二、極點軌跡

觀察出在 α 改變時，黃金螺線極點變動軌跡呈現一個以 $(\varphi, 0)$ 為圓心單位圓，但本研究並未找出方法證明這個現象。原本希望求出給定任意角度 α 的極點通式，猜測極點以 $(\varphi, 0)$ 為圓心與 x 軸的夾角和 α 會呈函數 $f(\alpha)$ 關係，分析許多運算模式皆未有明顯規則。嘗試假設 $f(\alpha) = pq^\alpha$ ，代 α 為 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ 的極點求 p, q ，但發現沒有一致的解。

三、黃金螺線方程式一般式

本研究並未找出黃金螺線極座標方程式的一般式，但依研究結果，給定任意角度 α 能求出 b 係數。螺線的 a 係數比 b 係數複雜，起先嘗試尋找 $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ 的 a 係數之間的關係，試圖找出其中遞迴關係之後，再推出一般式，但分析各種可能的運算模式皆未找出可觀的規則，故難以繼續發展產出黃金螺線方程式一般式。

伍、未來展望

- 一、本研究成功解釋多邊形的黃金切割，並透過逼近的方式找到黃金 n 邊形， $3 \leq n \leq 20$ ， α_n 的最小臨界值及特殊情形時 α 值的近似值，但未找出其中規則，期望未來能找出 α_n 區間規律。
- 二、本研究對於「黃金多邊形螺線極點皆在圓心為 $(\varphi, 0)$ 的單位圓」並未成功作全面的證明，期望未來能配合極點函數 $f(\alpha)$ 、極點通式或其他方式來證明。
- 三、期望未來能求出極點函數 $f(\alpha)$ ，或找出極點的通式。
- 四、本研究僅求出給定任意角度 α 螺線方程式的 b 係數，但並未找出給定任意角度 α 的 a 係數，期望未來能找出 α 與 a 係數的關係式，進一步推導出黃金多邊形螺線極座標方程式的一般式。
- 五、本研究有提到黃金多邊形連接各頂點形成的螺線與連接各切割點形成的螺線會有所差異，連接各切點的螺線方程式在 α 為 α_n 最小臨界值時會與連接各頂點的螺線重合，在 α 非最小臨界值時，兩螺線方程式係數是否具有任何相關性，值得繼續深入探討。

陸、參考文獻

李維歐 (2005) · 黃金比例 (初版) (邱宏義譯) · 臺北市：遠流出版社 · (原著出版年：2002年)。
白啟光 (2002) · 費氏數列及黃金切割 · 取自「數學嘉年華」：<https://fit.tw/mUuJG> · <https://fit.tw/Umzku>
趙文敏 (2002) · 等角螺線及其他 · 取自「數學知識」：<https://fit.tw/scvTU> · <https://fit.tw/mGABz>

蘇惠玉 (2018) · 追本數源——你不知道的數學祕密 (初版) · 臺北市：三民書局。
王聖文 (1994) · 有趣的對數螺線 · 中華民國第三十四屆中小學科學展覽會。
許浩鳴 (2014) · 空間螺線的代數分析 · 中華民國第五十四屆中小學科學展覽會。