中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030404

好個！不數和—兩數之和不在同一列

學校名稱：連江縣立敬恆國民中學

作者：	指導老師：
國二　官靖恩 國一　林承萱 國二　黃坦駿	王慶弘

關鍵詞：兩數之和、兩數之差、等差級數

摘要

從 1 到 5 的連續正整數中，我們需要至少兩列才能做到任兩數之和不在同一列，分別是 1、3、5 與 2、4；如果題目改成從 1 到 8 的連續正整數也要至少兩列，分別是 1、2、4、8 與 3、5、6、7 為任兩數之和不在同一列(Bezuszka & Kenney [7], 1983)。因此我們定義如下：在 n 橫列 m 直行中，第 1 直行放入 1 到 n 的連續正整數，第 2 直行放入(n+1)到 2n 的連續正整數，第 3 直行放入(2n+1)到 3n 的連續正整數，依此類推到第 m 直行放入(nm-n+1)到 nm 的連續正整數，但任兩個數字之和不在同一橫列，這樣的排列組合是否有技巧可以造的出來呢？

先從 2 列 3 行算到 3 列 5 行，再用數學的觀念研究 n 列任意兩行加法規律，然後使用等差數列的技巧逐步完成 6 列 14 行，最後用 4 列做例子完整呈現造法技巧。

壹、研究動機

當教到《國中數學第一冊》洪有情、王建都、林保平、馬榮喜、陳世易、朱峻賢、張美美([2]，2018)「整數的運算」時，我們雖然學得還不錯，但老師覺得我們運算的能力和反應可以再加強，有許多不瞭解的數學觀念常常在計算時無法活用，剛好老師看了近期中央研究院數學研究所的《數學傳播季刊》一篇內容，當做科展題目也可以訓練我們的運算能力，又涉獵到數學的加法計算的基礎觀念，對以後的學習有一定的幫助，讓我們在學習中的困難處，能更加理解計算的應用和運用方面能靈活些，並理解它，在學習方面能夠更上一層樓。

這次的研究始於《數學傳播季刊》2018 年第 42 卷第 3 期中〈任兩數差都不在同一組的分組問題〉(張進安[4]，2018)。題目如下：

來訪的外星人傳送了 7 個容量足夠大的安全保管箱，並通知另有 1000 顆編有序號的微型炸彈也會隨機陸續傳送到地球。這些炸彈一傳到地球就會啟動，地球人必須在下一顆微型炸彈傳送到前，將它放入某一個保管箱中。如果兩個不在保管箱中的炸彈都已啟動就會立刻引爆；但是必須遵守一個嚴格的規則：「同一個保管箱中的任兩顆炸彈序號的差，不能也在該保管箱中。」否則也會引爆所有的炸彈。如果這 1000 顆微型炸彈都能安全的投入保管箱，就完成挑戰。

…如果問題的限制改為：使每組中的任兩數之和都不在該組內，是否有不同的發展。分析後發現，若任兩數是指相異兩數，的確可以增加很多種解法，但我沒能發現規律。

參考 1984 年 12 月《數學傳播季刊》中〈算數和數論中的『難題』挑戰〉，就是以「兩數之和不在同一列」來研究，文中只推算到分三組時最多到 23，分四組時最多到 66，並沒有證明也沒有發展出一般公式，看來問題真的不簡單(王湘君[1]，1984)。

貳、研究目的

張進安([4]，2018)在「從 1 開始的連續正整數中任兩數之差不在同一列」推得公式解為 n 個盒子最多可以投入$\frac{1}{2}(3^n-1)$個球，例如 3 盒最多可以放 13=$\frac{1}{2}(3^3-1)$個球，排法為：

B_1 : 1 = 1, 4 = 1+3, 7 = 1+9−3, 10 = 1+9, 13 = 1+3+9, (1 = 3^0 是最小的正項放第 1 盒)

B_2 : 2 = 3 − 1, 3 = 3, 11 = 3 + 9 − 1, 12 = 3 + 9, (3 = 3^1 是最小的正項放第 2 盒)

B_3 : 5 = 9 − 3 − 1, 6 = 9 − 3, 8 = 9 − 1, 9 = 9, (9 = 3^2 是最小的正項放第 3 盒)

也就是 7 個盒子可以放 1093= $\frac{1}{2}(3^7-1)$顆炸彈，所以盒子數是足夠放 1000 顆炸彈；「兩數之差」題目源自許志農主編([3]，2005)《數學新天地》，但均未談到關於列或行的基本減法運算規律，為此老師們討論時提到如果我們能做出關於列或行的基本加法運算規律，或許可以解釋「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」尚未找到相關文獻的原因。

我們想了解其基本特性，先從簡單的加法運算開始，到了手算無法做到時，觀察其特點，再加以延伸使用。以下是我們待答的問題：

一、100 以內斯托爾數列有幾列？即「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」可以分成幾列？

二、「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」在 2 列和 3 列分別最多可以幾行？

三、n 列中任意兩行的加法運算規律或特性有哪些？

四、2 列最多是 3=2+1 行，3 列最多是 5=3+2 行，6 列我們用獨創的技巧造出 11=6+5 行：

6 列 11 行「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」											
	1~6	7~12	13~18	19~24	25~30	31~36	37~42	43~48	49~54	55~60	61~66
第 1 列	1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62
第 2 列	2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63
第 3 列	3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66
第 4 列	4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65
第 5 列	5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64
第 6 列	6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61

6+5 會是最多行數公式嗎？我們獨創用斯托爾數列造一個 6 列 14 行「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」說明 6 列至少 14 行，實際上應超過 17 行以上。

五、如何用 4 列完整的呈現「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」的斯托爾數列造法，做出可能最多的行數？

當我們可以造出 4 列時，最後一個問題讓整篇文章首尾連貫起來一氣呵成：

六、當我們造出「兩數之和」時，能與「兩數之差」同時存在嗎？這個問題事關斯托爾數列的重要地位，而不應只是當特例使用。

參、研究設備及器材

紙、筆、word、數學傳播季刊、國中數學課本。

肆、研究過程或方法

一、100 以內的斯托爾數列

Stöhr Sequence：Let a_1=1 and define a_{n+1} for $n \geqq k$ to be the least integer greater than a_n which can not be written as the sum of at most h addends among a_1 , a_2 , ..., a_n . (Guy[5], 1994)

「Stöhr Sequence」(斯托爾數列)是從 1 開始連續正整數的數列中找出最長的一列使得任 h 數之和不在同一列，我們只討論當 h=2 時即任兩數之和不在同一列，形如 1、2、4、7、10、13、16、…。

延伸斯托爾數列從 1 到 100 可以分成 5 組數列，分別如下說明。

(一)「第一列斯托爾數列」1、2、4、7、10、…、97、100 中「任兩數之和不在同一列」

從 1 開始的連續正整數找出最長的一列「任兩數之和不在同一列」，我們稱為「第一列斯托爾數列」，有 1、2、4、7、10、...。

找法為 1+2=3，所以接下來選 4，然後 4+1=5 與 4+2=6，所以選 7，又 7+1=8、7+2=9 與 7+4=11，所以選 10，我們觀察出從 4 開始每次都加 3 形成等差數列；想不到等差數列是主要關鍵步驟造法，這個簡單造法卻有意外的彩蛋出現讓兩者水火不容情形，就是「兩數之和不在同一列」與「兩數之差不在同一列」也許不能同時存在，之後會說明這個情況。「第一列斯托爾數列」從 1 到 100 的正整數有 35 個這樣的數字。做成表格如下：

1	2		4			7			10			13			16			19
22			25			28			31			34			37			40
43			46			49			52			55			58			61
64			67			70			73			76			79			82
85			88			91			94			97			100			

「第一列斯托爾數列」在這裡的用法是如果是 n 列就乘 n 倍，例如 2 列就是 2×1、2×2、2×4、2×7、…、2×97、2×100，若 3 列就是 3×1、3×2、3×4、3×7、…、3×97、3×100。

正常情況下是找「第一列斯托爾數列」的公式解，但我們發現 2 的存在有其特殊意義勝過找公式解，因為 4−2=2，所以「第一列斯托爾數列」不能同時存在「兩數之和不在同一列」與「兩數之差不在同一列」。

「第一列斯托爾數列」本身去掉 2 後，會出現很有趣的現象，即「兩數之和不在同一列」與「兩數之差不在同一列」同時存在，即 1、4、7、10、…，理由是任兩數相減是 3 的倍數例如 7−1=3×2，但每個數字被 3 除的餘數是 1 例如 4 除以 3 的餘數是 1，所以形成「兩數之差不在同一列」。如果放在基因組合只要變動一個基因序結果是天差地遠了。

更神奇還有「第一列斯托爾數列」中挑出 2 的倍數，即 2、4、10、16、22、28、34、40、46、52、…，每個 2 的倍數除以 2，也就是變成 1、2、5、8、11、14、17、20、23、26，觀察到從 8 開始的數字可以三數之和在同一列的數字 20=17+2+1=14+5+1=11+8+1，此時我們才驚覺「第一列斯托爾數列」任兩數之和不在同一列，但是三數之和在同一列，例如 31=28+2+1=25+4+2=22+7+2=19+10+2=16+13+2，也可以四數之和在同一列如 31=19+7+4+1，這才恍然大悟原始定義「*h* 數之和不在同一列」刻意討論 *h*=2、3、4、...。

(二)「第二列斯托爾數列」3、5、6、12、14、…、93、95 中「任兩數之和不在同一列」

從 1 開始的連續正整數扣掉「第一列斯托爾數列」，找出最長的一列「任兩數之和不在同一列」，未找到相關文獻與用途，我們獨創這個用法，稱為「第二列斯托爾數列」，有 3、5、6、12、14、...。1 到 100 的正整數扣掉 1、2、4、7、10、…、97 與 100；又 5+3=8、6+3=9 與 5+6=11，所以 3、5、6 之後選 12，1 到 100 有 23 個這樣的數字。做成表格如下：

3		5	6						12		14
21		23							30		32
39		41							48		50
57		59							66		68
75		77							84		86
93		95									

「第二列斯托爾數列」在這裡的用法當做 n 列中的第二列再乘 n 倍，例如 2 列中第 1 列是 2×1、2×2、2×4、2×7、⋯、2×97、2×100，第 2 列 2×3、2×5、2×6、2×12、⋯、2×93、2×95。

「第二列斯托爾數列」又出現了神秘數字 6，因為 12−6=6 所以去掉 6 剩下 3、5、12、14、21、…，可能讓「兩數之和不在同一列」與「兩數之差不在同一列」同時存在例如 5+12=17 但 17 不在此數列中，但「第二列斯托爾數列」神秘數字 6 導致兩者不能同時成立，矛盾之處令人不解。如果用在資料庫當做金鑰，似乎可以達到三種防護效果。

令人意想不到的「第二列斯托爾數列」與「第一列斯托爾數列」有非常密切的關係，這個現象令人百思不解;「第二列斯托爾數列」挑出 3 的倍數即 3、6、12、21、30、39、48、…，每個 3 的倍數除以 3 竟然變成「第一列斯托爾數列」1、2、4、7、10、13、16…，兩者看似毫無關係的數列就此產生連結。雲端大數據如果用這方法不知是否可以節省演算時間。

這裡也發生了三數之和在同一列的數字，例如從 14=6+5+3、21=12+6+3、23=14+6+3、30=21+6+3、…；也出現了四數之和在同一列的數字例如 59=30+14+12+3，我們也嘗試挑戰了五數之和在同一列的數字發覺不是那麼容易。Stöhr 我們找到的名字出現在德文文獻，英文版或中文並沒有看到直接的資料，不知相關分析是否有在德文裡面談到，對我們而言事先不知道有什麼內容可以討論。

(三)「第三列斯托爾數列」8、9、11、15、…、92、96 中「任兩數之和不在同一列」

從 1 開始的連續正整數扣掉「第一列斯托爾數列」與「第二列斯托爾數列」，找出最長的一列「任兩數之和不在同一列」，我們獨創其應用，稱為「第三列斯托爾數列」，即 8、9、11、…，其中 1 到 100 有 17 個這樣的數字。做成表格如下頁：

8	9		11				15			18
35	36		38				42			
62	63		65				69			
89	90		92				96			

「第三列斯托爾數列」在這裡的用法當做 n 列中的第三列再乘 n 倍，例如 3 列中第 1 列只需要用到 3×1、3×2、3×4、3×7、3×10，第 2 列只需要用到 3×3、3×5、3×6，第 3 列只需要用到 3×8、3×9，就可以造出 3 列最多行數 5 行，我們在文章最後用 4 列展現技巧。

「第三列斯托爾數列」再度出現神秘數字 18，可能證實了每一列斯托爾數列至少會有一個具有特別意義數字的存在。因為 36−18=18 所以去掉 18 剩下 8、9、11、15、35、36，…，可能讓「兩數之和不在同一列」與「兩數之差不在同一列」同時存在，但「第三列斯托爾數列」神秘數字 18 導致兩者不能同時成立。

「第三列斯托爾數列」與「第一列斯托爾數列」也有非常密切的關係；「第三列斯托爾數列」挑出 9 的倍數即 9、18、36、63、90、…，每個 9 的倍數除以 9 竟然變成「第一列斯托爾數列」1、2、4、7、10、13、…，兩者看似毫無關係的數列就此產生連結。

這裡也發生了部分三數之和在同一列，例如從 35=18+9+8=15+11+9、36 沒有三數之和、38=18+11+9、42=18+15+9、…。

(四)「第四列斯托爾數列」17、20、24、26、…、54、98 中「任兩數之和不在同一列」

從 1 開始的連續正整數扣掉「第一列斯托爾數列」、「第二列斯托爾數列」與「第三列斯托爾數列」，找出最長的一列「任兩數之和不在同一列」，我們獨創其更多的應用稱為「第四列斯托爾數列」，即 17、20、24、…，其中 1 到 100 有 10 個這樣的數字。做成表格如下：

												17			20
24		26	27		29				33						
	45									54					
														98	

「第四列斯托爾數列」又出現神秘數字 27，因為 54−27=27 所以去掉 27 剩下 17、20、24、26、27、29、33、45，…，可能讓「兩數之和不在同一列」與「兩數之差不在同一列」同時存在例如 17+20=37 但 37 不在此數列，但「第四列斯托爾數列」神秘數字 27 導致兩者不能同時成立。

這裡也發生了部分三數之和在同一列，例如 98=54+27+17。

(五)「第五列斯托爾數列」44、47、51、…、87、99 中「任兩數之和不在同一列」

從 1 開始的連續正整數扣掉「第一列斯托爾數列」、「第二列斯托爾數列」、「第三列斯托爾數列」與「第四列斯托爾數列」，找出最長的一列「任兩數之和不在同一列」，我們獨創稱為「第五列斯托爾數列」，其中 1 到 100 有 15 個這樣的數字。做成表格如下：

			44			47			
51		53			56				60
71	72		74				78		80
81		83				87			
								99	

我們在這裡就不再花時間找規律或特別的地方，將開始進入我們研究的主題 2 列與 3 列。

二、2 列最多可以放到 3 行「任兩數之和不在同一列」

2 列 3 行只有一種放法，且無法形成 2 列 4 行，做成表格如下：

2 列最多放 3 行				
	第 1 行 放 1~2	第 2 行 放 3~4	第 3 行 放 5~6	第 4 行 放 7~8
第 1 列	1	3	6	X7=1+6
第 2 列	2	4	5	X7=2+5

排列上第 1 行依序放 1 與 2，第 2 行放 3 或 4，此時選 3 當第 1 列與 4 當第 2 列，接著第 3 行放 5 與 6，此時選 6 當第 1 列與 5 當第 2 列，因為 1+6=7 與 2+5=7，所以第 4 行都不能放 7，寫成 X7。故 2 列最多只能放 3 行。

如果用斯托爾數列來做最多行數技巧，第 n 列的斯托爾數列的最小的數字當做參考取第(n-1)列較大的數字；也就是「第二列斯托爾數列」最小數字是 3，所以取「第一列斯托爾數列」較大的 4 當做選取最大行數，做成表格如下：

斯托爾數列 2 列最多行數先放 4 行				
	第 1 行 放 1~2	第 2 行 放 3~4	第 3 行 放 5~6	第 4 行 放 7~8
第 1 列	1	3	2×3	X7=1+(2×3)
第 2 列	2×1	2×2	5	2×4

然後開始從第 1 行檢驗，n 列有特別的技巧在後面討論，最後刪除第 4 行因為第 1 列 1+(2×3)，寫成 X7。

Bezuszka 與 Kenney ([7], 1983)研究指出 1 到 8 的連續正整數也要至少兩列，分別是 1、2、4、8 與 3、5、6、7 為任兩數之和不在同一列，所以很明顯的 2 列最大行數造法 1 與 2 會在同一列，但是依然會形成兩數之差在同一列例如 2−1=1、4−2=2、8−4=4，與 6−3=3。實際上在斯托爾數列三數之和的造法是 1、2、4、8、15、22、29、36、…，更多研究顯示四數與五數之和開始也是 1、2、4、8。推論最大行數也要考慮「幾數之和」不在同一列。

三、3 列最多可以放到 5 行「任兩數之和不在同一列」

3 列 5 行有兩種放法，無法形成 3 列 6 行，第一種做成表格如下：

3 列最多放 5 行「任兩數之和不在同一列」第一種情形						
	第 1 行 放 1~3	第 2 行 放 4~6	第 3 行 放 7~9	第 4 行 放 10~12	第 5 行 放 13~15	第 6 行 放 16~18
第 1 列	1	5	7	11	14	X16 X18=7+11
第 2 列	2	4	9	10	15	X17=2+15
第 3 列	3	6	8	12	13	X16 X18=6+12

第 6 行不能放的型態出現，也是造成往後的找法改變的契機。

第二種「任兩數之和不在同一列」做成表格如下：

3 列最多放 5 行「任兩數之和不在同一列」第二種情形						
	第 1 行 放 1~3	第 2 行 放 4~6	第 3 行 放 7~9	第 4 行 放 10~12	第 5 行 放 13~15	第 6 行 放 16~18
第 1 列	1	5	7	11	14	X18=7+11
第 2 列	2	6	9	12	13	X18=6+12
第 3 列	3	4	8	10	15	X18=8+10

我們使用斯托爾數列做第一種的情形，也就是第 3 列的 3×1、3×2 和 3×4 在同一列，第 2 列的 3×3 和 3×5 在同一列，斯托爾數列的用法是把 3 的倍數拿掉，剩下 1、2 與 4 同一列，3 與 5 同一列。如果是「兩數之差」用三列最大數字可以放到 13，當做行數參考用。

如果用斯托爾數列來做最多行數技巧，第 n 列的斯托爾數列的最小的數字當做參考取第(n-1)列較大的數字；也就是「第三列斯托爾數列」最小數字是 8，所以取「第二列斯托爾數列」較大的 12 當做選取最大行數，然後開始從第 1 列的第 1 行檢驗到第 12 行，不符合的做刪除，第 2 列重複相同的操作，由於需要用到特別的技巧和觀念所以 3 列在這裡我們就先不做操作說明，我們在文章的最後用 4 列做完整的技巧解說。

「三數之和不在同一列」與「四數之和不在同一列」定義有「兩數之和不在同一列」的條件，要完整的分析 3 列應該要做到這兩件事，所以我們的研究還只是剛開始起步而已。

在找的過程中遇到最大的問題是很容易算錯，或者是漏算，更要命的是很難察覺是否有錯，不禁對自己的加法能力開始懷疑。這麼大量的檢查運算非常耗費腦力和物力，讓 4 列的運算歷程蒙上一層陰影，我們實際在手算 4 列中也是挫折感不斷，當行數增加越多，難度呈等比級數增加，如果算錯一個關鍵數字有可能導致錯誤的結論，但更艱鉅的是 4 列很難完整得找出最多幾行，所以老師說不然先找特性再想方法好了，我們用同樣的方法討論部分的手算 4 列沒有列出來，直接先做出 n 列的部分特性。

比較 2 列 3 行與 3 列 5 行，看起來有 n 列最多幾行的公式，我們不禁會問 n 列最多有[n+(n-1)]行的推論會成立嗎?這個疑似肯定句是我們研究的開端。

四、n 列的規律

我們先討論 7 列 7 行的情形再分析 n 列 m 行一般化，大致上有五個子題。

(一)第 1 行與其它行的相加只會影響該行與下一行

例如 7 列中第 1 行選最小 1 與第 2 行選最小 8 只會影響第 2 行的 9=1+8，第 1 行選最大 7 與第 2 行選最大 14 只會影響第 3 行的 21=7+14。示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 1 行與第 2 行相加會影響到第 2 行與第 3 行							
	第 1 行 1~7	第 2 行 8~14	第 3 行 15~21	第 4 行 22~28	第 5 行 29~35	第 6 行 36~42	第 7 行 43~49
第 1 列	1	8	15				
第 2 列	2	9=1+8	16				
第 3 列	3	10	17				
第 4 列	4	11	18				
第 5 列	5	12	19				
第 6 列	6	13	20				
第 7 列	7	14	21=7+14				

在$n > 2$的列中，$2 < m < k$且 n、m 與 k 為正整數，從上述我們可以推得如下：第 1 行的任一數字與第k行的任一數字相加影響到第k行與第$(k+1)$行，因為第1行的最小數字是1與第k行的最小數字是$(nk-n+1)$相加為：

$$1+(nk-n+1)= nk-n+2\text{，即落在第}k\text{行。}$$

第1行的最大數字是n與第k行的最大數字是nk相加為：

$$n+nk=n(k+1)\text{，}$$

即落在第$(k+1)$行。示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 1 行任一數與第 k 行任一數的相加只會影響第 k 行與第(k+1)行				
	第 1 行	…	第 k 行	第 k+1 行
第 1 列	1	…	nk-n+1	nk+1
第 2 列	2	…	nk-n+2=1+(nk-n+1)	nk+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
第 n 列	n	…	nk	nk+n

搭配後面的性質衍伸出很特別的觀念，除了第 n 列外，每一列只要加上 n 就可以形成任兩數之和不在同一列，例如 1 加上 n 只會影響到第 2 行顯然 1、(1+n)可以同一列，(1+n+n)只會影響到第 3 行顯然 1、(1+n)、(1+n+n)可以形成「兩數之和不在同一列」，也就是 1、(1+n)、(1+2n)、(1+3n)、(1+4n)、…，可以形成「兩數之和不在同一列」；更有趣的是 2、(2+n)、(2+2n)、(2+3n)、(2+4n)、…，也可以形成「兩數之和不在同一列」，可以推到(n-1)、(n-1+n)、(n-1+2n)、(n-1+3n)、(n-1+4n)、…，也可以形成「兩數之和不在同一列」。第 n 列只要做調整就可以形成每列「任兩數之和不在同一列」。

(二)第 2 行與第 2 行之後的相加會影響到下兩行

例如 7 列中第 2 行最小的 8 加第 3 行最小的 15 則會影響第 4 行的 23=8+15，第 2 行最大的 14 加第 3 行最大的 21 則會影響第 5 行的 35=14+21。此時發現第 4 行的 22 不會被影響；8+21=29=14+15，即 29 會出現兩次。示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 2 行與第 3 行相加會影響到第 4 行與第 5 行							
	第 1 行 1~7	第 2 行 8~14	第 3 行 15~21	第 4 行 22~28	第 5 行 29~35	第 6 行 36~42	第 7 行 43~49
第 1 列		8	15		29=8+21 =14+15		
第 2 列		9	16	23=8+15	30		
第 3 列		10	17	24	31		
第 4 列		11	18	25	32		
第 5 列		12	19	26	33		
第 6 列		13	20	27	34		
第 7 列		14	21	28	35=14+21		

由以上敘述知道，第 2 行的任一數字與第 2 行之後任一數字的相加不會影響到下一行的最小數字，例如 7 列中第 2 行最小 8 加第 3 行最小 15 相加後是 23 但第 4 行可以放到最小是 22。我們會將推理寫下來，理由是如果只是用想的很容易出現迷思觀念。

第 2 行的與第 2 行之後的相加，該行最小加上另一行最大會影響隔一行的最小數字且會出現兩次。例如 7 列中第 2 行最小 8 加第 3 行最大 21 相加是 29 會影響第 5 行的 29，或第 2 行最大 14 加第 3 行最小 15 相加是 29 會影響第 5 行的 29。

(三)第 3 行與第 3 行之後的相加影響到隔行的下兩行

例如 7 列中第 3 行最小 15 加第 4 行最小 22 會影響第 6 行的 37=15+22，第 3 行最大 21 加第 4 行最大 28 會影響第 7 行的 49=21+28。此時發現第 6 行的 36 不會被影響；15+28=43=21+22，即 43 會出現兩次，與前述的第 2 行討論相同結論。示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 3 行與第 4 行相加會影響到第 6 行與第 7 行							
	第 1 行 1~7	第 2 行 8~14	第 3 行 15~21	第 4 行 22~28	第 5 行 29~35	第 6 行 36~42	第 7 行 43~49
第 1 列			15	22			43=15+28 =21+22
第 2 列			16	23		37=15+22	44
第 3 列			17	24		38	45
第 4 列			18	25		39	46
第 5 列			19	26		40	47
第 6 列			20	27		41	48
第 7 列			21	28		42	49=21+28

從這裡可以看到只要找出受哪兩列影響，就可以快速檢驗是否計算錯誤。

(四)第 m 行任一數字與第 k 行任一數字的相加影響第[k+(m-1)]行與第(k+m)行

在n列中，$2 < m < k$ 且 n、m 與 k 為正整數，從上述我們可以推得如下：

第m行任一數字與第k行任一數字的相加影響到第$[k + (m - 1)]$行和第$(k + m)$行，因為第m行的最小數字是$(nm - n + 1)$與第k行的最小數字是$(nk - n + 1)$相加為：

$$(nm - n + 1) + (nk - n + 1)$$
$$= (nk + nm - n) - n + 1 + 1$$
$$= n(k + m - 1) - n + 2，$$

即落在第$[k + (m - 1)]$行，且不會影響此行原本最小數字$n(k + m - 1) - n + 1$。

第m行的最大數字是nm與第k行的最大數字是nk相加為：

$$nm + nk = n(k + m)，$$

即落在第$(k + m)$行。示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 m 行任一數字與第 k 行任一數字的相加影響到第[k+(m-1)]行和第(k+m)行							
第 1 行	…	第 m 行	…	第 k 行	…	第[k+(m-1)]行	第(k+m)行
1	…	nm-n+1	…	nk-n+1	…		n(k+m-1)+1
2	…	nm-n+2	…	nk-n+2	…	(nm-n+1)+(nk-n+1) =n(k+m-1)-n+2	n(k+m-1)+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	…	nm	…	nk	…	n(k+m-1)	nm+nk=n(k+m)

這個結論我們感受很深，如果全部看到或想到的都討論，就理想上是很不錯考慮周全，但實際上工程浩大，這一個性質告訴我們其實數字的關聯性牽涉範圍比預期中少很多。

繼續往下的討論；第m行的最小數字和第k行的最大數字相加影響到第$(k + m)$行的最小數字，因為第m行的最小數字是$(nm - n + 1)$與第k行的最大數字是nk相加為：

$$(nm - n + 1) + nk = n(k + m) - n + 1，$$

且第m行的最大數字與第k行的最小數字相加也會影響到第$(k + m)$行的最小數字，因為第m行的最大數字是nm與第k行的最大數字是$(nk - n + 1)$相加為：

$$nm + (nk - n + 1) = n(k + m) - n + 1。$$

示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第m行的最小數字與第k行的最大數字相加影響到第(k + m)行的最小數字， 且第m行的最大數字與第k行的最小數字相加也會影響到第(k + m)行的最小數字						
第 1 行	…	第 m 行	…	第 k 行	…	第(k + m)行
1	…	nm-n+1	…	nk-n+1	…	(nm-n+1)+nk=n(k+m)-n+1， nm+(nk-n+1)=n(k+m)-n+1
2	…		…		…	
⋮	⋮		⋮		⋮	
n	…	nm	…	nk	…	

nm 和 nk 就是斯托爾數列，表示插入會影響該等差數列在第(k+m)行需換掉數字。

第m行的最小數字與第k行的數字相加影響到第$[k+(m-1)]$行第 2 小的數字至最大的數字與第$(k+m)$行最小的數字，因為第m行的最小數字是$(nm-n+1)$與第k行的最小數字是$(nk-n+1)$相加為$[n(k+m-1)-n+2]$，第m行的最小數字$(nm-n+1)$和第k行的最大數字nk相加為$n(k+m)-n+1$，示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 m 行的最小數字與第 k 行的數字相加影響到 第[k+(m-1)]行第 2 小的數字至最大的數字與第(k+m)行最小的數字							
第 1 行	…	第 m 行	…	第 k 行	…	第[k+(m-1)]行	第(k+m)行
1	…	nm-n+1	…	nk-n+1	…		(nm-n+1)+nk
2	…		…	...	…	(nm-n+1)+(nk-n+1)	
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	
n-1	…		…	nk-1	…	(nm-n+1)+(nk-2)	
n	…		…	nk	…	(nm-n+1)+(nk-1)	

顯示同一列只要不放 nk 是可以錯開影響的。同理，第m行的第 2 小的數字與第k行的數字相加影響到第$[k+(m-1)]$行第 3 小的數字至最大的數字和第$(k+m)$行至第 2 小的數字，因為第m行第 2 小的數字是$(nm-n+2)$與第k行的最小數字是$(nk-n+1)$相加為$[n(k+m-1)-n+3]$，第m行第 2 小的數字是$(nm-n+2)$和第k行的最大數字nk相加為$[n(k+m)-n+2]$，示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 m 行的第 2 小的數字和第 k 行的數字相加影響到 第[k+(m-1)]行第 3 小的數字至最大的數字和第(k+m)行至第 2 小的數字							
第 1 行	…	第 m 行	…	第 k 行	…	第[k+(m-1)]行	第(k+m)行
1	…		…	nk-n+1	…		(nm-n+2)+(nk-1)
2	…	nm-n+2	…	nk-n+2			(nm-n+2)+nk
3	…		…	nk-n+3	…	(nm-n+2)+(nk-n+1)	
⋮	⋮			⋮		⋮	
n-1	…		…	nk-1	…	(nm-n+2)+(nk-3)	
n	…		…	nk	…	(nm-n+2)+(nk-2)	

由上面的示意表格觀察出$(nm-n+2)$中若拆解成兩個部分為$(nm-n)$和2，其中2表示不會影響到最小數字和第 2 小的數字，同理若換成$(nm-n+3)$不會影響到最小到第 3 小的數字，示意表格如下，但不是我們要放的位置：

第 m 行(nm-n+3)與第 k 行相加不會影響第[k+(m-1)]行最小到第 3 小的數字							
第 1 行	…	第 m 行	…	第 k 行	…	第[k+(m-1)]行	第(k+m)行
1	…		…	nk-n+1	…		(nm-n+3)+(nk-2)
2	…		…	nk-n+2	…		(nm-n+3)+(nk-1)
3	…	nm-n+3	…	nk-n+3	…		(nm-n+3)+nk
4	…		…	nk-n+4	…	(nm-n+3)+(nk-n+1)	
⋮	⋮			⋮		…	
n-1	…		…	nk-1	…	(nm-n+3)+(nk-4)	
n	…		…	nk	…	(nm-n+3)+(nk-3)	

更重要的是+3 放同一列不會影響到該列後面+3，如 3、6×1+3、6×2+3，則不會影響第 4 行放 6×3+3，證明了以下論述的成立。

(五)第 1 列放 1、(n+1)、(2n+1)、…、(nm+1)形成「任兩數之和不在同一列」

如果固定第 1 行從 1 放到 n，說 1 是最小與 n 是最大，如果第 2 行的放法是最小的數字(n+1)放在第 1 行最小的數字 1 那一列，那這種放法可以繼續放入第 3 行，即第 3 行第 1 列能放(3n+1)。

如果第 1 列都放每行最小的數字，即 1、(n+1)、(2n+1)、…、(nm+1)是否可以呢?討論如下：

我們知道第 1 列第 1 行放 1 加上後面行數的最小數字只會影響該行的數字，例如第 1 列第 1 行的 1 加上第 1 列第 2 行(n+1)只會影響第 1 列第 2 行的(n+2)，故第 1 列第 3 行放最小數字(2n+1)是可以的，即 1、(n+1)、(2n+1)可以放在同一列；第 4 列如果一樣放最小的數字(3n+1)，我們知道不會受第 1 行第 1 列 1 的影響，所以討論第 1 列第 2 行的(n+1)與第 1 列第 3 行的(2n+1)，兩者相加會得到(n+1)+(2n+1)=(3n+1)+1，也就是推得第 1 列都放最小數字不影響兩數之和不在同一列的放法，推論式子如下：

$$(nm+1)+(nk+1)=[n(m+k)+1]+1，$$

此時[n(m+k)+1]+1 是第(m+k+1)行的第二小的數字，表格如下：

第 1 列都放每行最小的數字，即 1、(n+1)、(2n+1)、…、(nm+1)								
第 1 行	第 2 行	第 3 行	…	第(m+1)行	…	第(k+1)行	…	第(m+k+1)行
1	n+1	2n+1	…	nm+1	…	nk+1	…	
2								(nm+1) +(nk+1) =[n(m+k)+1] +1
⋮			⋮					
n			…		…		…	

也就是第一列都放每行最小的數字，即 1、(n+1)、(2n+1)、…、(nm+1)是可以的。

這裡就是我們造法的雛形基礎，n 列 m 行造法的理論依據，實際上我們是根據這個理論產生 n 列 m 行造法，由於第 1 列開始用+1 在調整上比較複雜，所以才有接下來的討論。

是否第 1 列第 2 行開始可以放最大的數字呢?即 1、2n、3n、…、nm 可以放在同一列嗎?如果第 1 列第 5 行放該行最大是 5n=2n+3n，是不能的，寫成 X(5n)，如下面表格所示：

第 1 列第 2 行開始放最大的數字只能放到第 4 行					
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行	第 5 行
第 1 列	1	2n	3n	4n	X(5n)
⋮					
第 n 列					

也就是說第 1 列第 1 行放最小數字 1，然後第 1 列之後都放最大數字，則只能放到第 1 列第 4 行。

若 i 是正整數且小於或等於 n，我們可以得到：

若：(nm+i)+(nk+i)=n(m+k+1)+i 成立，

則運算後推得 n=i，

也就是說第 1 列第(m+1)行選(nm+i)，與第 1 列第(k+1)行選(nk+i)，會影響到第一列第(m+k+1)行或第(m+k+2)行，當 i 選擇放 n 時會無法形成兩數和不在同一列，又：

(nm+i)+(nk+i)=n(m+k)+i+i，

若$i+i \leq n$則在第(m+k+1)行，$i+i > n$則在第(m+k+2)行，

如下面表格所示：

第 1 列第(m+1)行選(nm+i)，與第 1 列第(k+1)行選(nk+i)，會影響到第(m+k+1)行或第(m+k+2)行							
第 1 行	…	第(m+1)行	…	第(k+1)行	…	第(m+k+1)行	第(m+k+2)行
1	…	nm+i	…	nk+i	…		
⋮	⋮		⋮		…		
⋮	⋮		⋮		⋮		n(m+k)+i+i，$i \neq n$ 且$i+i > n$
⋮	⋮		⋮		⋮		
⋮	…		…		…	n(m+k)+i+i，$i \neq n$ 且$i+i \leq n$	
⋮	⋮		⋮		⋮		
n	…		…		…		

這裡有個細微處可以討論，就是第 1 列放+i 可以讓往下的好幾行都不受影響，所以我們最終放+2 讓排序可以最佳化，即第 1 列都放+2、第 2 列都放+3、第 3 列都放+4、…、第(n-1)列都放+1、第 n 列都放 n 的倍數相當於放+0。繼續往下的分析。

同理可以放在第 2 列、第 3 列、…、第(n-1)列，其中第(n-1)列的推論為下：

(n-1)+(nm+i)=n(m+1)+i-1，$i > 2$，

第 1 行的(n-1)和第(m+1)行的 nm+i 會影響第(m+2)行的數字 n(m+1)+i-1，如下表格顯示：

第(n-1)列放(n-1)、(n+i)、(2n+i)、…、(nm+i)，$i < n$，第 1 行的(n-1)與第(m+1)行的(nm+i)相加不會影響到第(n-1)列						
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	…	第(m+1)行	第(m+2)行
第 1 列	1					
第 2 列	2					
⋮	⋮					
第(n-2)列	n-2					(n-1)+(nm+i) =n(m+1)+i-1，i>2
第(n-1)列	n-1	n+i	2n+i	…	nm+i	
第 n 列	n					

與前述討論中：

若(nm+i)+(nk+i)=n(m+k+1)+i 則 n=i，

如下面表格所顯示：

第(n-1)列放(n-1)、(n+i)、(2n+i)、…、(nm+i)，i < n，討論第(m+1)行與第(k+1)行相加會影響第(m+k+1)行與第(m+k+2)行							
第 1 行	…	第(m+1)行	…	第(k+1)行	…	第(m+k+1)行	第(m+k+2)行
1	…		…		…		
2	…		…		…		
⋮	⋮		⋮		⋮		
⋮	⋮		⋮		⋮		n(m+k)+i+i，i ≠ n 且 i+i>n
⋮	⋮		⋮		⋮		
⋮	⋮		⋮		⋮	n(m+k)+i+i，i ≠ n且 i+i≤n	
⋮	⋮		⋮		⋮		
n-1	…	nm+i	…	nk+i	…		
n	…		…		…		

但是當放在第 n 列時會得到：

n+(n+i)=2n+i，

如下面表格所顯示：

第 n 列放 n、(n+i)，但不能放(2n+i)			
	第 1 行	第 2 行	第 3 行
第 1 列	1		
第 2 列	2		
⋮	⋮		
第 n 列	n	n+i	X(2n+i)

也就是第 n 列第 2 行放 n+i，則第 n 列第 3 行不能放 2n+i，寫成 X(2n+i)。回顧這個部份我們才驚覺這個結果得來不易，如果一開始我們就想有一個成品，就從 n 列直接放等差，那也不會有這篇文章的產出了。

更多的觀察，我們其實可以造出表格如下所顯示的：

n 列 m 行「任兩數之和不在同一列」基本造法						
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	…	第(m+1)行	
第 1 列	1	n+1	2n+1	…	nm+1	…
第 2 列	2	n+2	2n+2	…	nm+2	…
⋮	⋮			⋮		⋮
第 n-1 列	n-1	2n-1	3n-1	…	nm-1	…
第 n 列	n	2n	X(3n)			

但這時第 n 列只能到第 2 行放 2n，因為第 3 行放 3n 就不能形成任兩數之和不在同一列，寫成 X(3n)。

如果我們嘗試將 2n 放入其他列是否可行呢?例如 1、2n、X(2n+1)，顯然是不可以的，那如果是 1、2n、2n+2、3n+2、X(4n+2)也不行，所以我們可以推得如下的結果：

假設 j 是正整數且小於 n，當 j 放在第 j 列第 1 行，2n 放在第 j 列第 2 行，2n+i 放在第 j 列第 3 行，若 j=i 則不符和任兩數之和不在同一列；3n+i 放在第 j 列第 4 行，則 4n+i 不能放在第 j 列第 5 行因為 4n+i=2n+(2n+i)，寫成 X(4n+i)，如下面表格所顯示：

第 j 列放 j、2n、(2n+i)、(3n+i)，但不能放(4n+i)					
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行	第 5 行
第 1 列	1				
⋮	⋮				
第 j 列	j	2n	2n+i	3n+i	X(4n+i)，$i \neq j$
⋮	⋮				
第 n 列	n				

這裡看得出來我們要引用斯托爾數列進來的原因，如果 n 的倍數一次放一個，很快就無法「兩數之和不在同一列」。先將 n 的倍數放在第 n 列，每次放最多 n 的倍數讓影響最小，例如第一次放 n、2n、4n、…，與某列的數字對調；第二次放 3n、5n、6n、…，與某列的數字對調，依此類推到第 n 次與某列的數字對調。

我們繼續推廣，若$i \neq j$且都小於 n，當 j 放在第 j 列第 1 行，(n+i)放在第 j 列第 2 行，…，(n(m-2)+i)放在第 j 列第(m-1)行，此時若第 j 列第 m 行放 nm 且第 j 列第(m+1)行放(nm+i)，則第 j 列第(m+2)行不能放(n(m+1)+i)因為(n+i)+nm=n(m+1)+i，寫成 X[n(m+1)+i]，如下表格所顯示：

第 j 列放 j、(n+i)、(2n+i)、…、(n(m-2)+i)、nm、(nm+i)，但不能放(n(m+1)+i)						
第 1 行	第 2 行	…	第(m-1)行	第 m 行	第(m+1)行	第(m+2)行
1		…				
⋮		⋮				
j	n+i	…	n(m-2)+i	nm	nm+i	X[n(m+1)+i]，$i \neq j$
⋮		⋮				
n						

若$i = j$且都小於 n，跟上述相同討論可以得到第 j 列第(m+1)行不能放 nm+i 因為 j+nm=nm+i，寫成 X(nm+i)，如下面表格所顯示：

第 j 列放 j、(n+i)、(2n+i)、…、(n(m-2)+i)、nm，但不能放(nm+i)，$i = j$						
	第 1 行	第 2 行	…	第(m-1)行	第 m 行	第(m+1)行
第 1 列	1					
⋮	⋮					
第 j 列	j	n+i	…	n(m-2)+i	nm	X(nm+i)，$i = j$
⋮	⋮					
第 n 列	n					

將一個 n 的倍數放進排好的列很快就會讓「兩數之和在同一列」，如下頁表格所顯示：

第 n 列第 3 行的 3n 和第 1 列第 3 行的 2n+2 對調，則只能完成到第 4 行					
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行	第 5 行
第 1 列	1	n+2	3n	3n+2	X(4n+2)
第 2 列	2	n+1	2n+1	3n+1	
第 3 列	3	n+3	2n+3	3n+3	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
第 n-1 列	n-1	2n-1	3n-1	4n-1	
第 n 列	n	2n	2n+2	4n	X(5n)

也就是當第 1 列和第 2 列規則對調時，我們將第 n 列第 3 行的 3n 和第 1 列第 3 行的 2n+2 也對調，則只能完成到第 4 行，因為第 1 列第 5 行不能放 4n+2=(n+2)+3n，寫成 X(4n+2)。此時第 n 列第 5 行也不能放 5n=n+4n，寫成 X(5n)。

這裡結合斯托爾數列告訴我們，第 n 列的斯托爾數列只會從最小數字影響，例如「第一列斯托爾數列」最小數字是 1xn 很快該列就無法形成「兩數之和不在同一列」，，但是在「第五列斯托爾數列」最小數字是 44n，應該至少要在第 45 行才會影響「兩數之和不在同一列」，所以我們的方法反而在列數與行數越大越好造。

研究目的六個待答問題緊扣著斯托爾數列與排列組合的應用，研究結果將解釋與整合做出貢獻。

伍、研究結果

我們從上述的過程中，重新整合與整理得到以下的研究結果：

一、1 到 100 的正整數可以分成 5 組斯托爾數列，即 5 組「任兩數之和不在同一列」。這個研究提供了重要線索：

(一)「第一列斯托爾數列」為 1、2、4、4+3、4+(3x2)、4+(3x3)、…，表示在 4 之後可以加上公差為 3 的數字形成「任兩數之和不在同一列」。公差決定在 n 列中公差為 n 就可以形成「任兩數之和不在同一列」，例如 6 列 5、7、7+6、7+(6x2)、7+(6x3)、…。

(二)「第一列斯托爾數列」雖然只有一列，但若為 n 列就是 n 倍。例如 6 列表示「第一列斯托爾數列」就是 6x1、6x2、6x4、6x7、6x10、6x13、…；「第二列斯托爾數列」在 6 列為 6x3、6x5、6x6、6x12、6x14、…；「第三列斯托爾數列」在 6 列為 6x8、6x9、6x11、…；「第四列斯托爾數列」在 6 列為 6x17、6x20、6x11、…；「第五列斯托爾數列」在 6 列為 6x44、6x47、…。這個看似平凡的敘述卻可能藏著一個秘密，要造 6 列應該要做到第六列的斯托爾數列，很顯然的會超過 100 行，我們待會從 6 列 12 行開始造只要到第三列的斯托爾數列就已經足夠使用，理由是一個斯托爾數列做調整放到另一列，6 列只要一半就足夠使用。

二、「n 列 m 行任兩數之和不在同一列」中 2 列最多 3 行，3 列最多 5 行。這個看似簡單的結果竟然是整個文章的重點和架構。原因如下：

(一)2 列 3 行與斯托爾數列的要求相同，即 2 列 3 行中第 2 列有 2×1、2×2 與 5，其中乘數的 1 與 2 是第一列的斯托爾數字。

(二)3 列 5 行第一種情形與斯托爾數列的要求相同，即 3 列 5 行中第 3 列有 3×1、3×2、8、3×4、13 中乘數的 1、2 與 4 是第一列的斯托爾數字；3 列 5 行中第 2 列有 2、4、3×3、10、3×5 中乘數的 3 與 5 是第二列的斯托爾數字。

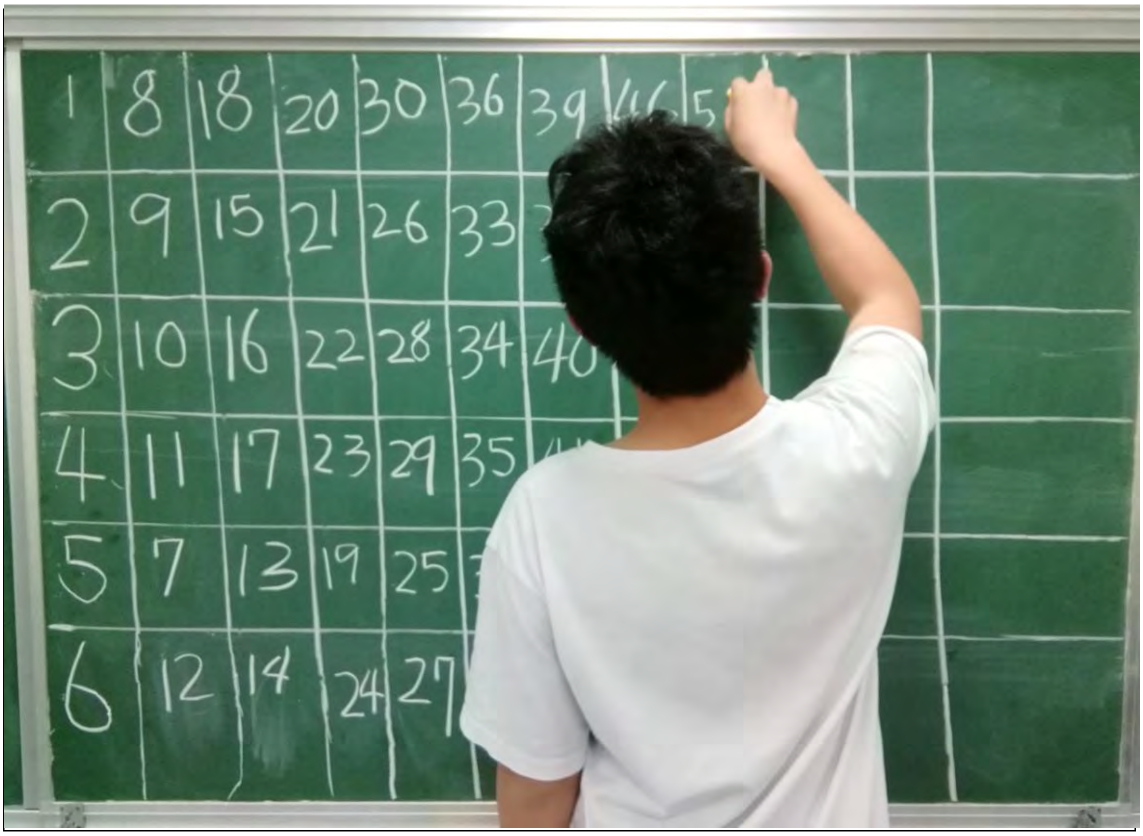
三、n 列中任意兩行的加法運算會影響到兩行，檢驗某一行的數字可以前面兩兩數字搭配，讓驗算時間省很多，這個應用的變形幫助很大，對我們在後面的 6 列 12 行完成時，增加到第 13 行，每一列只要檢驗 11 組數字就好。例如 6 列 12 行中的第一列 1、8、18、20、30、36、39、46、51、58、62、72 任兩數之和不在同一列，如果想知道 30 是否有錯，只要檢驗 20+1=21 與 20+8=28，和檢驗 18+8=26 就知道 30 往前數是沒有錯的；如果我們想知道第 13 行位置 73 到 78 不能放哪一些數字，72 只要計算 72+1=73 與 72+8=80，62 只要計算 62+8=70 與 62+18=80，58 只要計算 58+18=76 與 58+20=78，51 只要計算 51+20=71 與 51+30=81，46 只要計算 46+30=76 與 46+36=82，39 只要計算 39+36=75，得到 6 列 13 行的第一列不能放 73、75、76 與 78，只能放 74 與 77。我們沒使用這個規律時是將第一列所有的規律全部算出來例如 1 的全部 1+8=9、1+18=19、1+20=21、1+30=31、1+36=37、1+39=40、1+46=47、1+51=52、1+58=59、1+62=63、1+72=73，就這樣得到 73 但是是要去掉的，真是欲哭無淚，沒有做這個基礎功夫，光是檢驗的量就很可怕，而且算錯也無法知道或逆推是哪裡錯誤。這個方法也很快得確定我們計算是正確的，才產生更多的內容。

四、造一個 6 列 14 行「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」，只要用斯托爾數列和等差數列的技巧，與 n 列的規律做檢驗就可以短時間內完成。我們原本以為 6 列最多只有 11 行，以為會有最大行數公式，想說那就直接算 6 列 12 行應該無法成立，又 12 行只需要到第三列斯托爾數列，所以很快就發現造 6 列 12 行非常容易，甚至原本以為還要找交換規律都不需要了。本來想說要重做 6 列 13 行，但是用 2 列和 3 列動手算每個都寫下來的經驗，馬上反應只要用原本的 12 行再加 1 行，找出第 13 行可以放的數字就快很多，也很神奇的剛好第 13 行呈現出是第一列斯托爾數字，即 6×1、6×2、14、6×4、27、32、6×7、45、52、6×10、61、70、6×13，其中乘數 1、2、4、7、10、13 是第一列斯托爾數字。6 列 14 行也是使用 6 列 13 行外加一行的方式，整個造法詳述如後。

五、用 4 列完整的呈現「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」的斯托爾數列造法是比較適當，理由是如果想得到可能最多的行數，4 列用到第四列斯托爾數列最小的 17 當做行數然後慢慢刪除應該就很接近最多行數；如果用 5 列則可能需要到第五列斯托爾數列最小的 44 當做行數，我們可以做得到 5 列接近最多行數但較不適合在這裡當做例子；我們並未去找第六列斯托爾數列最小數字，故雖然待會是用 6 列做例子，但最終的技巧為了方便解釋只用 4 列在最後面會列出，但並不表示超過 5 列就非用到第六列斯托爾數列以上，後面的 6 列告訴我們只要用到第三列斯托爾數列就可以造出想要的行數，除非想做最大的行數才需要用到第六列斯托爾數列，所以後面提供兩個技巧使用，一種是造任意行數與另一種想造可能最大的行數。或許證明最多行數很重要，但老師覺得有很多有趣的內容藏在其中，我們只要專注一樣事情就好，也因此挖掘到以下一個很重要的猜想。

六、猜想造「任兩數之和不在同一列」與「任兩數之差不在同一列」極有可能不會同時存在，這要歸因於雖然我們沒有完全解釋「任兩數之和不在同一列」，也就是我們沒有給「任兩數之和不在同一列」公式解，但運氣好到恰巧用到斯托爾數列，而斯托爾數列看起來就不能「任兩數之差不在同一列」，連最簡單的手算出來唯一的 2 列 3 行第 2 列 2、4、5 中 4-2=2，表示會有「兩數之差在同一列」。

上面的問題從來沒有人問過和解答，我們能在這個迷霧中微弱線索找出一絲曙光嗎?請看我們整合上述看法，做出後面驚奇的研究主要成果。



(一)先將 6 列 12 行做規律放好，只有第 6 列<u>不符合</u>「任兩數之和不在同一列」，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	2+6×2	2+6× 3	2+6× 4	2+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	2+6× 9	2+6× 10	2+6× 11
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	4+6× 7	4+6× 8	4+6× 9	4+6× 10	4+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	5+6× 9	5+6× 10	5+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6× 1	6× 2	6×3	6×4	6×5	6×6	6×7	6×8	6× 9	6× 10	6× 11	6× 12

第 1 列放 1、8、14、20、26、32、38、44、50、56、62 和 68，檢驗結果符合「任兩數之和不在同一列」。用餘數檢驗第 2 列，2+(3+6×1)被 6 除會餘 5，但是第 2 列第 2 行開始每個數字被 6 除都會餘 3，與(3+6×1)+ (3+6×2)被 6 除會餘 0 依此類推其他行，所以第 2 列「任兩數之和不在同一列」，依此檢驗到第 5 列都符合。

(二)第 6 列的<u>斯托爾</u>數列 6×3、6×5、6×6、6× 12與第 1 列的數字對調，然後第 1 列做調整將第 7、8、9、10 行放到第 2 列與第 10 行放到第 3 列；第 6 列的<u>斯托爾</u>數列 6×8、6×9、6×11 與第 3 列的數字對調，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	2+6× 9	6× 11	4+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	5+6× 9	5+6× 10	5+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6× 1	6× 2	2+6×2	6×4	2+6× 4	2+6× 5	6×7	4+6× 7	4+6× 8	6× 10	4+6× 10	2+6× 11

只檢驗調整後新的第 1 列 1、8、18、20、30、36、39、45、51、58、62 與 72 會「任兩數之和不在同一列」。

(三)觀察第 2 列不需做調整，第 3 列第 12 行與第 6 列第 12 行對調。原本的每一列都有固定型態的數字如 4+6x11 表示第(4+1)列第(11+1)行，交換結果是可以逆推的，其實不動斯托爾數列排好後其他就可以隨意放，我們為了方便敘述逐列調整，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	2+6× 9	6× 11	2+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	5+6× 9	5+6× 10	5+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6	6× 2	2+6×2	6×4	2+6× 4	2+6× 5	6×7	4+6× 7	4+6× 8	6× 10	4+6× 10	4+6× 11

檢驗第 2 列 2、9、15、21、27、33、38、44、50、57、63 與 69 也會「任兩數之和不在同一列」。

(四)調整第 3 列第 10 行與第 4 列第 10 行對調，第 3 列第 12 行與第 4 列第 12 行對調，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	5+6× 9	6× 11	5+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	2+6× 9	5+6× 10	2+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6	6× 2	2+6×2	6×4	2+6× 4	2+6× 5	6×7	4+6× 7	4+6× 8	6× 10	4+6× 10	4+6× 11

檢驗調整後的第 3 列 3、10、16、22、28、34、40、48、54、59、66 與 71 也會「任兩數之和不在同一列」。這裡的放法選擇數與調整每列數字增加幾個有相關，例如第 3 列可以增加第 5 列的 67 變成 3、10、16、22、28、34、40、48、54、59、66、71 與 67，這樣第 5 列之後的數字就可以多一點選擇。

(五)觀察第 6 列的(2+6×4)、(4+6×7)和(4+6×10)不能放在此列，所以接下來將這三個數盡量往上面的列放，想法是盡量往上塞可以留下更多填充空間，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	5+6× 9	6× 11	5+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	2+6× 9	5+6× 10	2+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6	6× 2	2+6×2	6×4	2+6× 4	2+6× 5	6×7	4+6× 7	4+6× 8	6× 10	4+6× 10	4+6× 11

其中第 6 列的 2+6× 4、4+6× 7與 4+6× 10是我們接下來要調動的。檢驗第 4 列 4、11、17、23、29、35、41、47、53、56、65 與 68 也會「任兩數之和不在同一列」。

(六)調整第 6 列第 5 行與第 2 列第 5 行對調，第 6 列第 8 行與第 1 列第 8 行對調，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	4+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	2+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	5+6× 9	6× 11	5+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	2+6× 9	5+6× 10	2+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6	6× 2	2+6×2	6×4	3+6× 4	2+6× 5	6×7	3+6× 7	4+6× 8	6× 10	4+6× 10	4+6× 11

檢驗調整後新的第 1 列 1、8、18、20、30、36、39、46、51、58、62 與 72 也會任兩數之和不在同一列；檢驗第 2 列 2、9、15、21、26、33、38、44、50、57、63 與 69 也會任兩數之和不在同一列。如果已經形成我們要求的數列，改變一個數字影響似乎不大。

(七)第 6 列第 11 行與第 5 列第 11 行對調，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	4+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	2+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	5+6× 9	6× 11	5+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	2+6× 9	5+6× 10	2+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	4+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6	6× 2	2+6×2	6×4	3+6× 4	2+6× 5	6×7	3+6× 7	4+6× 8	6× 10	1+6× 10	4+6× 11

檢驗調整後新的第 5 列 5、7、13、19、25、31、37、43、49、55、64 與 67 也會「任兩數之和不在同一列」；而第 6 列 6、12、14、24、27、32、42、45、52、60、61 與 70 也會「任兩數之和不在同一列」。所以我們完成了 6 列 12 行任一列的兩數之和不在同一列，將結果整理成表格如下：

6 列 12 行任兩數之和不在同一列											
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70

可以觀察出不僅每一列「任兩數之和不在同一列」，第 2 行開始「任兩數之和不在同一行」，甚至將第 1 行微調到其他行做成「任兩數之和不在同一行」，就會形成「任兩數之和不在同一列也不在同一行」，這個部份我們就暫時先不討論了。

這裡存在兩數之差在同一列，例如第 1 列的 36−18=18，第 6 列的 12−6=6，跟前面的第 2 列與第 3 列相同的情況。

綜合上述討論，我們否定了 6 列最多只有 11 行的想法。我們不禁會問，那 6 列 13 行會成立嗎?接下來我們繼續的研究。

(八)沿用 6 列 12 行「任兩數之和不在同一列」的結果，先討論第 13 行每一列不能放的數字。這個技巧是原本逐一討論 2 列與 3 列時使用，後來在用 4 列時做了幾百個還沒有盡頭就捨棄了，想不到在這裡可以再度利用，似乎也暗中說明了整個環節緊緊相扣，少掉其中一個步驟就無法產生結果。將結果整理成表格如下：

第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72	第 13 行 放 73~78
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	X73 75 76 78
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	X76 77 78
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	X74 75 76
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	X73 76
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	X74 77
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	X73 74 75 76 77

第 1 列第 13 行不能放 73=1+72、75=36+39、76=18+58、78=20+58，寫成 X73 75 76 78；第 2 列第 13 行不能放 76=26+50、77=33+44、78=9+69，寫成 X76 77 78；依此類推到第 6 列第 13 行。

(九)沿用 6 列 12 行「任兩數之和不在同一列」的結果，再討論第 13 行每一列能放的數字，將結果整理成表格如下：

第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72	第 13 行 放 73~78
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	V74 77
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	V73 74 75
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	V73 77 78
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	V74 75 77 78
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	V73 75 76 78
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	V78

第 1 列第 13 行原本可以選擇 73~78，但是不能放 73、75、76 和 78，所以剩下的選擇是 74 與 77，寫成 V74 77；第 2 列第 13 行原本可以選擇 73~78，但是不能放 76、77 與 78，所以剩下的選擇是 73、74 與 75，寫成 V73 74 75；依此類推到第 6 列第 13 行。

(十)我們將第 13 行所能填的部分做成整理，所以得到以下結果：

第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72	第 13 行 放 73~78
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	V74 77
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	V73 74 75
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	V73 77
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	V74 75 77
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78

第 6 列第 13 行只能放 78，第 5 列第 13 行必須放唯一的 76。很明顯的有很多種組合可以放，照一般情況要討論有多少組合數，我們開頭的感覺也以為這是排列組合的問題，原本對組合個數做了很多討論要放在裡面，也看起來組合數據似乎很重要，那為什麼文章中都沒討論到這些組合數據呢?我們得到了一個很大膽的猜想:「分析有結果就是『數論』，分析沒有結果就變成『組合數學』」。

觀察出 6 列可以 13 行，那 6 列可以 14 行嗎?我們可以討論其中一種情況如下：

6 列 13 行任兩數之和不在同一列												
第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72	第 13 行 放 73~78
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	74
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	75
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	73
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	77
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78

第 1 列第 13 行選 74，第 2 列第 13 行選 75，第 3 列第 13 行選 73，第 4 列第 13 行選 77，第 5 列第 13 行固定 76，第 6 列第 13 行固定 78，則這六列任兩數之和不在同一列。繼續往下的計算，延伸 6 列 13 行，整理成表格如下頁：

6 列 14 行「任兩數之和不在同一列」有多種的選擇														
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	74	V 79 83 84	X80 81 82
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	75	V 79 80 81	X82 83 84
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	73	V 79 80 84	X81 82 83
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	77	V 80 83 84	X79 81 82
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76	V 79 82 84	X80 81 83
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78	V 79 80 81 83 84	X82

第 1 列第 14 行原本可以選擇 79~84，但是不能放 80=8+72、81=30+51 和 82=8+74，寫成 X80 81 82，所以剩下的選擇是 79、83 與 84，寫成 V79 83 84；第 2 列第 14 行原本可以選擇 79~84，但是不能放 82=38+44、83=26+57 與 84=9+75，所以剩下的選擇是 73、74 與 75，寫成 V73 74 75；依此類推到第 6 列第 14 行。繼續往下整理成表格如下：

6 列 14 行「任兩數之和不在同一列」其中一種選擇														
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	74	79
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	75	81
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	73	80
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	77	83
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76	82
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78	84

第 1 列第 14 行可以選 79，第 2 列第 14 行可以選 81，第 3 列第 14 行可以選 80，第 4 列第 14 行可以選 83，第 5 列第 14 行固定 82，第 6 列第 14 行可以選 84，則這六列任兩數之和不在同一列。第 5 列只有一種選擇 82，而 79、80、84 有四種位置可以放，83 有三種位置可以放，81 有兩種位置可以放，這邊位置的交錯組合數似乎也能形成新的題目，也是留待往後的分析。

我們看到 6 列至少可以寫成 14 行，那是否表示我們只能這樣繼續找下去呢?或者要從其中找出放法的規律呢?後面的討論讓我們又看到了另一線曙光。

陸、討論

我們先將變形的等差數列排好，以 4 列為例，如下面表格所顯示：

1	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66
2	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
3	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68

再將斯托爾數列先分類好，以 4 列為例，如下面表格所顯示：

4	8		16			28			40			52			64	
		12		20	24						48		56			
							32	36		44				60		
																68

，是否可以將「兩數之和不在同一列」用簡單的步驟完成呢?請看我們以下的方法。

步驟一、其他數字與斯托爾數列的數字對調，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	18	22	28	30	34	40	42	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	31	35	39	43	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	17	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

步驟二、檢驗第 1 列 18 與第 3 列 17 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	30	34	40	42	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	31	35	39	43	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

步驟三、檢驗第 1 列 30 與第 2 列 31 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	42	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	30	35	39	43	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

步驟四、檢驗第 1 列 42 與第 2 列 43 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	30	35	39	42	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

步驟五、檢驗第 1 列 54 與第 4 列 55 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	55	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	30	35	39	42	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	54	57	62	68

步驟六、檢驗第 1 列 66 與第 2 列 67 交換，第 1 列完成，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	55	58	64	67
2	7	12	15	20	24	27	30	35	39	42	48	51	56	59	63	66
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	54	57	62	68

步驟七、檢驗第 **2** 列 **27** 與第 **3** 列 **25** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	55	58	64	67
2	7	12	15	20	24	25	30	35	39	42	48	51	56	59	63	66
3	5	9	13	18	21	27	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	54	57	62	68

步驟八、檢驗第 **2** 列 **35** 與第 **4** 列 **33** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	55	58	64	67
2	7	12	15	20	24	25	30	33	39	42	48	51	56	59	63	66
3	5	9	13	18	21	27	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	35	38	41	47	50	54	57	62	68

步驟九、檢驗第 **2** 列 **39** 與第 **4** 列 **38** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	55	58	64	67
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38	42	48	51	56	59	63	66
3	5	9	13	18	21	27	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	35	39	41	47	50	54	57	62	68

步驟十、檢驗第 **2** 列 **42** 與第 **4** 列 **41** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43	46	52	55	58	64	67
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38	41	48	51	56	59	63	66
3	5	9	13	18	21	27	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	35	39	42	47	50	54	57	62	68

步驟十一、因為第 **12** 行都不能放 **48**，所以 **48** 與之後的行都去掉，完成第 **2** 列，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38	41
3	5	9	13	18	21	27	32	36	37	44
1	6	11	14	19	23	26	29	35	39	42

步驟十二、檢驗第 **3** 列 **18** 與第 **4** 列 **19** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38	41
3	5	9	13	19	21	27	32	36	37	44
1	6	11	14	18	23	26	29	35	39	42

步驟十三、檢驗第 **3** 列 **32** 與第 **4** 列 **29** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38	41
3	5	9	13	19	21	27	29	36	37	44
1	6	11	14	18	23	26	32	35	39	42

步驟十四、檢驗第 **3** 列 **36** 與第 **4** 列 **35** 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	43
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38	41
3	5	9	13	19	21	27	29	35	37	44
1	6	11	14	18	23	26	32	36	39	42

步驟十五、第 11 列都不能放 44，所以 44 那行去掉，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40
2	7	12	15	20	24	25	30	33	38
3	5	9	13	19	21	27	29	35	37
1	6	11	14	18	23	26	32	36	39

步驟十六、第 8 列都不能放 32，所以 32 那行與之後的行去掉，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28
2	7	12	15	20	24	25
3	5	9	13	19	21	27
1	6	11	14	18	23	26

第 1 列 4、8、10、16、17、22 與 28「任兩數之和不在同一列」；第 2 列 2、7、12、15、20、24 與 25「任兩數之和不在同一列」；第 3 列 3、5、9、13、19、21 與 27「任兩數之和不在同一列」；第 4 列 1、6、11、14、18、23 與 26「任兩數之和不在同一列」。由以上步驟我們可以完成 4 列 7 行中「任兩數之和不在同一列」。

我們也發現第 2 列到第 4 列同時具備「任兩數之和不在同一列」與「任兩數之差不在同一列」，我們此時會有個疑問是否上面找到的 4 列 7 行只變動第 1 列就能同時形成「任兩數之和不在同一列」與「任兩數之差不在同一列」這兩種條件?畢竟只要移動第 1 列的 4 或 8 因 8-4=4 不放在一起就好，這個疑問討論在下段敘述。

若第 1 列的 4 和 8 這兩數之差 8-4=4 不放在一起，將其中一個與其他列對調，都<u>不能</u>形成「任兩數之差不在同一列」，例如下面表格所示：

4	5	10	16	17	22	28
2	7	12	15	20	24	25
3	8	9	13	19	21	27
1	6	11	14	18	23	26

將原本第 1 列第 2 行的 8 與第 3 列第 2 行的 5 對調，則第 1 列的 5、17 與 22 會形成 5+17=22 有兩數之和在同一列，或第 1 列的 5 與 10 會形成 10-5=5 有兩數之差在同一列，或第 3 列的 8、13 與 21 會形成 8+13=21 有兩數之和在同一列，或第 3 列的 8、19 與 21 會形成 8+19=27 有兩數之和在同一列。

上面的結果原因是<u>斯托爾</u>數列是 4 與 8 在同一列開始，與「兩數之差不在同一列」4 與 8 不能同時在同一列有根本上的差異，不禁要問最多行數能否弭平這個差異呢？討論在下段。

我們回到一開始的 3 列最多 5 行，寫到 3 列 5 行「任兩數之和不在同一列」只有兩種情形，第一種情形的第 3 列是 3、6、8、12 與 15 但 6-3=3 故有兩數之差在同一列，第二種情形第 3 列是 3、4、8、10 與 15 但 8-4=4 故有兩數之差在同一列。若第一種情形的 3 或 6 因 6-3=3 與其他列對調能形成「任兩數之和不在同一列」，則表示 3 列 5 行會有第三種情形成

立，與我們找出只有兩種情形矛盾，故 3 列 5 行不能同時「連續正整數中任兩數之和不在同一列」與「連續正整數中任兩數之差不在同一列」。

結果讓我們大為驚訝！這個猜想並未找到相關文獻，似乎從來沒有人問過和解答！

柒、結論

我們先將變形的等差數列排好，以 4 列為例，如下面表格所顯示：

1	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66
2	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
3	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68

只有最後一列不是「任兩數之和不在同一列」，將最後一列做變形的斯托爾數列與其他列調換數字，如下面表格所顯示斯托爾數列位置：

4	8		16			28			40			52			64	
		12		20	24						48		56			
							32	36		44				60		
																68

之後從第 1 列第 1 行開始檢驗，不符合的行往後去掉完成第 1 列，第 2 列依此類推，直至完成最後一列，即可完成 n 列 m 行「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」。

我們研究的貢獻讓這個看似無解的難題，在特定情況下可以提供有限步驟的解決問題，尤其當數據越龐大更能發揮其簡易使用的效果，應該可以證明出 n 列 n 行必定有任兩數之和不在同一列；老師說寫出電腦程式用於雲端大數據或密碼學再編碼也許是可行的，例如寫出 n 列 n 行 n 高的立體架構程式可以儲存 n^3 個特殊加密重組資料；人體基因給定序號然後用相吸或相斥排出基因序對，應用層面很廣泛；也可能跟數論中的「郵票難題」有關(Selmer & Mossige [6], 1984)。

張進安([4]，2018)提到，同一列中任兩數和或差不在同一列的要求，類似生物學的避免近親繁殖，可應用於生物研究的配對組合、統計的抽樣理論或資訊的資料存取處理等等。

捌、参考資料及其他

1.王湘君(1984)。算術和數論中的『難題』挑戰。*中央研究院數學研究所數學傳播季刊*，*4(4)*，64~66。

2.洪有情、王建都、林保平、馬榮喜、陳世易、朱峻賢、張美美(2018)。*國中數學第一冊*。新北：康軒。

3.許志農(2005)。*數學新天地*。新北：龍騰。

4.張進安(2018)。任兩數差都不在同一組的分組問題。*中央研究院數學研究所數學傳播季刊*，*42(3)*，59~65。

5. Guy, R. K. (1994). *Unsolved Problems in Number Theory,* 2nd ed (pp 233). New York: Springer-Verlag.
6. Selmer, E. S. and Mossige, S. (1984). Stöhr Sequences in the Postage Stamp Problem. *Bergen Univ. Dept. Pure Math., 32*.
7. Stanley J. Bezuszka & Margaret J. Kenney. (1983). Challenges for Enriching the Curriculun: Arithmetic and Number Theory. *Math. Teacher, 4*, 250~252.

【評語】030404

考慮將 1~mn 這 mn 個整數填入一個 n 列、m 行的陣列中，在限定第 j 行填入的數字必須為(j-1)n+1~jn 這些數字，且同一列的任兩個數字的和不能出現在這一列的條件下，填法是否存在的問題。針對固定列數為 1,2,3,4,6 的情況下，能夠填出的行數的最大可能值做了一些討論，給出了一個可以填出盡可能更多行數的一個填數字的想法。這是一個有趣而且有一定難度的問題。作者們修改了原始的條件，讓問題看起來更有可能得出好的規律。然而，即便是考慮這個新版本的問題，要得出好的結果仍然頗具難度。藉由引入前人在考慮這個問題時所給出的想法，結合餘數的特性，作者們由一個初始陣列開始，針對其中特定位置的數字作調動。再利用逐列調整的方式來完成整個陣列。藉由這樣的作法，作者們成功的構造出夠大的 6 列與 4 列的陣列。由作者們分析與論述的方式，可以看出他們在這個問題上確實投入了非常多的心力，頗值得鼓勵。由於問題具有一定的困難度，以致於沒能給出一個具體可以依循的構造規則，真的有點可惜。對於列數較小的情況，是否可以有一個論述行數最大可能值的說法？如果能在這個問題上有所突破會很棒！

作品海報

摘要

在 n 橫列 m 直行中，第 1 直行放入 1 到 n 的連續正整數，第 2 直行放入(n+1)到 2n 的連續正整數，第 3 直行放入(2n+1)到 3n 的連續正整數，依此類推到第 m 直行放入(nm-n+1)到 nm 的連續正整數，但任兩個數字之和不在同一橫列。(Bezuszka & Kenney [7], 1983)

壹、研究動機

來訪的外星人傳送了 7 個容量足夠大的安全保管箱，並通知另有 1000 顆編有序號的微型炸彈也會隨機陸續傳送到地球。這些炸彈一傳到地球就會啟動，地球人必須在下一顆微型炸彈傳送到前，將它放入某一個保管箱中。如果兩個在保管箱中的炸彈都已啟動就會立刻引爆；但是必須遵守一個嚴格的規則：「同一個保管箱中的任兩顆炸彈序號的差，不能也在該保管箱中。」否則也會引爆所有的炸彈。如果這 1000 顆微型炸彈都能安全的投入保管箱，就完成挑戰。(許志農[3]，2005)
…如果問題的限制改為：使每組中的任兩數之和都不在該組內，是否有不同的發展。分析後發現，若任兩數是指相異兩數，的確可以增加很多種解法，但我沒能發現規律。(張進安[4]，2018)

貳、研究目的

一、100 以內斯托爾數列有幾列？即「從 1 開始連續正整數中任兩數之和不在同一列」可以分成幾列？
二、「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」在 2 列和 3 列分別最多可以幾行？
三、n 列中任意兩行的加法運算規律或特性有哪些？(洪有情等[2]，2018)
四、2 列最多是 3=2+1 行，3 列最多是 5=3+2 行，6+5 會是最多行數公式嗎？(王湘君[1]，1984)
五、如何用 4 列完整的呈現「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」的斯托爾數列造法？
六、當我們造出「兩數之和」時，能與「兩數之差」同時存在嗎？

參、研究設備及器材

紙、筆、心算、word、數學傳播季刊、國中數學課本。

肆、研究過程或方法

「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」研究方法大致如後所示，數論結果省略。

一、100 以內的斯托爾數列

Stöhr Sequence：Let a_1=1 and define a_{n+1} for $n \geqq k$ to be the least integer greater than a_n which cannot be written as the sum of at most h addends among a_1 , a_2, ..., a_n.(Guy[5], 1994)

「Stöhr Sequence」(斯托爾數列)是從 1 開始連續正整數的數列中找出最長的一列使得任 h 數之和不在同一列，我們只討論當 h=2 時即任兩數之和不在同一列，形如 1、2、4、7、10、13、16、…。
延伸斯托爾數列從 1 到 100 可以分成 5 組數列，分別如下：
(一)「第一列斯托爾數列」1、2、4、7、10、…、97、100 有 35 個數。
(二)「第二列斯托爾數列」3、5、6、12、14、…、93、95 有 23 個數。
(三)「第三列斯托爾數列」8、9、11、15、…、92、96 有 17 個數。
(四)「第四列斯托爾數列」17、20、24、26、…、54、98 有 10 個數。
(五)「第五列斯托爾數列」44、47、51、…、87、99 有 15 個數。

二、2 列最多可以放到 3 行「任兩數之和不在同一列」

「任兩數之和不在同一列」在 2 列 3 行只有一種放法，且無法形成 2 列 4 行，做成表格如下：

2 列最多放 3 行				
	第 1 行 放 1~2	第 2 行 放 3~4	第 3 行 放 5~6	第 4 行 放 7~8
第 1 列	1	3	6	X7=1+6
第 2 列	2	4	5	X7=2+5

三、3 列最多可以放到 5 行「任兩數之和不在同一列」

「任兩數之和不在同一列」在 3 列 5 行有兩種放法，無法形成 3 列 6 行，第一種做成表格如下：

3 列最多放 5 行「任兩數之和不在同一列」第一種情形						
	第 1 行 放 1~3	第 2 行 放 4~6	第 3 行 放 7~9	第 4 行 放 10~12	第 5 行 放 13~15	第 6 行 放 16~18
第 1 列	1	5	7	11	14	X16=5+11、X18=7+11
第 2 列	2	4	9	10	15	X17=2+15
第 3 列	3	6	8	12	13	X16=3+13、X18=6+12

第二種「任兩數之和不在同一列」做成表格如下：

3 列最多放 5 行「任兩數之和不在同一列」第二種情形						
	第 1 行 放 1~3	第 2 行 放 4~6	第 3 行 放 7~9	第 4 行 放 10~12	第 5 行 放 13~15	第 6 行 放 16~18
第 1 列	1	5	7	11	14	X16=5+11、X18=7+11
第 2 列	2	6	9	12	13	X18=6+12
第 3 列	3	4	8	10	15	X18=3+15=8+10

四、n 列的規律

我們分析「任兩數之和不在同一列」n 列 m 行一般化，大致上有五個子題：
(一)第 1 行與其它行的相加只會影響該行與下一行
(二)第 2 行與第 2 行之後的相加會影響到下兩行
(三)第 3 行與第 3 行之後的相加影響到隔行的下兩行
(四)第 m 行任一數字與第 k 行任一數字的相加影響第[k+(m-1)]行與第(k+m)行，如下：

第 m 行任一數字與第 k 行任一數字的相加影響到第[k+(m-1)]行和第(k+m)行							
第 1 行	…	第 m 行	…	第 k 行	…	第[k+(m-1)]行	第(k+m)行
1	…	nm-n+1	…	nk-n+1	…		n(k+m-1)+1
2	…	nm-n+2	…	nk-n+2	…	(nm-n+1)+(nk-n+1) =n(k+m-1)-n+2	n(k+m-1)+2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	…	nm	…	nk	…	n(k+m-1)	nm+nk=n(k+m)

(五)第 1 列放 1、(n+1)、(2n+1)、…、(nm+1)形成「任兩數之和不在同一列」，更多的應用如下：

第(n-1)列放(n-1)、(n+i)、(2n+i)、…、(nm+i)，i < n ，第 1 行的(n-1)與第(m+1)行的(nm+i)相加不會影響到第(n-1)列						
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	…	第(m+1)行	第(m+2)行
第 1 列	1					
第 2 列	2					
⋮	⋮					
第(n-2)列	n-2					(n-1)+(nm+i) =n(m+1)+i-1，i>2
第(n-1)列	n-1	n+i	2n+i	…	nm+i	
第 n 列	n					

更多的觀察，我們其實可以造出表格如下所顯示的：

n 列 m 行「任兩數之和不在同一列」基本造法						
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	…	第(m+1)行	
第 1 列	1	n+1	2n+1	…	nm+1	…
第 2 列	2	n+2	2n+2	…	nm+2	…
⋮	⋮			⋮		⋮
第 n-1 列	n-1	2n-1	3n-1	…	nm-1	…
第 n 列	n	2n	X(3n)			

這裡結合斯托爾數列告訴我們，第 n 列的斯托爾數列只會從最小數字影響，例如「第一列斯托爾數列」最小數字是 1xn 很快該列就無法形成「兩數之和不在同一列」，但是在「第五列斯托爾數列」最小數字是 44n，應該至少要在第 45 行才會影響「兩數之和不在同一列」，所以我們的方法反而在列數與行數越大越好造。
研究目的六個待答問題緊扣著斯托爾數列與排列組合的應用，研究結果將解釋與整合做出貢獻。

伍、研究結果

我們從上述的過程中，重新整合與整理得到以下的研究結果：

一、1 到 100 的正整數可以分成 5 組斯托爾數列，提供了在 n 列中公差為 n 就可以形成「任兩數之和不在同一列」。

二、2 列 3 行與 3 列 5 行結果斯托爾數列的要求相同，例如 2 列 3 行中第 2 列有 2x1、2x2 與 5，其中乘數的 1 與 2 是第一列斯托爾數字。

三、n 列中任意兩行的加法運算會影響到兩行，例如第 1 行與第 n 行相加會影響到第 n 行與第(n+1)行，但不影響等差數列排放。

四、造一個 6 列 14 行「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」，只要用斯托爾數列和等差數列的技巧，與 n 列的規律做檢驗。

五、用 4 列完整的呈現「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」的斯托爾數列造法，如後。

六、猜想造「任兩數之和不在同一列」與「任兩數之差不在同一列」極有可能不會同時存在。

七、6 列 14 行造法先從 6 列 12 行開始，簡略如下：

步驟 1、先將 6 列 12 行做規律放好，只有第 6 列不符合「任兩數之和不在同一列」，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	2+6×2	2+6× 3	2+6× 4	2+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	2+6× 9	2+6× 10	2+6× 11
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	4+6× 7	4+6× 8	4+6× 9	4+6× 10	4+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	5+6× 9	5+6× 10	5+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6× 1	6× 2	6×3	6×4	6×5	6×6	6×7	6×8	6× 9	6× 10	6× 11	6× 12

步驟 2、第 6 列的斯托爾數列與第 1 列的數字對調做調整；第 6 列的斯托爾數列與第 3 列的數字對調，如下面表格所示：

	第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72
第 1 列	1	2+6×1	6×3	2+6× 3	6×5	6×6	3+6× 6	3+6× 7	3+6× 8	4+6× 9	2+6× 10	6× 12
第 2 列	2	3+6×1	3+6×2	3+6× 3	3+6× 4	3+6× 5	2+6× 6	2+6× 7	2+6× 8	3+6× 9	3+6× 10	3+6× 11
第 3 列	3	4+6×1	4+6×2	4+6× 3	4+6× 4	4+6× 5	4+6× 6	6×8	6× 9	2+6× 9	6× 11	4+6× 11
第 4 列	4	5+6×1	5+6×2	5+6× 3	5+6× 4	5+6× 5	5+6× 6	5+6× 7	5+6× 8	5+6× 9	5+6× 10	5+6× 11
第 5 列	5	1+6×1	1+6×2	1+6× 3	1+6× 4	1+6× 5	1+6× 6	1+6× 7	1+6× 8	1+6× 9	1+6× 10	1+6× 11
第 6 列	6× 1	6× 2	2+6×2	6×4	2+6× 4	2+6× 5	6×7	4+6× 7	4+6× 8	6× 10	4+6× 10	2+6× 11

最後步驟得到 6 列 12 行

6 列 12 行任兩數之和不在同一列

1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70

我們將第 13 行所能填的部分做成整理，所以得到以下結果：

第 1 行 放 1~6	第 2 行 7~12	第 3 行 13~18	第 4 行 19~24	第 5 行 25~30	第 6 行 31~36	第 7 行 37~42	第 8 行 43~48	第 9 行 49~54	第 10 行 55~60	第 11 行 61~66	第 12 行 67~72	第 13 行 放 73~78
1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	V74 77
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	V73 74 75
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	V73 77
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	V74 75 77
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78

觀察出 6 列可以 13 行，那 6 列可以 14 行嗎?我們可以討論 6 列 13 行其中一種情況如下：

6 列 14 行「任兩數之和不在同一列」有多種的選擇

1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	74	V 79 83 84　X80 81 82
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	75	V 79 80 81　X82 83 84
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	73	V 79 80 84　X81 82 83
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	77	V 80 83 84　X79 81 82
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76	V 79 82 84　X80 81 83
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78	V 79 80 81 83 84　X82

得到 6 列 14 行如下：

6 列 14 行「任兩數之和不在同一列」其中一種選擇

1	8	18	20	30	36	39	46	51	58	62	72	74	79
2	9	15	21	26	33	38	44	50	57	63	69	75	81
3	10	16	22	28	34	40	48	54	59	66	71	73	80
4	11	17	23	29	35	41	47	53	56	65	68	77	83
5	7	13	19	25	31	37	43	49	55	64	67	76	82
6	12	14	24	27	32	42	45	52	60	61	70	78	84

陸、討論

我們先將變形的等差數列排好，以 4 列為例，如下面表格所顯示：

1	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66
2	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
3	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68

再將斯托爾數列先分類好，以 4 列為例，如下面表格所顯示：

4	8		16			28			40			52			64	
		12		20	24						48		56			
							32	36		44				60		
																68

是否可以將「兩數之和不在同一列」用簡單的步驟完成呢?請看我們以下的方法。

步驟一、其他數字與斯托爾數列的數字對調，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	18	22	28	30	34	40	42	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	31	35	39	43	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	17	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

步驟二、檢驗第 1 列 18 與第 3 列 17 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	30	34	40	42	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	31	35	39	43	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

步驟三、檢驗第 1 列 30 與第 2 列 31 交換，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28	31	34	40	42	46	52	54	58	64	66
2	7	12	15	20	24	27	30	35	39	43	48	51	56	59	63	67
3	5	9	13	18	21	25	32	36	37	44	45	49	53	60	61	65
1	6	11	14	19	23	26	29	33	38	41	47	50	55	57	62	68

最後步驟、第 8 列都不能放 32，所以 32 那行與之後的行去掉，如下面表格所顯示：

4	8	10	16	17	22	28
2	7	12	15	20	24	25
3	5	9	13	19	21	27
1	6	11	14	18	23	26

第 1 列 4、8、10、16、17、22 與 28「任兩數之和不在同一列」；第 2 列 2、7、12、15、20、24 與 25「任兩數之和不在同一列」；第 3 列 3、5、9、13、19、21 與 27「任兩數之和不在同一列」；第 4 列 1、6、11、14、18、23 與 26「任兩數之和不在同一列」。由以上步驟我們可以完成 4 列 7 行中「任兩數之和不在同一列」。

我們也發現第 2 列到第 4 列同時具備「任兩數之和不在同一列」與「任兩數之差不在同一列」，我們此時會有個疑問是否上面找到的 4 列 7 行只變動第 1 列就能同時形成「任兩數之和不在同一列」與「任兩數之差不在同一列」這兩種條件?畢竟只要移動第 1 列的 4 或 8 因 8-4=4 不放在一起就好，這個疑問討論在下段敘述。

若第 1 列的 4 和 8 這兩數之差 8-4=4 不放在一起，將其中一個與其他列對調，都不能形成「任兩數之差不在同一列」，例如下面表格所示：

4	5	10	16	17	22	28
2	7	12	15	20	24	25
3	8	9	13	19	21	27
1	6	11	14	18	23	26

將原本第 1 列第 2 行的 8 與第 3 列第 2 行的 5 對調，則第 1 列的 5、17 與 22 會形成 5+17=22 有兩數之和在同一列，或第 1 列的 5 與 10 會形成 10-5=5 有兩數之差在同一列，或第 3 列的 8、13 與 21 會形成 8+13=21 有兩數之和在同一列，或第 3 列的 8、19 與 21 會形成 8+19=27 有兩數之和在同一列。

上面的結果原因是斯托爾數列是 4 與 8 在同一列開始，與「兩數之差不在同一列」4 與 8 不能同時在同一列有根本上的差異，不禁要問最多行數能否弭平這個差異呢？討論在下段。

我們回到一開始的 3 列最多 5 行，寫到 3 列 5 行「任兩數之和不在同一列」只有兩種情形，第一種情形的第 3 列是 3、6、8、12 與 15 但 6-3=3 故有兩數之差在同一列，第二種情形第 3 列是 3、4、8、10 與 15 但 8-4=4 故有兩數之差在同一列。若第一種情形的 3 或 6 因 6-3=3 與其他列對調能形成「任兩數之和不在同一列」，則表示 3 列 5 行會有第三種情形成立，與我們找出只有兩種情形矛盾，故 3 列 5 行不能同時「連續正整數中任兩數之和不在同一列」與「連續正整數中任兩數之差不在同一列」。

結果讓我們大為驚訝！這個猜想並未找到相關文獻，似乎從來沒有人問過和解答！

柒、結論

我們先將變形的等差數列排好，以 4 列為例，如下面表格所顯示：

1	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66
2	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
3	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68

只有最後一列不是「任兩數之和不在同一列」，將最後一列做變形的斯托爾數列與其他列調換數字，如下面表格所顯示斯托爾數列位置：

4	8		16			28			40			52			64	
		12		20	24						48		56			
							32	36		44				60		
																68

之後從第 1 列第 1 行開始檢驗，不符合的行往後去掉完成第 1 列，第 2 列依此類推，直至完成最後一列，即可完成 n 列 m 行「從 1 開始的連續正整數中任兩數之和不在同一列」。

我們研究的貢獻讓這個看似無解的難題，在特定情況下可以提供有限步驟的解決問題，尤其當數據越龐大更能發揮其簡易使用的效果，應該可以證明出 n 列 n 行必定有任兩數之和不在同一列；老師說寫出電腦程式用於雲端大數據或密碼學再編碼也許是可行的，例如寫出 n 列 n 行 n 高的立體架構程式可以儲存 n^3 個特殊加密重組資料；人體基因給定序號然後用相吸或相斥排出基因序對，應用層面很廣泛；也可能跟數論中的「郵票難題」有關(Selmer&Mossige[6], 1984)。

張進安([4]，2018)提到，同一列中任兩數和或差不在同一列的要求，類似生物學的避免近親繁殖，可應用於生物研究的配對組合、統計的抽樣理論或資訊的資料存取處理等問題。

捌、參考資料及其他

1.王湘君(1984)。算術和數論中的『難題』挑戰。*中央研究院數學研究所數學傳播季刊*，*4(4)*，64~66。

2.洪有情、王建都、林保平、馬榮喜、陳世易、朱峻賢、張美美(2018)。*國中數學第一冊*。 新北：康軒。

3.許志農(2005)。*數學新天地*。新北：龍騰。

4.張進安(2018)。任兩數差都不在同一組的分組問題。*中央研究院數學研究所數學傳播季刊*，*42(3)*，59~65。

5.Guy, R. K. (1994).*Unsolved Problems in Number Theory,* 2nd ed (pp 233). New York: Springer- Verlag.

6.Selmer, E. S. and Mossige, S. (1984).Stöhr Sequences in the Postage Stamp Problem. *Bergen Univ. Dept. Pure Math., 32.*

7.Stanley J. Bezuszka& Margaret J. Kenney (1983). Challenges for Enriching the Curriculun: Arithmetic and Number Theory. *Math. Teacher, 4,* 250~252.