中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

(鄉土)教材獎

030403

剪與摺的藝數

學校名稱：臺東縣立新生國民中學

作者：	指導老師：
國三 謝文女 國三 李盽嫿 國三 翁　緗	林芸宏

關鍵詞：正方形、黃金三角形、畢氏定理

摘要

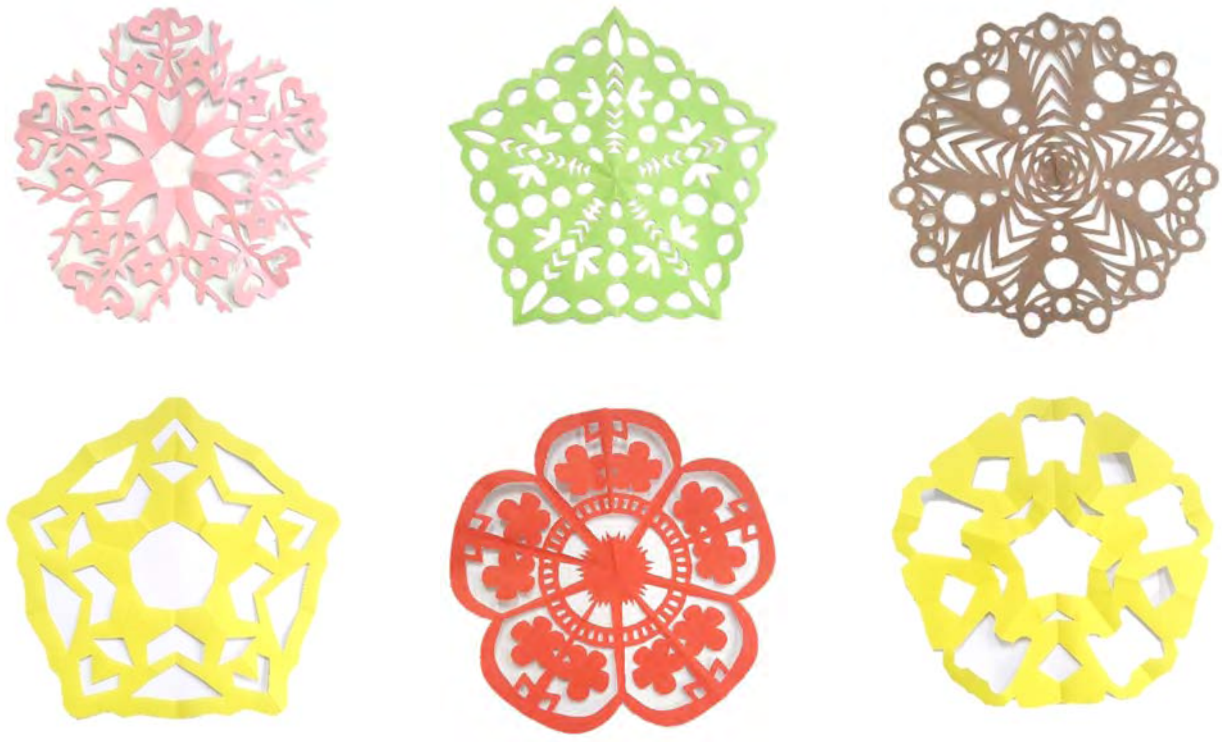
本研究旨在探討剪紙書及網路上介紹六摺與十摺摺紙摺法的正確性與角度的差異性。我們利用$30°$-$60°$-$90°$三角形的邊長比與黃金三角形衍生出的直角三角形其中一邊與斜邊比為$1:\sqrt{5}-1$這兩個性質分別來驗證六摺摺法及十摺摺法的正確性。而後我們證出剪紙書及網路上介紹之摺法均未能摺出正確的角度，並研究可摺出正確角度的摺法。最後我們測量正確與錯誤摺法所摺出的角度，利用 Excel 比較與分析幾種摺法之差異，並探討影響角度正確性的因素：除摺法本身正確與否，還有色紙的大小及厚度、摺紙過程是否準確、步驟多寡等。

壹、 研究動機

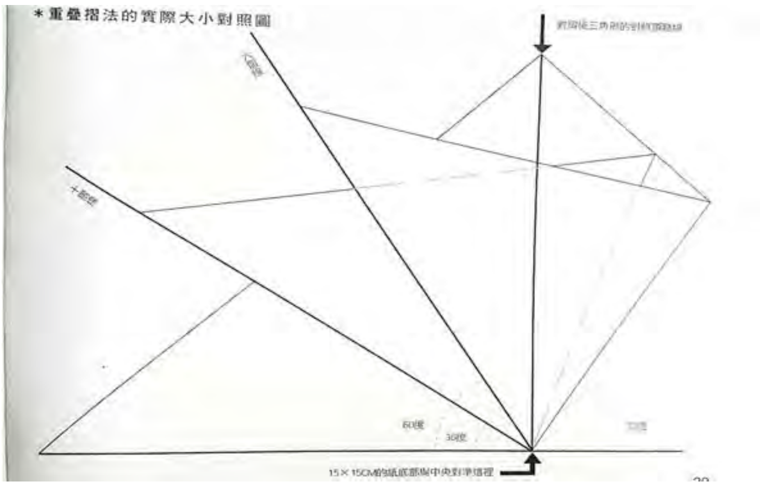
剪紙是項傳統工藝，透過剪與摺，不難發現其對稱之美。上學期的美術課，老師帶了我們剪紙(如圖一、圖二)，按照老師的模板剪出了一朵雪花，對稱且均勻的雪花，引起了我們的興趣。在設計圖案的過程中，老師教了我們一些摺法。發現紙的摺法有很多種，包含二摺、四摺、六摺、八摺、十摺、十二摺、十六摺…，紙的摺法也深深影響呈現出來的作品。由於剪紙設計講求對稱性，因此摺法也多為偶數摺。摺的過程中，發現二摺、四摺、八摺、十六摺並不難，只要將色紙對摺再對摺，便能得到2^n的摺法。但非2^n的摺法，如六摺或十摺，並不是對摺再對摺就能摺出。坊間許多關於剪紙的書，設計出樣板(如圖三)，以便能快速將紙摺好。但我們覺得萬一手邊沒有樣板，沒有量角器，要如何將紙摺六摺和十摺？書上所教的摺法，又真的能夠將紙六等份、十等份嗎？所謂「盡信書，不如無書」，透過思考、討論，能運用國中所學，活用數學才是王道，於是我們決定動手研究看看。



圖一 六摺剪紙作品



圖二 十摺剪紙作品



圖三 剪紙書籍提供的樣板(圖片來源：超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物)

貳、 研究目的

一、探討六摺的摺法，並證明中心點的角度能被六等份。

二、探討十摺的摺法，並證明中心點的角度能被十等份。

參、 研究設備與器材

一、剪刀、美工刀、15×15cm 色紙、量角器。

二、電腦、Word、AMA、Excel。

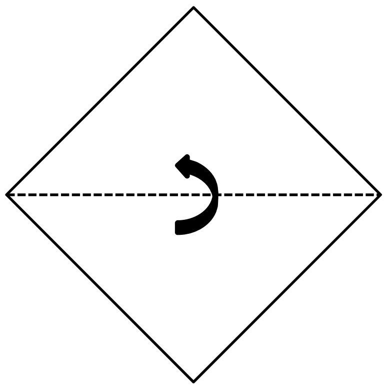
肆、 研究過程與結果

一、六摺摺法：

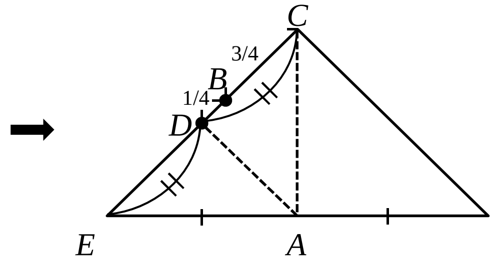
為了找出六摺的摺法，我們翻閱了一些剪紙的書籍，也上網查了相關的資料。發現多數的剪紙書籍中，都是提供樣板，直接照著樣板摺，便能摺出六摺。而在「超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物」此本書中，有提到六摺的步驟，但剪紙書籍大多屬於美術類，沒有討論為何這樣摺便能摺出六摺，而這樣的摺法真的確實能將色紙六等份嗎？所以我們決定利用幾何證明的方法，來驗證摺法的正確性，並設法找出其他的摺法。

(一) 摺法一：此摺法來自「超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物」一書。

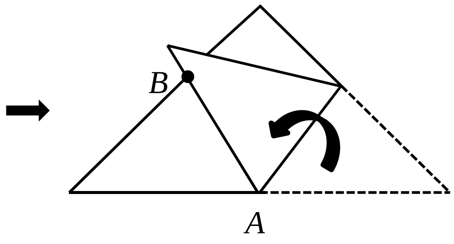
1. 步驟：



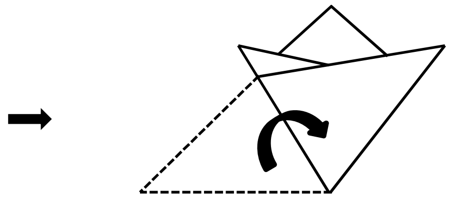
將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。



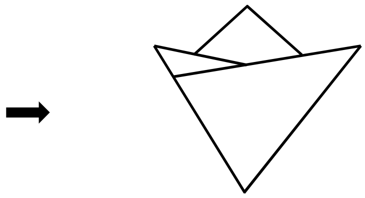
取等腰直角三角形的底邊中點 A，左邊邊緣一半的 $\frac{3}{4}$ 處取 B 點。



將右邊的角摺疊到 A 與 B 的連線上。



再將左半邊沿著 $\overline{AB}$ 向右摺。



六摺摺紙完成。

2. 證明：

作 $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ ，

$\because \overline{BF} \,//\, \overline{AE}$ ，

$\therefore \overline{CB} : \overline{BE} = \overline{CF} : \overline{FA} = 3:5$ ，

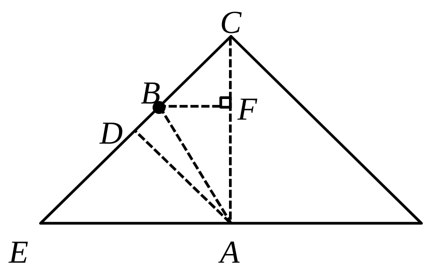
又 $\angle FCB = \angle FBC = 45^\circ$ ，

$\therefore \overline{BF} = \overline{CF}$ ，

故 $\overline{BF} : \overline{FA} = 3:5 \neq 1:\sqrt{3}$ ，

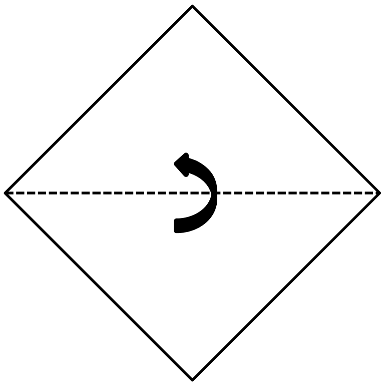
因此 $\angle BAF \neq 30^\circ$ ， $\angle BAE \neq 60^\circ$ ，

故參照書上的摺法，摺出來的角度並未等於 60°。

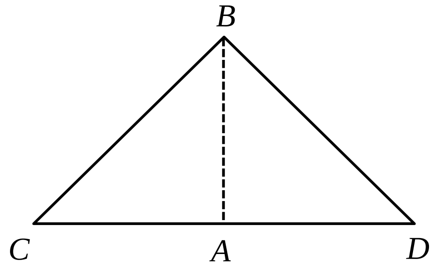


(二) 摺法二：此摺法為我們討論出來的結果，雖然未能減少摺紙步驟，但摺出來的角度能更精準。

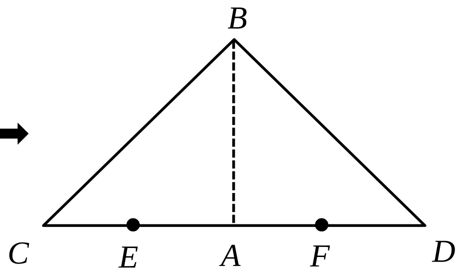
1. 步驟：



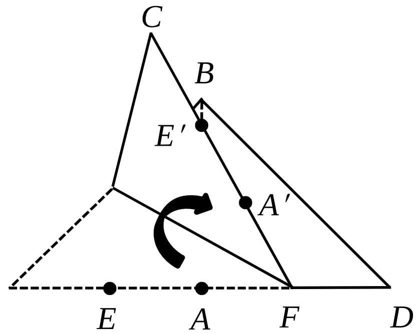
將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。



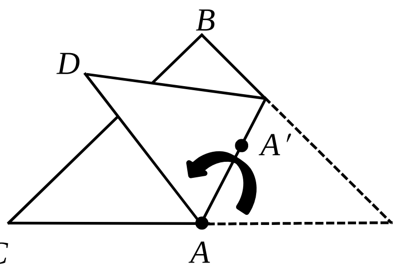
取等腰直角三角形的底邊中點 A，將圖形沿著 $\overline{AB}$ 對摺。



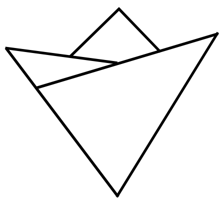
分別取 $\overline{AC}$ 及 $\overline{AD}$ 中點 E 和 F。



固定 F 點，將 E 點摺到 $\overline{AB}$ 上，找出 A 點的對稱點 A' 及 E 點的對稱點 E'。



固定 A 點，將右半邊圖形沿著 $\overline{AA'}$ 對摺。



固定 A 點，將左半邊圖形沿著 $\overline{AD}$ 對摺，六摺摺紙完成。

2. 證明：

設 $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{CE}=\overline{DF}=1$，

則 $\overline{AF}=\overline{A'F}=1$，$\overline{EF}=\overline{E'F}=2$，

在 $\Delta AE'F$ 中，

$\because \angle E'AF=90^\circ$，

$\overline{AE'}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AF}:\overline{AE'}:\overline{E'F}=1:\sqrt{3}:2$

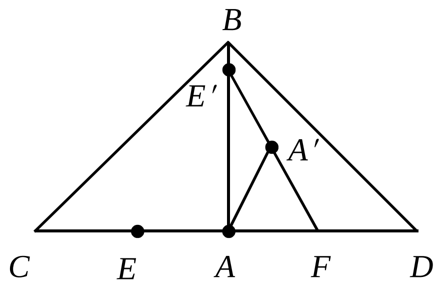
$\therefore \angle E'FA=60^\circ$

在 $\Delta AA'F$ 中，

$\because \overline{AF}=\overline{A'F}$，且 $\angle A'FA=60^\circ$，

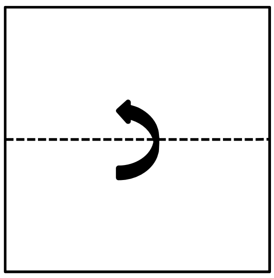
$\therefore \angle A'AF=60^\circ$，

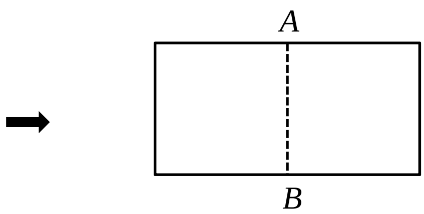
即此摺法能摺出 60° 的角。



(三) 摺法三：此摺法來自 https://www.youtube.com/watch?v=zyQJOpRKoCg，與我們的摺法相比，較為簡單一些。

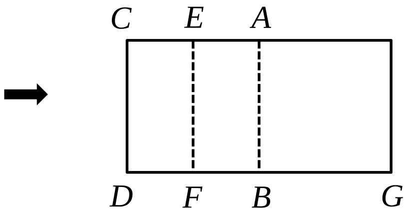
1. 步驟：



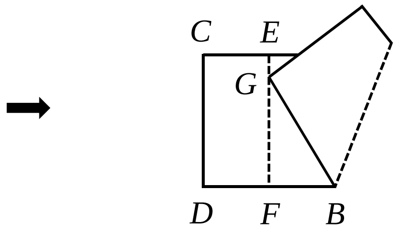


將紙的正面朝上，對摺成兩個長方形。

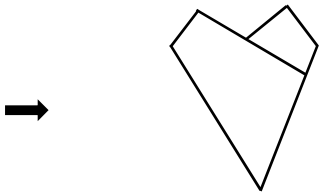
再將長方形對摺，得摺線 $\overline{AB}$ 。



將$\overline{CD}$對摺到$\overline{AB}$，得摺線$\overline{EF}$。



固定B點，將G摺到$\overline{EF}$上。



左半邊再沿著$\overline{BG}$向右摺，六摺摺紙完成。

2. 證明：

設$\overline{BF}=x$，則$\overline{BD}=\overline{BG}=2x$，

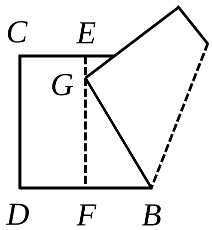
又$\angle BFG=90°$，

$\therefore \overline{GF}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$，

故$\overline{BF}:\overline{GF}:\overline{BG}=1:\sqrt{3}:2$，

$\therefore \angle FBG=60°$，

即此摺法能摺出$60°$的角。



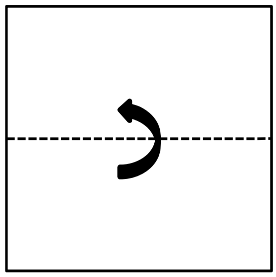
二、十摺摺法：

在剪紙書籍中，關於十摺的摺法，也是直接提供樣板，照著樣板摺出十摺，並未有其他的摺法，於是我們便上網搜尋資料。搜尋十摺摺法過程中，發現下列所述的摺法一，是多數人常使用的方法，而很多人也利用此法剪出正五邊形，但未看到此法的驗證。摺法二也是網路上找到的另一普遍摺法，但也缺乏相關證明。因此，

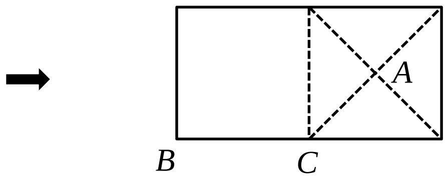
我們利用幾何證明，來驗證摺法的正確性，並設法找出其他的摺法。

(一) 摺法一：此摺法來自 http://www.shougongke.com/course/351819.html。

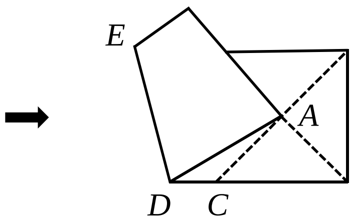
1. 步驟：



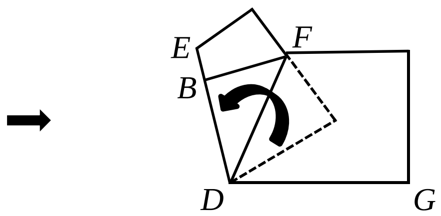
將紙的正面朝上，對摺成兩個長方形。



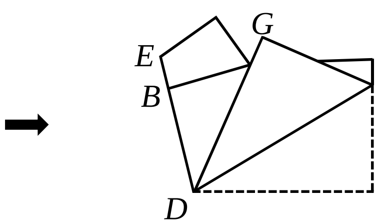
再將長方形對摺，使其變成兩個正方形。在右邊的正方形摺出對角線交點 A。



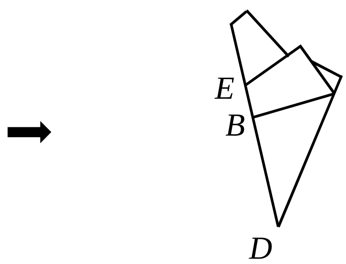
將左邊的 B 點與 A 點重合，得摺線 $\overline{DE}$ 。



將 $\overline{DB}$ 與 $\overline{DE}$ 重合。



將 $\overline{DG}$ 與 $\overline{DF}$ 重合。



再將圖形沿著 $\overline{DG}$ 對摺，十摺摺紙完成。

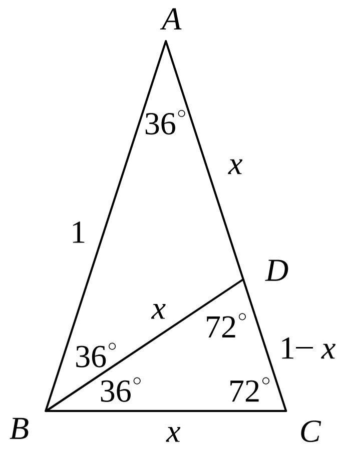
2. 理論基礎：

黃金三角形是一種特殊的等腰三角形，其腰長與底邊長呈現黃金比例。黃金三角形分為兩種，一為頂角為$36°$的銳角三角形，一為頂角為$108°$的鈍角三角形。

(1) 理論一(福氣老師，[5])：

等腰ΔABC中，

已知$\angle A=36°$，$\angle ABC=\angle C=72°$，



作$\overline{BD}$平分$\angle ABC$，且交$\overline{AC}$於D點，

設$\overline{AB}=\overline{AC}=1$，$\overline{BC}=x$，

則$\overline{BD}=\overline{AD}=x$，$\overline{CD}=1-x$，

$\because \Delta ABC \sim \Delta BCD$（$AA$ 相似性質），

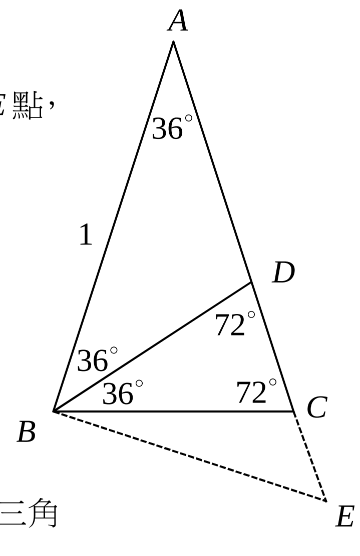
$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$，

即$1:x=x:1-x$，

$x^2+x-1=0$，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (負不合)，

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

(2) 理論二(張海潮，[6])：



過B點作$\overline{AB}$的垂線$\overline{BE}$且交$\overline{AC}$的延長線於E點，

$\because \angle ABE=90°$，

$\therefore \angle E=54°=\angle DBE$，

因此$\overline{BD}=\overline{DE}$，

$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=2\overline{BD}=2\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}-1$，

即若能做出斜邊為$\sqrt{5}-1$，一股為 1 的直角三角形，則此兩邊的夾角必為$36°$。

3.　證明：

作 $\overline{AH}\perp\overline{CG}$，

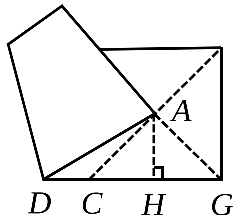
$\because A$ 為正方形對角線的交點，

$\therefore \overline{AC}=\overline{AG}$，$\angle ACG=\angle AGC=45^\circ$，

且 $\angle CAH=\angle GAH=45^\circ$，

設 $\overline{AH}=\overline{CH}=\overline{GH}=1$，$\overline{CD}=x$，

則 $\overline{CG}=2$，$\overline{AD}=2-x$，



在 ΔADH 中，$\overline{AH}^2+\overline{DH}^2=\overline{AD}^2$，

$1^2+(x+1)^2=(2-x)^2$，

$1+x^2+2x+1=4-4x+x^2$，$x=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{5}{3}$，$\overline{DH}=\dfrac{4}{3}$，

故 $\dfrac{\overline{DH}}{\overline{AD}}=\dfrac{4}{5}\neq\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$，

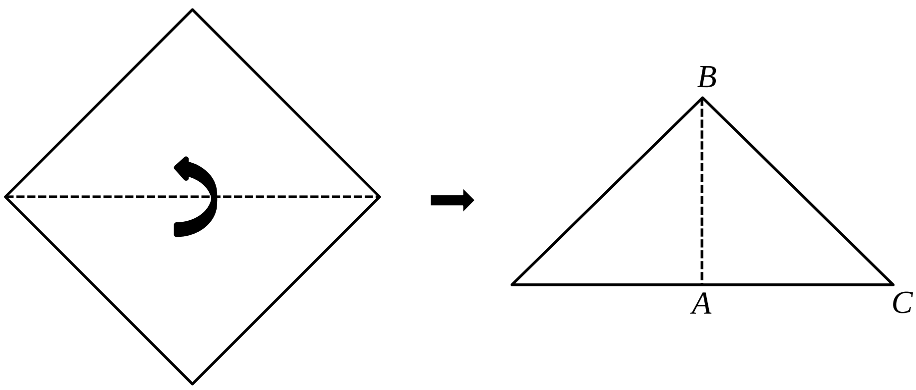
即 $\angle ADH\neq 36^\circ$，

故根據此摺法，摺出來的角度並未等於 36°。

(二) 摺法二：此摺法來自

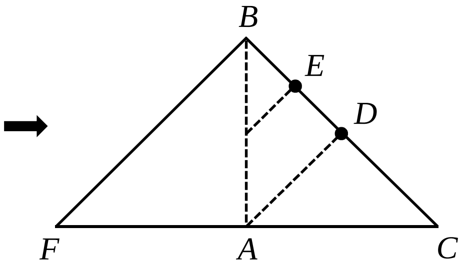
https://www.deviantart.com/1sand0s/art/How-to-fold-a-regular-pentagon-68172782。

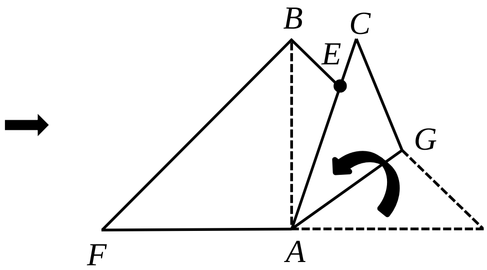
1.　步驟：



將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。

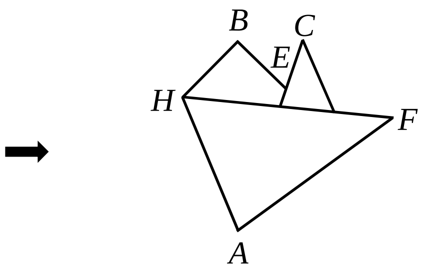
取等腰直角三角形的底邊中點 A，將圖形沿著 $\overline{AB}$ 對摺。

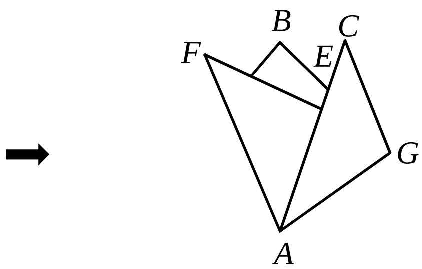




取 $\overline{BC}$ 中點 D，再取 $\overline{BD}$ 中點 E。

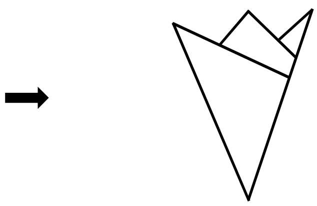
固定 A 點，將 $\overline{AC}$ 摺到 E 點上，得摺線 $\overline{AG}$ 。





固定 A 點，將 $\overline{AF}$ 摺到 $\overline{AG}$ 上，得摺線 $\overline{AH}$ 。

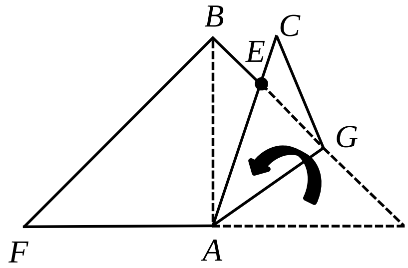
再將 $\overline{AF}$ 與 $\overline{AH}$ 重合。



將圖形沿著 $\overline{AE}$ 對摺，十摺摺紙完成。

2. 證明：

作$\overline{GJ} \perp \overline{AC}$，



設$\overline{CG} = x$，$\overline{BE} = \overline{DE} = 1$，

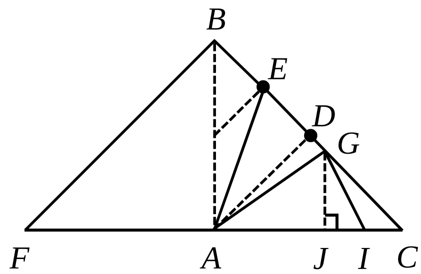
$\because D$ 為$\overline{BC}$之中點，

$\therefore \overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AD} = 2$，

$\overline{AB} = \overline{AC} = 2\sqrt{2}$，$\overline{GD} = 2 - x$，

又$\Delta AEG \cong \Delta AIG$，

$\therefore \overline{AE} = \overline{AI} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$，



$\overline{EG} = \overline{GI} = 3 - x$，

$\because \Delta GJC$ 為等腰直角三角形，

$\therefore \overline{GJ} : \overline{GC} = 1 : \sqrt{2}$，$\overline{GJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} x$，

又ΔAEG面積$= \Delta AIG$面積，

$\therefore \dfrac{2(3-x)}{2} = \sqrt{5} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} x \times \dfrac{1}{2}$，$x = 8 - 2\sqrt{10}$，

故$\overline{AG} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{10} - 6\right)^2} = \sqrt{80 - 24\sqrt{10}}$，

$\overline{AJ} = 2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(8 - 2\sqrt{10}\right) = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$，

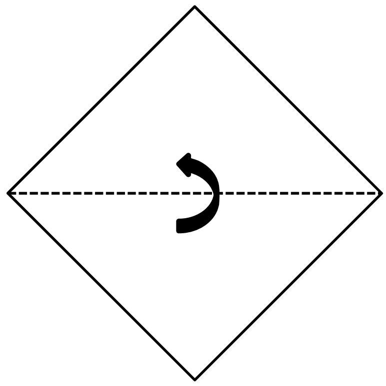
$\therefore \dfrac{\overline{AJ}}{\overline{AG}} = \dfrac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{80 - 24\sqrt{10}}} \neq \dfrac{1}{\sqrt{5} - 1}$，

即$\angle GAJ \neq 36°$，

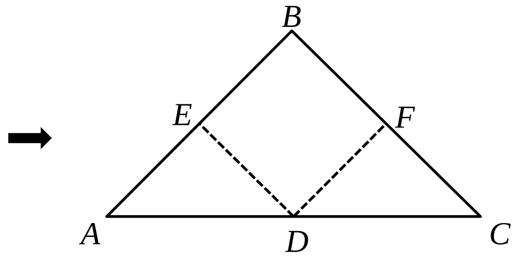
故根據此摺法，摺出來的角度並未等於$36°$。

(三) 摺法三：此摺法為我們討論出來的結果，雖然未能減少摺紙步驟，但摺出來的角度能更精準。

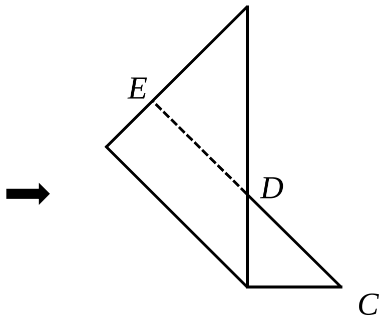
1. 步驟：



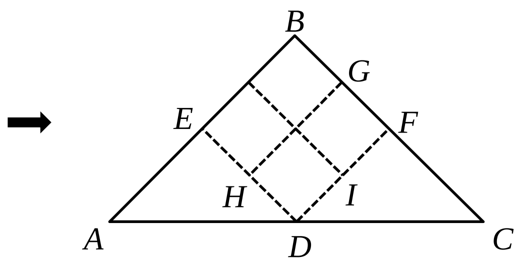
將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。



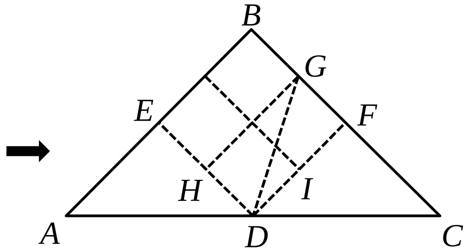
取等腰直角三角形的底邊中點 D，並在兩腰分別取中點 E、F，得摺線 $\overline{DE}$ 、 $\overline{DF}$ 。



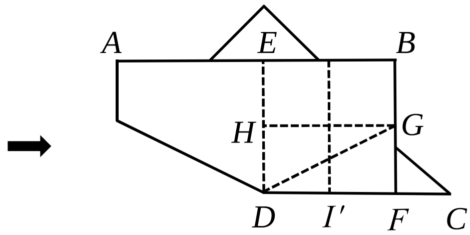
將 $\overline{DE}$ 摺至 $\overline{BC}$ 上，$\overline{DF}$ 摺至 $\overline{AB}$ 上。



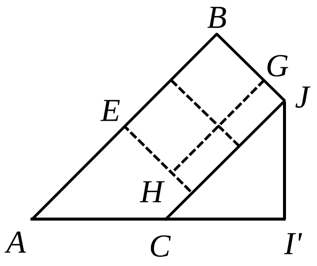
分別得到 $\overline{BF}$ 、 $\overline{DE}$ 及 $\overline{DF}$ 中點 G、H、I。

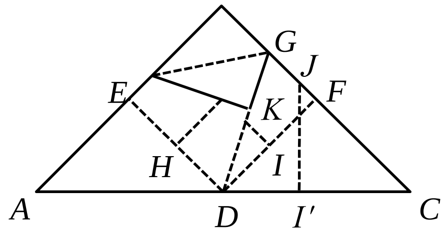


作長方形 $GHDF$ 的對角線 $\overline{GD}$ 。



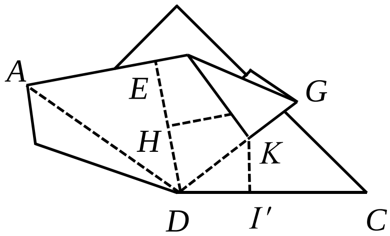
固定 D 點，將 $\overline{ID}$ 摺至 $\overline{CD}$ 上，在 $\overline{CD}$ 上得到 I 點的對稱點 I'。

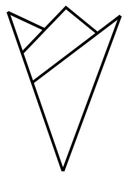
➡ 

➡ 

過 I' 點作 $\overline{JI'} \perp \overline{AI'}$ ，摺完後攤開。

固定 G 點，將 B 點摺至 $\overline{GD}$ 上，令其交點為 K 點。

➡ 

➡ 

固定 D 點，將 $\overline{DK}$ 摺至 $\overline{JI'}$ 上。

摺出 $\angle KDI'$，再以 D 為頂點，摺出四個等角使其等於 $\angle KDI'$，十摺摺紙完成。

2. 證明：

$\because \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{DE} = \overline{DF}$ ，

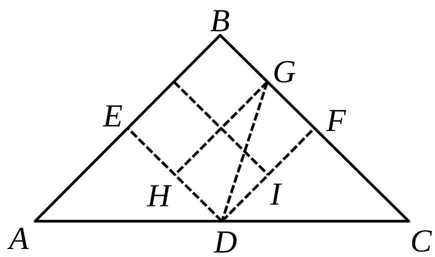
且 G、H、I 分別為 $\overline{BF}$ 、$\overline{DE}$ 、$\overline{DF}$ 之中點，

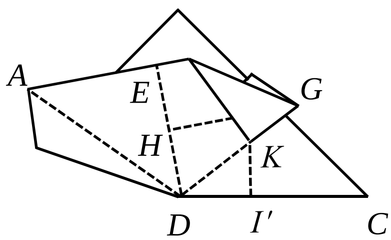
$\therefore \overline{EH} = \overline{DH} = \overline{DI} = \overline{IF} = \overline{BG} = \overline{GF}$ ，

設 $\overline{GF} = 1$，則 $\overline{DF} = 2$ ，

$\overline{DG} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

$\because \overline{GK} = \overline{BG} = 1$，





$\therefore \overline{KD} = \sqrt{5} - 1$，

又 $\overline{I'D} = \overline{ID} = 1$ 且 $\angle KI'D = 90°$，

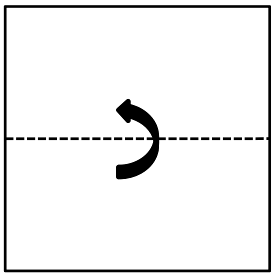
$\therefore \overline{KD} : \overline{I'D} = \sqrt{5} - 1 : 1$，

故 $\angle KDI' = 36°$，

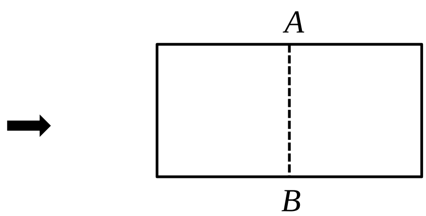
即此摺法能摺出 $36°$ 的角。

(四) 摺法四：此摺法為我們討論出來的結果，與摺法三相較，步驟較為少一些。

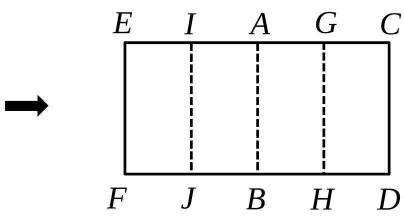
1. 步驟：



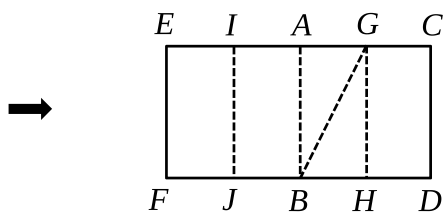
將紙的正面朝上，對摺成兩個長方形。



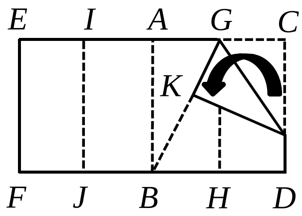
再將長方形對摺，得摺線 $\overline{AB}$。

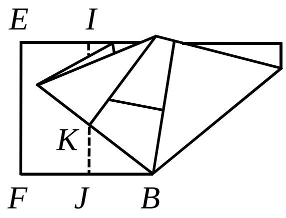


將 $\overline{CD}$ 對摺到 $\overline{AB}$，得摺線 $\overline{GH}$。將 $\overline{EF}$ 對摺到 $\overline{AB}$，得摺線 $\overline{IJ}$。

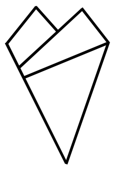


摺出長方形 $ABHG$ 的對角線 $\overline{BG}$。



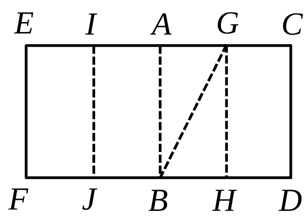


將$\overline{CG}$與$\overline{BG}$重合，交$\overline{BG}$於K點。　　固定B點，將$\overline{BK}$摺到$\overline{IJ}$上。



摺出$\angle FBK$，再以 B 為頂點，摺出四個等角使其等於$\angle FBK$，十摺摺紙完成。

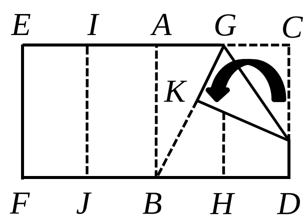
2. 證明：



設$\overline{BH}=\overline{HD}=\overline{BJ}=\overline{FJ}=1$，

則$\overline{GH}=\overline{CD}=2$，

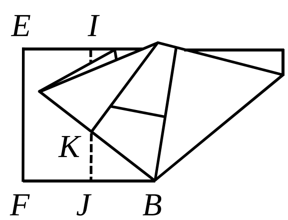
$\overline{BG}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ，



又$\overline{GK}=\overline{CG}=1$，

$\therefore \overline{BK}=\sqrt{5}-1$，

在ΔBJK中，



$\because \angle BJK=90°$ ，$\overline{BK}=\sqrt{5}-1$，$\overline{BJ}=1$，

$\therefore \angle JBK=36°$ ，

即此摺法能摺出$36°$的角。

伍、 討論與結論

根據錯誤及正確的摺法，我們整理出如下的結果。

一、六摺摺法：

(一) 要摺出正確的六摺，即要使摺紙夾角為$60°$。只要做出邊長比為$1:\sqrt{3}:2$的三角形，或摺出正三角形，便能得到$60°$的角。

(二) 我們將錯誤及正確的摺法，各摺 15 張，將摺出來的角由左至右依序編為∠1、∠2、∠3，並測量角度，得到以下結果：

摺法	摺法一　　錯誤			摺法二　　正確			摺法三　　正確		
角	∠1	∠2	∠3	∠1	∠2	∠3	∠1	∠2	∠3
度數	61	60	59	61	60	59	60	60	60
	59	60	61	60	60	60	61	59	60
	61	58	61	60	60	60	61	59	60
	60	59	61	60	60	60	60	60	60
	60	59	61	61	59	60	60	60	60
	59	60	61	61	59	60	60	60	60
	60	60	60	61	60	59	60	60	60
	60	59	61	60	60	60	60	59	61
	60	59	61	61	60	59	60	59	61
	60	59	61	60	59	61	60	60	60
	60	59	61	61	60	59	60	60	60
	61	59	60	60	60	60	60	59	61
	61	59	60	61	60	59	60	60	60
	60	60	60	60	60	60	61	59	60
	61	59	60	61	60	59	60	59	61
平均數	60.20	59.27	60.53	60.53	59.80	59.67	60.20	59.53	60.27
誤差百分比(%)	0.33	-1.22	0.89	0.89	-0.33	-0.56	0.33	-0.78	0.44
標準差	0.68	0.59	0.64	0.52	0.41	0.62	0.41	0.52	0.46

1. 由上表可知，摺法一是錯誤的摺法，因此其誤差百分比也較大。
2. 摺法一和摺法三的∠2 會比較小的原因和其摺法有關，因是將左右兩邊往內摺，所以兩邊的摺痕會影響此角的度數。
3. 摺法二和摺法三是正確的摺法，因此較能摺出都是$60°$的角，但因人為操作

難免有誤差，以致無法每次都摺出60°的角。

4. 摺法三的步驟較摺法二少，所以摺出來的角度準確率較高。

二、十摺摺法：

(一) 要摺出正確的十摺，即要使摺紙夾角為36°。只要摺出斜邊與一股的比為$\sqrt{5}-1:1$的直角三角形，便能得到此兩邊的夾角為36°。

(二) 我們將錯誤及正確的摺法，各摺 15 張，將摺出來的角由左至右依序編為$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$，並測量角度，得到以下結果：

摺法	摺法一　錯誤					摺法二　錯誤				
角	∠1	∠2	∠3	∠4	∠5	∠1	∠2	∠3	∠4	∠5
	36	35	37	36.5	35.5	36	36	36	35	37
	36	36	36.5	36.5	35	36	36	35	37	36
	36	36	36.5	35.5	36	37	36	35	36	36
	36	37	36	35	36	36	36	36	36	36
	36	36	37	35	36	36	36	36	35.5	36.5
	37	36	36	35	36	36	36	35	36	37
	35	37	36	36	36	37	35	36	35.5	36.5
度數	36	36	36.5	36	35.5	36	36	36	35	37
	36.5	36	36	35.5	36	36	36	36	36	36
	36.5	36	35.5	36	36	37	36	35	36	36
	36	36.5	36	35.5	36	36	36.5	35.5	36	36
	36	36.5	35.5	36	36	36	36	36	36	36
	36	36.5	36.5	36	35	36.5	36	35	36.5	36
	36	36	36.5	36	35.5	36	36	36	36	36
	37	36	36	36	35	35.5	36.5	35.5	36	36.5
平均數	36.15	36.20	36.00	35.73	35.70	36.20	36.00	35.60	35.90	36.30
誤差百分比(%)	0.42	0.56	0.00	-0.74	-0.83	0.56	0.00	-1.11	-0.28	0.83
標準差	0.48	0.49	0.46	0.50	0.41	0.46	0.33	0.47	0.51	0.41

摺法	摺法三　正確					摺法四　正確				
角	∠1	∠2	∠3	∠4	∠5	∠1	∠2	∠3	∠4	∠5
	36	36	36	36	36	35.5	35.5	36	36	37
	37	36	36	36	35	36	35	37	36	36
	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
	37	36	35	36	36	36	37	37	35	35
	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
度數	36	36	36	36	36	36	35	36	36	37
	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
	36	36	37	36	35	36	36	37	36	35
	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
	36	35	36	37	36	36	36	37	36	35
	36	36	37	36	35	36	36	36	36	36
	36	36	36	36	36	36	35	36	36	37
	35	36	36	37	36	36	36	36	36	36
平均數	36.07	35.93	36.07	36.13	35.80	35.97	35.83	36.27	35.93	36.00
誤差百分比(%)	0.19	-0.19	0.19	0.37	-0.56	-0.09	-0.46	0.74	-0.19	0.00
標準差	0.46	0.26	0.46	0.35	0.41	0.13	0.52	0.46	0.26	0.65

1. 由上表可知，摺法一和摺法二皆屬錯誤的摺法，因此其誤差百分比會比正確的摺法三和四來得高。
2. 摺法三和摺法四是正確的摺法，雖然步驟較多，但較能精準摺出都是36°的角，只是因人為操作難免有誤差，以致無法每次都摺出36°的角。
3. 摺法三和四在摺等角的過程中，若角的一邊未與摺痕確實貼齊，也容易會有誤差。

三、摺紙過程中，我們發現產生誤差的原因：

(一) 很多色紙並未真的是 15×15cm，常會有一些多出來的部份。

(二) 色紙的厚度及摺紙的過程是否準確，也會影響結果。

(三) 摺紙步驟的多寡也會導致產生誤差，步驟多、摺痕多，較容易有誤差。

四、網路普遍的摺法，因為並未能夠將紙完整的六等份與十等份，所以剪出來的圖案及

線條會有大小及粗細的不同。

五、透過正確的摺法，能完整平分角度，更可以將設計出的圖案，完美體現。

六、以前都直接照網路或書上的教學，卻從沒想過摺出來的角度是否準確。現在知道有些方法摺出來的不一定符合我們要的角度，也很開心能利用國中所學討論出誤差更小的摺法。

陸、 參考資料

一、くまだまり(2010)．*超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物*．新北市：台灣廣廈出版集團

二、はやしゆうこ、小崎珠美(2013)．*拿起剪刀就會剪！超豐富剪紙圖案 296 款*．新北市：瑞昇文化

三、しゃんでり(2013)．*這一秒愛上可愛剪紙*．台北市：三采文化

四、阮華剛、譚志良(2014)．數學百子櫃系列(十七)摺紙與數學．取自 https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Cabinet2017.pdf

五、福氣老師．證明 cos36 度．取自 http://sites.ccvs.kh.edu.tw/fuchi/doc/26235

六、張海潮．如何在課堂上摺一個正五邊形．取自 mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=722

七、Sunshine．正方形變身正五邊形．取自 http://www.shougongke.com/course/351819.html

八、Marcela Brina. *Hexagon From Square*, from https://www.youtube.com/watch?v=zyQJOpRKoCg

九、DeviantArt. *How to fold a regular pentagon*, from https://www.deviantart.com/1sand0s/art/How-to-fold-a-regular-pentagon-68172782

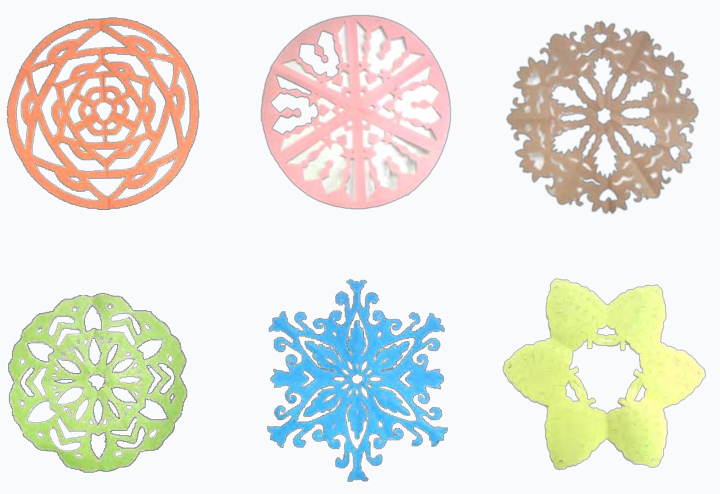
【評語】030403

有趣的摺紙問題的討論。針對用 6 摺摺出 60°、用 10 摺摺出 36°的摺法做了討論，給出了具體的摺紙方式並給出論證。摺紙問題是具有美感的有趣問題。作者們針對網路上流傳的一些用 6 摺摺出 60°、用 10 摺摺出 36°的摺法做了討論，說明了部分網路流傳的摺紙方式其實是有誤差的，也給出了一些自創的精確的摺紙方式。能活用國中所學的幾何知識，將其融入摺紙藝術中，充分展現學用一體的精神，十分不容易，值得嘉許。比較可惜的是，考慮的問題稍嫌少了些，使得整個作品看起來在內容上略顯單薄。關於摺紙問題的相關參考資料其實非常多，值得更深入討論的內容也不少。有哪些特殊角度是可以摺出的？最精簡的摺法為何？這些都是可以進一步討論的問題。如果能在這些內容再多做著墨會更好。

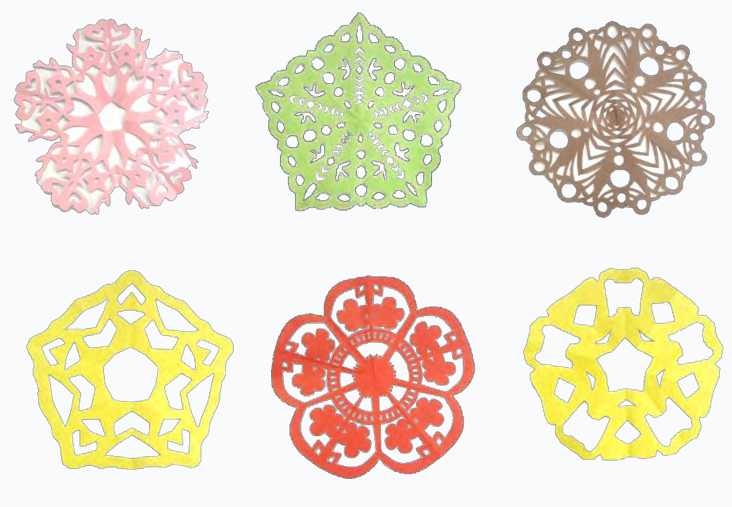
作品海報

壹 研究動機

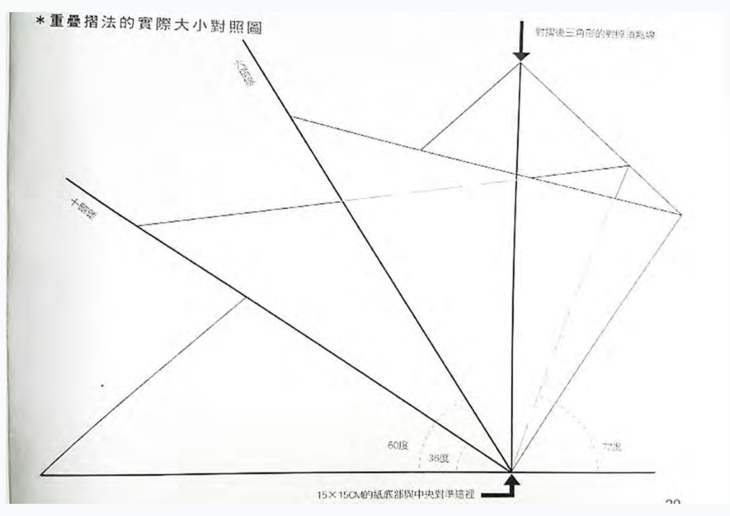
上學期的美術課，老師帶了我們剪紙(如圖一、圖二)，按照老師的模板，剪出了一朵對稱且均勻的雪花，引起了我們的興趣。在設計圖案的過程中，老師教了我們一些摺法，包含二摺、四摺、六摺、八摺、十摺、十二摺、十六摺…。由於剪紙設計講求對稱性，因此摺法也多為偶數摺。摺的過程中，發現2^n的摺法並不難，只要將色紙對摺再對摺就能得到。但非2^n的摺法，如六摺或十摺，並不是對摺再對摺就能摺出。坊間許多關於剪紙的書設計出樣板(如圖三)，以便能快速將紙摺好。我們覺得萬一手邊沒有樣板，沒有量角器，要如何將紙摺六摺和十摺？書上所教的摺法，又真的能夠將紙六等份、十等份嗎？所謂「盡信書，不如無書」，透過思考、討論，能活用國中所學才是王道，於是我們決定動手研究看看。



圖一 六摺剪紙作品



圖二 十摺剪紙作品



圖三剪紙書籍提供的樣板

(圖片來源：超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物)

貳 研究目的

一、探討六摺的摺法，並證明中心點的角度能被六等份。

二、探討十摺的摺法，並證明中心點的角度能被十等份。

參 設備與器材

一、剪刀、美工刀、15×15 cm色紙、量角器。

二、電腦、Word、AMA、Excel。

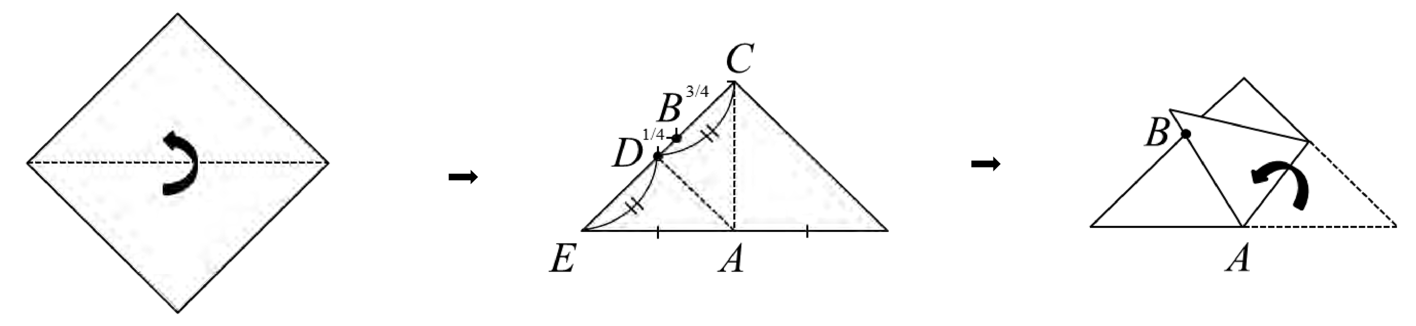
肆 過程與結果

一、六摺摺法

我們發現多數的剪紙書籍中，都是直接照著提供的樣板，便能摺出六摺。在「超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物」此本書中，有提到六摺的步驟，但沒有解釋為何這樣便能摺出六摺，而這樣的摺法真的確實能將色紙六等份嗎？所以我們決定利用幾何證明的方法，來驗證摺法的正確性，並設法找出其他的摺法。

(一)摺法一：此摺法來自「超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物」一書。

1. 步驟：



將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。

取等腰直角三角形的底邊中點A，左邊邊緣一半的$\frac{3}{4}$處取B點。

將右邊的角摺疊到A與B的連線上。

再將左半邊沿著$\overline{AB}$向右摺。

六摺摺紙完成。

2. 證明：

作$\overline{BF} \perp \overline{AC}$，

$\because \overline{BF} // \overline{AE}$，

$\therefore \overline{CB}:\overline{BE} = \overline{CF}:\overline{FA} = 3:5$，

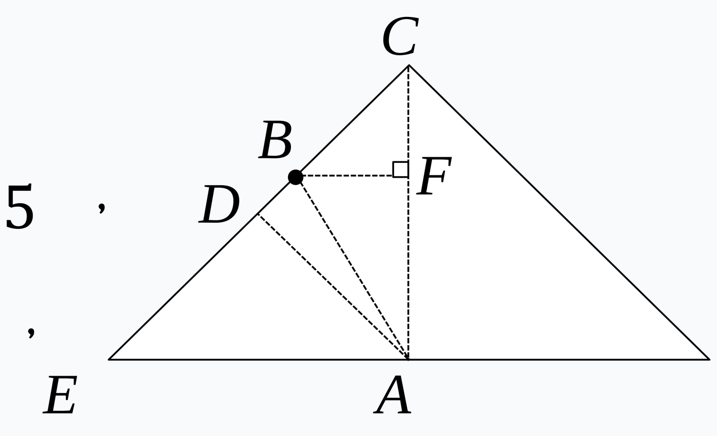
又$\angle FCB = \angle FBC = 45°$，

$\therefore \overline{BF} = \overline{CF}$，

故$\overline{BF}:\overline{FA} = 3:5 \neq 1:\sqrt{3}$，

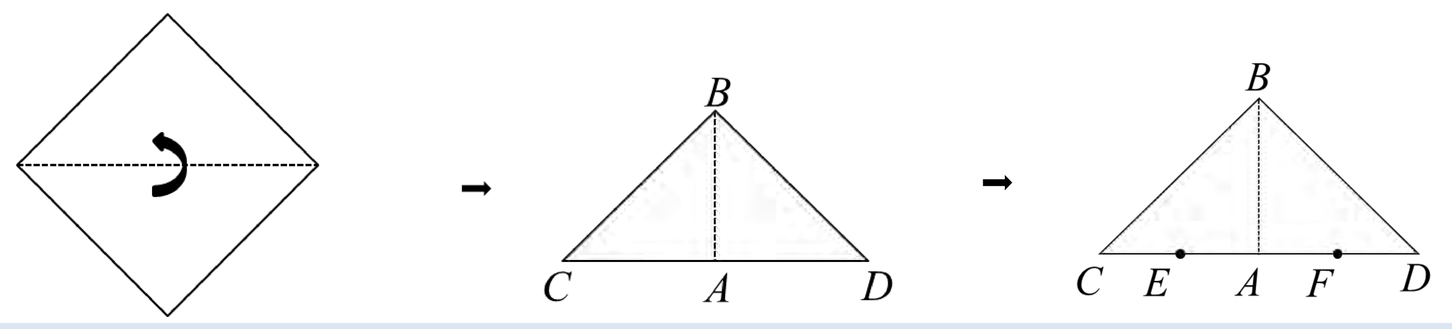
因此$\angle BAF \neq 30°$，$\angle BAE \neq 60°$，

故參照書上的摺法，摺出來的角度並未等於$60°$。



(二)摺法二：此摺法為我們討論出來的結果，雖然未能減少摺紙步驟，但摺出來的角度能更精準。

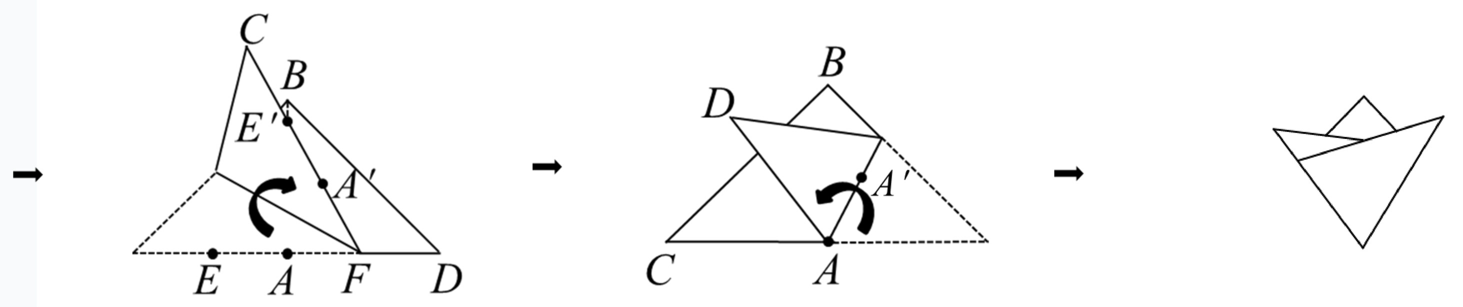
1. 步驟：



將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。

取等腰直角三角形的底邊中點A，將圖形沿著$\overline{AB}$對摺。

分別取$\overline{AC}$及$\overline{AD}$中點E和F。



固定F點，將E點摺到$\overline{AB}$上，找出A點的對稱點A'及E點的對稱點E'。

固定A點，將右半邊圖形沿著$\overline{AA'}$對摺。

固定A點，將左半邊圖形沿著$\overline{AD}$對摺，六摺摺紙完成。

2. 證明：

設$\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CE} = \overline{DF} = 1$，

則$\overline{AF} = \overline{A'F} = 1$，$\overline{EF} = \overline{E'F} = 2$，

在$\Delta AE'F$中，$\because \angle E'AF = 90°$，

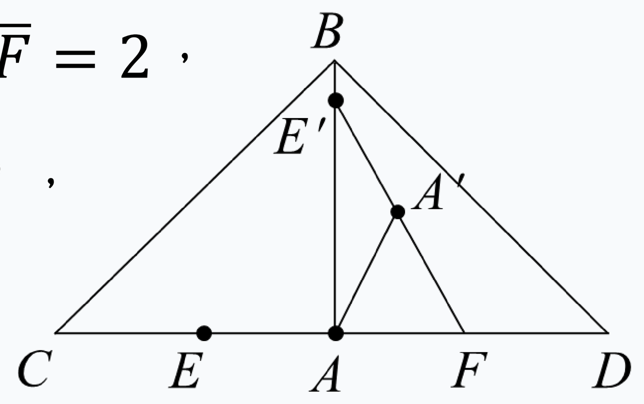
$\overline{AE'} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

$\therefore \overline{AF}:\overline{AE'}:\overline{E'F} = 1:\sqrt{3}:2$，

$\therefore \angle E'FA = 60°$，

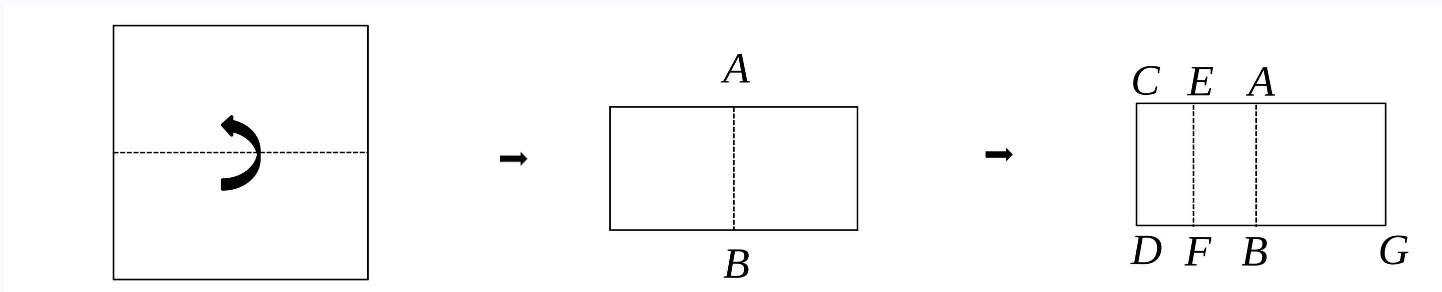
在$\Delta AA'F$中，$\because \overline{AF} = \overline{A'F}$，且$\angle A'FA = 60°$，

$\therefore \angle A'AF = 60°$，即此摺法能摺出$60°$的角。

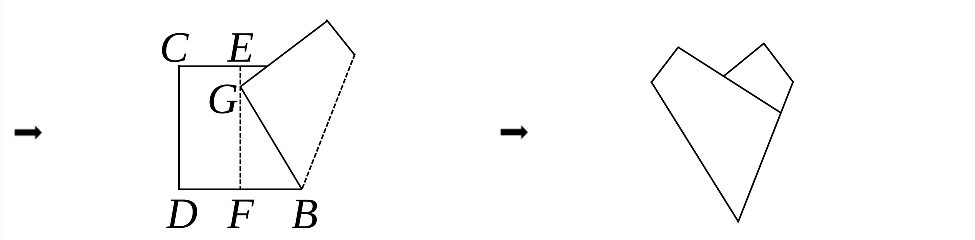


(三)摺法三：此摺法為我們討論出來的結果，與摺法二相比，較為簡單一些。

1. 步驟：



將紙的正面朝上，對摺成兩個長方形。 | 再將長方形對摺，得摺線$\overline{AB}$。 | 將$\overline{CD}$對摺到$\overline{AB}$，得摺線$\overline{EF}$。



固定B點，將G摺到$\overline{EF}$上。 | 將左半邊再沿著$\overline{BG}$向右摺，六摺摺紙完成。

2. 證明：

設$\overline{BF}=x$，則$\overline{BD}=\overline{BG}=2x$，

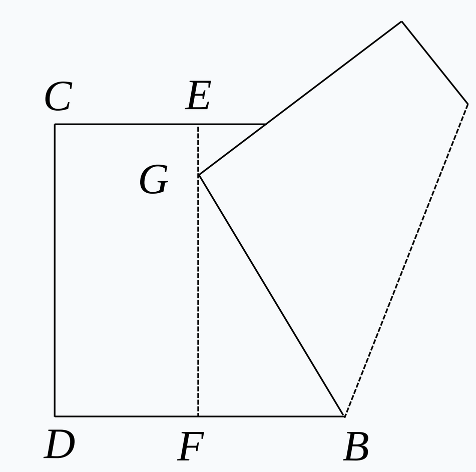
又$\angle BFG=90°$，

$\therefore \overline{GF}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$，

故$\overline{BF}:\overline{GF}:\overline{BG}=1:\sqrt{3}:2$，

$\therefore \angle FBG=60°$，

即此摺法能摺出60°的角。

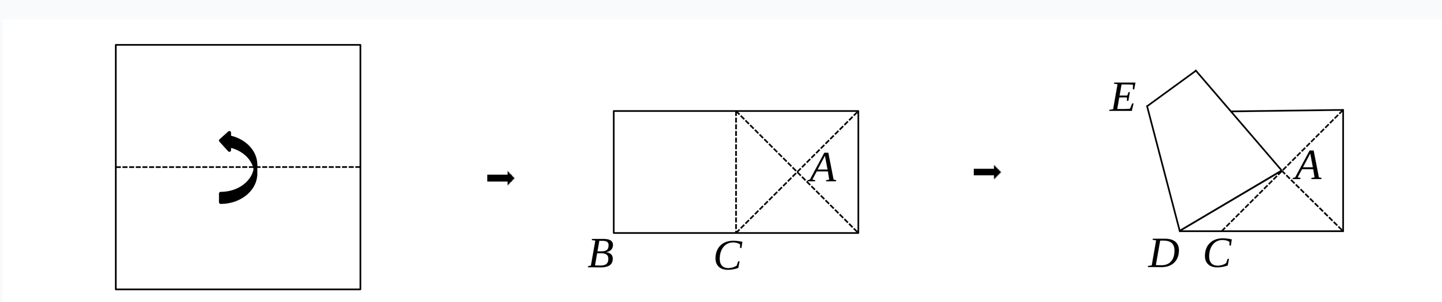


二、十摺摺法

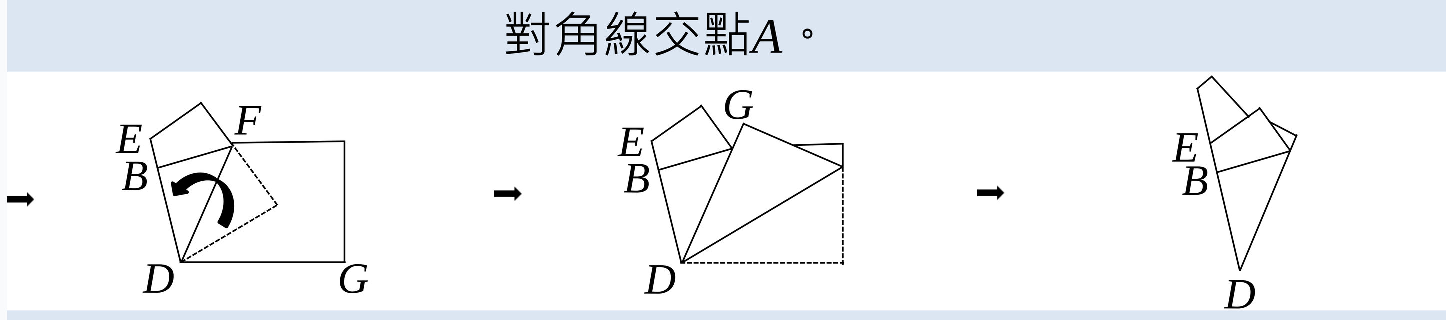
在剪紙書籍中，關於十摺的摺法，也是直接提供樣板，照著樣板摺出十摺，並未有其他的摺法，於是我們便上網搜尋資料。搜尋十摺摺法過程中，發現下列所述的摺法一，是多數人常使用的方法，但未看到此法的驗證。摺法二也是網路上找到的另一普遍摺法，但也缺乏相關證明。因此，我們利用幾何證明，來驗證摺法的正確性，並設法找出其他的摺法。

(一)摺法一：此摺法來自http://www.shougongke.com/course/351819.html。

1. 步驟：



將紙的正面朝上，對摺成兩個長方形。 | 再將長方形對摺，使其變成兩個正方形。在右邊的正方形摺出對角線交點A。 | 將左邊的B點與A點重合，得摺線$\overline{DE}$。



將$\overline{DB}$與$\overline{DE}$重合。 | 將$\overline{DG}$與$\overline{DF}$重合。 | 再將圖形沿著$\overline{DG}$對摺，十摺摺紙完成。

2. 理論基礎：

黃金三角形是一種特殊的等腰三角形，其腰長與底邊長呈現黃金比例。黃金三角形分為兩種，一為頂角為36°的銳角三角形，一為頂角為108°的鈍角三角形。

(1)理論一(福氣老師，[5])：

等腰ΔABC中，

已知$\angle A=36°$，$\angle ABC=\angle C=72°$，

作$\overline{BD}$平分$\angle ABC$，且交$\overline{AC}$於D點，

設$\overline{AB}=\overline{AC}=1$，$\overline{BC}=x$，

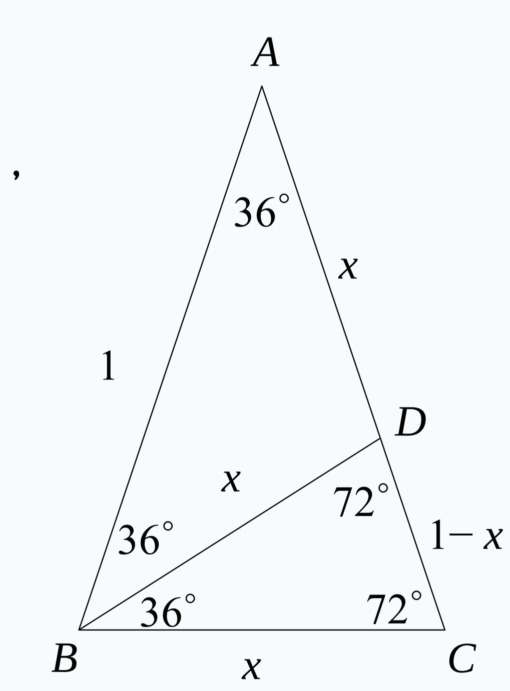
則$\overline{BD}=\overline{AD}=x$，$\overline{CD}=1-x$，

$\because \Delta ABC \sim \Delta BCD$（$AA$相似性質），

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$，

即$1:x=x:1-x$，$x^2+x-1=0$，$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (負不合)，

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$\overline{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。



(2)理論二(張海潮，[6])：

過B點作$\overline{AB}$的垂線$\overline{BE}$且交$\overline{AC}$的延長線於E點，

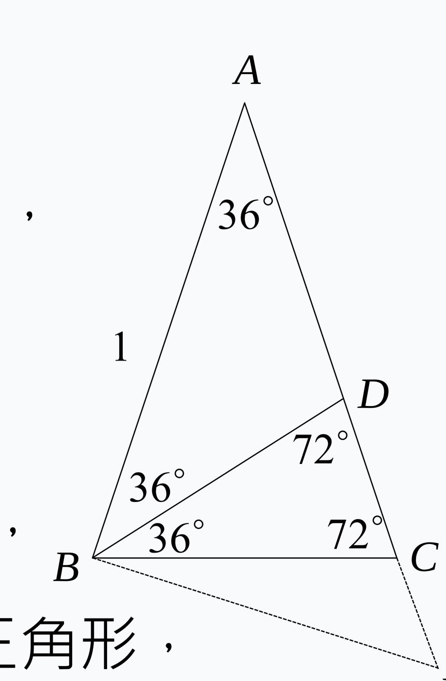
$\because \angle ABE=90°$，$\therefore \angle E=54°=\angle DBE$，

因此$\overline{BD}=\overline{DE}$，

$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=2\overline{BD}=2\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}-1$，

即若能做出斜邊為$\sqrt{5}-1$，一股為1的直角三角形，

則此兩邊的夾角必為36°。



3. 證明：

作$\overline{AH}\perp\overline{CG}$，$\because A$為正方形對角線的交點，

$\therefore \overline{AC}=\overline{AG}$，$\angle ACG=\angle AGC=45°$，

且$\angle CAH=\angle GAH=45°$，

設$\overline{AH}=\overline{CH}=\overline{GH}=1$，$\overline{CD}=x$，

則$\overline{CG}=2$，$\overline{AD}=2-x$，

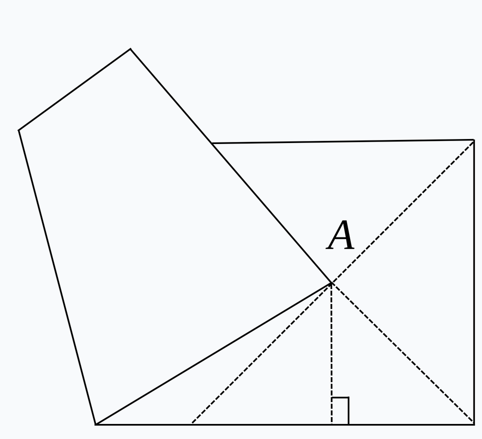
在ΔADH中，$\overline{AH}^2+\overline{DH}^2=\overline{AD}^2$，

$1^2+(x+1)^2=(2-x)^2$，$x=\frac{1}{3}$，

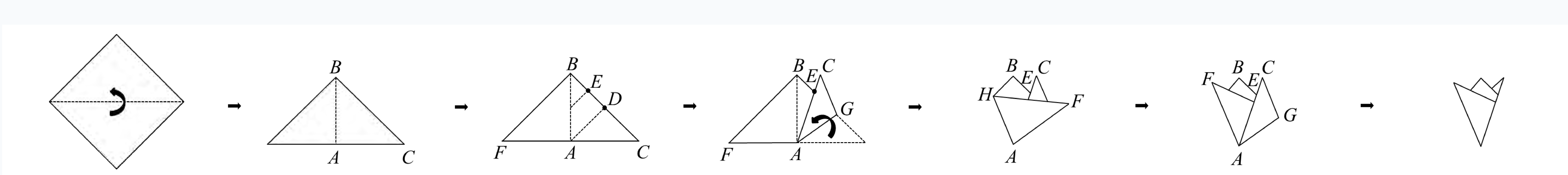
$\therefore \overline{AD}=\frac{5}{3}$，$\overline{DH}=\frac{4}{3}$，$\frac{\overline{DH}}{\overline{AD}}=\frac{4}{5}\neq\frac{1}{\sqrt{5}-1}$，

即$\angle ADH\neq 36°$，

故根據此摺法摺出來的角度並未等於36°。



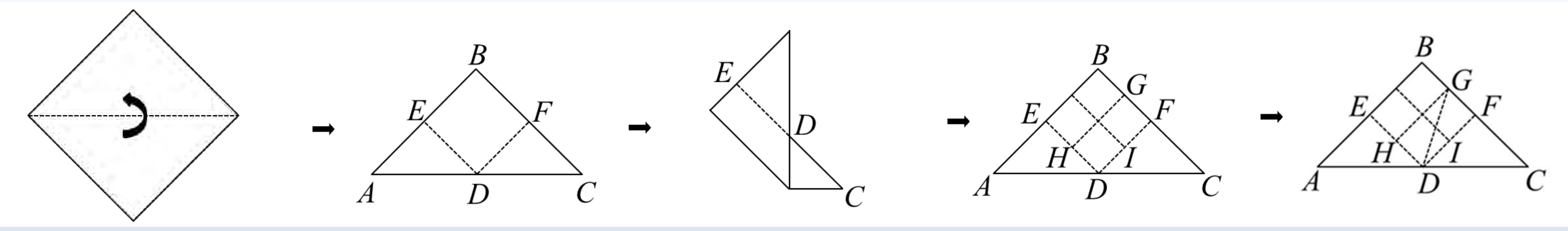
(二) 摺法二：此摺法來自https://www.deviantart.com/1sand0s/art/ How-to-fold-a-regular-pentagon-68172782。



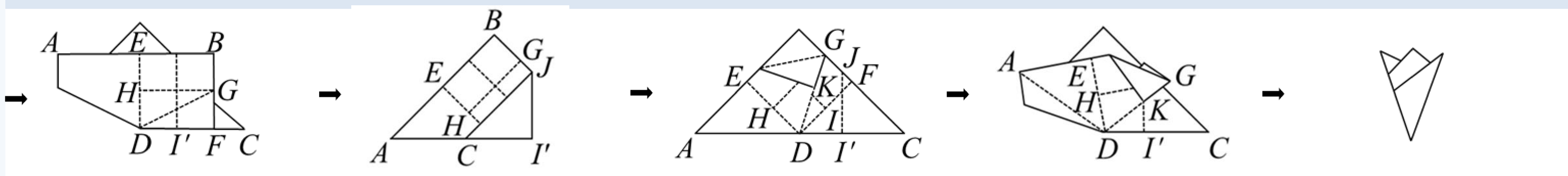
將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。 | 取等腰直角三角形的底邊中點A，將圖形沿著$\overline{AB}$對摺。 | 取$\overline{BC}$中點D，再取$\overline{BD}$中點E。 | 固定A點，將$\overline{AC}$摺到E點上，得摺線$\overline{AG}$。 | 固定A點，將$\overline{AF}$摺到$\overline{AG}$上，得摺線$\overline{AH}$。 | 再將$\overline{AF}$與$\overline{AH}$重合。 | 將圖形沿著$\overline{AE}$對摺，十摺摺紙完成。

(三) 摺法三：此摺法為我們討論出來的結果，雖然未能減少摺紙步驟，但摺出來的角度能更精準。

1. 步驟：



將紙的正面朝上，沿著對角線摺成等腰直角三角形。	取等腰直角三角形的底邊中點D，並在兩腰分別取中點E、F，得摺線$\overline{DE}$、$\overline{DF}$。	將$\overline{DE}$摺至$\overline{BC}$上，$\overline{DF}$摺至$\overline{AB}$上。	分別得到$\overline{BF}$、$\overline{DE}$及$\overline{DF}$中點G、H、I。	作長方形$GHDF$的對角線$\overline{GD}$。



固定D點，將$\overline{ID}$摺至$\overline{CD}$上，在$\overline{CD}$上得到I點的對稱點I'。	過I'點作$\overline{JI'} \perp \overline{AI'}$，摺完後攤開。	固定G點，將B點摺至$\overline{GD}$上，令其交點為K點。	固定D點，將$\overline{DK}$摺至$\overline{JI'}$上。	摺出$\angle KDI'$，再以D為頂點摺出四個等角使其等於$\angle KDI'$，十摺摺紙完成。

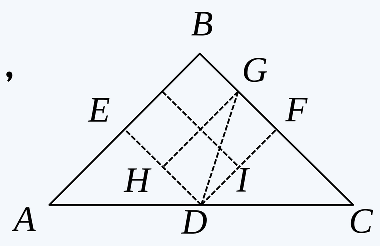
2. 證明：

$\because \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{DE} = \overline{DF}$，

且G、H、I分別為$\overline{BF}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$之中點，

$\therefore \overline{EH} = \overline{DH} = \overline{DI} = \overline{IF} = \overline{BG} = \overline{GF}$，

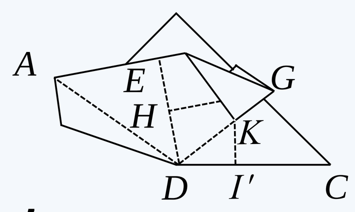
設$\overline{GF} = 1$，則$\overline{DF} = 2$，



$\overline{DG} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$，

$\because \overline{GK} = \overline{BG} = 1$，

$\therefore \overline{KD} = \sqrt{5} - 1$，



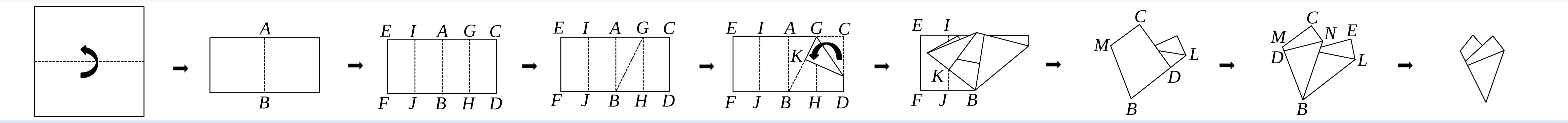
又$\overline{I'D} = \overline{ID} = 1$，且$\angle KI'D = 90°$，

$\therefore \overline{KD} : \overline{I'D} = \sqrt{5} - 1 : 1$，

故$\angle KDI' = 36°$，

即此摺法能摺出$36°$的角。

(四) 摺法四：此摺法為我們討論出來的結果，與摺法三比較，步驟較少一些。



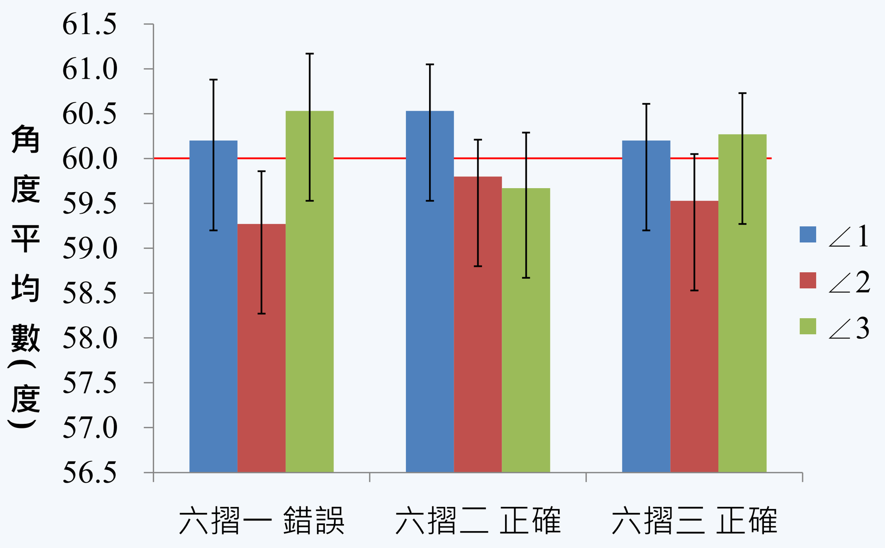
將紙的正面朝上，對摺成兩個長方形。	再將長方形對摺，得摺線$\overline{AB}$。	將$\overline{CD}$對摺到$\overline{AB}$，得摺線$\overline{GH}$。將$\overline{EF}$對摺到$\overline{AB}$，得摺線$\overline{IJ}$。	摺出長方形$ABHG$的對角線$\overline{BG}$。	將$\overline{CG}$與$\overline{BG}$重合，交$\overline{BG}$於K點。	固定B點，將$\overline{BK}$摺到$\overline{IJ}$上。	摺出$\angle FBK$，得摺線$\overline{BL}$，並將$\overline{BD}$摺到$\overline{BL}$上，得摺線$\overline{BM}$。	將$\overline{BD}$摺到$\overline{BM}$上，得摺線$\overline{BN}$。	將左半邊沿著$\overline{BN}$對摺，十摺摺紙完成。

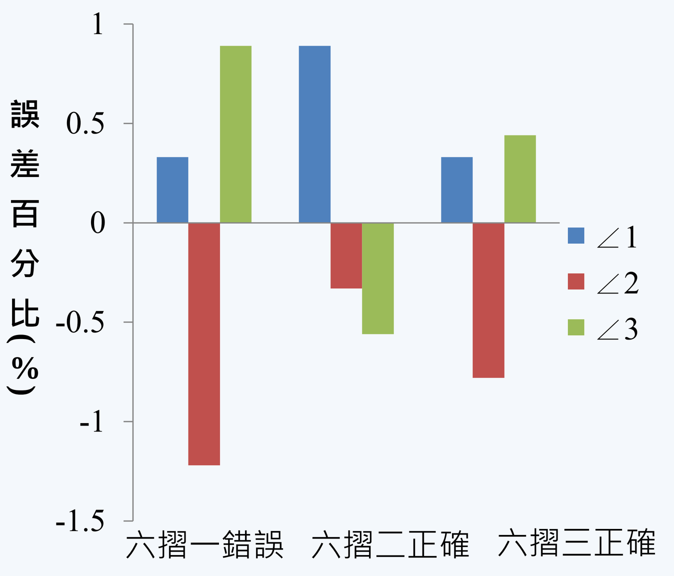
伍 討論與結論

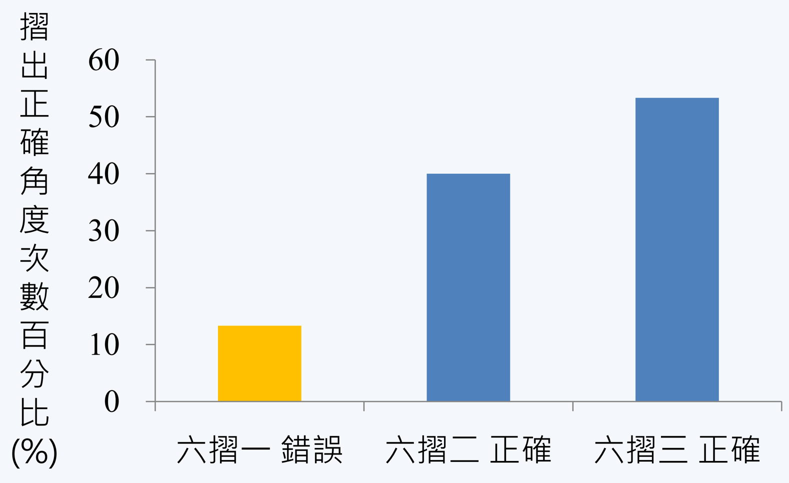
一、六摺摺法：

(一)只要做出邊長比為$1:\sqrt{3}:2$的三角形，或摺出正三角形，便能摺出正確的六摺。

(二)我們將錯誤及正確的摺法，各取15張，將摺出來的角由左至右依序編為∠1、∠2、∠3，並測量角度，得到以下結果：





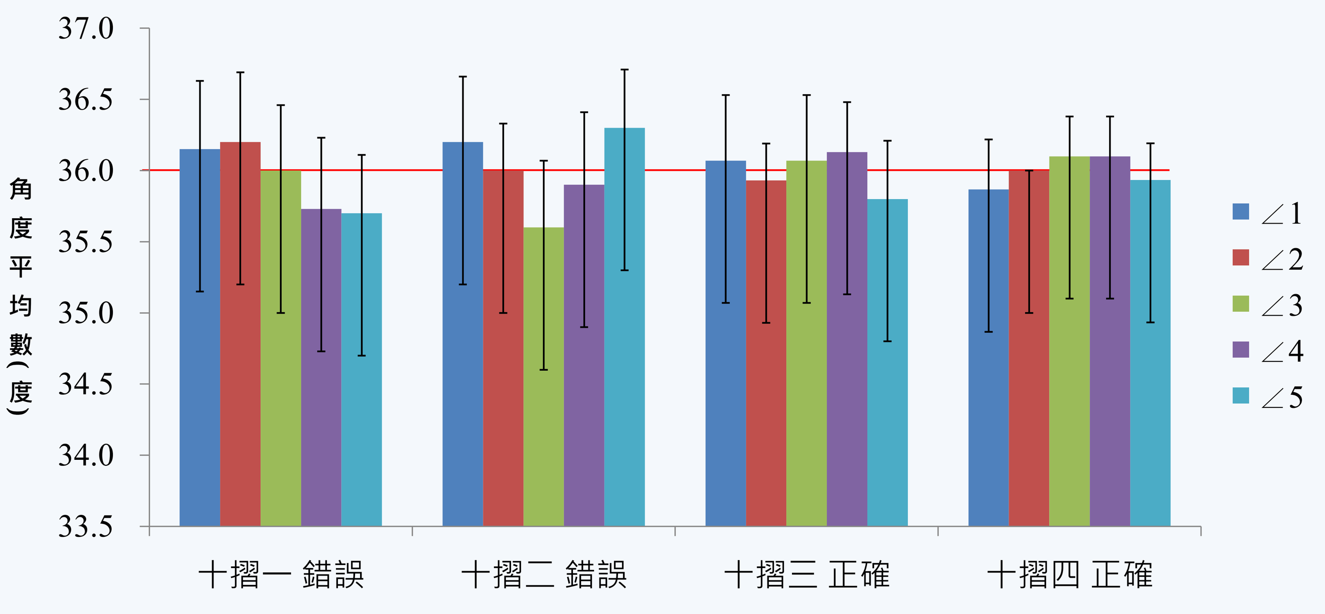


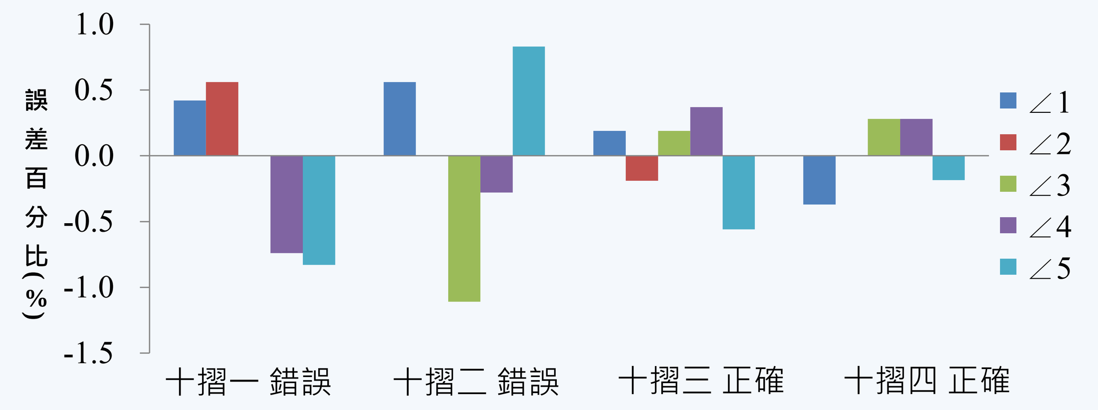
1. 錯誤的摺法，其誤差百分比也較大。
2. 摺法一和三的∠2會比較小，是因將左右兩邊往內摺，所以兩邊的摺痕會影響此角的度數。
3. 正確的摺法，較能摺出都是60°的角。
4. 摺法三的步驟較摺法二少，所以摺出來的角度準確率較高。

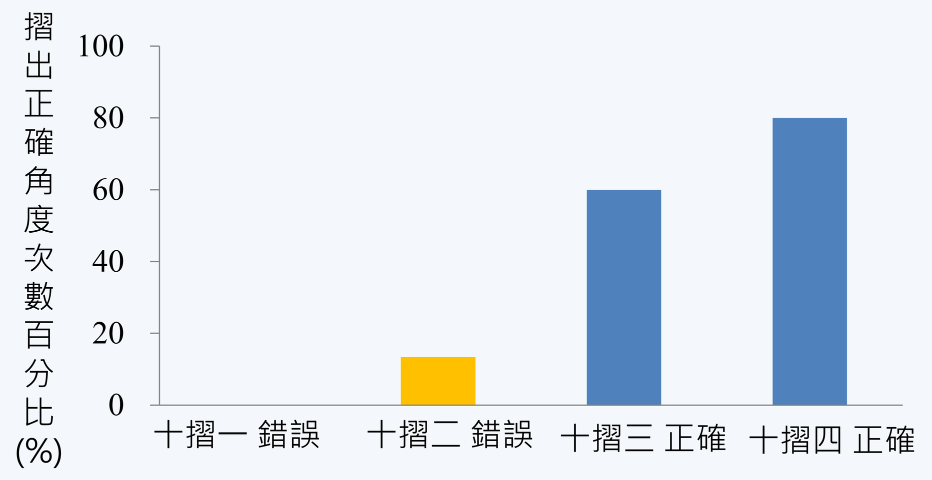
二、十摺摺法：

(一)只要摺出斜邊與一股的比為$\sqrt{5} - 1:1$ 的直角三角形，便能摺出正確的十摺。

(二)我們將錯誤及正確的摺法，各取15張，將摺出來的角由左至右依序編為∠1、∠2、∠3、∠4、∠5，並測量角度，得到以下結果：







1. 錯誤的摺法，其誤差百分比也比較大。
2. 摺法三和摺法四是正確的摺法，雖然步驟較多，但較能精準摺出都是36°的角。
3. 摺法三在摺等角的過程中，若角的一邊未與摺痕確實貼齊，也容易會有誤差。

三、摺紙過程中，我們發現產生誤差的原因：

1. 很多色紙並未真的是15×15cm，常會有多出來的部份。
2. 色紙的厚度及摺紙的過程是否準確，也會影響結果。
3. 摺紙步驟多、摺痕多，較容易有誤差。

四、錯誤摺法未能將紙完整的六等份與十等份，所以剪出來的圖案及線條會有大小及粗細的不同。

五、現在發現網路或書上的教學不一定符合我們要的角度，也很開心能利用國中所學討論出誤差更小的摺法。

陸 參考資料

1. くまだまり(2010)．*超簡單剪紙課 剪出幸福感的生活小物*．新北市：台灣廣廈出版集團
2. はやしゆうこ、小崎珠美(2013)．*拿起剪刀就會剪!超豐富剪紙圖案296款*．新北市：瑞昇文化
3. しゃんでり(2013)．*這一秒愛上可愛剪紙*．台北市：三采文化
4. 阮華剛、譚志良(2014)．數學百子櫃系列(十七)摺紙與數學．取自 https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Cabinet2017.pdf
5. 福氣老師．證明cos36度．取自http://sites.ccvs.kh.edu.tw/fuchi/doc/26235
6. 張海潮．如何在課堂上摺一個正五邊形．取自 mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/Ctrl/ePaper/ePaperOpenFileX.ashx?autoKey=722
7. Sunshine．正方形變身正五邊形．取自 http://www.shougongke.com/course/351819.html
8. DeviantArt. *How to fold a regular pentagon*, from https://www.deviantart.com/1sand0s/art/How-to-fold-a-regular-pentagon-68172782