中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030402

換心手術ー 從三角形出發探討N邊形多心性質之研究

學校名稱：基隆市立銘傳國民中學

作者：	指導老師：
國二 楊玠霆	陳慧敏
國二 賴柏宇	魏志鴻

關鍵詞：頂內三角形、頂外三角形、尤拉線

摘 要

本研究從許多幾何研究中讀到「頂外三角形」的研究,我們延伸的「頂內三角形」、「頂垂三角形」以及尤拉線,這四個主題出發,展開研究,試圖串連這四個主題,讓 「頂外三角形」不再孤單。

除了探討頂內三角形之外心、頂外三角形之垂心、頂垂三角形之內心與原三角形之內心、外心、垂心共點問題外,更進一步研究頂內三角形之尤拉線、頂外三角形之尤拉線、頂垂三角形之尤拉線與原三角心尤拉線彼此間的關係。

我們更研究出驚人的發現 ﹕頂垂三角形之三頂點與原三角形之三頂點六點共圓,並且頂內三角形、頂外三角形、頂垂三角形之尤拉線必與原三角形之尤拉線交於原三角形之外心。

發現令人興奮,應用產生價值,我們努力利用研究的發現,研發其在工程、產業、通訊、交通上的應用。

Abstract

This study has read the study of "outer triangles" from many geometric studies. We extend the "top inner triangle", "top vertical triangle" and the Euler line. These four themes start with research and try to connect these four. The theme is that the "outer triangle" is no longer alone.

In addition to the problem of the inner triangle of the top inner triangle, the vertical center of the outer triangle, the inner core of the vertical triangle, and the inner heart, the outer core, and the vertical center of the original triangle, the Euler line and the outer triangle of the inner triangle are further studied. The relationship between the Euler line, the Euler line of the drooping triangle and the original triangle line of the Euler line.

We have also made a surprising discovery: the three vertices of the drooping triangle are co-circular with the three vertices of the original triangle, and the Euler line of the top inner triangle, the outer outer triangle, and the top vertical triangle must intersect the Euler line of the original triangle. Outside the original triangle.

Discovering exciting, application-generating value, we strive to use research findings to develop research and development in engineering, industry, communications, and transportation.

壹、研究動機

當我們瀏覽眾多的幾何研究時，閱讀到了「圓內接多邊形與其頂外多邊形之探討」，這篇報告十分特別，描述許多三角形的性質。我們非常好奇為何在五心當中只使用到外心而未使用剩下四心，所以試圖研究剩下的四心關係，展開下列研究。

貳、研究目的

為了研究其他四心，並和「頂外三角形」串聯在一起。我們從原三角形出發，做出「頂垂三角形」、「頂內三角形」、「頂外三角形」，發現了這三種三角形彼此之間循環、層層相扣的換心關係，更延伸到尤拉線、多邊形，更進階延伸了下列的研究。

一、原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心的換心關係

二、原三角形之內心與其頂內三角形之外心的換心關係

三、原三角形之外心與其頂外三角形之垂心的換心關係

四、原三角形之尤拉線與其頂垂三角形之尤拉線探討

五、原三角形之尤拉線與其頂內三角形之尤拉線探討

六、原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線探討

七、四邊形與其頂內四邊形之研究

參、研究設備及器材

本研究主要利用 Geogebra 動態幾何軟體進行幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、名詞定義 & 做圖法

一、頂心三角形做圖步驟

頂心三角形是指

1. 作一三角形 ABC 在其三角形內部取任一點 X(如圖 1)

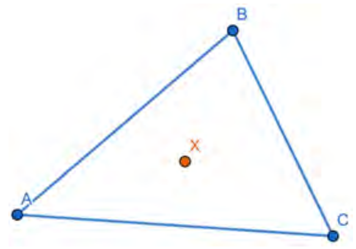


圖 1 頂心三角形步驟 1

2. 分別以三頂點 A、B、C 為圓心，$\overline{AX}$、$\overline{BX}$、$\overline{CX}$為半徑做圓(如圖 2)

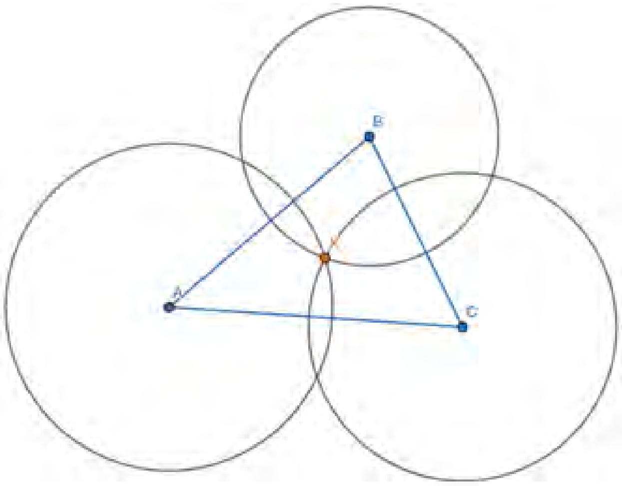


圖 2 頂心三角形步驟 2

3. 取三圓之交點 D、E、F，連線 D、E、F 形成△DEF，則△DEF 為△ABC 之頂心三角形(如圖 3)

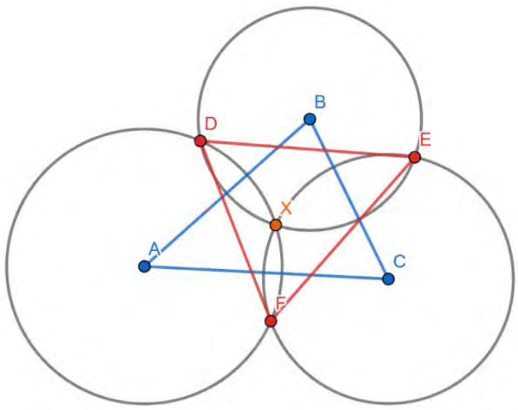


圖 3 頂心三角形步驟 3

二、頂垂三角形

在圖 3 中，若 X 點為△ABC 之垂心，則△DEF 為△ABC **頂垂三角形**

三、頂內三角形

在圖 3 中，若 X 點為△ABC 之內心，則△DEF 為△ABC **頂內三角形**

四、頂外三角形

在圖 3 中，若 X 點為△ABC 之外心，則△DEF 為△ABC **頂外三角形**

五、**尤拉線**

在平面幾何中，歐拉線，或稱**尤拉線**（圖 4 橘線）是指過三角形的垂心 H（藍）、外心 O（綠）、重心 G（紅）的一條直線。如圖 4

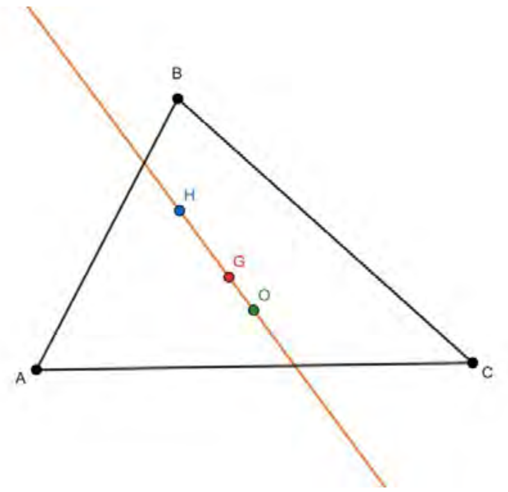


圖 4 尤拉線

六、垂換內性質

有「三角形 A、B，△A 之垂心與△B 之內心共點」的性質

七、內換外性質

有「三角形 A、B，△A 之內心與△B 之外心共點」的性質

八、外換垂性質

有「三角形 A、B，△A 之外心與△B 之垂心共點」的性質

伍、研究過程與方法

研究一、原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心換心關係

三角形的垂心是指三角形三底邊的高的交點，而內心是三角形三個內角之角平分線的交點。此研究即探討原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心換心可能性及證明。

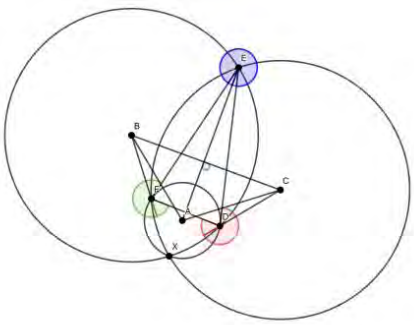


圖 5 鈍角-不換心

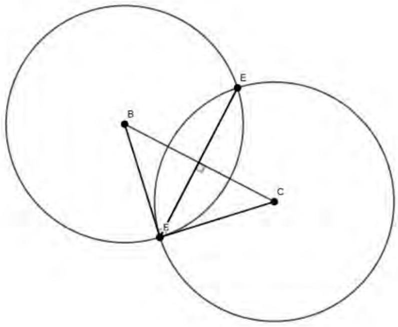


圖 6 直角-不換心

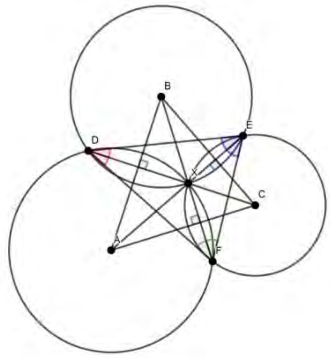


圖 7 銳角-換心

在圖 5、圖 6、圖 7 中，觀察到只有在銳角三角形時，原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心才會有換心關係。

已知：有一銳角ΔABC ，X 為ΔABC 之垂心、 ΔDEF為ΔABC之頂垂三角形

發現：ΔABC 之垂心與ΔEFG 之內心共點

證明目標：$\angle FDX = \angle XDE$、$\angle DEX = \angle XEF$、$\angle EFX = \angle XFD$

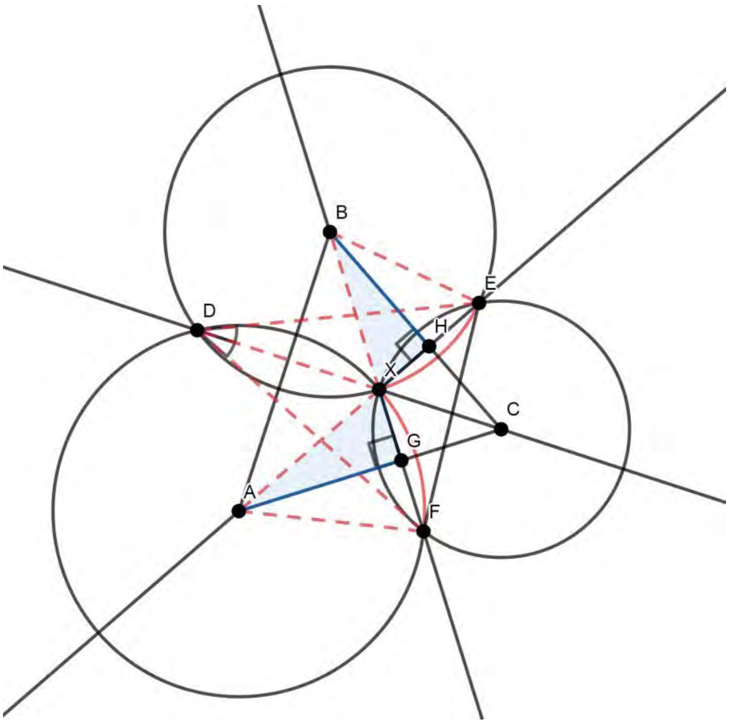


圖 8 △ABC 垂心與△EFG 內心共點示意圖

證明：

1. ∵$\angle$BXH=$\angle$AXG(對頂角)、$\angle$BHX=$\angle$AGX=90°

∴△BHX~△AGX(AA 相似)

2. ∵$\overline{AX}=\overline{AF}$(圓 A 半徑)、$\overline{XF}$為圓 A 之弦

∴ΔAXF 為等腰三角形

∵$\overline{AX}=\overline{AF}$、$\overline{CX}=\overline{CF}$

∴四邊形 AXCF 為箏型

∵四邊形 AXCF 為箏型

∴連心線$\overline{AC}$為$\angle$FAX 之角平分線

令$\angle$HBX=$\angle$GAX=a°

∵連心線$\overline{AC}$為$\angle$FAX 之角平分線

∴$\angle$GAX=$\angle$GAF=a° 且$\angle$FAX=$\angle$GAX+$\angle$GAF=2a°

(同理可證，$\angle$XBE=2a°)

3. ∵$\angle$FAX=$\angle$XBE=2a°

∴$\overset{\frown}{EX}=\overset{\frown}{FX}$=2a°

4. ∵$\angle$XDE 為$\overset{\frown}{EX}$之圓周角，$\angle$XDF 為$\overset{\frown}{FX}$之圓周角

∴$\angle XDE=\angle XDF=\frac{2a°}{2}=a°$

由 4 .可知，$\overline{DX}$為$\angle$EDF 之角平分線(同理$\overline{EX}$、$\overline{FX}$分別為$\angle$DEF、$\angle$EFD 之角平分線)

得證：$\angle FDX=\angle XDE$、$\angle DEX=\angle XEF$、$\angle EFX=\angle XFD$

結論：**銳角ΔABC之垂心與其頂垂ΔDEF之內心共點**

原銳角三角形之垂心與其頂垂三角形之內心共點(簡稱垂換內)，如圖(7)圖(8)

直角Δ無換心關係，因為直角Δ之垂心位於最大角上，與頂點重合，無法生成三角形(只有 2 個交點)，如圖(6)。我們觀察到鈍角三角形 ABC 與其頂垂三角形 DEF 並無換心關係(如圖 5)，

但目前嘗試過但無法解釋。

研究二、原三角形之內心與其頂內三角形之外心的換心關係

三角形的內心是三角形三個內角之角平分線的交點、而三角形的外心是三邊中垂線的交點。此研究即探討原三角形之內心與其頂內三角形之外心換心可能性及證明。

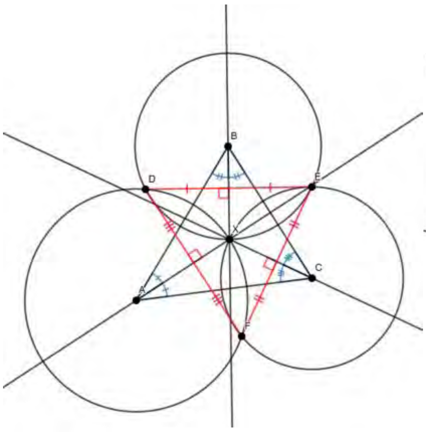


圖 9 銳角-換心

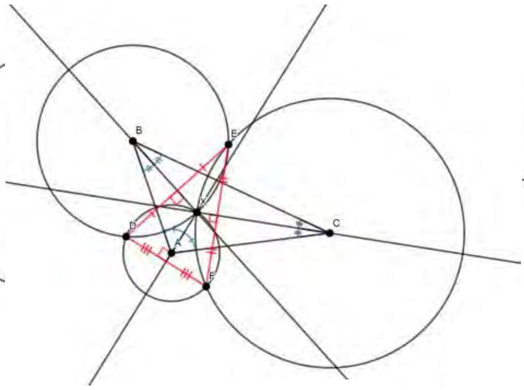


圖 10 鈍角-換心

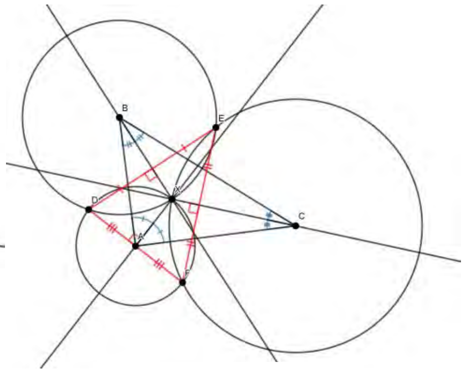


圖 11 直角-換心

已知： X 為ΔABC 之內心、ΔDEF為ΔABC之頂內三角形

發現： ΔABC 之內心與ΔDEF 之外心共點

證明目標： $\overline{DX}=\overline{EX}=\overline{FX}$

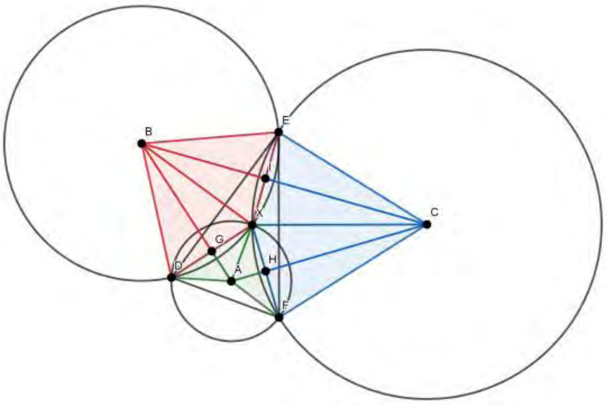


圖 12 鈍角△內心換外心示意圖

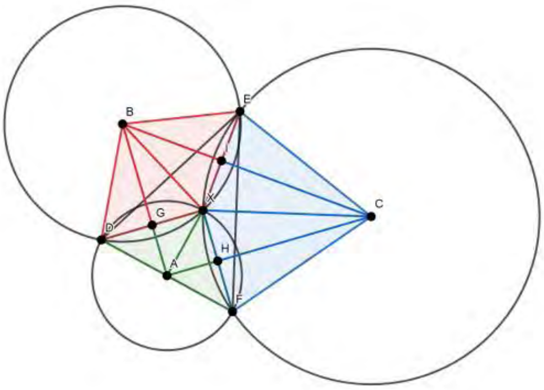


圖 13 直角△內心換外心示意圖

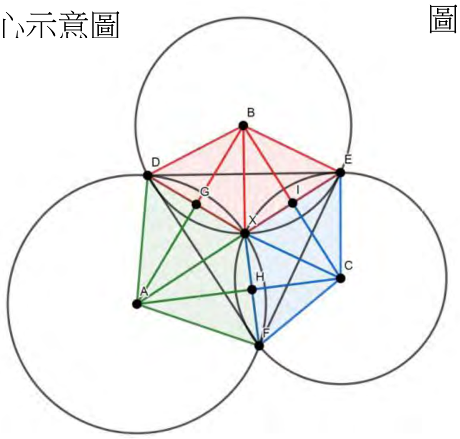


圖 14 銳角△內心換外心示意圖

證明：

1. 連接$\overline{AD}$、$\overline{AF}$(圓 A 半徑) $\overline{BD}$、$\overline{BE}$(圓 B 半徑) $\overline{CE}$、$\overline{CF}$(圓 C 半徑)

2. 在四邊形 ADBX 中

∵$\overline{AX} = \overline{AD}$(圓 A 半徑)、 $\overline{BD} = \overline{BX}$(圓 B 半徑)

∴四邊形 ADBX 為鳶形

∵鳶形對角線互相垂直

∴$\overline{DX} \perp \overline{AB}$ (同理可得$\overline{BC} \perp \overline{EX}$、$\overline{DG} \perp \overline{FX}$)

3. ∵X 為ΔABC 之內心

∴$\overline{XH}=\overline{XI}=\overline{XG}$

4. 在ΔAGX和ΔAHX

∵$\overline{XG}=\overline{XH}$ 、$\angle GAX=\angle HAX$(內心)、$\angle XHA = \angle XGA = 90^\circ$

∴$\Delta AGX \cong \Delta AHX$(AAS)(同理可得$\Delta CIX \cong \Delta CHX$、$\Delta BGX \cong \Delta BIX$)

5. ∵$\overline{DX} \perp \overline{AB}$於 G，且$\overline{DX}$為圓 A 上一弦

∴$\overline{DG}=\overline{GX}$(同理$\overline{FH}=\overline{HX}$、$\overline{EI}=\overline{IX}$)

∵$\angle DGA = \angle XGA=90^\circ$ 、$\overline{DG}=\overline{GX}$、$\overline{AX} = \overline{AD}$(圓 A 半徑)

∴$\Delta AGD \cong \Delta AGX$(AAS)

(同理$\Delta AHX \cong \Delta AHF$、$\Delta CHF \cong \Delta CHX$、$\Delta CIX \cong \Delta CIE$、$\Delta BIE \cong \Delta BIX$、$\Delta BGX \cong \Delta BGD$)

6. ∵$\overline{XH}=\overline{XI}=\overline{XG}$且$\overline{DG}=\overline{GX}$、$\overline{FH}=\overline{HX}$、$\overline{EI}=\overline{IX}$

∴$\overline{DX}=\overline{DG}+\overline{GX}=2\overline{DG}$

$\overline{EX}=\overline{EI}+\overline{IX}=2\overline{EI}$

$\overline{FX} = \overline{FH}+\overline{HX}=2\overline{FH}$

∴$\overline{DX}=\overline{EX}=\overline{FX}$

得證：$\overline{DX}=\overline{EX}=\overline{FX}$

結論：ΔABC之內心與ΔDEF之外心共點

原三角形之內心與其頂內三角形之外心共點(簡稱內換外)

研究三、原三角形之外心與其頂外三角形之垂心的換心關係

三角形的外心是三邊中垂線交點，而垂心是三角形三底邊的高的交點。此研究即探討原三角形之外心與其頂外三角形之垂心換心可能性及證明。

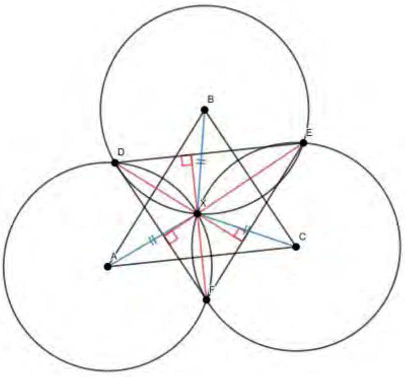


圖 15 銳角-換心

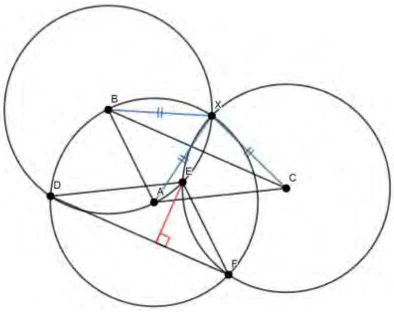


圖 16 鈍角-換心

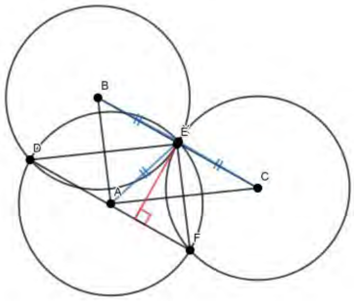


圖 17 直角-不換心

已知： X 為ΔABC 之外心、 ΔDEF 之垂心且ΔDEF為ΔABC之頂外三角形

發現： ΔABC 之外心與ΔDEF 之垂心共點

證明目標： $\overline{FL}\perp\overline{DE}$、$\overline{DJ}\perp\overline{EF}$、$\overline{EK}\perp\overline{DF}$

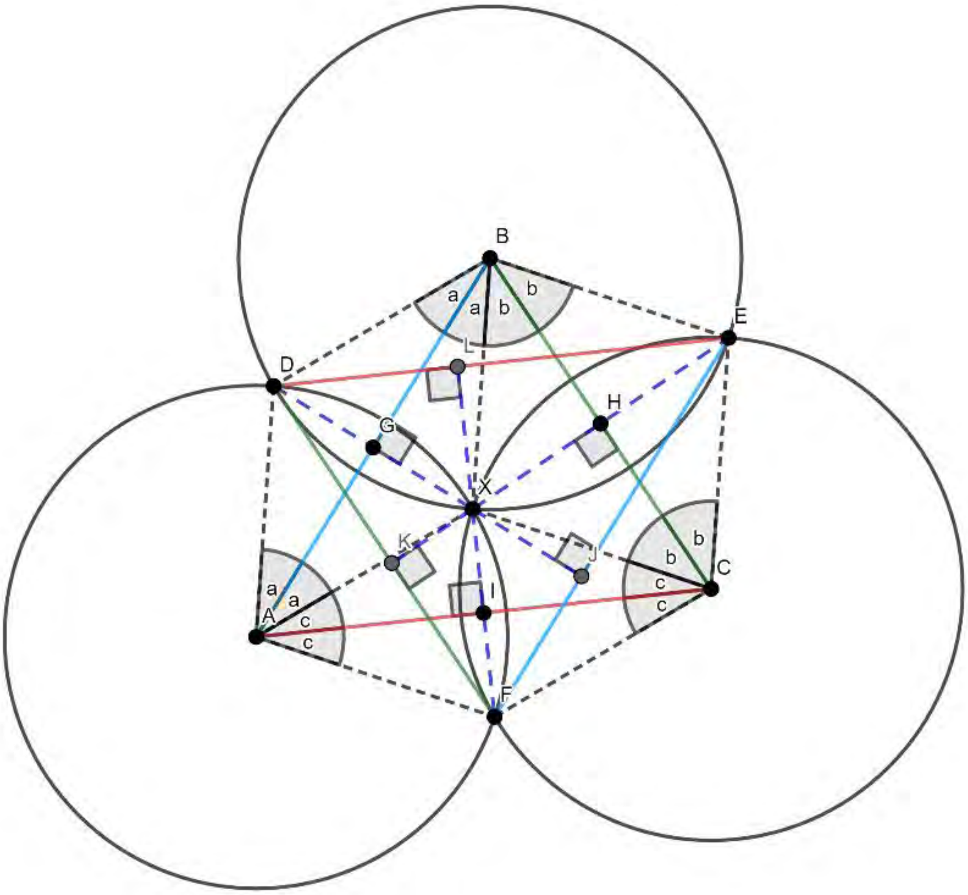


圖 18 △ABC 外心換△DEF 垂心示意圖

證明：

1. 連接$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{AF}$

2. ∵ $\overline{AB}$為圓 A、B 之連心線、$\overline{DX}$為兩圓之弦

   ∴ $\overline{AB} \perp \overline{DX}$

   (同理可證$\overline{BC} \perp \overline{EX}$、$\overline{AC} \perp \overline{FX}$)

3. ∵ $\overline{AX}$=$\overline{BX}$=$\overline{CX}$(外心到三頂點等距)

   ∴圓 A、B、C 半徑相等

4. ∵圓 A、B、C 半徑相等

   ∴ $\overline{AD}$=$\overline{BD}$=$\overline{BE}$=$\overline{CE}$=$\overline{CF}$=$\overline{AF}$

4. ∵ $\overline{AD}$=$\overline{BD}$=$\overline{BE}$=$\overline{CE}$=$\overline{CF}$=$\overline{AF}$、$\overline{AX}$=$\overline{BX}$=$\overline{CX}$且$\overline{AB} \perp \overline{DX}$、$\overline{BC} \perp \overline{EX}$、$\overline{AC} \perp \overline{FX}$

   ∴四邊形 ADBX、四邊形 BECX、四邊形 AXCF 為菱形

6. 令$\angle DBA = \angle ABX = \angle DAB = \angle BAX = a$、$\angle XBC = \angle CBE = \angle ECB = \angle BCX = b$、$\angle XCA = \angle ACF = \angle FAC = \angle CAX = c$

7. ∵ ΔABC 內角 2a+2b+2c=180，又$\angle ECA + \angle CAD$ =2a+2b+2c=180

   ∴ 四邊形 ECAD 為平行四邊形

   (同理四邊形 BEFA、四邊形 BCFD 為平行四邊形)

8. ∵ $\overline{IL}$平行四邊形 ECAD 的高且$\overline{AB} \perp \overline{DX}$

   ∴ $\overline{FL} \perp \overline{DE}$(同理$\overline{DJ} \perp \overline{EF}$、$\overline{EK} \perp \overline{DF}$)

得證：$\mathbf{\overline{FL} \perp \overline{DE}}$、$\mathbf{\overline{DJ} \perp \overline{EF}}$、$\mathbf{\overline{EK} \perp \overline{DF}}$

結論： 原三角形之外心與其頂外三角形之垂心共點(簡稱外換垂)

研究四、原三角形之尤拉線與其頂垂三角形之尤拉線探討

此研究延續研究一，除了原三角形之垂心可以共其頂垂三角形之內心外，在研究原三角形之尤拉線與其頂垂三角形之尤拉線彼此的關係時，發現兩線交於原三角形之外心，且原三角形之外心與其頂垂三角形之外心共點，以及兩三角形各頂點共六點具有共圓性質，此研究即更進階探討原三角形與其頂垂三角形之間的關係。

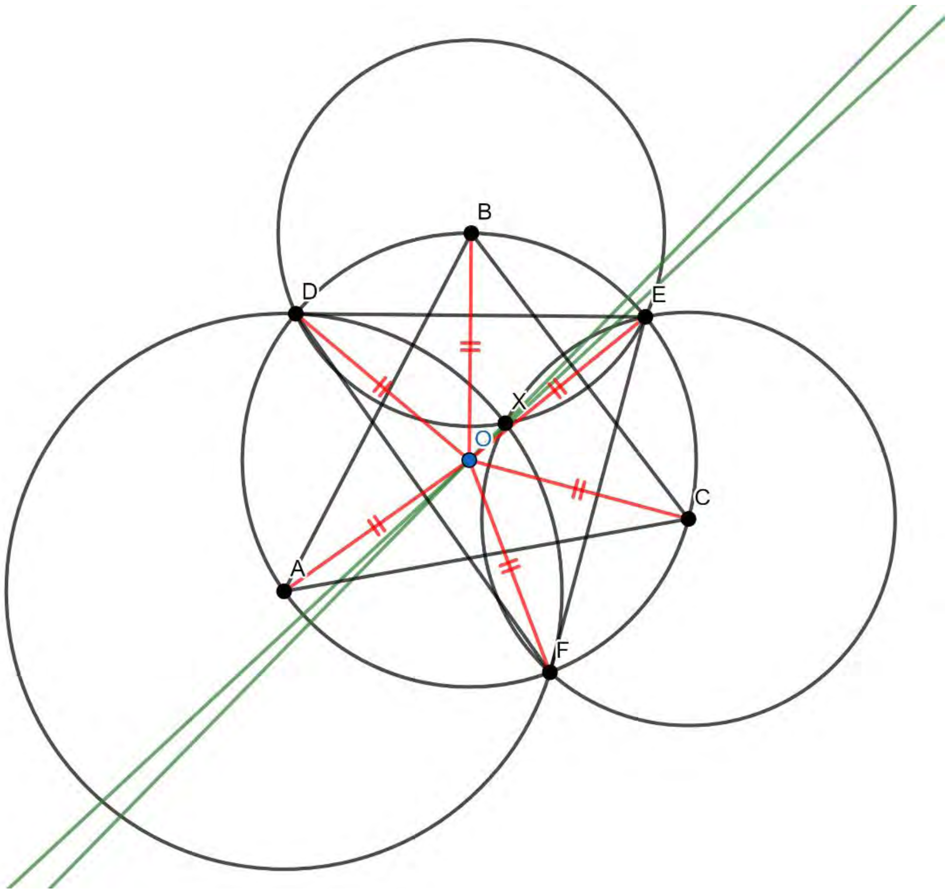


圖 19 六點共圓 & 尤拉線 關係圖

已知：(1) 點 X 同時為ΔABC之垂心、ΔDEF之內心且ΔDEF為ΔABC之頂垂三角形(研究一)

(2) 點 O 為三角形 ABC 之外心(圓 O 為三角形 ABC 之外接圓)

發現：點 A、B、C、D、E、F 共圓

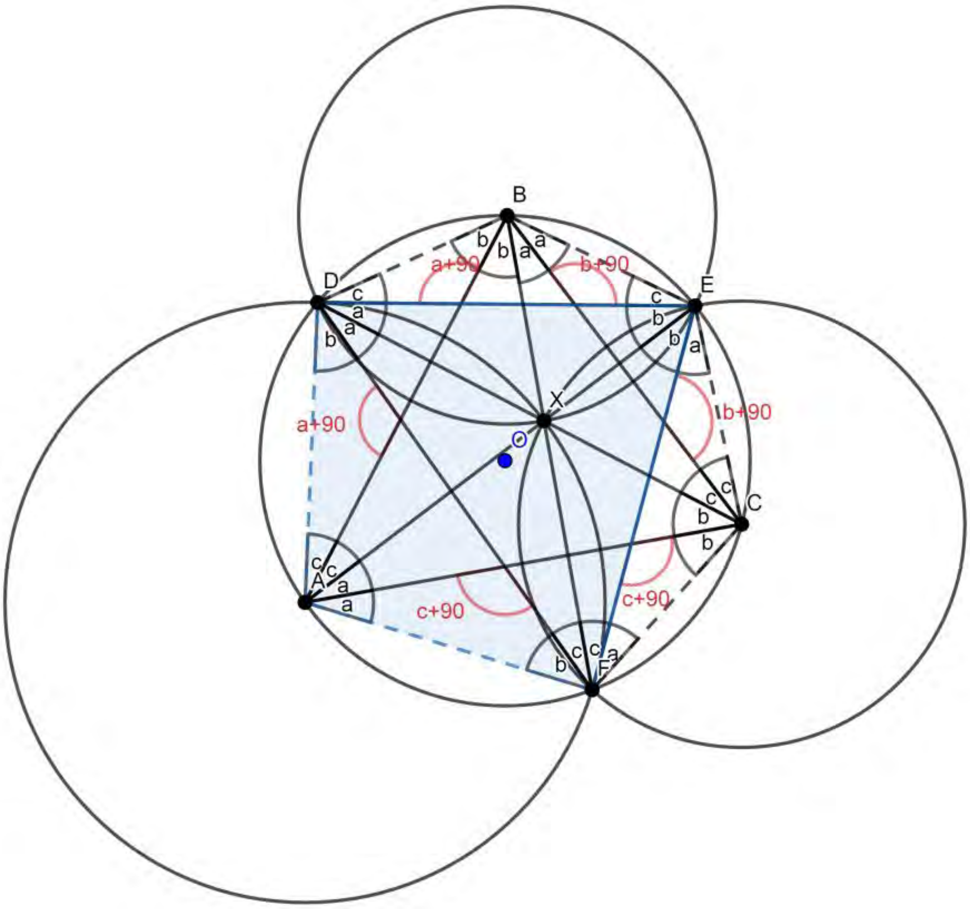


圖 20 原△與頂外△6 頂點共圓 示意圖

證明：

1. 由研究一可知，∠XBC=∠XAC=a(同理∠XBA = ∠XCA = b、∠BCX = ∠XAB = c)

2. 連接$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{AF}$、$\overline{AD}$

3. ∵ $\overline{AB}$為 A、B 兩圓之連心線、$\overline{DX}$為兩圓之弦

   ∴ $\overline{DX} \perp \overline{AB}$

   ∵ $\overline{DX} \perp \overline{AB}$、$\overline{BD}$=$\overline{BX}$(圓 B 半徑)、$\overline{AD}$=$\overline{AX}$(圓 A 半徑)

   ∴四邊形 AXBD 為菱形

4. ∵四邊形 AXBD 為菱形

   ∴ ∠DBA = ∠ABX = b(其他角同理)

5. ∵ ∠MDN + ∠DNM = ∠DMA

   ∴ ∠DMA = a + 90(其他角同理)

6. $\because \angle DMA = a + 90$、$\angle BCD = c$，又 2a+2b+2c=180

$\therefore \angle ADM = b$(其他角同理)

7…先證四邊形 ADEF 四頂點共圓:

四邊形 ADEF$\angle A + \angle D = 180$、$\angle D + \angle F = 180$

四邊形 ADEF 為圓內接四邊形

(同理可證四邊形 BDEF、CDEF)

得證：A、B、C、D、E、F 六點共圓

結論：ΔABC之三頂點 A、B、C 與ΔDEF之三頂點 D、E、F，六點共圓

原三角形之三頂點 與 其頂垂三角形之三頂點，六頂點共圓

研究五、原三角形之尤拉線與其頂內三角形之尤拉線探討

我們觀察到原三角形 ABC 之尤拉線(藍線)與頂內三角形 DGF 之尤拉線(紅線)會交於原三角形之外心 O。 X 是三角形 ABC 之內心,X 是三角形 DGF 之外心。但目前無法說明原因。

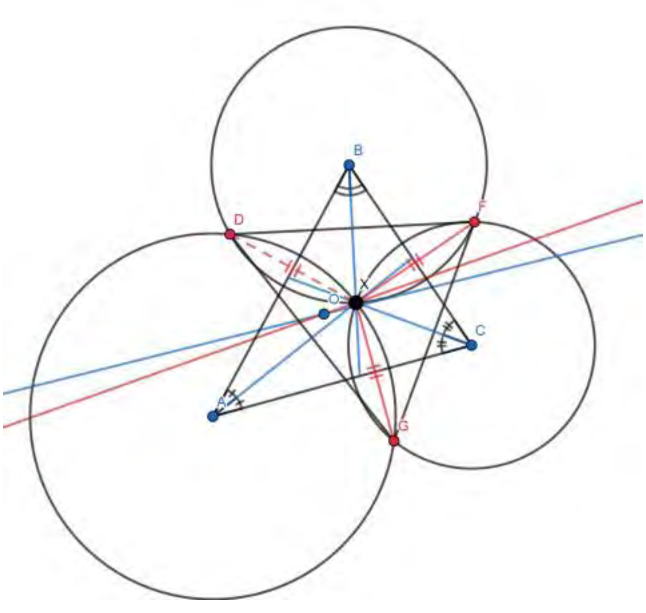


圖 21 尤拉線交於原△外心 示意圖

研究六、原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線探討

此研究延伸了研究三，我們發現其實兩三角形互為頂外三角形，此研究即探討「互為頂外三角形」的性質。另外尤拉線為三角形外心、垂心、重心連線。

已知：X 為ΔABC之外心，ΔDEF為ΔABC之頂外三角形

發現：ΔABC 與ΔDEF兩三角形之尤拉線共線

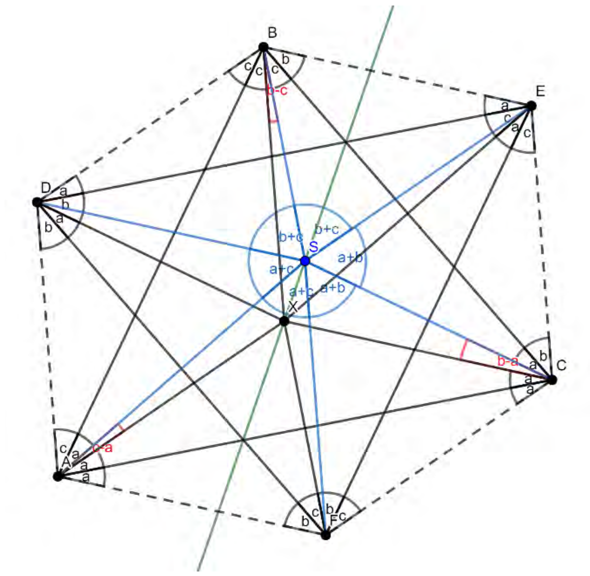


圖 22 原三角形與其頂外三角形彼此尤拉線共線

證明：

1. 如圖 20 ∵X 為ΔABC之外心
2. ∴ $\overline{XD} \perp \overline{AB}$、$\overline{XE} \perp \overline{BC}$、$\overline{XF} \perp \overline{AC}$

   ∠XDA=∠XDB=a+b

   ∠XEB=∠XEC=a+c

   ∠XFC=∠XFA=b+c
3. ∵ABEF、BCFD、ACED 為平行四邊形
4. ∴$\angle ADE = a + 2b$、$\angle AFE = 2b + c$、$\angle BDF = 2a + b$

   $\angle BEF = 2a + c$、$\angle CED = a + 2c$、$\angle CFD = b + 2c$

$\angle BEF = 2a + c$、$\angle CED = a + 2c$、$\angle CFD = b + 2c$

5. $\therefore \angle XEF = \angle BED = \angle BDE = \angle XDF = a$

$\angle XDE = \angle ADF = \angle AFD = \angle XFE = b$

$\angle XED = \angle AFE = \angle AEF = \angle XFD = c$

6. ∵S 為ΔDEF之外心

∴ $\overline{DX}=\overline{EX}=\overline{FX}$

7. ∵四邊形 DBES、ECFS、FADS 皆為箏形

∴ $\overline{BS} \perp \overline{DE}$、$\overline{CS} \perp \overline{FE}$、$\overline{AS} \perp \overline{DF}$

8. ∠SBC=c、∠SBX=b-c

∠BCS=a、∠SCX=b-a

∠SAB=a、∠SAX=c-a

9. ∵四邊形 DBES、ECFS、FADS 皆為箏形

∴ ∠DSB=∠BSE=b+c、∠ESC=∠CSF=a+b、∠DSA=∠ASF=a+c

10. 由(8)可知，ΔBGD≅ ΔDGS

得$\overline{BD} = \overline{SD}$

11. 其他邊同理可證

12. ∵X 點同時為ΔABC之外心、ΔDEF之垂心。P 點同時為ΔABC之垂心、ΔDEF之外心。(上述結論)

∴ ΔABC之尤拉線與ΔDEF之尤拉線皆為 XP 直線

得證：ΔABC與ΔDEF兩三角形之尤拉線共線

結論 :原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線共線

研究七、四邊形與其頂內四邊形之研究

此研究延伸了研究二，研究二的結論為「原三角形之內心與其頂內三角形之外心共點」，

我們發現此性質不僅適用於三角形，連頂外 N 邊形皆適用此性質。

此研究即為把研究二發現之結論推廣至多邊形。

已知： 點 X 同時為 ABCD之內心、EFGH 之外心，且 ABCD 為 EFGH 之頂內三角形

發現： 四邊形 ABCD 之內心與其頂內四邊形 GHJI之外心共點

證明目標為： $\overline{EX}=\overline{FX}=\overline{GX}=\overline{HX}$

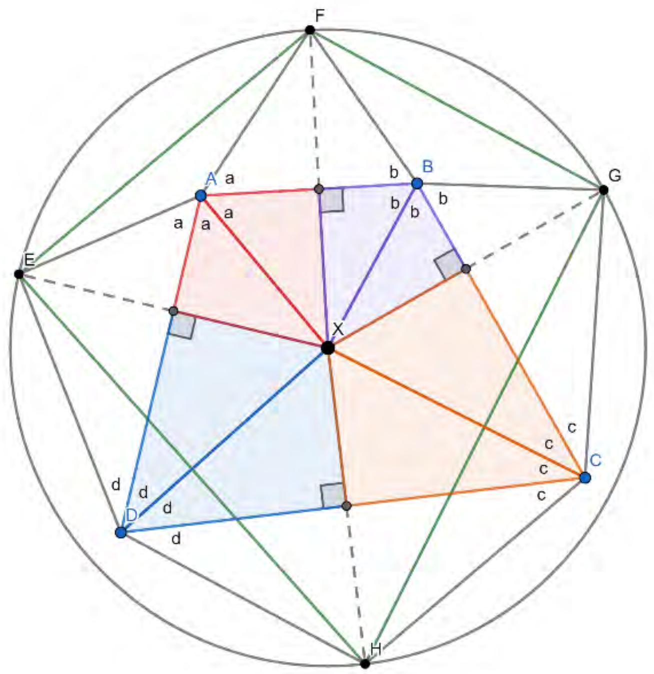


圖 23　頂內四邊形

證明：

1. 連接$\overline{AE}$、$\overline{AF}$(圓 A 半徑) $\overline{BF}$、$\overline{BG}$(圓 B 半徑) $\overline{CG}$、$\overline{CH}$ (圓 C 半徑) $\overline{DE}$ 、$\overline{DH}$ (圓 D 半徑)

2. 在四邊形 AEDX 中

∵$\overline{AE}=\overline{AX}$(圓 A 半徑) $\overline{DE}=\overline{DX}$(圓 D 半徑)

∴四邊形 AEDX 為鳶形

∵鳶形對角線互相垂直

∴$\overline{EX} \perp \overline{AD}$(同理可得$\overline{AB} \perp \overline{FX}$、$\overline{BC} \perp \overline{GX}$、$\overline{CD} \perp \overline{HX}$)

3. ∵X 為四邊形 ABCD 之內心

∴X 到四邊形 ABCD各邊距離皆相等

4. 任一對相同顏色之三角形，互相全等(AAS)

5. X 到四邊形 ABCD各邊距離，為相鄰兩異色三角形之共用邊

6. ∵四邊形 AFBX、四邊形 BGCX、四邊形 CHDX、四邊形 AEDX 為鳶形

∴X 到四邊形 ABCD各邊距離為$\overline{EX}$、$\overline{FX}$、$\overline{GX}$、$\overline{HX}$的 0.5 倍

∵X 到四邊形 ABCD各邊距離皆相等

∴$\overline{EX} = \overline{FX} = \overline{GX} = \overline{HX}$

得證： X 為四邊形 EFGH之外心

結論： 4 組全等三角形與共用邊(原四邊形內切圓半徑)，證明原四邊形之內心 X 到其頂內四邊形的各頂點距離皆為共用邊之兩倍距(原四邊形內切圓直徑)，因此點 X 為其頂內四邊形之外心。

研究八、頂內、外、垂三角形之逆推可能性

本報告之研究方向為從原三角形出發研究頂垂三角形、頂內三角形及頂外三角形相關性質，在完成八個研究，我們便想，有沒有辦法能再從頂垂三角形、頂內三角形及頂外三角形逆推回原三角形，經過反覆思考及驗證，我們終於找出了辦法。

已知：X 為三角形內定點(圖為頂垂、內、外三角形)

發現：頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形可逆推回原三角形

證明目標：求出 A、B、C

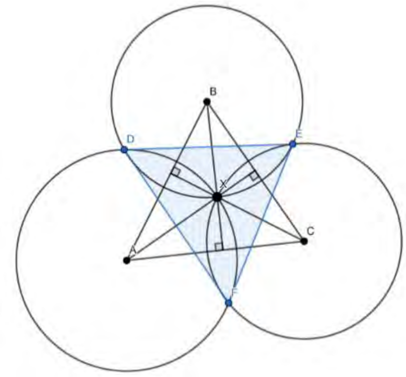


圖 24 頂垂三角形

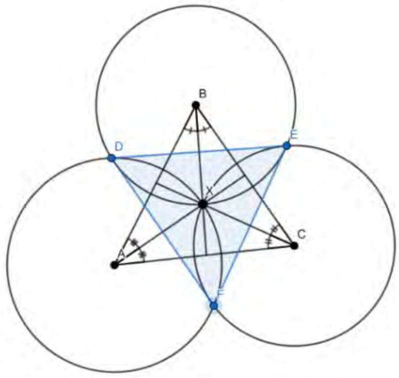


圖 25 頂內三角形

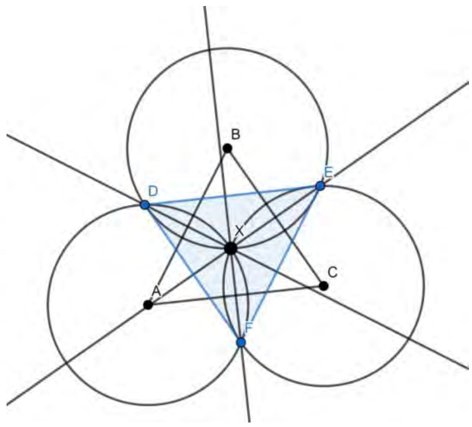


圖 26 頂外三角形

證明：

1. ∵DXE 共圓 B、EXF 共圓 C、DXF 共圓 A

   ∴必有$\overline{BD}=\overline{BX}=\overline{BE}$、$\overline{CE}=\overline{CX}$=$\overline{CF}$、$\overline{AD}=\overline{AX}=\overline{AF}$

2. 欲使$\overline{BD}=\overline{BX}$，則 B 必在 D、X 之中垂線上
3. 欲使$\overline{BX}=\overline{BE}$，則 B 必在 E、X 之中垂線上
4. 綜合 3.4. ，可知 B 在 D、X 之中垂線與 E、X 之中垂線的交點上
5. A 點、C 點同理
6. 可求出唯一點 A、B、C

得證：求出定點 A、B、C

結論：頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形可藉由連接三頂點至三角形內定點，並將三線段分別作中垂線，最後把三條中垂線交點相連來求出唯一的原三角形。即可逆推回原三角形

陸、研究結果與討論

一、三角換心關係之討論

我們把:

研究一、原三角形與其頂垂三角形之換心關係

研究二、原三角形與其頂內三角形之換心關係

研究三、原三角形與其頂外三角形之換心關係

以上三個研究的結果串起來，竟然發現下列有趣的三角關係：

1. 頂垂三角形擁有「垂換內」性質
2. 頂內三角形擁有「內換外」性質
3. 頂外三角形擁有「外換垂」性質

此三心的關係，彼此之間可以循環互換。

圖 27 換心關係三角關係圖

二、尤拉線交點之討論

當我們連接:

研究五、原三角形與其頂垂三角形進階探討(尤拉線探討)

研究六、原三角形與其頂內三角形之尤拉線探討

研究七、原三角形與其頂外三角形之尤拉線共線

以上研究的結果時會發現 :

因尤拉線共線，故為兩線有無限多個交點，外心即為共線交點之一。

所以原三角形與其頂垂三角形之兩組尤拉線交點、原三角形與其頂內三角形之兩組尤拉線交點、原三角形與其頂外三角形之兩組尤拉線交點皆交於原三角形的外心。

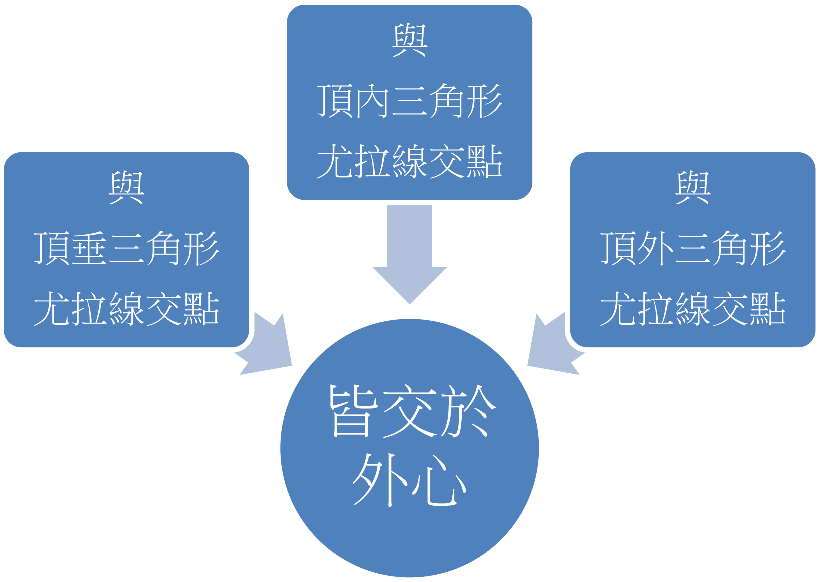


圖 28 頂垂頂外頂內△尤拉線與外心關係圖

三、推廣至多邊形與其頂內、外、垂多邊形之可能性討論

我們在研究二發現了「內換外」的性質，所以嘗試從頂內三角形推廣至頂內四邊形，在研究八中也同樣得到「內換外」的性質，所以嘗試從頂內三角形推廣至頂內多邊形，並且得到觀察到一個有趣的現象－－－多邊形之內心與其頂內多邊形之外心共點

例一：

下圖為頂內五邊形：點 X 為五邊形 ABCDE 之內心，其頂內五邊形 FGHIJ 之外心，可見保留了「內換外」的性質。

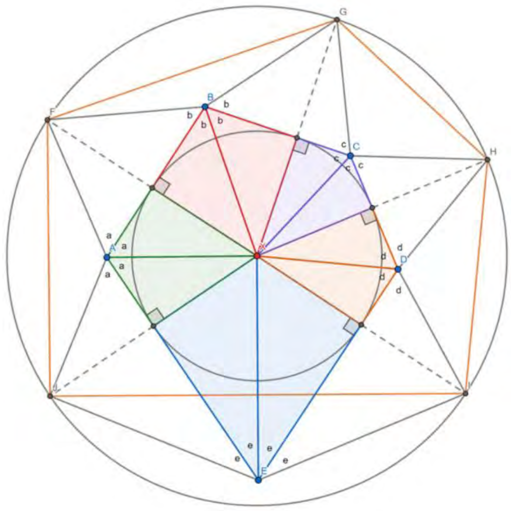


圖 29 頂內五邊形

例二：

下圖為頂內六邊形，點 X 為六邊形 ABCDEF 之內心，其頂內六邊形 GHIJKL 之外心，同樣保留了「內換外」的性質。

根據研究二的頂內三角形、研究八的頂內四邊形及討論一的頂內五邊形、頂內六邊形，可推導至頂內七、八、九……N 邊形時，皆保留「內換外」的性質。

其證明原理，是利用多組**全等三角形**與**共用邊**(共用原多邊形內切圓半徑，證明出原多邊形之內心 X 到其頂內多邊形的各頂點之距離，皆為**共用邊之兩倍距**，因此 X 為其頂內多邊形之外心。

此特性並無法推廣至頂外多邊形與頂垂多邊形，是因為頂外三角形與頂垂三角形之換心關係皆牽扯到垂心，但是多邊形並無垂心可言，所以無法推廣至多邊形。

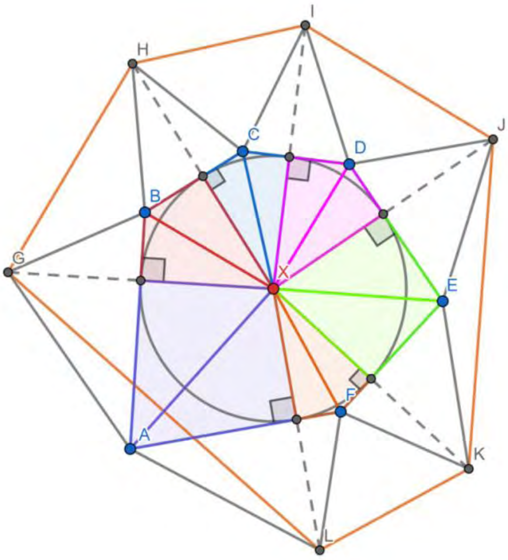


圖 30 頂內六邊形

四、頂重三角形、頂旁三角形與作圖過程簡化之討論

我們在報告中討論到頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形，並研究出有換心的性質。

而五心之中還有重心、旁心，因此加入討論 ：

頂重三角形、頂旁三角形之可逆性

依「研究九、頂內、外、垂三角形之逆推可能性」之逆推法，可由已知頂重三角形、頂旁三角形回推回原三角形。

另外值得一提的是:一個三角形有三個旁心，究竟三個旁心形成的三個頂旁三角形是否有其特殊性質，我們也極為感興趣，盼在國展前能研究出來。

在觀察頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形、頂重三角形、頂旁三角形之可逆性

時，發現之前的作圖方法可簡化為：

將垂心、內心、外心、重心、旁心以原三角形的三邊為對稱軸，得三個對稱點，連線即為其頂垂、內、外、重、旁三角形， 可說是”心”的發現，能大幅降低作圖步驟與時間。

原作圖法作圖步驟較為詳細，有輔助證明的作用，可說是各有所長。

五、原三角形、頂垂三角形、頂內三角形之相似關係

延續研究一、研究二，我們試著把三種三角形(原三角形、頂垂三角形、頂內三角形)放在同一平面上觀察，此研究即探討原三角形與其頂垂三角形之頂內三角形的相似關係。

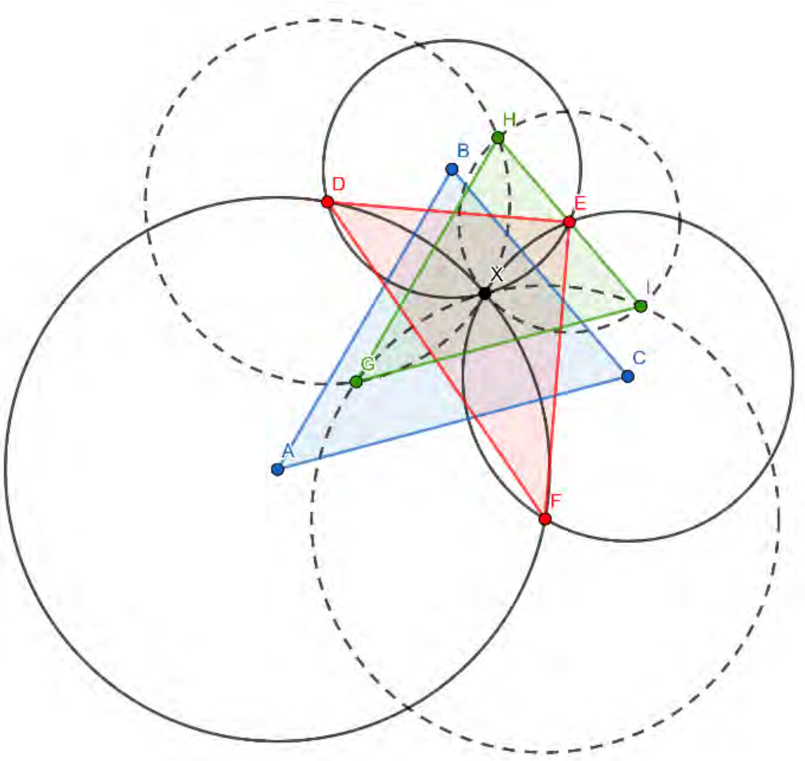


圖 31 ΔDEF為ΔABC之頂垂三角形，ΔGHI為ΔDEF之頂內三角形

已知：X 為ΔABC之垂心、ΔDEF之內心、ΔGHI之外心且ΔDEF為ΔABC之頂垂三角形、ΔGHI為ΔDEF之頂內三角形

發現： ΔABC與ΔGHI相似

證明目標：$\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta GHI}$

證明: :

(一)討論ΔABC及ΔEFG的角度

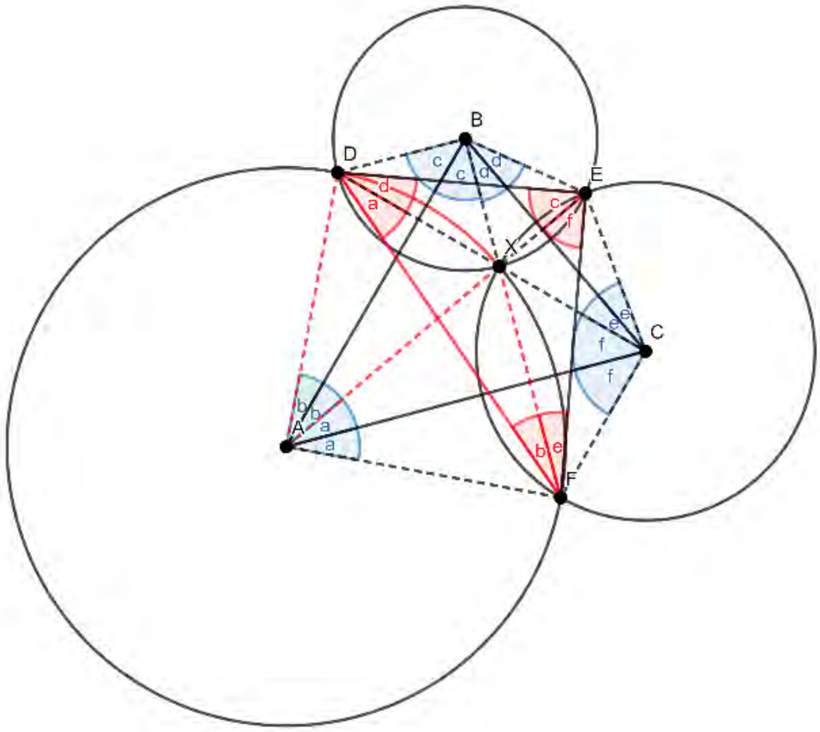


圖 32 **ΔABC及ΔEFG** 角度關係

1. 連接$\overline{AX}$、$\overline{BX}$、$\overline{CX}$

令∠CAX 為 a、∠XAB 為 b、∠ABX 為 c、∠XBC 為 d、∠BCX 為 e、∠XCA 為 f

2. 連接$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{EC}$、$\overline{CF}$、$\overline{AF}$

3. ∵ $\overline{AD}=\overline{AX}$(圓 A 半徑)、$\overline{BD}=\overline{BX}$(圓 B 半徑)

∴四邊形 ADBX 為箏形

∵四邊形 ADBX 為箏形，又$\overline{AB}$是其對角線

$\therefore \angle FAC = \angle CAX = a$ (同理$\angle XAB = \angle BAD = b$、$\angle DBA = \angle ABX = c$、

$\angle XBC = \angle CBE = d$、$\angle ECB = \angle BCX = e$、$\angle XCA = \angle ACF = f$)

4. $\because \angle DAX = 2b =$ 弧 DX(圓 C)

$\therefore \angle DFX = \frac{1}{2}$弧 DX(圓 A) $= b$

(同理$\angle FDX = a$、$\angle XDE = d$、$\angle DEX = c$、$\angle XEF = f$、$\angle EFX = e$)

(二) 討論ΔEFG及ΔGHI的角度

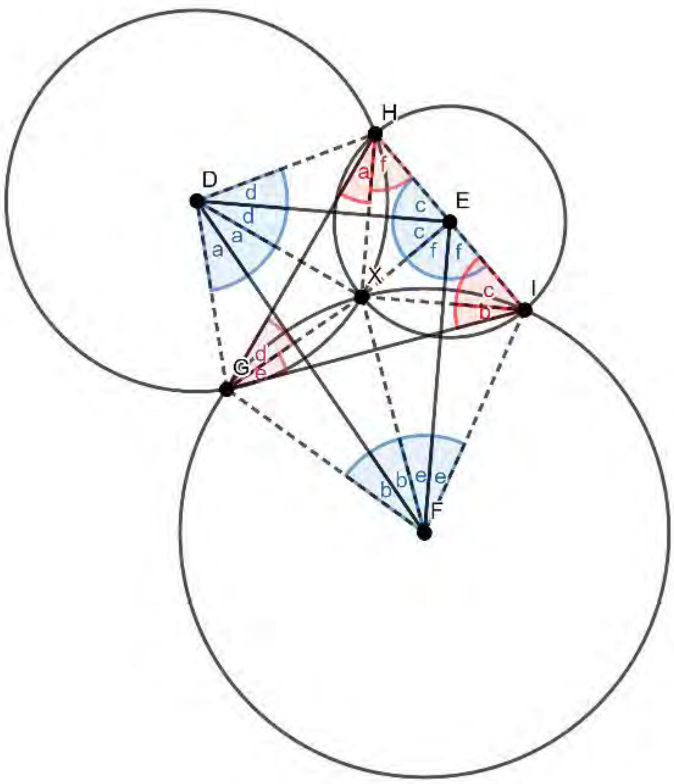


圖 33 **ΔEFG及ΔGHI** 角度關係

5. 連接$\overline{DX}$、$\overline{EX}$、$\overline{FX}$，由(4)可知

   $\angle FDX = a$、$\angle DAX = b$、$\angle DEX = c$、$\angle XDE = d$、$\angle EFX = e$、$\angle XEF = f$

6. 連接$\overline{DG}$、$\overline{GF}$、$\overline{FI}$、$\overline{IE}$、$\overline{EH}$、$\overline{HD}$

7. 與(3)同理，$\angle GDF = \angle FDX = a$、$\angle XDE = \angle EDH = d$、$\angle HED = \angle DEX = c$、 $\angle XEF = \angle FEI = f$、$\angle IFE = \angle EFX = e$、$\angle XFD = \angle DFG = b$

8. 與(4)同理，$\angle GHX = a$、$\angle XHI = f$、$\angle HIX = c$、$\angle XIG = b$、$\angle IGX = e$、$\angle XGH = d$

9. ∵ X 為ΔDEF 的內心

   ∴$b=e$、$a=d$、$c=f$

10. ΔABC 中，$\angle A = a+b$、$\angle B = c + d$、$\angle C = e + f$

    ΔGHI中，$\angle G = e + d$、$\angle H = a + f$、$\angle I = b + c$

    ∵ 由(9)可知$b=e$、$a=d$、$c=f$

    ∴ $\angle G = a + b = \angle A$、$\angle H = c + d = \angle B$、$\angle I = e + f = \angle C$

得證： ΔABC~ΔGHI(AA 相似)

結論 ：原三角形與其頂垂三角形的頂外三角形為相似三角形

柒、結論

在經過對三角形的換心性質的一番研究之後，得到以下結論:

一、三角形與其頂內三角形的關係：

(一) 原三角形之內心與其頂內三角形之外心共點

(二) 原三角形之尤拉線與其頂內三角形之尤拉線交於原三角形之外心

(三)當有已知頂內三角形時，可利用研究九的回推方法，得到原三角形

二、三角形與其頂外三角形的關係：

(一) 原三角形之外心與其頂外三角形之垂心共點

(二) 原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線共線

(三) 原三角形與其頂外三角形互為頂外三角形

(四) 當有已知頂外三角形時，可利用研究九的回推方法，得到原三角形

三、三角形與其頂垂三角形的關係：

(一) 原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心共點

(二) 原三角形之外心與其頂垂三角形之外心共點

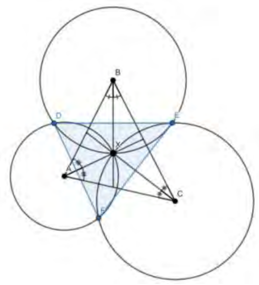
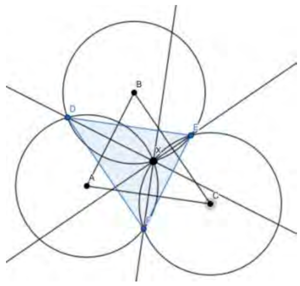
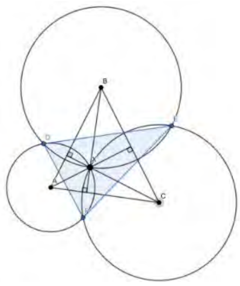
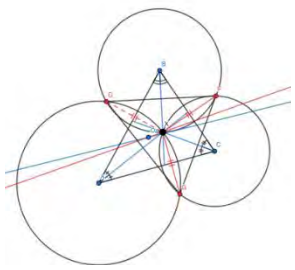
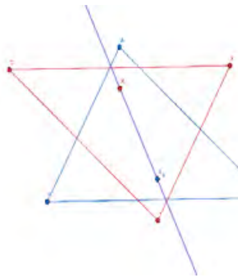
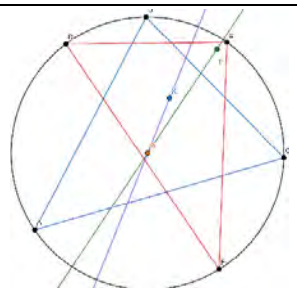
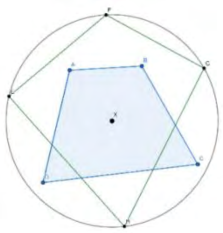
(三) 原三角形之外心與其頂垂三角形之外心共點

(四) 當有已知頂垂三角形時，可利用研究九的回推方法，得到原三角形

四、多邊形與其頂內多邊形的關係

(一) 原 N 邊形之內心與其頂內 N 邊形之外心共點

五、N 邊形換心關係整理

	頂內三角形	頂外三角形	頂垂三角形
換心關係	內換外	外換垂	垂換內
			
可逆性	可	可	可
尤拉線交點	原三角形之外心	原三角形之外心(共線)	原三角形之外心(外換外)
			
N 邊形性質	內換外	無	無
		+	

(一) 尤拉線交點必交於原三角形之外心　　　(二) 皆有可逆性

(三) 頂內、頂外、頂垂三角形有三角互換關係

七、研究發展心智圖

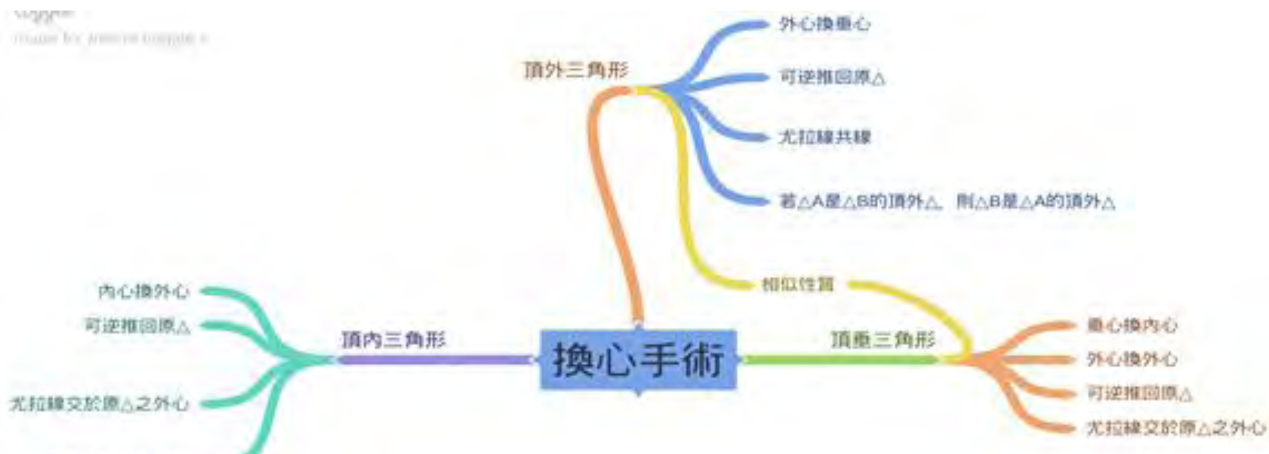


圖 34 「換心手術」報告心智圖

捌、應用發展

本研究發現許多共點共線的現象，期盼未來在工程建設、建築設計、機械構造以及藝術創造與虛擬空間的視覺設計上，提供更具價值的發想。

例一：用於無線通訊基地台建置分布

設 A、B、C 為無線通訊基地台，圓 A、B、C 為其各自訊號範圍，點 X 為人口最稠密之精華市區，也是 A、B、C 三基地台範圍交疊處，信號最強，而 D、E、F 點為其次，兩兩基地台範圍重和處，信號佳。

以我們發現的換心性質為基礎，便可以依照每個地區人口密度、繁榮程度來決定須以幾座基地台範圍重和，進而調整基地台位置，達到最經濟最有效率的。

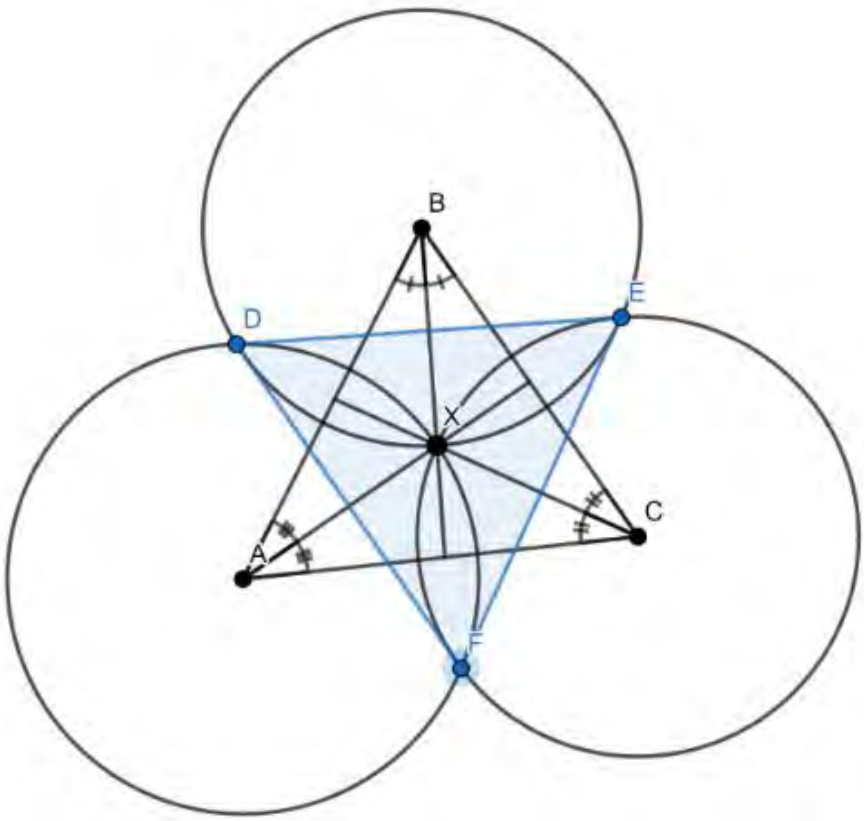


圖 35 無線通訊基地台分布圖

例三：工廠生產線流程優化設計——利用頂內 N 多邊形內心換外心性質

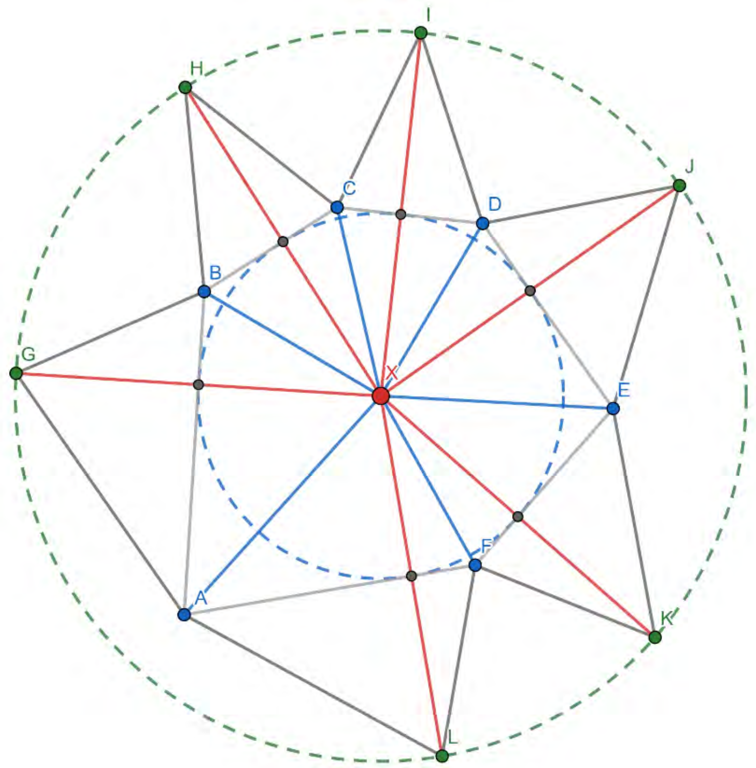


圖 36 頂內 6 邊形內心換外心圖

點 G、H、I、J、K、L 為工廠原料倉庫，點 A、B、C、D、E、F 為初級組裝廠，將原料送至點 A、B、C、D、E、F 組裝為半成品。

待各半成品組裝完成，再將送至中心總組裝點 X 總裝。

因任初級組裝廠與供應原料的倉庫及到中心總裝場距離皆相等，如: H 到 C、I 到 C、C 到 X 等距，如此可有效縮短運輸時間，達到效率提升。

另點 X 為總裝處，將成品輸出與包材 A 等距的包裝處，同時點 X 亦可為行政監管處，可透過示意圖中紅線來直達倉庫進行監控，因所有紅線等距，對倉儲的管控最有效率。

優點 1. 倉庫到監管處等距，可花相同時間到達

優點 2. 任兩相鄰倉庫至對應組裝廠距離相等，可同步配合

優點 3. 組裝廠至總裝處也等距，可同步配合倉庫與組裝廠

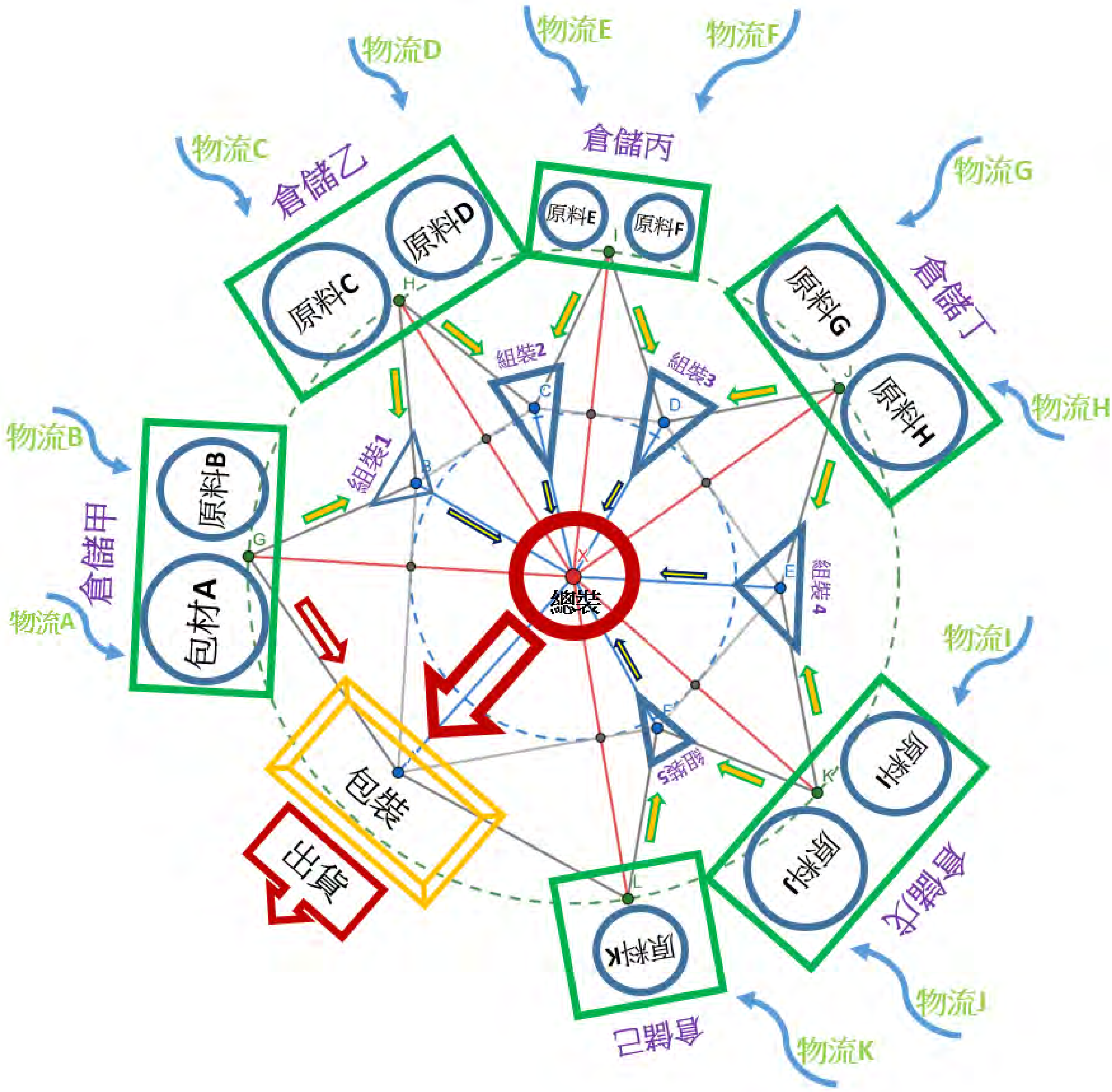


圖 38 工業頂內多邊形生產線 示意圖

玖、未來展望

本研究發現三角形與多邊形許多有趣的換心現象，而下列是我們很感興趣的延伸方向，目前研究在持續的進行中

一、 能更深入研究三角形與其頂垂三角形之換心關係，受到角度限制之原因。

二、 更深入研究頂垂三角形與尤拉線的關係，並試圖發展找出延伸性性質。

拾、參考資料

一、黃文禮，幾何明珠，九章出版社。

二、中華民國第 56 屆中小學科學展覽會--圓內接多邊形與其頂外多邊形之探討

【評語】030402

考慮以三角形的頂點為圓心，各頂點到內部一特定點（垂心、內心或外心）的距離為半徑畫圓，圓與圓的交點（扣除所選之特定點）連線所成之新三角形（作者稱之為頂垂、頂內、頂外三角形）與圓三角形的五心的關連性。針對心的互換性、共線性做了一些討論。心與心的互換性質是具有美感的一項迷人的特性。作者們注意到原三角形與頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形的心與心之間有著奇妙的關連,針對這些性質做了討論與分析。解說非常的詳盡，值得鼓勵。有部分的論述稍嫌繁瑣了些，如果可以寫的更精簡，作品看起來會更清楚，也更具可讀性。在多邊形內部取一個點，考慮以各頂點為圓心，各頂點到此點的距離為半徑畫圓，考慮這些圓的交點所成的新多邊形與原多邊形的關連性問題（像是頂重多邊形、頂圓多邊形等內容），在之前曾經被許多人討論過，有不少的結果與作者們討論的問題是相關的。選取垂心、內心或外心這些點會有什麼更特別、有別於選取任意點的更為有趣的性質？或許在參考這些相關作品的內容後可以有更多更不同的想法。

作品海報

摘　要

本研究從「中華民國第56屆中小學科學展覽會-圓內接多邊形與其頂外多邊形之探討」閱讀到的「頂外三角形」、我們延伸的「頂內三角形」、「頂垂三角形」以及尤拉線，這四個主題出發，試圖串連這四個主題，讓「頂外三角形」不再孤單。

本研究除了探討頂內三角形之外心、頂外三角形之垂心、頂垂三角形之內心與原三角形之內心、外心、垂心共點問題外，更進一步研究頂內三角形之尤拉線、頂外三角形之尤拉線、頂垂三角形之尤拉線與原三角心尤拉線彼此間的關係。研究有更驚人的發現： 頂垂三角形之三頂點與原三角形之三頂點六點共圓，並且頂內三角形、頂外三角形、頂垂三角形之尤拉線必與原三角形之尤拉線交於原三角形之外心。

研究目的

(一)、原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心的換心關係
(二)、原三角形之內心與其頂內三角形之外心的換心關係
(三)、原三角形之外心與其頂外三角形之垂心的換心關係
(四)、頂垂三角形、頂外三角形之相似關係
(五)、原三角形之尤拉線與其頂垂三角形之尤拉線探討
(六)、原三角形之尤拉線與其頂內三角形之尤拉線探討
(七)、原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線探討
(八)、四邊形與其頂內四邊形之研究
(九)、頂內三角形、頂外三角形、頂垂三角形之逆推可能性

研究過程與方法

研究一、原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心的換心關係

原銳角三角形ABC之垂心與其頂垂三角形EFG之內心共點(如圖一)

證明目標∠FDX = ∠XDE、∠DEX = ∠XEF、∠EFX = ∠XFD

證明:

(1)∵∠BXH=∠AXG(對頂角)、∠BHX=∠AGX=90 ∴△BHX~△AGX(AA相似)

(2)∵$\overline{AX}$=$\overline{AF}$(圓A半徑)、$\overline{XF}$為圓A之弦∴▵AXF為等腰三角形

令∠HBX=∠GAX=a°

∵連心線$\overline{AC}$為∠FAX之角平分線∴∠GAX=∠GAF=a°∠FAX=∠GAX+∠GAF=2a°

(同理可證，∠XBE=2a°)

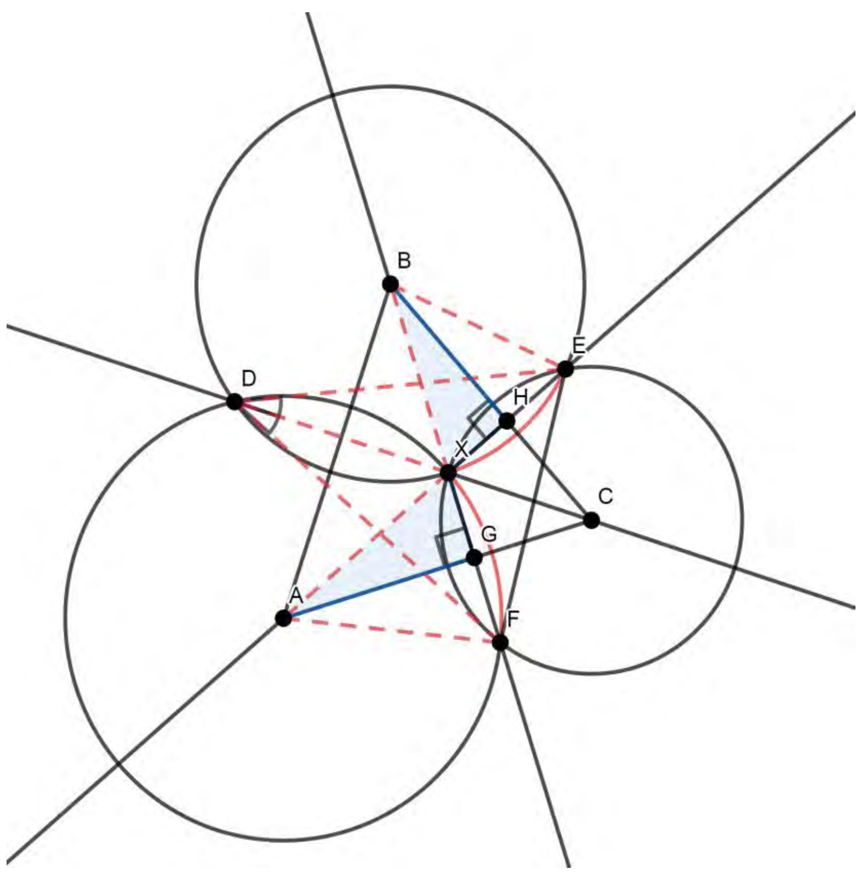
(3)∵∠FAX=∠XBE=2a° ∴弧EX=弧FX=2a°

(4)∵∠XDE為之圓周角且∠XDF為之圓周角 ∴∠XDE=∠XDF=$\frac{2a°}{2}$=a°

由4.可知，$\overline{DX}$為∠EDF之角平分線(同理$\overline{EX}$、$\overline{FX}$分別為∠DEF、∠EFD之角平分線)

得證: ∠FDX = ∠XDE、∠DEX = ∠XEF、∠EFX = ∠XFD

結論：銳角▵ABC之垂心與其頂垂▵DEF之內心共點



圖一

研究二、原三角形之內心與其頂內三角形之外心的換心關係

原銳角三角形ABC之內心與其頂內三角形DEF之外心共點(如圖二)

證明目標 : DX=EX=FX

證明:

(1)連接$\overline{AD}$、$\overline{AF}$(圓A半徑) $\overline{BD}$、$\overline{BE}$(圓B半徑) $\overline{CE}$、$\overline{CF}$(圓C半徑)

(2)在四邊形ADBX中

∵$\overline{AX}$ = $\overline{AD}$(圓A半徑)、 $\overline{BD}$ = $\overline{BX}$(圓B半徑) ∴四邊形ADBX為鳶形

∵鳶形對角線互相垂直 ∴$\overline{DX}$ ⊥ $\overline{AB}$ (同理可得$\overline{BC}$ ⊥ $\overline{EX}$、$\overline{DG}$ ⊥ $\overline{FX}$)

(3)∵X為▵ABC之內心 ∴$\overline{XH}$=$\overline{XI}$=$\overline{XG}$

(4)在▵AGX和▵AHX

∵$\overline{XG}$=$\overline{XH}$、∠GAX=∠HAX(內心)、∠XHA = ∠XGA = 90°

∴▵AGX ≅▵AHX(AAS)(同理可得▵CIX ≅▵CHX、▵BGX ≅▵BIX)

(5)∵$\overline{DX}$ ⊥ $\overline{AB}$於G，且$\overline{DX}$為圓A上一弦 ∴$\overline{DG}$=$\overline{GX}$(同理$\overline{FH}$=$\overline{HX}$、$\overline{EI}$=$\overline{IX}$)

∵∠DGA = ∠XGA=90°、$\overline{DG}$=$\overline{GX}$、$\overline{AX}$ = $\overline{AD}$(圓A半徑) ∴▵AGD ≅▵AGX(AAS)

(同理▵AHX ≅▵AHF、▵CHF ≅▵CHX、▵CIX ≅▵CIE、▵BGX ≅▵BGD)

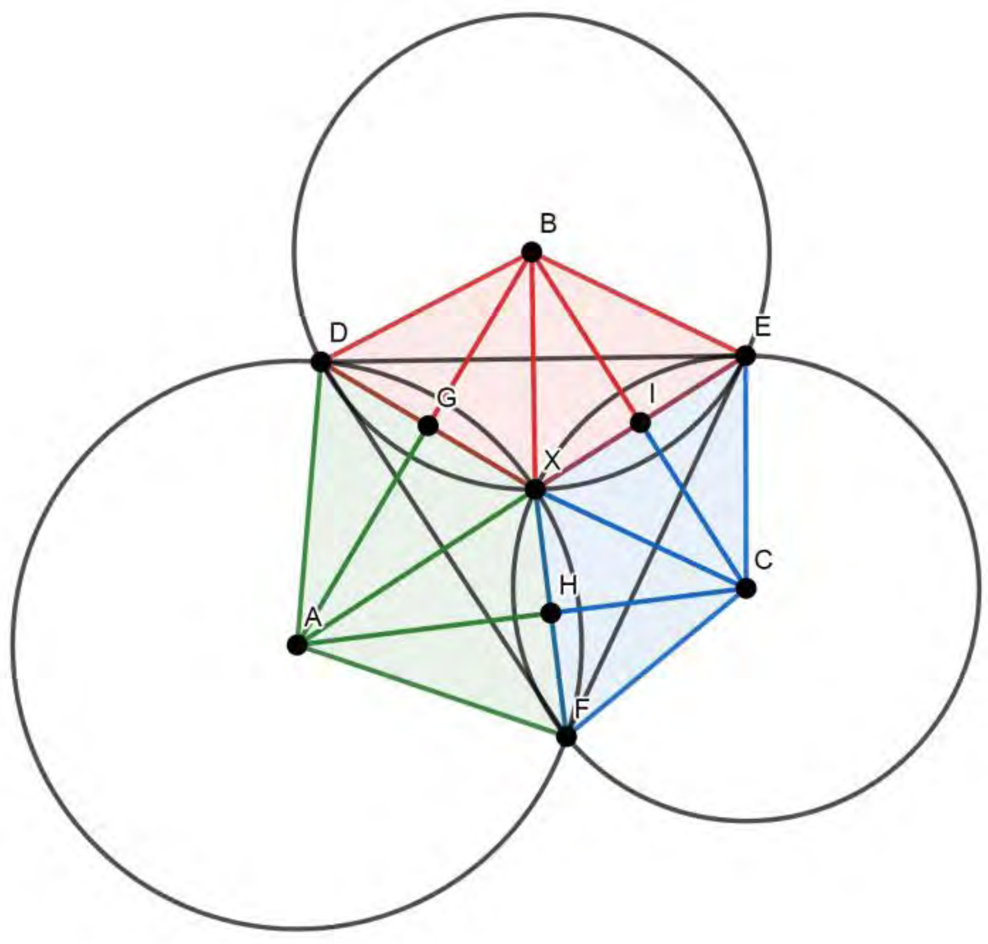
(6)∵$\overline{XH}$=$\overline{XI}$=$\overline{XG}$且$\overline{DG}$=$\overline{GX}$、$\overline{FH}$=$\overline{HX}$、$\overline{EI}$=$\overline{IX}$

∴$\overline{DX}$=$\overline{DG}$+$\overline{GX}$=2$\overline{DG}$、$\overline{EX}$=$\overline{EI}$+$\overline{IX}$=2$\overline{EI}$、$\overline{FX}$ = $\overline{FH}$+$\overline{HX}$=2$\overline{FH}$

得證 : $\overline{DX}$=$\overline{EX}$=$\overline{FX}$

結論 :△ ABC之內心與△ DEF之外心共點

原三角形之內心與其頂內三角形之外心共點(稱內換外)



圖二

研究三、原三角形之外心與其頂外三角形之垂心的換心關係

原銳角三角形ABC之垂心與其頂垂三角形DEF之內心共點(如圖三)

證明目標 : FL ⊥ DE、DJ ⊥ EF、EK ⊥ DF

證明 :

(1) 連接$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{AF}$

(2) ∵$\overline{AB}$為圓A、B之連心線、$\overline{DX}$為兩圓之弦 ∴$\overline{AB}$ ⊥ $\overline{DX}$

(同理可證$\overline{BC}$ ⊥ $\overline{EX}$、$\overline{AC}$ ⊥ $\overline{FX}$)

(3) ∵$\overline{AX}$=$\overline{BX}$=$\overline{CX}$(外心到三頂點等距) ∴圓A、B、C半徑相等

(4) ∵圓A、B、C半徑相等 ∴ $\overline{AD}$=$\overline{BD}$=$\overline{BE}$=$\overline{CE}$=$\overline{CF}$=$\overline{AF}$

(5) ∵$\overline{AD}$=$\overline{BD}$=$\overline{BE}$=$\overline{CE}$=$\overline{CF}$=$\overline{AF}$、$\overline{AX}$=$\overline{BX}$=$\overline{CX}$且$\overline{AB}$ ⊥ $\overline{DX}$、$\overline{BC}$ ⊥ $\overline{EX}$、$\overline{AC}$ ⊥ $\overline{FX}$

∴四邊形ADBX、四邊形BECX、四邊形AXCF為菱形

(6) 令∠DBA = ∠ABX = ∠DAB = ∠BAX = a、∠XBC = ∠CBE = ∠ECB = ∠BCX = b、∠XCA = ∠ACF = ∠FAC = ∠CAX = c

(7) ∵ ▵ABC內角2a+2b+2c=180，又∠ECA + ∠CAD =2a+2b+2c=180

∴四邊形ECAD為平行四邊形

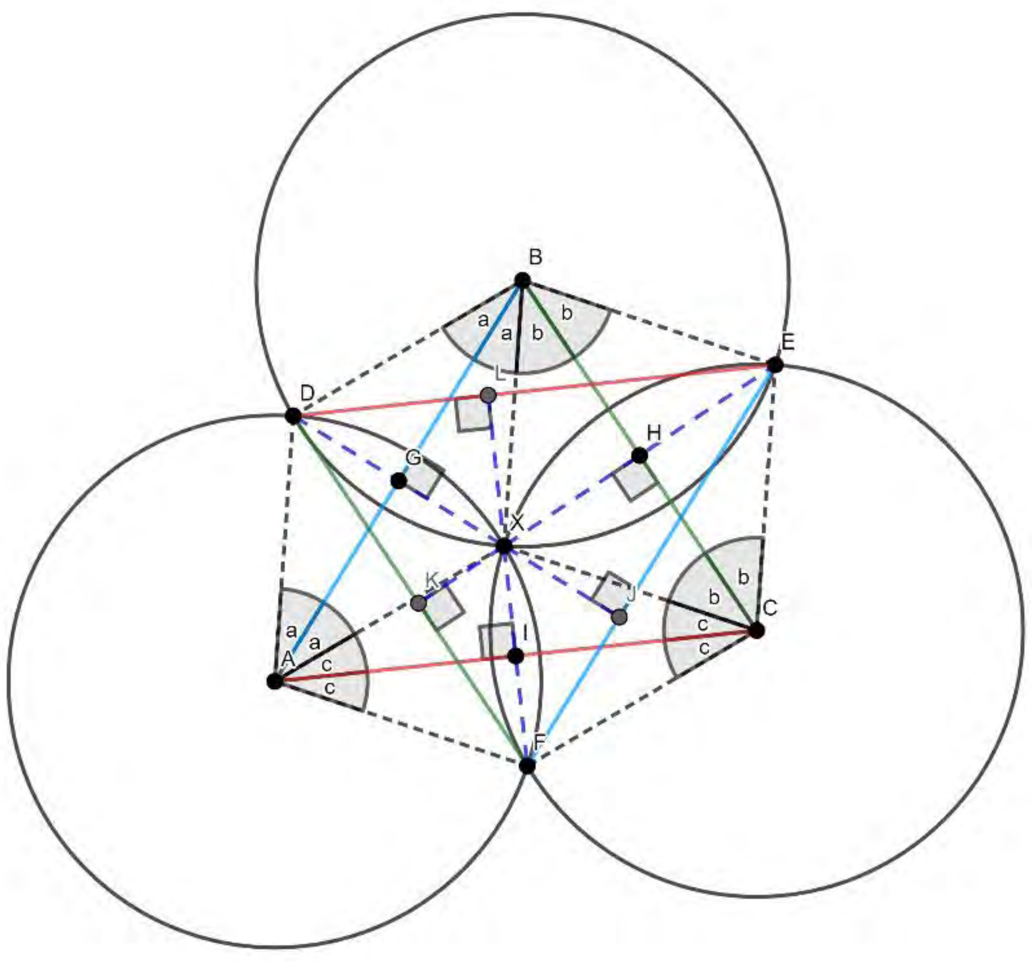
(同理四邊形BEFA、四邊形BCFD為平行四邊形)

(8) ∵ $\overline{IL}$平行四邊形ECAD的高且$\overline{AB}$ ⊥ $\overline{DX}$ ∴$\overline{FL}$ ⊥ $\overline{DE}$

(同理$\overline{DJ}$ ⊥ $\overline{EF}$、$\overline{EK}$ ⊥ $\overline{DF}$)

得證 : FL ⊥ DE、DJ ⊥ EF、EK ⊥ DF

結論： 原三角形之外心與其頂外三角形之垂心共點(稱外換垂)


圖三

研究四、原三角形之尤拉線與其頂垂三角形之尤拉線探討

原銳角三角形ABC與其頂垂三角形EFG之六頂點共圓(如圖四)

證明目標：點A、B、C、D、E、F共圓

證明：

(1) 由研究一可知，$\angle XBC=\angle XAC=a$ (同理$\angle XBA=\angle XCA=b$、$\angle BCX=\angle XAB=c$)

(2) 連接$\overline{BD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CE}$、$\overline{CF}$、$\overline{AF}$、$\overline{AD}$

(3) ∵$\overline{AB}$為A、B兩圓之連心線、$\overline{DX}$為兩圓之弦 ∴$\overline{DX}\perp\overline{AB}$

∵$\overline{DX}\perp\overline{AB}$、$\overline{BD}=\overline{BX}$(圓B半徑)、$\overline{AD}=\overline{AX}$(圓A半徑) ∴四邊形AXBD為菱形

(4) ∵四邊形AXBD為菱形 ∴$\angle DBA=\angle ABX=b$(其他角同理)

(5) ∵$\angle MDN+\angle DNM=\angle DMA$ ∴$\angle DMA=a+90$(其他角同理)

(6) ∵$\angle DMA=a+90$、$\angle BCD=c$，又$2a+2b+2c=180$ ∴$\angle ADM=b$(其他角同理)

(7) 先證四邊形ADEF四頂點共圓:

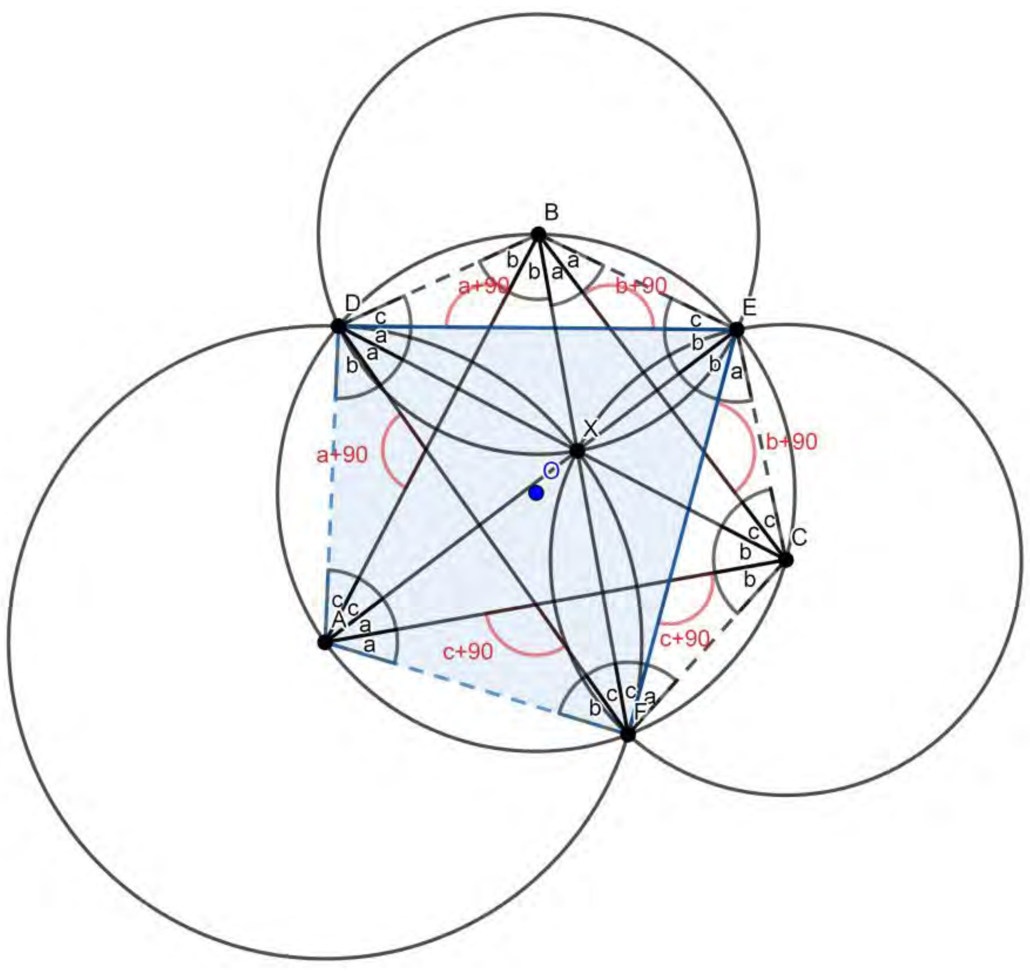
∵四邊形ADEF$\angle A+\angle D=180$、$\angle D+\angle F=180$ ∴四邊形ADEF為圓內接四邊形

(同理可證四邊形BDEF、CDEF)

得證：A、B、C、D、E、F六點共圓

結論：△ABC之三頂點A、B、C與△DEF之三頂點D、E、F，六點共圓

原三角形之三頂點 與 其頂垂三角形之三頂點，六頂點共圓



圖四

研究五、原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線探討

原三角形ABC之尤拉線與其頂外三角形DEF之尤拉線共線(如圖五)

已知：X為ΔABC之外心，ΔDEF為ΔABC之頂外三角形

發現：ΔABC與ΔDEF兩三角形之尤拉線共線

證明：

(1) 如圖20 ∵X為ΔABC之外心

(2) ∴$\overline{XD}\perp\overline{AB}$、$\overline{XE}\perp\overline{BC}$、$\overline{XF}\perp\overline{AC}$

$\angle XDA=\angle XDB=a+b$

$\angle XEB=\angle XEC=a+c$

$\angle XFC=\angle XFA=b+c$

(3) ∵ABEF、BCFD、ACED為平行四邊形

∴$\angle ADE=a+2b$、$\angle AFE=2b+c$、$\angle BDF=2a+b$

$\angle BEF=2a+c$、$\angle CED=a+2c$、$\angle CFD=b+2c$

(4) ∴$\angle XEF=\angle BED=\angle BDE=\angle XDF=a$

$\angle XDE=\angle ADF=\angle AFD=\angle XFE=b$

$\angle XED=\angle AFE=\angle AEF=\angle XFD=c$

(5) ∵S為ΔDEF之外心 ∴$\overline{DX}=\overline{EX}=\overline{FX}$

(6) ∵四邊形DBES、ECFS、FADS皆為箏形

∴$\overline{BS}\perp\overline{DE}$、$\overline{CS}\perp\overline{FE}$、$\overline{AS}\perp\overline{DF}$

(7)$\angle SBC=c$、$\angle SBX=b-c$

$\angle BCS=a$、$\angle SCX=b-a$

$\angle SAB=a$、$\angle SAX=c-a$

(8) ∵ 四邊形DBES、ECFS、FADS皆為箏形

∴$\angle DSB=\angle BSE=b+c$、$\angle ESC=\angle CSF=a+b$、$\angle DSA=\angle ASF=a+c$

(9) 由(8)可知，ΔBGD≅ ΔDGS

得$\overline{BD}=\overline{SD}$

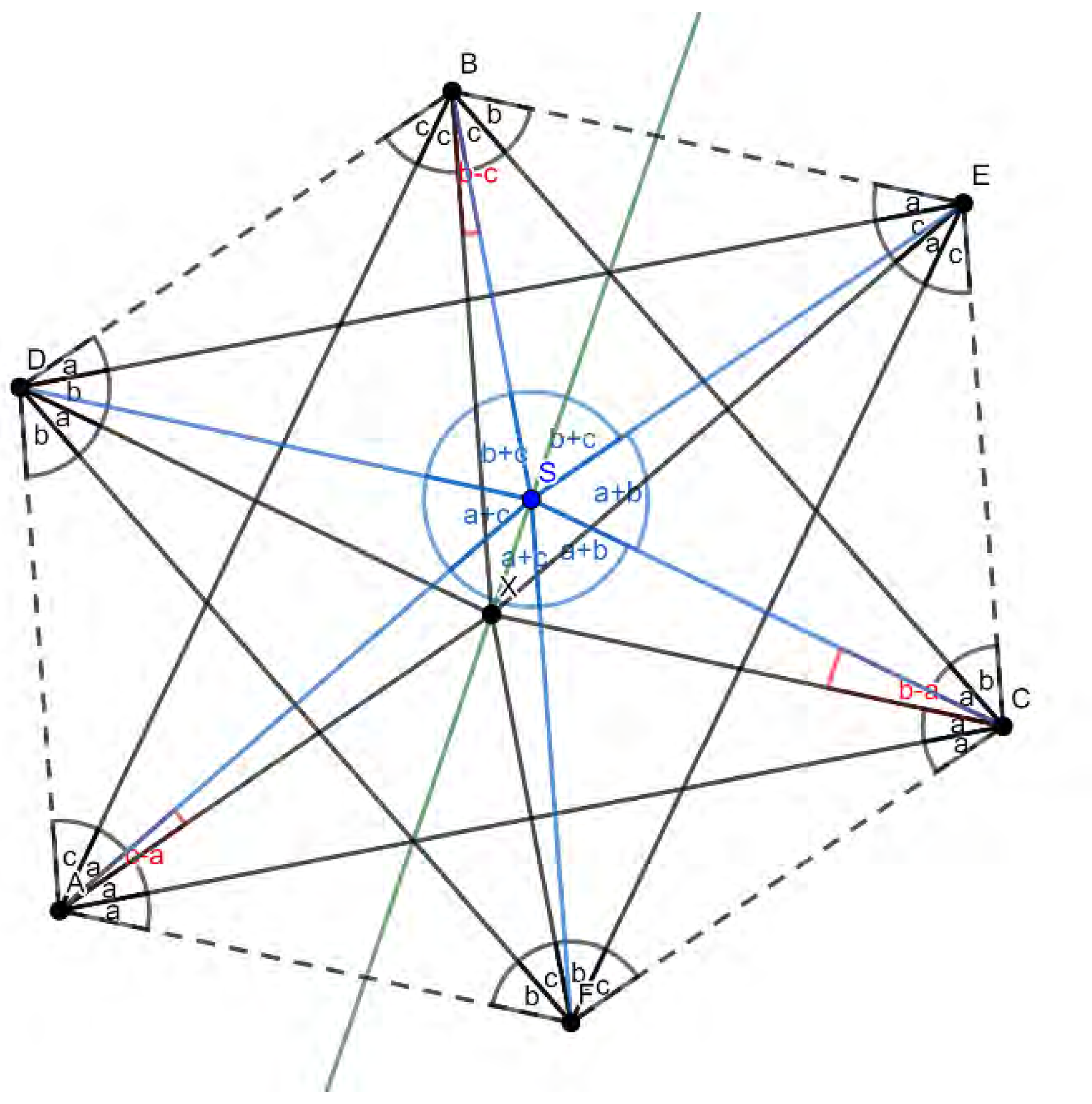
(10) 其他邊同理可證

(11) ∵X點同時為ΔABC之外心、ΔDEF之垂心。P點同時為ΔABC之垂心、ΔDEF之外心。(上述結論)

∴ΔABC之尤拉線與ΔDEF之尤拉線皆為XP直線

得證: ΔABC與ΔDEF兩三角形之尤拉線共線

結論:原三角形與其頂外三角形之尤拉線共線



圖五

研究六、四邊形與其頂內四邊形之研究

圓四邊形ABCD之內心與其頂內四邊形EFGH之外心共點(如圖六)

證明目標為：$\overline{EX}=\overline{FX}=\overline{GX}=\overline{FX}$

證明：

(1) 連接$\overline{AE}$、$\overline{AF}$(圓A半徑) $\overline{BF}$、$\overline{BG}$(圓B半徑) $\overline{CG}$、$\overline{CH}$ (圓C半徑) $\overline{DE}$、$\overline{DH}$ (圓D半徑)

(2) 在四邊形AEDX中

∵$\overline{AE}=\overline{AX}$(圓A半徑) $\overline{DE}=\overline{DX}$(圓D半徑) ∴四邊形AEDX為鳶形

∵鳶形對角線互相垂直 ∴$\overline{EX}\perp\overline{AD}$(同理可得$\overline{AB}\perp\overline{FX}$、$\overline{BC}\perp\overline{GX}$、$\overline{CD}\perp\overline{HX}$)

(3) ∵X為四邊形ABCD之內心 ∴X到四邊形ABCD各邊距離皆相等

(4) 任一對相同顏色之三角形，互相全等(AAS)

(5) X到四邊形ABCD各邊距離，為相鄰兩異色三角形之共用邊

(6) ∵四邊形AFBX、四邊形BGCX、四邊形CHDX、四邊形AEDX為鳶形

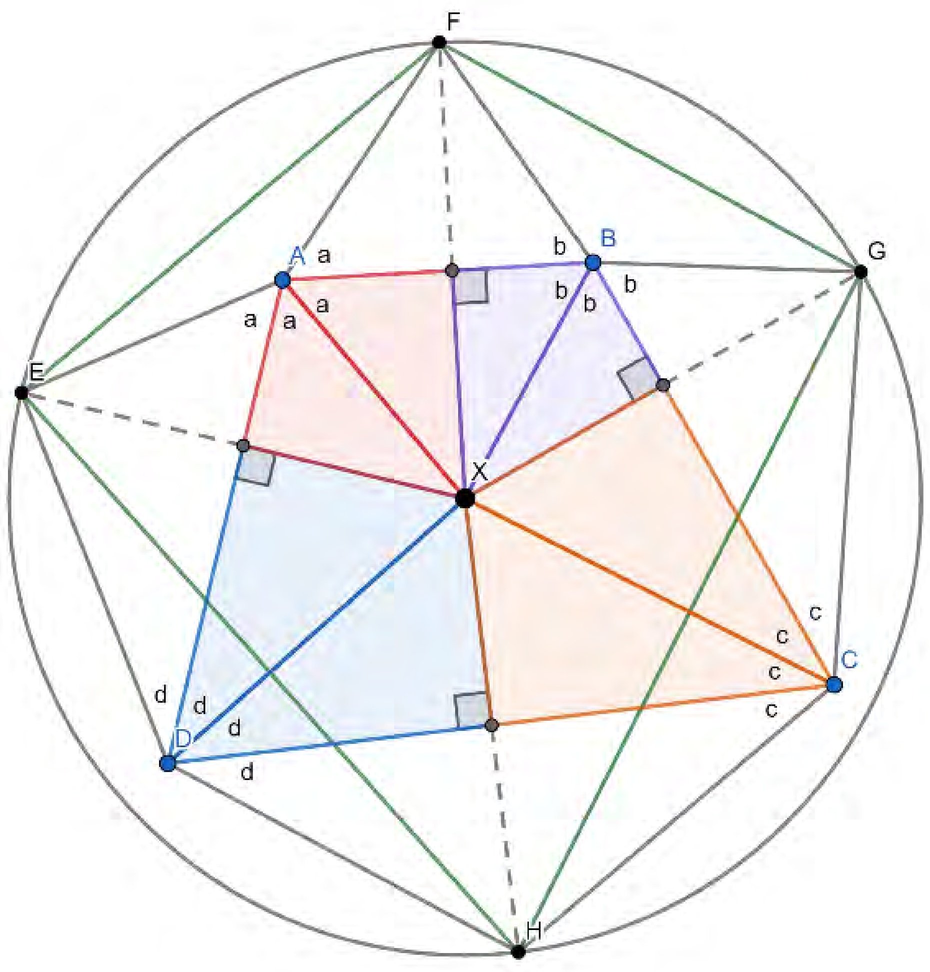
∴X到四邊形ABCD各邊距離為$\overline{EX}$、$\overline{FX}$、$\overline{GX}$ 、$\overline{HX}$的0.5倍

∵X到四邊形ABCD各邊距離皆相等

∴$\overline{EX}=\overline{FX}=\overline{GX}=\overline{HX}$

得證：X為四邊形EFGH之外心

結論：4組全等三角形與共用邊(原四邊形內切圓半徑)，證明原四邊形之內心X到其頂內四邊形的各頂點距離皆為共用邊之兩倍距(原四邊形內切圓直徑)，因此點X為其頂內四邊形之外心。



圖六

研究七、頂心三角形之逆推可能性

頂心三角形EFG三頂點至X點做三線段後做其中垂線，其交點相連即為原三角形(如圖七

證明目標：求出A、B、C

證明:

(1) ∵DXE共圓B、EXF共圓C、DXF共圓A

∴必有$\overline{BD}=\overline{BX}=\overline{BE}$、$\overline{CE}=\overline{CX}=\overline{CF}$、$\overline{AD}=\overline{AX}=\overline{AF}$

(2) 欲使$\overline{BD}=\overline{BX}$，則B必在D、X之中垂線上

(3) 欲使$\overline{BX}=\overline{BE}$，則B必在E、X之中垂線上

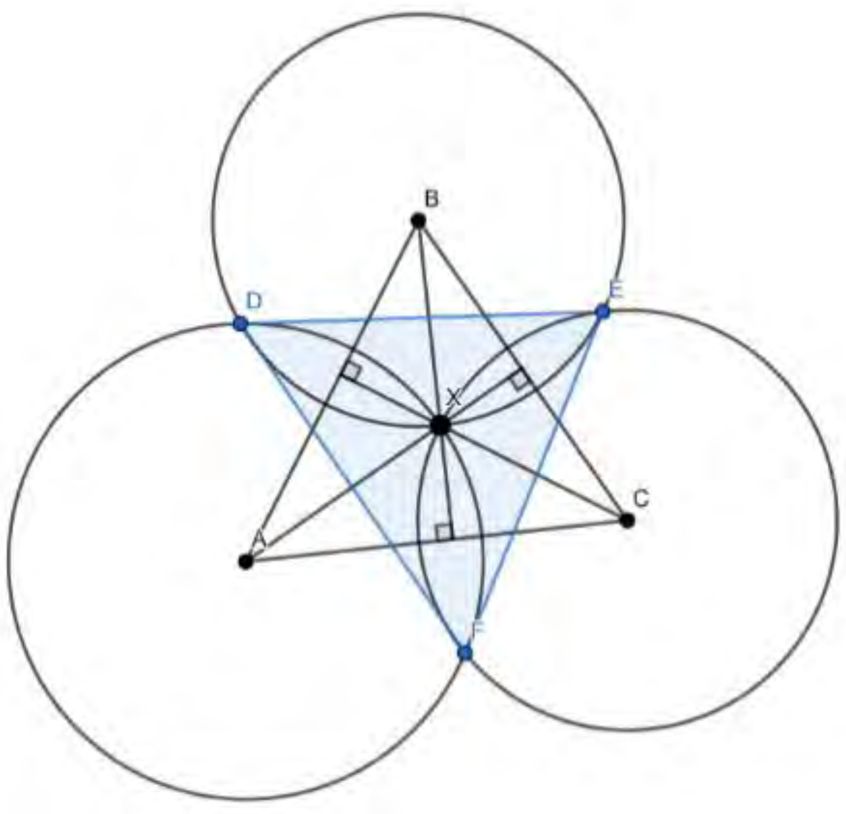
(4) 綜合3.4. ，可知B在D、X之中垂線與E、X之中垂線的交點上

(5) A點、C點同理

(6) 可求出唯一點A、B、C

得證：求出定點A、B、C

結論：頂心三角形可藉由連接三頂點至三角形內定點，並將三線段分別作中垂線，最後把三條中垂線交點相連來求出唯一的原三角形。即可逆推回原三角形。

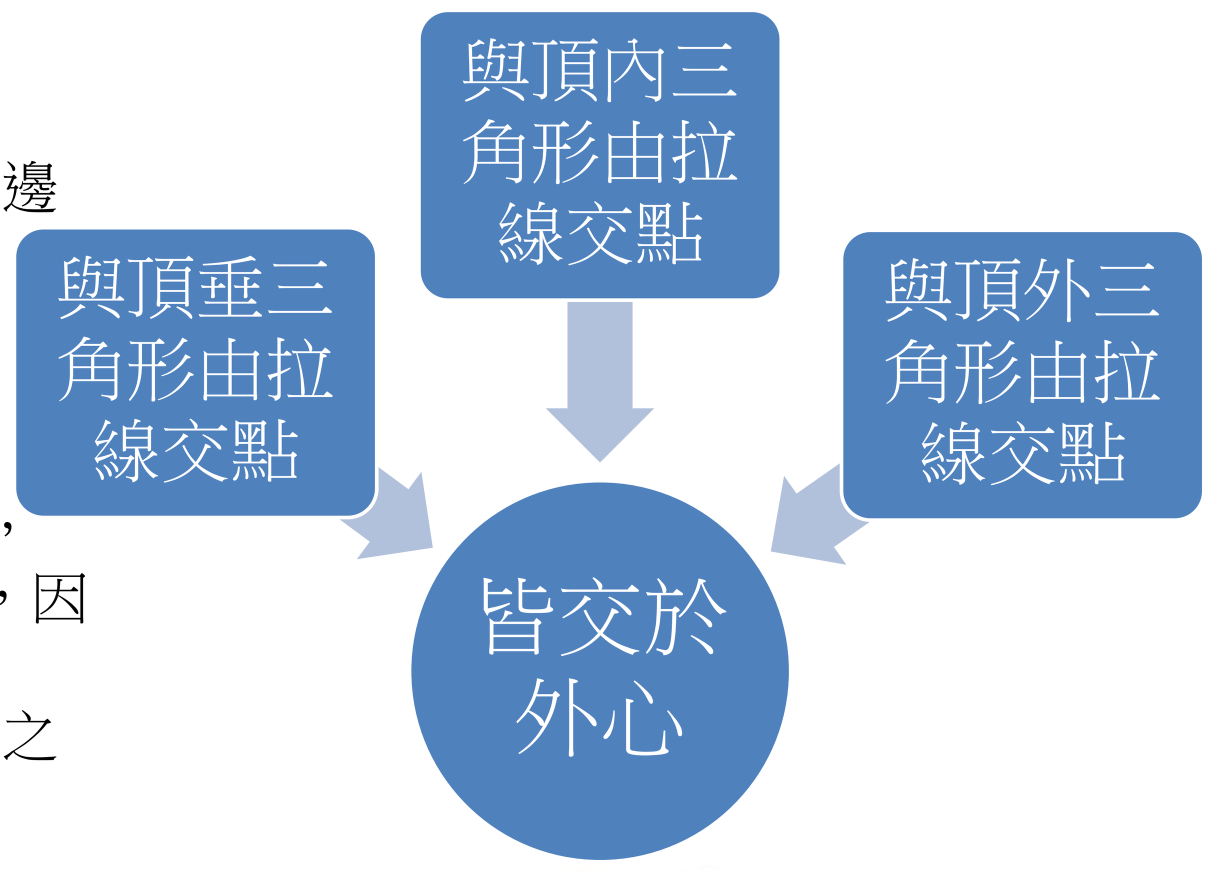


圖七

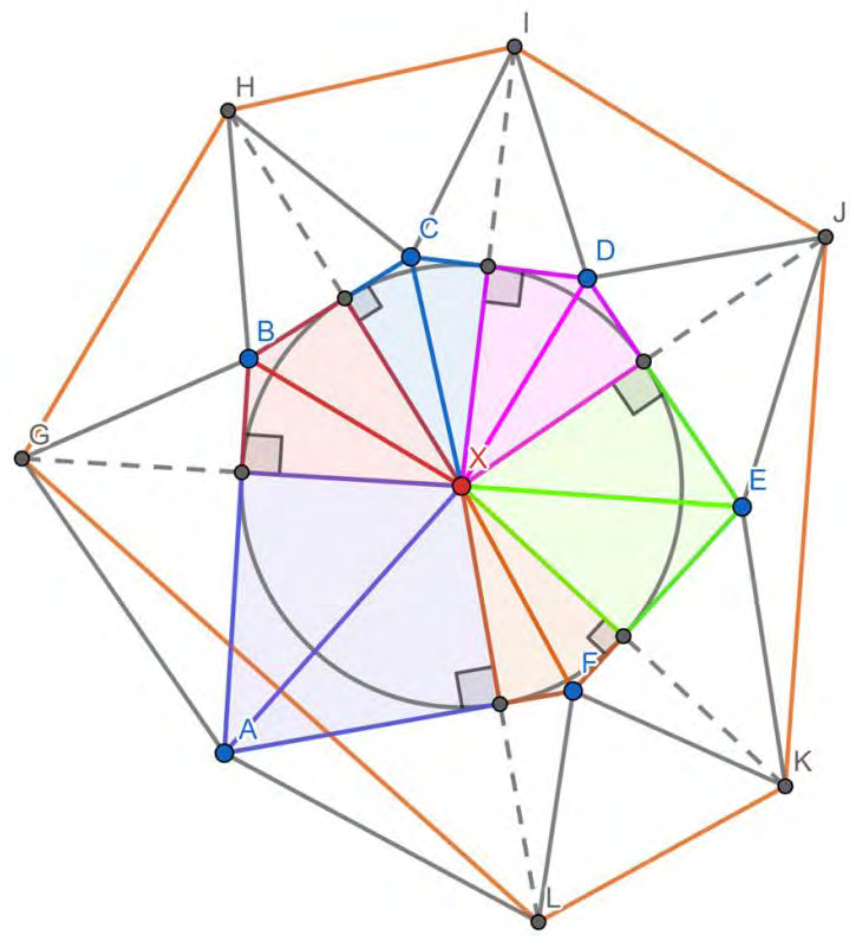
討論

一、三角換心關係之討論
如果我們把:
研究一、原三角形與其頂垂三角形之換心關係
研究二、原三角形與其頂內三角形之換心關係
研究三、原三角形與其頂外三角形之換心關係
以上三個研究的結果串起來，將會發現:
頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形的換心關係可以互相循環

二、尤拉線交點之討論
當我們連接:
研究五、原三角形與其頂垂三角形進階探討(尤拉線探討)
研究六、原三角形與其頂內三角形之尤拉線探討
研究七、原三角形與其頂外三角形之尤拉線共線
以上研究的結果時會發現:
原三角形與其頂垂三角形**之兩組尤拉線交點、**
原三角形與其頂內三角形**之兩組尤拉線交點、**
原三角形與其頂外三角形**之兩組尤拉線交點**，皆交於原三角形的外心。



三、推廣至多邊形與其頂內、外、垂多邊形之可能性討論
我們在研究二發現了「內換外」的性質，所以嘗試從頂內三角形推廣至頂內四邊形，
在研究八中也同樣得到「內換外」的性質。
所以嘗試從頂內三角形推廣至頂內多邊形，並且得到以下結果:
推導至頂內七、八、九......N邊形時，皆保留「內換外」的性質。
證明的部分，同樣是利用多組**全等三角形**與**共用邊**(共用原多邊形內切圓半徑)，
證明出原多邊形之內心X到其頂內多邊形的各頂點之距離皆為**共用邊之兩倍距**，因此X為其頂內多邊形之外心。
而為何無法推廣至頂外多邊形與頂垂多邊形，是因為頂外三角形與頂垂三角形之換心關係皆牽扯到垂心，但是多邊形並無垂心可言，所以無法推廣至多邊形。



四、頂重三角形、頂旁三角形與作圖過程簡化之討論
我們在這篇報告中指討論到頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形，並研究出有換心的性質。而五心之中還有重心、旁心，因此納入討論:
如果按照「研究九、頂內、外、垂三角形之逆推可能性」之逆推方法的話，依然可以由已知
頂重三角形、頂旁三角形回推回原三角形。
另外值得一提的是:一個三角形有三個旁心，究竟三個旁心形成的三個頂旁三角形是否有性質，還有待研究，也為此篇報告留下一個伏筆。
在觀察頂垂三角形、頂內三角形、頂外三角形、頂重三角形、頂旁三角形之可逆性時，發現之前的作圖方法可簡化為:
將垂心、內心、外心、重心、旁心以原三角形的三邊為對稱軸，得三個對稱點，連線即為其頂垂、內、外、重、旁三角形
可說是心的發現，能大幅降低作圖步驟與時間。
原作圖法雖然作圖時間與步驟繁複，但有輔助證明的作用，可說是各有所用。

結論

在經過對三角形的換心性質的一番研究之後，得到以下結論:

一、三角形與其頂內三角形的關係：
(一) 原三角形之內心與其頂內三角形之外心共點
(二) 原三角形之尤拉線與其頂內三角形之尤拉線交於原三角形之外心
(三)當有已知頂內三角形時，可利用研究九的回推方法，得到原三角形

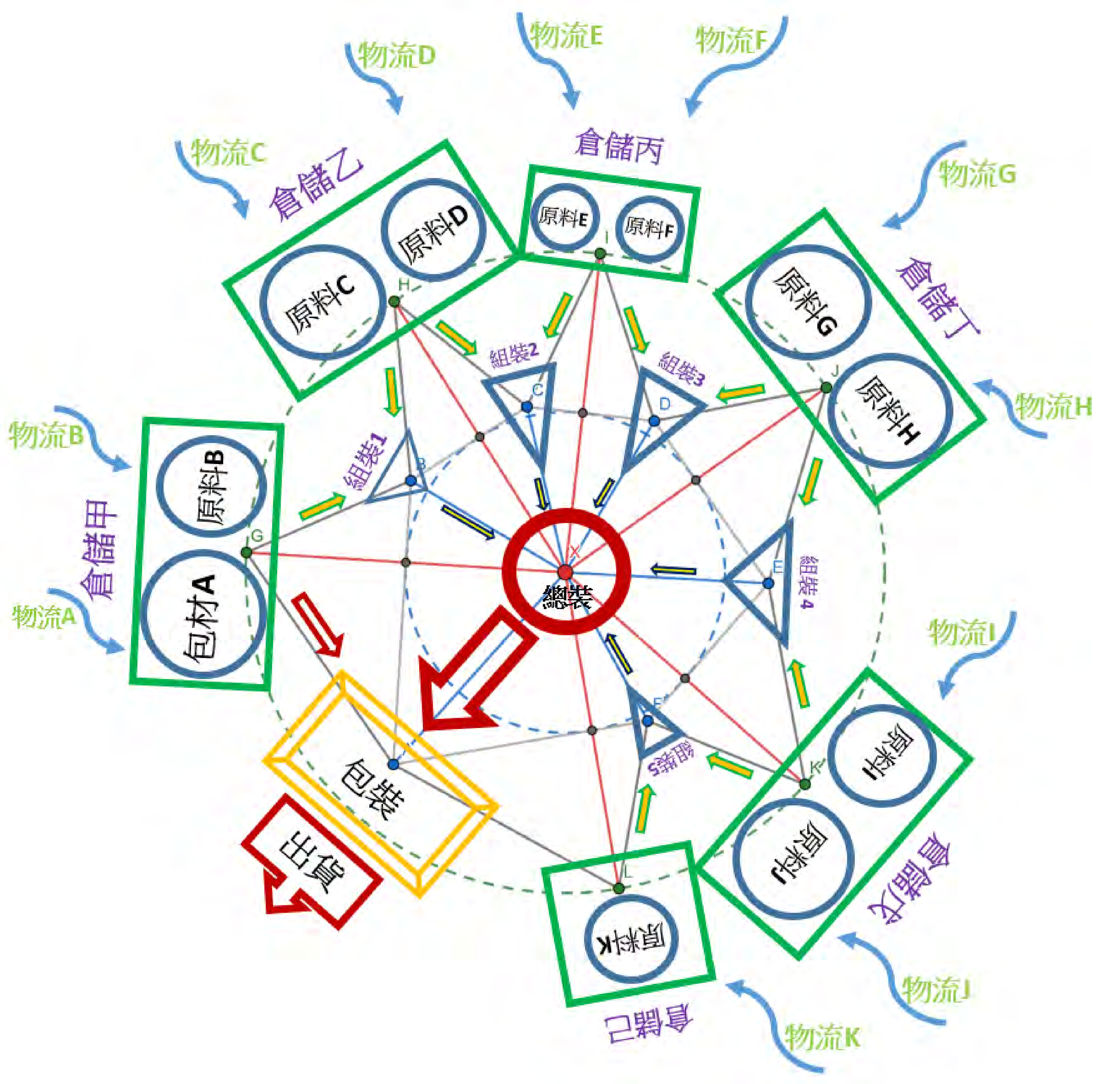
二、三角形與其頂外三角形的關係：
(一) 原三角形之外心與其頂外三角形之垂心共點
(二) 原三角形之尤拉線與其頂外三角形之尤拉線共線
(三) 原三角形與其頂外三角形互為頂外三角形
(四) 當有已知頂外三角形時，可利用研究九的回推方法，得到原三角形

三、三角形與其頂垂三角形的關係：
(一) 原三角形之垂心與其頂垂三角形之內心共點
(二) 原三角形之外心與其頂垂三角形之外心共點
(三) 原三角形之外心與其頂垂三角形之外心共點
(四) 當有已知頂垂三角形時，可利用研究九的回推方法，得到原三角形

四、頂垂三角形、頂內三角形之關係
(一) 原三角形與其頂垂三角形之頂內三角形相似

五、多邊形與其頂內多邊形的關係
(一) 原N邊形之內心與其頂內N邊形之外心共點

未來展望與應用



點G、H、I、J、K、L為工廠原料倉庫，點A、B、C、D、E、F為初級組裝廠，將原料送至點A、B、C、D、E、F組裝為半成品。待各半成品組裝完成，再將送至中心總組裝點X總裝。因任初級組裝廠與供應原料的倉庫及到中心總裝場距離皆相等，
如: H到C、I到C、C到X等距，如此可有效縮短運輸時間，達到效率提升。
另點X為總裝處，將成品輸出與包材A等距的包裝處，同時點X亦可為行政監管處，
可透過示意圖中紅線來直達倉庫進行監控，因所有紅線等距，對倉儲的管控最有效率
優點1. 倉庫到監管處等距，可花相同時間到達
優點2. 任兩相鄰倉庫至對應組裝廠距離相等，可同步配合
優點3. 組裝廠至總裝處也等距，可同步配合倉庫與組裝廠