中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030401

奇幻星形

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 蔡尚融	王梵音
國二 汪宏叡	陳亮君
國二 陳亮言	

關鍵詞：幻星、極值、多元一次方程式

摘要

本研究發想源自將 1~12 的棋子填入六角星形，使其每一個邊數字和、六個頂點和都為 26，將其推廣到多角星形情境中。研究中證明唯有六角星形能滿足頂點和與邊數字和相等，且只有 6 種排列方式，並探討出多角星形的數字組合特徵與完成策略，同時找出通解個數及證明頂點和與解之間有對稱性。

壹、研究動機

我們到廈門參加華羅庚金杯數學競賽，最後的團體賽是要在時間內將 1~12 的棋子填入一個六角星形，使其每一個邊上數字和都為 26，且六個頂點數字和也為 26。當時我們只完成了前者，沒辦法使得頂點和等於邊和 26，所以我們想研究這個題目，並幫它取了一個與知名填數字遊戲「魔方陣」異曲同工的名稱-**幻星**。我們想知道幻星的數字組合特徵，並找出所有符合題目要求的通解？也想探究別的多角星形是否也存在相通的規則？在網路上我們找到一些探討這個主題但未附證明的說法和解答，讓我們想以更嚴謹的方式找出答案，檢驗網路資料是否正確。

貳、研究目的

一、探討出能讓正多角幻星成立的數字組合特徵。

二、找出能滿足頂點和與同一線上數字和相等的終極幻星。

三、找出正 n 角幻星(n=5~8)的通解個數及頂點和範圍。

四、發展出能完成正 n 角幻星的策略。

名詞定義

幻星：是在正 n 角星上的頂點與交點填入從 1 開始到 2n 的相異連續整數，使得在 n 角星上共線的四個點和皆相等。

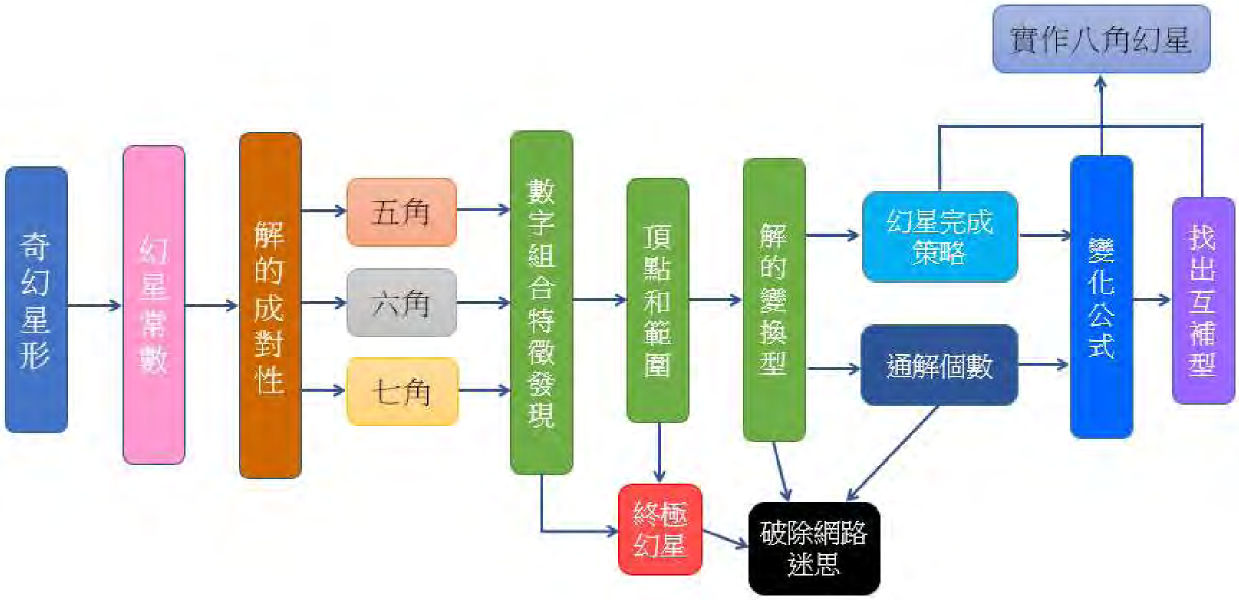
幻星常數：是指每一條邊上之交點或頂點數字和皆相等(幻星)成立時，每一條邊上的四個數字和稱為幻星常數，在此研究中簡稱為 M。

終極幻星：當一個正 n 角幻星成立時，其 n 個頂點和恰等於幻星常數時，將之稱為終極幻星。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦

研究架構圖



肆、研究過程與方法

一、幻星常數及終極幻星限制之證明

(一) 找出正 n 角星的幻星常數

定理一
n 角幻星，幻星常數為 M=4n+2。(n≥ 5，n為正整數)

Pf：在 n 角幻星的 n 個頂點及 n 個交點上填入 1 至 2n 的相異連續整數，

使得每一邊的四個數字相加之和皆相等，此和稱為幻星常數。

∵正 n 角星有 n 條邊　數字總和為$\frac{2n(1+2n)}{2}$

又填入每個點的數字會被計算兩次

依幻星常數定義

$$M=\frac{2n(1+2n)}{2}\times 2\div n=4n+2$$

∴幻星常數為 $\mathrm{M}=4\mathrm{n}+2$。

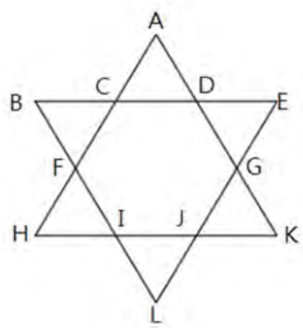
(二) 以六角幻星為例說明如下

先算出所有數字的總和:1+2+…+12=78

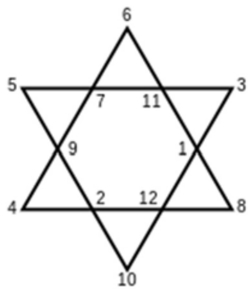
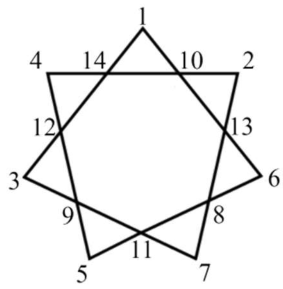
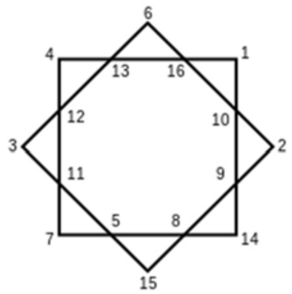
並經觀察可知有六條線分別為 ACFH、HIJK、ADGK、BCDE、EGJL、BFIC

而每個點恰巧被兩條線劃過

所以每條線上的數字總合為:78x2÷6=26



以下列出本研究中幻星示例及對應的幻星常數。

六角幻星	七角幻星	八角幻星
		
M=26	M=30	M=34

(三) 探討終極幻星之限制

定理二

能使終極幻星成立的角數範圍為五、六、七角星

Pf：設某n角星符合終極幻星規則(頂點和=幻星常數 M)

$\because$最小極端頂點數字和$\leq M = 4n + 2 \leq$最大極端頂點數字和

最小極端頂點數字和：$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow 4n + 2 - \frac{n(n+1)}{2} \geq 0 \quad \Rightarrow 8n + 4 - n(n+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 7n - 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(n - \frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)\left(n - \frac{7-\sqrt{65}}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow -0.53 \leq n \leq 7.53 \cdots\cdots(1)$$

又最大極端頂點數字和：$(\mathrm{n}+1) + (\mathrm{n}+2) + \cdots + 2\mathrm{n} = \frac{n(3n+1)}{2}$

$$\Rightarrow \frac{n(3n+1)}{2} - (4n+2) \geq 0$$

$$\Rightarrow n(3n+1) - 8n - 4 \geq 0 \qquad \Rightarrow 3n^2 - 7n - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(n - \frac{7+\sqrt{97}}{6}\right)\left(n - \frac{7-\sqrt{97}}{6}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow n \geq 2.81 \ \ or \ \ n \leq -0.47 \cdots\cdots(2)$$

(1)(2)交集得$2.81 \leq n \leq 7.53$

而沒有角數小於 5 的多角星形，且$n \in \mathbb{N}$

$\therefore n = 5、6、7$

因此，我們之後須分別探討五、六、七角幻星中是否有終極幻星出現。

二、滿足幻星通解的一般化發現

(一) n 角幻星通解具有成對性

> **定理三**
>
> 若$\{\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{A_3},\ldots,\boldsymbol{A_{2n}}\}$是滿足 **n** 角幻星的一組解，且$\boldsymbol{A_1}+\boldsymbol{B_1}=\boldsymbol{A_2}+\boldsymbol{B_2}=\boldsymbol{A_3}+\boldsymbol{B_3}=\cdots=\boldsymbol{A_{2n}}+\boldsymbol{B_{2n}}=\boldsymbol{2n+1}$，則$\{\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2},\boldsymbol{B_3},\ldots\boldsymbol{B_{2n}}\}$必是滿足此 **n** 角幻星的另一組解。

Pf：如下圖所設$A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n}$為 n 角幻星的解

$\because A_2,A_3,A_4,A_5$位於同一條線上，其和必等於幻星常數

$\therefore A_2+A_3+A_4+A_5=4n+2$

又$A_1+B_1=A_2+B_2=A_3+B_3=\cdots=A_{2n}+B_{2n}=2n+1$

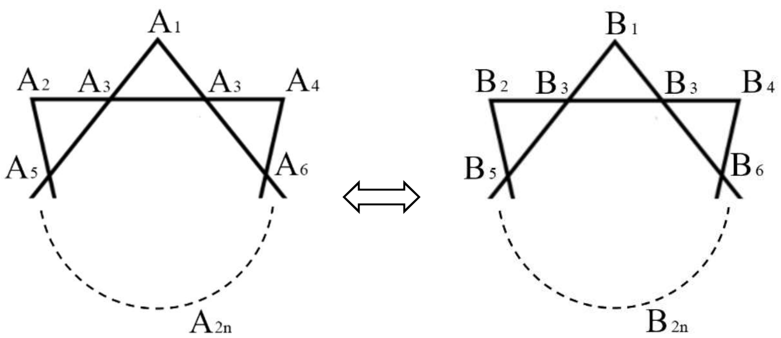
$\Rightarrow [(2\mathrm{n}+1)-B_2]+[(2\mathrm{n}+1)-B_3]+[(2\mathrm{n}+1)-B_4]+[(2\mathrm{n}+1)-B_5]=2\mathrm{n}+1$

$\Rightarrow B_2+B_3+B_4+B_5=4n+2$

同理此 n 角幻星上共線的四點A_i,A_j,A_h,A_k

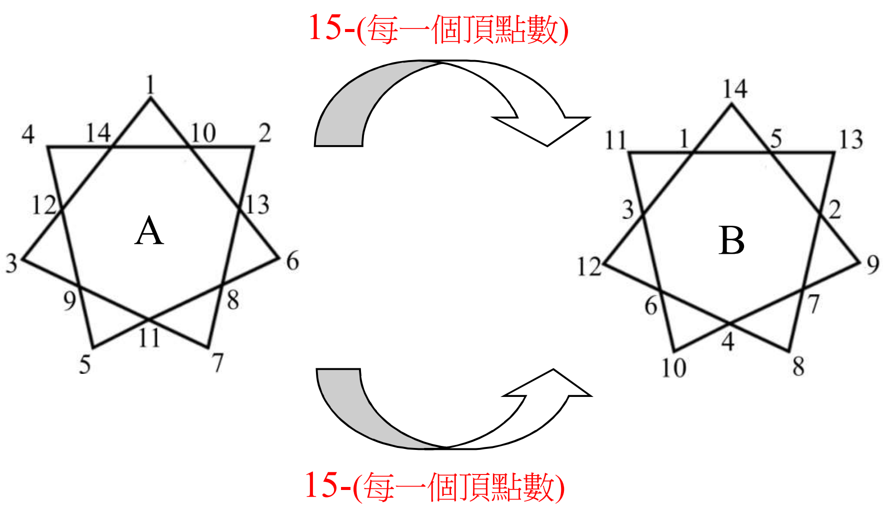
皆可推出$B_i+B_j+B_h+B_k=4n+2$=幻星常數 M

$\therefore\{B_1,B_2,B_3,\ldots B_{2n}\}$必是滿足此 n 角幻星的另一組解。



舉下圖為例說明：

已知七角幻星一組解 A，此時 2n+1=15，已知解 A 可使用定理三找到另一組解 B。



(二) n 角幻星的成對解頂點和範圍

定理四

若$\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$是滿足 n 角幻星解的頂點數字，且$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = A_3 + B_3 = \cdots = A_n + B_n = 2n + 1$，則$\{B_1, B_2, B_3, \ldots B_n\}$必是滿足此 n 角幻星解的另一組頂點數字，且$\sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n} B_i = 2n^2 + n$。

Pf：由定理三知道 n 角幻星解有成對性，位置相對應的兩點數字和為 2n+1

已知$\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$是滿足解的頂點數字，

且$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = \cdots = A_n + B_n = 2n + 1$

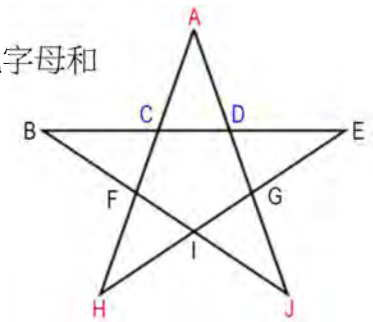
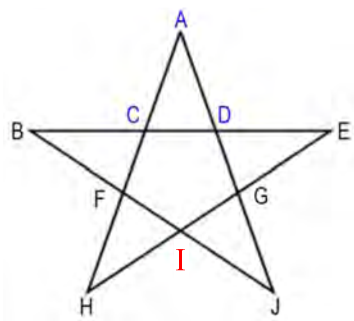
$\Rightarrow \{B_1, B_2, B_3, \ldots B_n\}$必是滿足此 n 角幻星解的另一組頂點數字

$\therefore \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i) = \sum_{i=1}^{n} 2n + 1 = n(2n + 1) = 2n^2 + n$

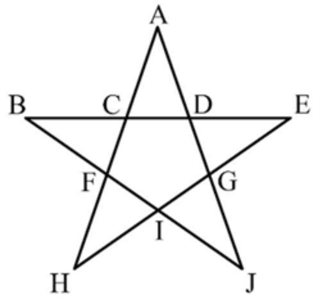
二、正五角幻星之探討

(一) 五角終極幻星的特徵發現

依照定義及定理一 M=4n+2，得 M=4×5+2=22，故五角終極幻星的每邊和=頂點和=22 且須滿足下列兩種數字組合特徵發現。

發現 1： 藍色字母和=紅色字母和 即 C+D=A+H+J  	pf.∵B+C+D+E=A+B+E+H+J ∴C+D=A+H+J 同理 C+F=B+E+J F+I=A+E+H I+G=A+B+J D+G=B+E+H
發現 2： 藍色字母和=11+紅色字母 即 A+C+D=11+I 同理 B+C+F=11+GF+I+H=11+D I+G+J=11+C D+E+G=11+F  	pf.∵C+D=A+H+J ∴A+C+D=A+(A+H+J) =A+H+A+J =22-(C+F)+22-(D+G) =44-(C+D+F+G) 又 C+D+F+I+G =55-(A+B+E+H+J) =55-22=33 故 A+C+D=44-(33-I)=11+I

(二) 五角終極幻星的不存在證明



pf：設填入連續整數的最小值為 K，最大值為 K+2n-1

$$\therefore M=\frac{2n[K+(K+2n-1)]}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{n}=4K+4n-2$$

故當 K=1，n∈ℕ但 n≠1，2，3，4 時，M=4n+4×1-2=4n+2

當 K∈ℕ但 K≠1，n=5 時，M=4K+4×5-2=4K+18

檢查是否符合數字特徵發現：

⇒發現 1：成立

⇒發現 2：A+C+D=A+H+A+J=22-(C+F)+22-(D+G)=44-(C+F+D+G)

又 C+F+G+D=$\left(\frac{10[K+(K+9)]}{2}\right)$-(4K+18)=6K+27

∴A+C+D=44-(6K+27)=17-6K，設 A+C+D 為最小三數

即 K+(K+1)+(K+2)=3K+3≥17-6K

∴9K≥14，K≥$1\frac{5}{9}\xrightarrow{K\in\mathbb{N}\ \&\ K\neq 1}$ K 只能是大於等於 2 的正整數

故不存在填入 1~ 10 連續整數構成的五角終極幻星。

(三) 五角幻星不存在的證明

pf：由五角終極幻星不存在的證明可知

放置數字 1(如右下圖)關乎幻星成立與否，因此有以下兩推論：

1. 數字 1 和 10 必在同一條線上

∵若 1 和 10 不在同一條線上，則有通過 1 的兩條線和為 2M=44，

不含數字 1 的和為 44-1-1=42，又因一條線上有四點，而要填入的數字

有 4×2-1×2=6 個，而此時剩下的六個最大的數和為 9+8+7+6+5+4=39＜42

∴1 和 10 必在同一條線上。

2. 不論 1 在哪裡，10 一定與 1 及另外 5 數共線

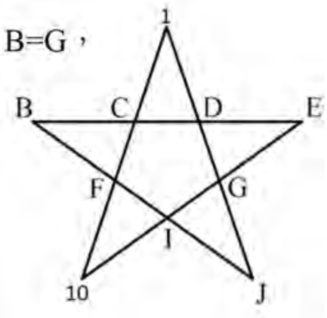
假設 10 一定與三個數字不共線，此三數的和為 55-(22+22-10)=21，

除了 1 之外的其他三數和為 M-1=21，故一定會有兩數值相同。不失一般性設

上右圖頂點 A 為 1，H 為 10，則 B、D、J 不與 10 同線，

此時 B+D+J=55-(22+22-10)=21，又 D+G+J=22-1=21，故 B=G，

與 B、G 為相異整數的條件矛盾。



綜合推論 1 與 2，

故亦不存在填入 1~ 10 連續整數構成的五角幻星。

接著我們思考放寬數字限制，若改成填入連續 10 個整數是否有五角幻星存在呢？

(四) 填入連續 10 個整數之五角幻星不存在的證明

pf.假設此十數為 $x+1$ 至 $x+10$ 之五角幻星成立，

將其所有值同時減掉 x 也會是個成立的幻星，

由(三)得知填入數字 1~10 的五角幻星不存在，

故任意連續 10 個整數之五角幻星也不存在。

(五) 破解網路迷思

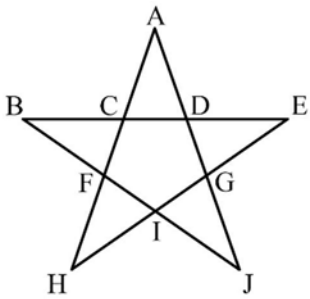
網路上流傳說將 1 至 10 正整數中剔除 7，加入 12 可變成一個有解的五角終極幻星，所以我們要來驗證一下它的正確性。

1. 決定新的幻星常數

改變填入數字即改變總和=$\left(\frac{12(1+12)}{2}\right)$-7-11=60

∴幻星常數更動為 M=60 • $\frac{2}{5}$=24

2. 重新定義發現



由於發現 1 與發現 2 均在終極幻星時成立。

∴發現 1⇒∵頂點和=邊和

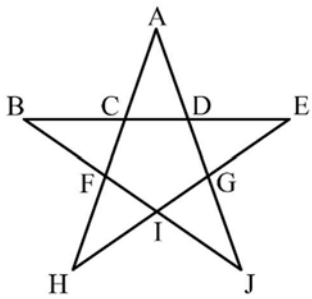
∴B+C+D+E=A+B+E+H+J

故 C+D=A+H+J

發現 2⇒A+C+D=A+H+A+J

=(24-(C+F))+(24-(D+G))=48-(C+F+D+G)=48-(36-I)=12+I

3. 判別 12 的填入位置



Pf：若 1 與 12 不在同一條線上

設 A=1，則 A+C+F+H+D+G+J=24+24-1=47

又除了 12 之外的最大六數和為 10+9+8+6+5+4=42

∵47>42，∴1 必與 12 在同一條線上。

4. 若 12 於內圈，求解

Pf：設 I=12，則 A+C+D=12+I=24=B+C+D+E，故 A=B+E

此時(A,C,D)可能(6,8,10)互相排列，則有六種可能。

以 A 為基準，當 A=6 時有 2 種可能；當 A=8 時有 2 種可能；當 A=10 時有 2 種可能。

(1) 當 A=6=B+E 時，(B，E)=(1，5)or(2，4)，綜合有 8 種狀況。

設 C=8，D=10，B=1，E=5，則 F+H=24-(6+8)=10，可能的(F,H)

為(1，9)，(2，8)，(4，6)，但因均有重複，故此假設不合。

同理可證剩下的 7 種可能均不合，則 A=8or10

(2) 當 A=8=B+E 時，(B，E)=(3，5)，綜合有 4 種狀況。

設 C=6，D=10，B=3，E=5，則 F+H=24-(6+8)=10，

可能的(F,H)為(1，9)，此時又可細分為兩種狀況。

①當 F=1，H=9⇒J=8，G=－2（不合）

②當 F=9，H=1⇒J=0，G=6（不合）

同理可證剩下的 3 種可能均不合，則 A=10

(3) 當 A=10=B+E，(B，E)=(1，9)此時又可分為 4 種狀況。

設 C=6，D=8，B=1，E=9，則 F+H=24-(10+6)=8，

可能的(F，H)為(3，5)，此時又可細分為兩種狀況。

①當 F=3，H=5⇒J=8，G=-2（不合）

②當 F=5，H=3⇒J=6，G=0（不合）

同理可證剩下的 3 種可能均不合，12 應於外圈。

5. 若 12 於外圈，求解

Pf：設 A=12，由發現 1 知 C+D=A+H+J=12+H+J

又 C+D 最大值為 8+9=17⇒H+J 最大值=5

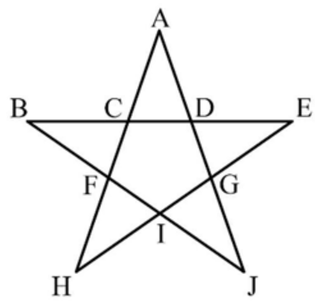
又由發現 2 知 A+C+D=12+I⇒12+C+D=12+I，故 C+D=I

又 I≤9⇒C+D≤9⇒A+H+J≤9，即 12+H+J≤9，H+J≤-3，

但 H、J∈ℕ，故→←。

綜合 1.至 5.，故不存在填入 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12 構成的五角終極幻星。

(六) 修改網路迷思



1. 決定幻星常數

Pf：同(五)，幻星常數為 24。

2. 決定 12 的位置

Pf：若 1 與 12 不在同一條線上

設 A=1，則 C+F+H+D+G+J=24×2-1×2=46

又除了 12 外的最大六數和為 10+9+8+6+5+4=42

∵47>42，故 1 必與 12 在同一條線上。

3. 若 12 於內圈，求解

Pf：設 C=12，則 A+F+H=B+D+E=12，且 A≠F≠H≠B≠D≠E，故有可能

(1、2、9)、(1、3、8)、(1、5、6)、(2、4、6)、(3、4、5)共五種可能，兩兩搭配後共有下列兩種狀況，分別為【(1、2、9)、(3、4、5)】、【(1、3、8)、(2、4、6)】。於是我們將這兩種狀況分別討論。

(1)【(1、2、9)、(3、4、5)】

假設 A、F、H、B、D、E 為 1、2、3、4、5、9 六數所構成，此時只剩三數 6、8、10 分別構成 G、I、J 三數，兩兩相加後可發現分別少 6、8、10 即 2+4、1+9、3+5，但 1、9 於同一條線上，2、4 於同一條線上，故不合。

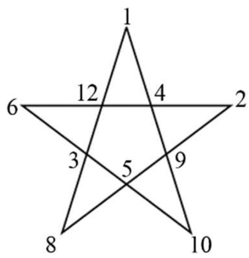
(2)【(1、3、8)、(2、4、6)】

假設 A、F、H、B、D、E 為 1、2、3、4、6、8 六數所構成，此時只剩三數 5、9、10 分別構成 G、I、J 三數，兩兩相加後可發現分別少 5、9、10 即 1+4、3+6、2+8，因三種可能均在不同線上，故成立。

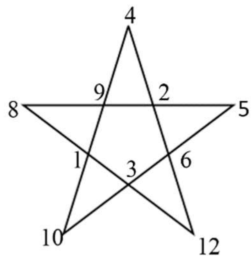
即五條線的組合為(1、12、3、8)、(6、12、4、2)、(1、4、9、10)、(6、3、5、10)、(8、5、9、2)。如左下圖一。

4. 若 12 於外圈，求解

由(2)可知 12 所在的兩條線必為(1、3、8)、(2、4、6)，可得另一組解如下圖二。



(圖一)



(圖二)

綜合 1.至 4.，發現填入 1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12 只能構成五角幻星，至少有兩解。

(七) 五角星形結語

探討完五角幻星後，發現五角星既無終極幻星也無幻星，與網路上的資料比較，驗證網路資料說法不正確。我們發現在第 45 屆國中數學科展作品＜星星的秘密＞(參考資料五)中，也探討出連續 10 個整數不可能構成五角幻星，這一點與我們的結論一致，但我們的證明方法不同於他們且較其簡短。然而他們沒有探討終極幻星的面向，最後他們以放寬填入數字範圍，不使用連續正整數，只探究了五角星形部分。我們卻希望能遵守初始研究動機之遊戲規則，也就是使用 1 到 2n 的連續正整數來探討 n 角星，所以在接下來的六角星、七角星、八角星部份，我們依然採用連續整數來探討出幻星通解及終極幻星的存在性。

三、正六角幻星之探討

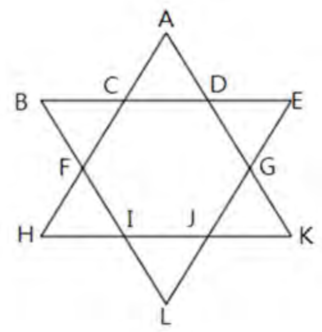
(一) 六角幻星特徵發現及證明

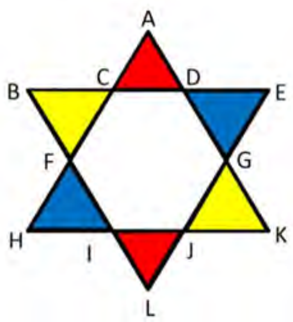
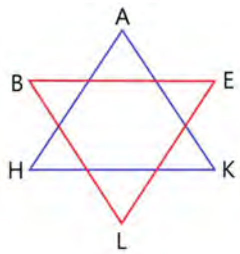
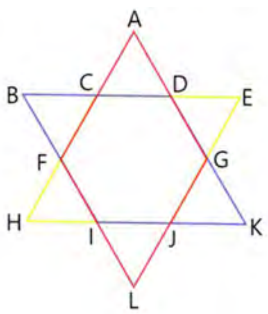
已知：A、B、C、D......L 可填入 1 到 12 使其符合條件

如圖，A+C+F+H=26；A+D+G+K=26；H+I+J+K=26；

B+C+D+E=26；B+F+I+L=26；E+G+J+L=26。

求證滿足下列三種數字組合特徵發現。



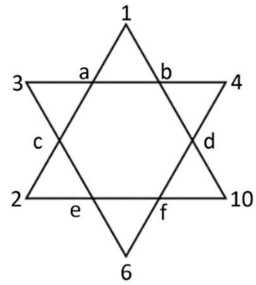
發現 1： 如圖，同色的三角形之頂點和相同。 A+C+D=I+J+L F+H+I=D+E+G B+C+F=J+G+K 	Pf：∵A+D+G+K=26⇒G+K=26-(A+D) H+I+J+K=26⇒J+K=26-(H+I) E+G+J+L=26⇒G+J=26-(E+L) ∴2(G+J+K)=78-(A+D+E+I+L+H) 即 G+J+K=39-(A+D+E+H+I+L)/2……① ∵B+C+D+E=26⇒B+C=26-(D+E) B+I+F+L=26⇒B+F=26-(I+L) A+C+F+H=26⇒C+F=26-(A+H) ∴2(B+C+F)=78-(A+D+E+H+I+L) 即 B+C+F=39-(A+D+E+I+H+L)/2……② 又①=②，故 G+J+K=B+C+F 同理 A+C+D=I+J+L，F+H+I=D+E+G 得證
發現 2： 如藍色三角形的頂點和等於紅色三角型的頂點和 A+H+K=B+E+L 	Pf：∵A+C+D=I+J+L G+J+K=B+C+F F+H+I=D+E+G ∴A+C+D+G+J+K+F+H+I=I+J+L+B+C+F+D+E+G 經化簡得:A+H+K=B+E+L
發現 3: 紅色、藍色和黃色菱形的頂點和均為 26 A+F+G+L=26 B+D+I+K=26 C+E+H+J=26 	Pf：設 A+H+K=X 又 C+D+F+G+I+J=78-2X ∴A+H+K+C+D+F+G+I+J=78-X 又 H+I+J+K=26 ∴A+C+D+F+G=52-X……① 同理 F+I+L+J+G=52-X……② ∴①+②-C+D+F+G+I+J=26 故 A+F+G+L=26 同理 B+D+I+K=26 C+E+H+J=26 故得證

(二) 六角終極幻星的通解

找出頂點和為 26 的六角幻星解

因為六角幻星的幻星常數為 26，且發現 2 得知 A+H+K=B+E+L

將三個頂點和為 13 的狀況列出



13 =1+2+10 =1+3+9 =1+4+8 =1+5+7

=2+3+8 =2+4+7 =2+5+6

=3+4+6

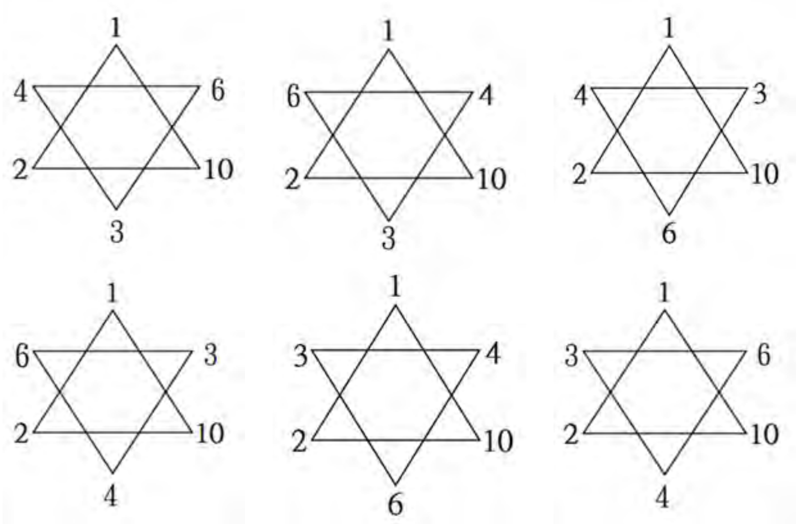
因每個頂點的數都需不同故只有六種可能:

[1，2，10；3，4，6] [1，3，9 ；2，4，7] [1，3，9 ；2，5，6]

[1，4，8 ；2，5，6] [1，5，7 ；2，3，8] [1，5，7 ；3，4，6]

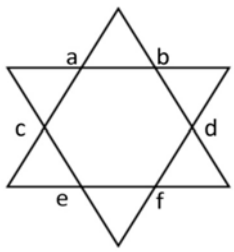
我們以[1，2，10；3，4，6]為例

這六個數字可以排列成六種組合：



接著，令 a、b、c、d、e、f 在六角星形內排成右圖。

以下圖為例來討論：



由發現 3 得知：

3+10+b+e=26⇒b+e=13

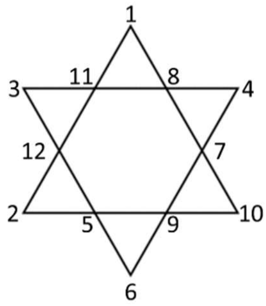
因 1、2、3、4、6 被用掉了，故(b,e)只能=(5,8)or(8,5)

(1) 假設(b,e)=(5,8)

由發現 1 得⇒9+d=10+c；由發現 3 得⇒1+6+c+d=26⇒c+d=19

⇒c=9、d=10，但因為 10 重複了，故這組不合。

(2) 假設(b,e)=(8,5)



由發現 1 得⇒12+d=7+c；由發現 3 得⇒ c+d=19

⇒c=12、d=7，因為每條線和為 26，所以 17+f=26

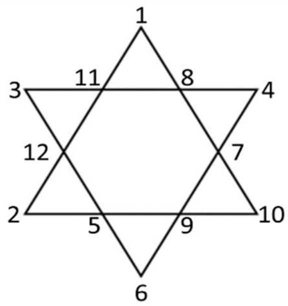
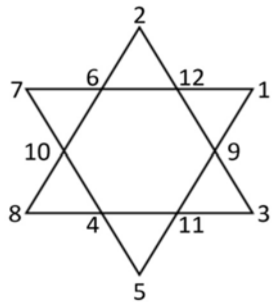
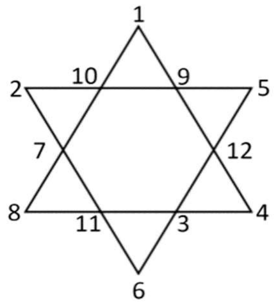
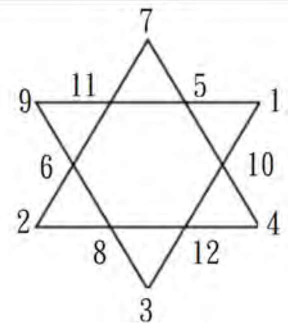
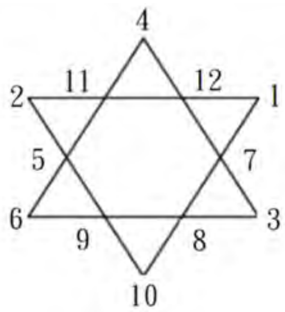
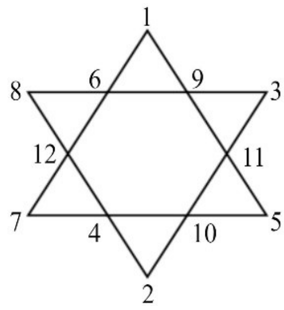
⇒f=9；15+a=26 ⇒a=11。

經檢查後發現右圖這組六角終極幻星成立。

我們透過以上示例步驟將所有解解出，並得到以下六種終極幻星解。

因受作品頁數限制，將計算的詳細過程置於下方連結，請自行參閱

https://drive.google.com/open?id=1fu20jelFPU_g9jT2PhGvQdHnoFYz5qwb

<table>
<tr><th colspan="3">六種終極幻星解</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>①</td><td>②</td><td>③</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>④</td><td>⑤</td><td>⑥</td></tr>
</table>

(三) 六角幻星頂點和之範圍

1. 探討六頂點和最小值

因發現 2 得知 A+H+K=B+E+L，所以要找 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 中六個不同數字，三個一組加起來值一樣的最小解。

6=1+2+3---只有一組(x)

7=1+2+4---只有一組(x)

8=1+2+5=1+3+4---任兩組都有數字重複(x)

9=1+2+6=1+3+5=2+3+4---任兩組都有數字重複(x)

10=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+3+5---任兩組都有數字重複(x)

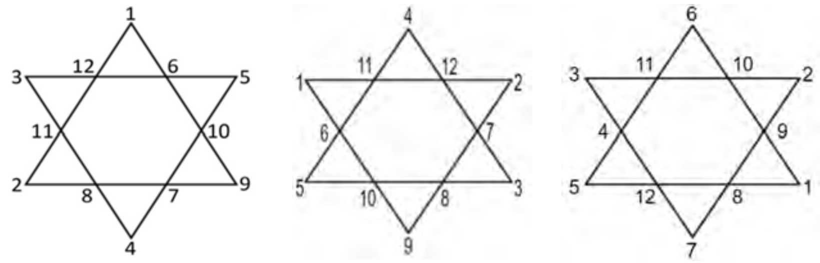
11=1+2+8=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5---(1,3,7)，(2,4,5)成立。

經驗證後此組無法成立。接著試 A+H+K 和為 12 的解：

12=1+2+9=1+3+8=1+4+7=1+5+6=2+3+7=2+4+6=3+4+5

得知【(1,2,9)(3,4,5)】【(1,3,8)(2,4,6)】【(1,5,6)(2,3,7)】這三組成立。

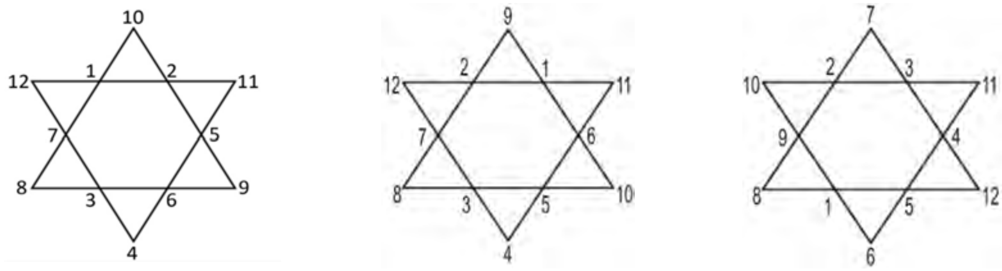
實作後有三組解，如下圖。



所以六角幻星的六個頂點和最小值為 24。

2. 探討六頂點和最大值：

因為定理四，所以六角幻星頂點和最大為 $2\times6^2+6-24=54$，又因定理三，故得三種解。(如下圖)



所以六角幻星六個頂點和最大值為 54

經上述條件得知六角幻星頂點和介於 24~54 間。

(四) 六角幻星通解

1.個數對稱性之發現

確定頂點和範圍後，實作出六角幻星通解個數，列出了頂點和與解的個數表格，總共有 80 組解，發現以藍色粗線為界，解的個數形成左右對稱的有趣現象。

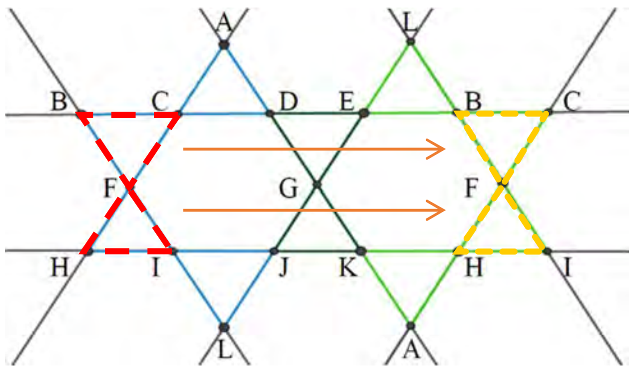
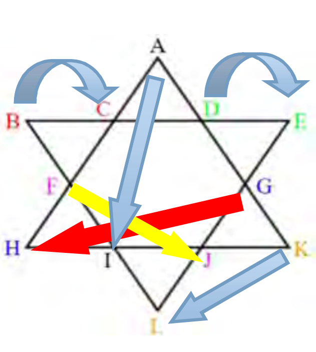
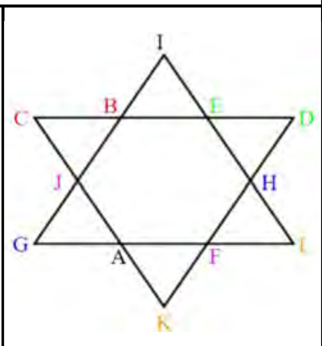
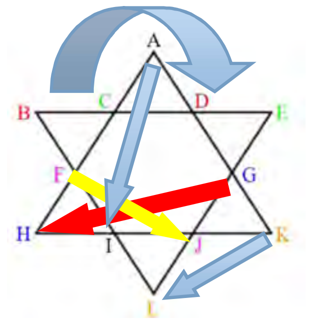
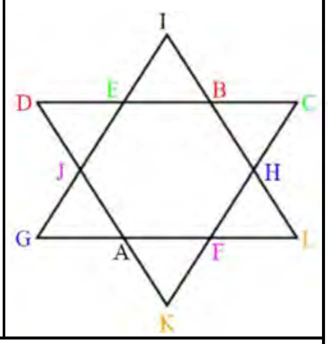
頂點和	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
解的個數	3	6	0	2	5	7	7	10	10	7	7	5	2	0	6	3

2.網路資料比較

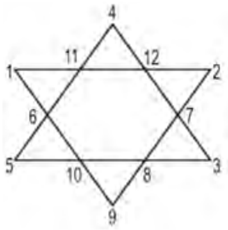
與網路資料相比較（參考資料二）雖然也是寫 80 組解，但一一比對後發現網路作者以窮舉法解題，未發現其有四組解重複，並漏掉了 4 組解（標示於 P.15.17 綠框）。

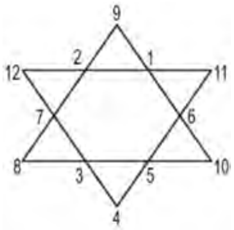
3.通解幾何對稱變換

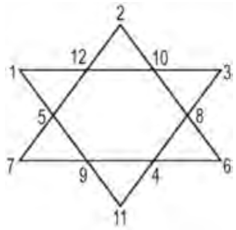
六角星圖形具有多種對稱方式，因此我們以幾何對稱觀點將六角幻星通解分類為三型(說明如下表)，以第一型對稱方式可得出 64 組解，第二、三種對稱方式分別各得 8 組解，詳細六角幻星通解請參閱下頁。

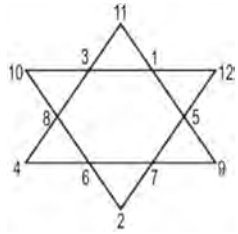
<table>
<tr><td colspan="4">第一型</td></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td colspan="4">將藍色六角幻星的線段向外延伸，並將紅色△BCF、△FHI 平移至黃色△BCF、△FHI，最後依各邊必符合幻星常數將 A、L 填入， A、L 位置會與原六角幻星的位置交換，所以藍色六角幻星經過變形後能變為綠色的六角幻星。</td></tr>
<tr><td colspan="2">第二型</td><td colspan="2">第三型</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">第二、三型如箭頭方向所示，置換數字，即可得出另一組變化型。</td></tr>
</table>

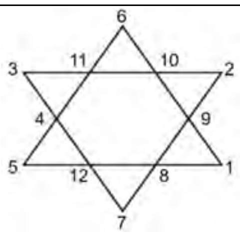
4.六角幻星通解列表

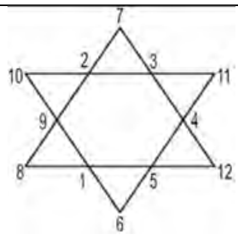
<table>
<tr><th colspan="4">第一型</th></tr>
<tr><th>頂點和:24</th><th>頂點和:54</th><th>頂點和:30</th><th>頂點和:48</th></tr>
<tr>
<td>

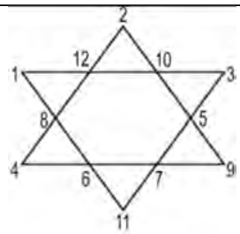
NO.1-1</td>
<td>

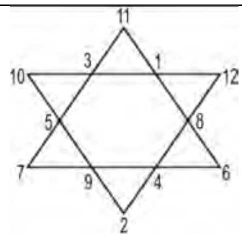
NO.1-1’</td>
<td>

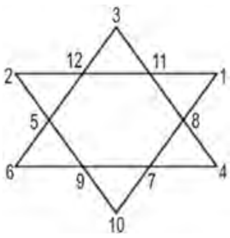
NO.1-6</td>
<td>

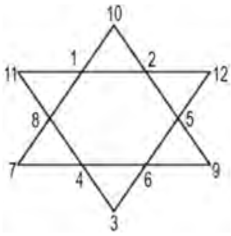
NO.1-6’</td>
</tr>
<tr>
<td>

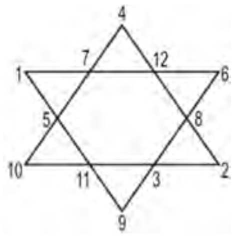
NO.1-2</td>
<td>

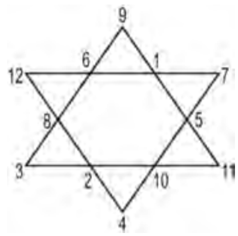
NO.1-2’</td>
<td>

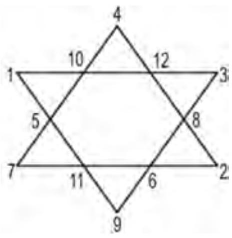
NO.1-7</td>
<td>

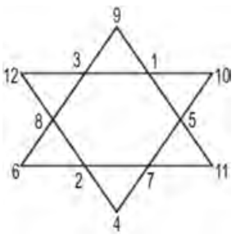
NO.1-7’</td>
</tr>
<tr><th>頂點和:26</th><th>頂點和:52</th><th>頂點和:32</th><th>頂點和:46</th></tr>
<tr>
<td>

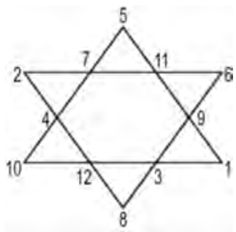
NO.1-3</td>
<td>

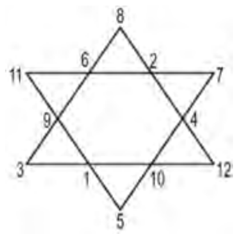
NO.1-3’</td>
<td>

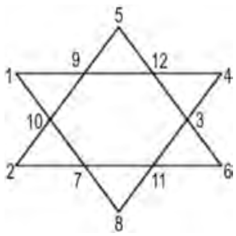
NO.1-8</td>
<td>

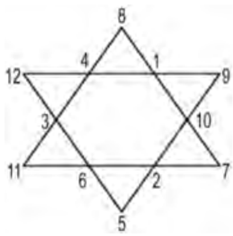
NO.1-8’</td>
</tr>
<tr>
<td>

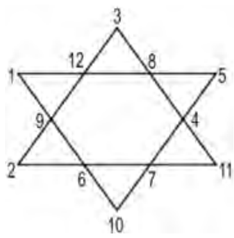
NO.1-4</td>
<td>

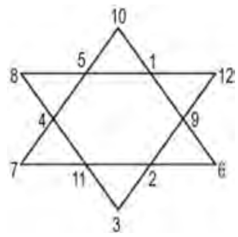
NO.1-4’</td>
<td>

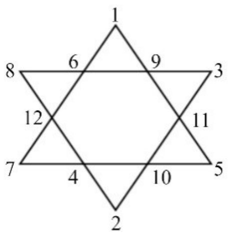
NO.1-9</td>
<td>

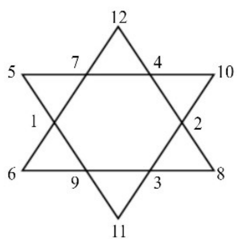
NO.1-9’</td>
</tr>
<tr>
<td>

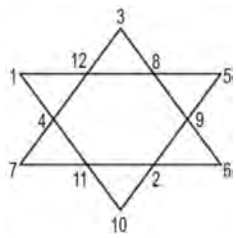
NO.1-5</td>
<td>

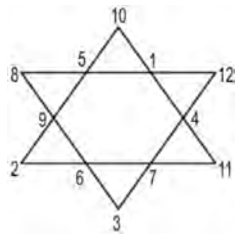
NO.1-5’</td>
<td>

NO.1-10</td>
<td>

NO.1-10’</td>
</tr>
<tr>
<td>

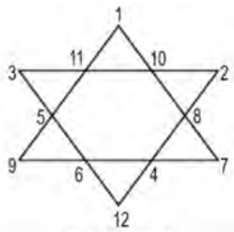
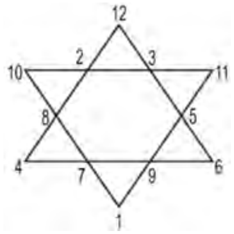
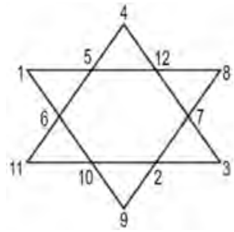
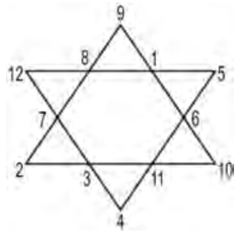
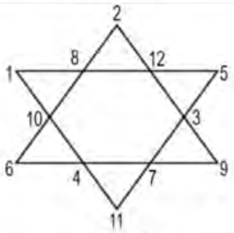
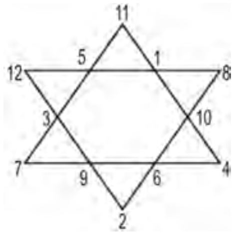
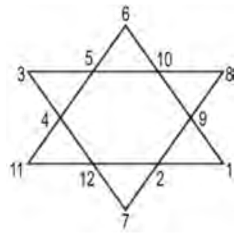
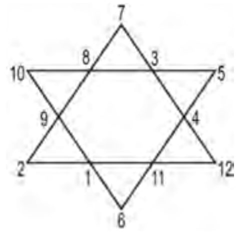
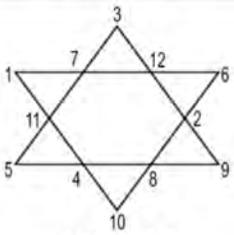
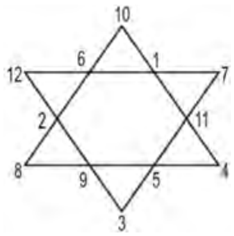
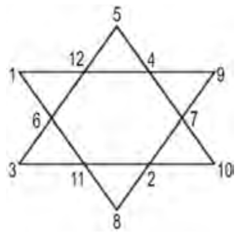
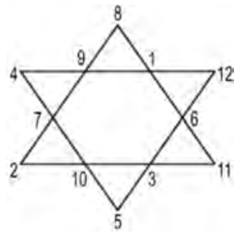
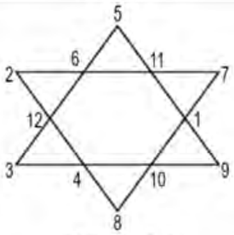
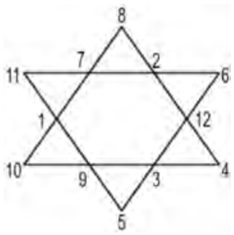
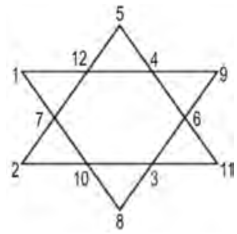
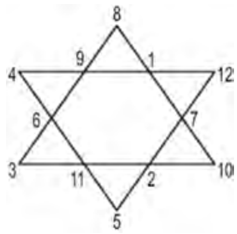
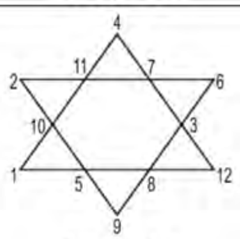
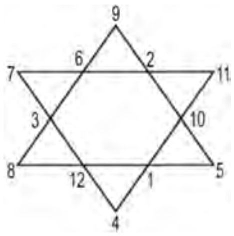
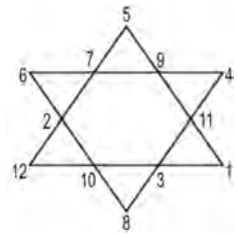
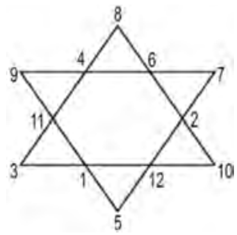
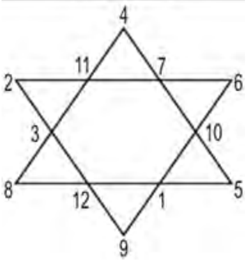
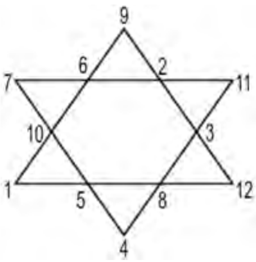
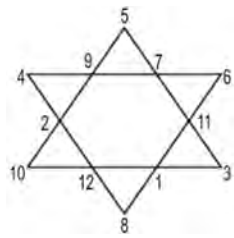
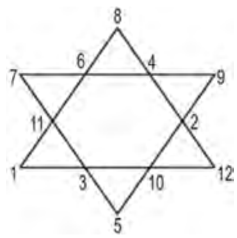
NO.1-6</td>
<td>

NO.1-6’</td>
<td>

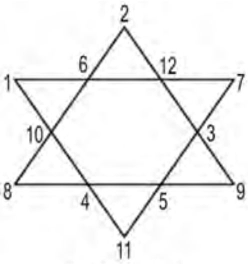
NO.1-11</td>
<td>

NO.1-11’</td>
</tr>
</table>

上方紅框處為終極幻星

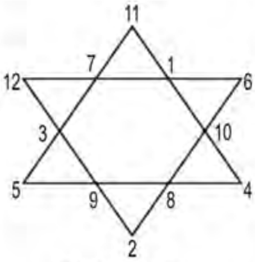
頂點和:34	頂點和:44		頂點和:36	頂點和:42
 NO.1-12	 NO.1-12’		 NO.1-18	 NO.1-18’
 NO.1-13	 NO.1-13’		 NO.1-19	 NO.1-19’
 NO.1-14	 NO.1-14’		 NO.1-20	 NO.1-20’
 NO.1-15	 NO.1-15’		 NO.1-21	 NO.1-21’
 NO.1-16	 NO.1-16’		 NO.1-22	 NO.1-22’
 NO.1-17	 NO.1-17’		 NO.1-23	 NO.1-23’

頂點和:38

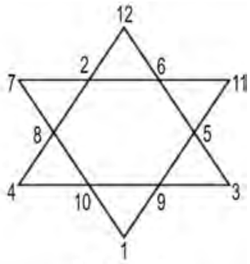


NO.1-24

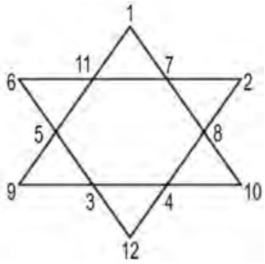
頂點和:40



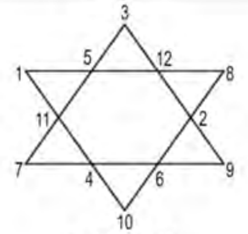
NO.1-24’



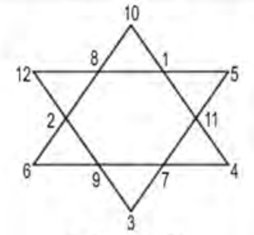
NO.1-28



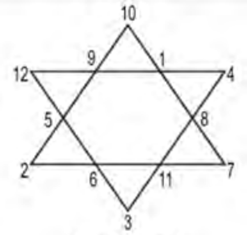
NO.1-28’



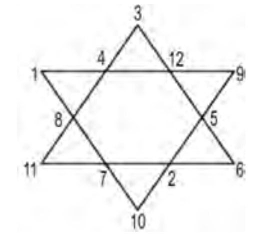
NO.1-25



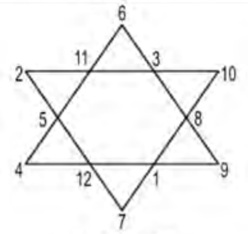
NO.1-25’



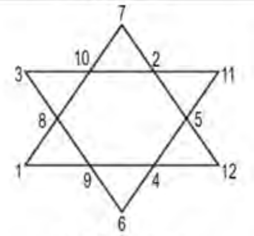
NO.1-29



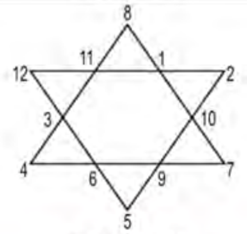
NO.1-29’



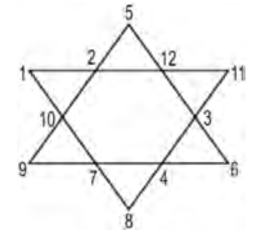
NO.1-26



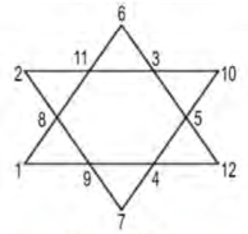
NO.1-26’



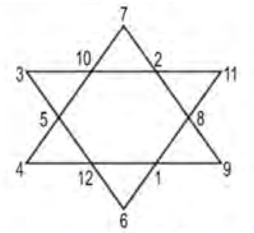
NO.1-30



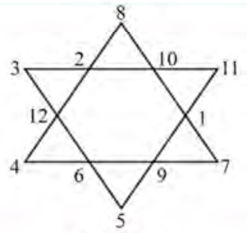
NO.1-30’



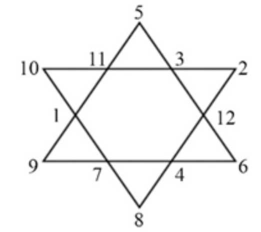
NO.1-27



NO.1-27’



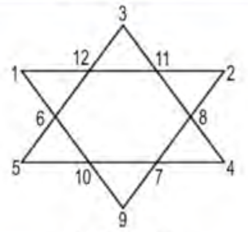
NO.1-31



NO.1-31’

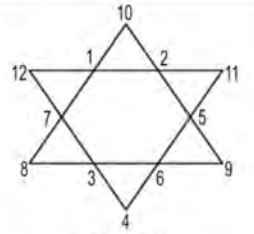
第二型

頂點和:24



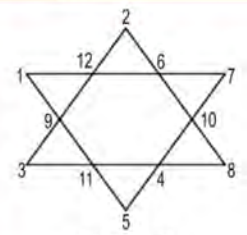
NO.2-1

頂點和:54



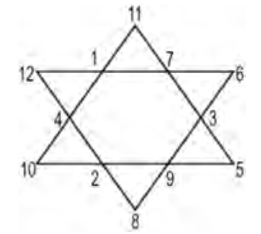
NO.2-1’

頂點和:26



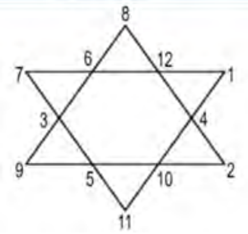
NO.2-2

頂點和:52



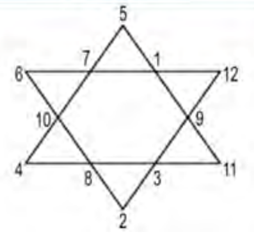
NO.2-2’

頂點和:38

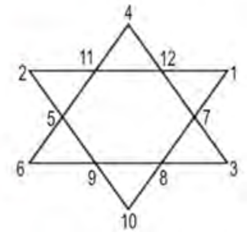


NO.2-4

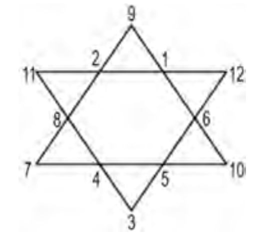
頂點和:40



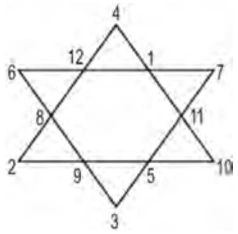
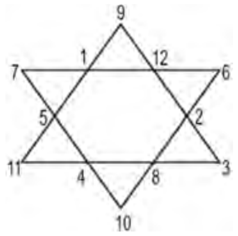
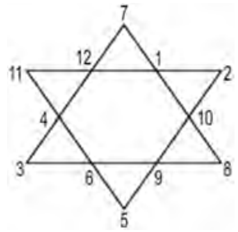
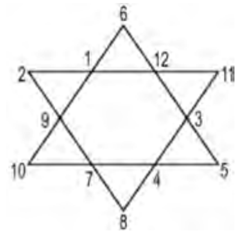
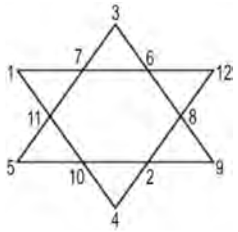
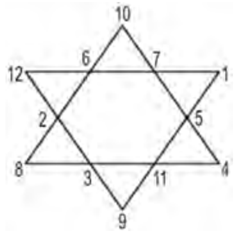
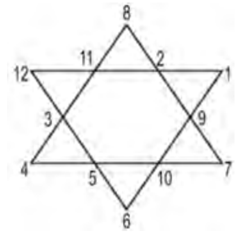
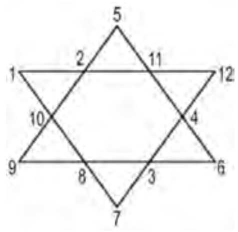
NO.2-4’



NO.2-3



NO.2-3’

<table>
<tr><th colspan="5">第三型</th></tr>
<tr><th>頂點和:32</th><th>頂點和:46</th><th></th><th>頂點和:36</th><th>頂點和:42</th></tr>
<tr>
<td>
NO.3-1</td>
<td>
NO.3-1’</td>
<td></td>
<td>
NO.3-3</td>
<td>
NO.3-3’</td>
</tr>
<tr><th>頂點和:34</th><th>頂點和:44</th><th></th><th>頂點和:38</th><th>頂點和:40</th></tr>
<tr>
<td>
NO.3-2</td>
<td>
NO.3-2’</td>
<td></td>
<td>
NO.3-4</td>
<td>
NO.3-4’</td>
</tr>
</table>

5.頂點和 28、50 之六角幻星不存在證明

我們在做完全部通解才發現某些頂點和無法構成幻星，所以我們想試著以之前的數字特徵發現及定理直接用數學證明的方式來推理不存在的頂點和。

證明如下:

因 A+H+K=14(發現 2)、C+E+H+J=26(發現 3)、B+F+I+L=26(已知)

所以 A+H+K+C+E+H+J+B+F+I+L=66…①

又 A+B+C+D+E+F+G+H+I+J+K+L=78…②

所以②-①=D+G-H=12

故 D+G=12+H

同理 I+F=12+E，C+F=12+K，C+D=12+L，G+J=12+B，I+J=12+A

而因為發現 2 A+H+K=B+E+L 又每個頂點的數都需不同故只有 11 種可能

(2、4、8，1、6、7)、(2、4、8，3、5、6)、(2、4、8，1、3、10)、(1、3、10，2、5、7)、(1、5、8，3、4、7)、(1、5、8，2、3、9)、(1、4、9，3、5、6)、(1、2、11，3、5、6)、(1、6、7，2、3、9)、(1、2、11，3、4、7)、(1、4、9，2、5、6)

發現每種可能外圈都不可能出現 12，而如果內圈出現 12 則會有數字與外圈重複。

因為 D+G=12+H，I+F=12+E，C+F=12+K，C+D=12+L，G+J=12+B，I+J=12+A

故頂點和為 28 的六角幻星不存在。

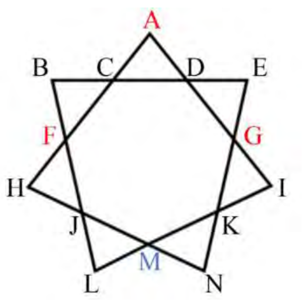
因定理三、定理四，若頂點和 28 不存在，則頂點和 50 亦不存在。

四、正七角幻星之探討

(一) 七角終極幻星不存在的證明

Pf：

1. 依照公式 $M=4n+2$，得 $M=4\times7+2=30$，故每邊和與頂點和均為 30
   ∵30 為偶數，故一條上的數字必為 2 偶 2 奇 or4 偶 0 奇 or0 偶 4 奇
   則頂點數必為 7 偶 0 奇 or5 偶 2 奇 or3 偶 4 奇 or1 偶 6 奇
2. 此四種情形分為討論如下:
   (1) 頂點為 7 偶 0 奇
   則此 7 數必為 2、4、6、8、10、12、14
   又此 7 數和為 $2+4+6+8+10+12+14=56>30$，故第 1 種假設不合。
   (2) 頂點為 5 偶 2 奇
   則此 7 數最小值為 $2+4+6+8+10+1+3=34>30$，故第 2 種假設不合。
   (3) 頂點為 3 偶 4 奇
   則此 7 數最小值為 $1+2+3+4+5+6+7=28<30$，**故第 3 種假設有可能**。
   (4) 頂點為 1 偶 6 奇
   則此 7 數最小值為 $1+2+3+5+7+9+11=38>30$，故第 4 種假設不合。
3. 針對頂點為 3 偶 4 奇的情況討論
   又 $1+2+3+4+5+6=21$，$30-21=9$
   ∴最外圍最大值為 9，數字 10~14 在內圈。
   又 $1+2+3+4+5+8+9=32$，$1+2+3+4+5+6+7=28$
   ∴最外圍不可同時出現 8 和 9，但一定需出現其中之一
   ①頂點只可為 1、2、3、4、5、6、9，
   則內圈為 7、8、10、11、12、13、14——將此組合稱為Ⓐ
   ②頂點只可為 1、2、3、4、5、7、8，
   則內圈為 6、9、10、11、12、13、14——將此組合稱為Ⓑ
4. 假設有某七角幻星符合此規則，如右圖。



$B+C+D+E=A+B+H+L+N+I+E=30$

$\Rightarrow C+D=A+H+L+N+I$……① 同理 $C+F=B+L+N+I+E$……②

①+②$\Rightarrow 2C+D+F=A+B+H+E+2(L+N+I)$

$\Rightarrow 2C+D+F=L+N+I+30$……③ 同理 $2D+C+G=H+L+N+30$……④

③+④$\Rightarrow 3C+3D+F+G=2(L+N)+H+I+60$

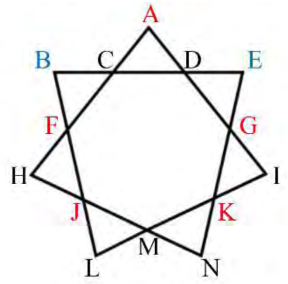
$\Rightarrow 90-3B-3E+F+G=2(L+N)+H+I+60$

$\Rightarrow 30=3B+3E+2(L+N)+H+I-F-G=2B+2E+L+N-F-G+30-A$

$\Rightarrow A+F+G=2B+2E+L+N$

$\Rightarrow A+F+G=B+30-F-J+E+30-G-K$

$\Rightarrow A+2F+2G+J+K=60+B+E$



分兩種情況討論如下：

(1) 在Ⓐ組中

2F+2G+J+K 的最小值為 51（取 F=7,G=8,J=10,F=11）

$\Rightarrow A+51=60+B+E \Rightarrow A=B+E+9>9 \rightarrow\leftarrow$（∵最大值 A=9）

故不存在Ⓐ組之七角幻星

(2) 在Ⓑ組中

2F+2G+J+K 的最小值為 51（取 F=6,G=9,J=10,F=11）

$\Rightarrow A+51=60+B+E \Rightarrow A=B+E+9>9 \rightarrow\leftarrow$（∵最大值 A=9）

故不存在Ⓑ組之七角幻星

綜合以上結果，不存在成立七角終極幻星。

在證明出七角幻星亦無達成終極幻星之可能後，我們想知道七角幻星頂點和既然不可能與七角幻星常數 30 相等，那七角幻星頂點和之範圍是多少呢?

(二) 探討七角幻星頂點和之範圍

設頂點和 X

$A+B+H+L+N+I+E=X$

$A+C+F+H=30$ $\qquad \Rightarrow B+L+N+I+E=C+F+(X-30)$

又 $E+G+K+N=30 \Rightarrow E+N=30-G-K$

$B+F+J+L=30 \Rightarrow B+L=30-J-F$

$\Rightarrow I+60-G-K-J-F=C+F+(X-30)$

$I+90=2F+C+G+K+J+X$

又內圈為 $105-X=C+F+J+M+K+G+D \Rightarrow F+15=I+M+D$

同理 $A+F+G=M+15$

1. 頂點和最大值的探討

想讓頂點和最大則數字 1 應位於內圈點上，故不失一般性設 M=1

$\Rightarrow A+F+G=16$

在此前提下，分別就 A 值為 14~11 代入討論

(1) 設 A=14，則 F+G=2 F=1,G=1 不合(∵M=1)

(2) 設 $A=13$，則 $F+G=3$

得 $F=1,G=2$ or $F=2,G=1$ 不合($\because M=1$)

(3) 設 $A=12$，則 $F+G=4$

得 $F=1,G=3$ or $F=3,G=1$ or $F=2,G=2$ 皆不合($\because M=1$ 且 $F\neq G$)

(4) 設 $A=11$，則 $F+G=5$，

得$(F,G)=(1,4)$or$(4,1)$or$(2,3)$or$(3,2)$前兩者不合($\because M=1$)

故不失一般性，令 $F=2,G=3 \Rightarrow C+H=17,D+I=16$

確定小數字 1、2、3 的位置後，繼續將小數字擺放於內圈，假設 $J=4$

$\Rightarrow B+F+L=26 \Rightarrow H+N=25$

得 $N-C=8 \Rightarrow N=C+8$

接著討論：

(1) 設 $N=14 \Rightarrow H=11$ 不合($\because A\neq H$)

(2) 設 $N=13 \Rightarrow H=12 \Rightarrow C=5$

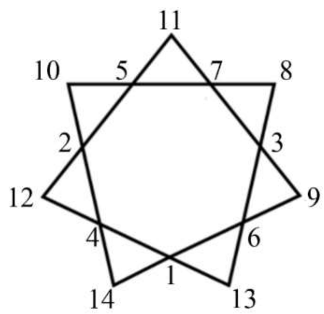
$\Rightarrow B+L=24=10+14 \Rightarrow D+I=16=6+10=7+9$

(3) 設 $B=10 \Rightarrow L=14$ 又 $L+K+I=29$

$\Rightarrow K+I=15 \Rightarrow E+K=14 \Rightarrow I-E=1=9-8=8-7=7-6$

(4) 設 $I=9 \Rightarrow E=8 \Rightarrow K=30-9-1-14=6$

$\Rightarrow D=30-9-11-3=7$ 恰組成七角幻星

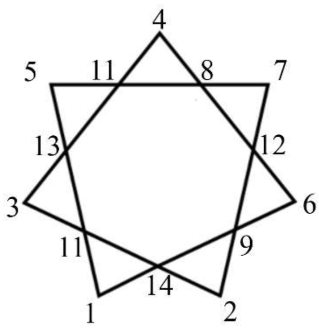


則此時頂點和為 $8+9+10+11+12+13+14=77$ 恰為最大頂點和。(如右上圖)

2. 頂點和最小值的探討

由定理三可得另一解(如右下圖)，由定理四推得最小頂點和為 28

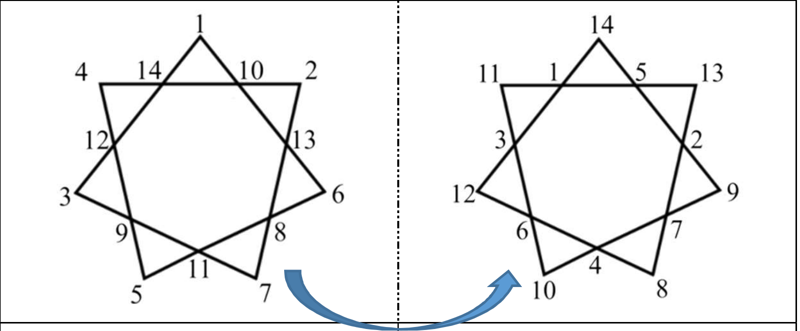
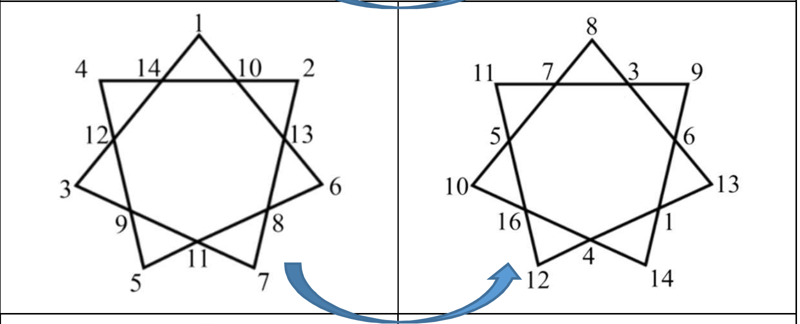
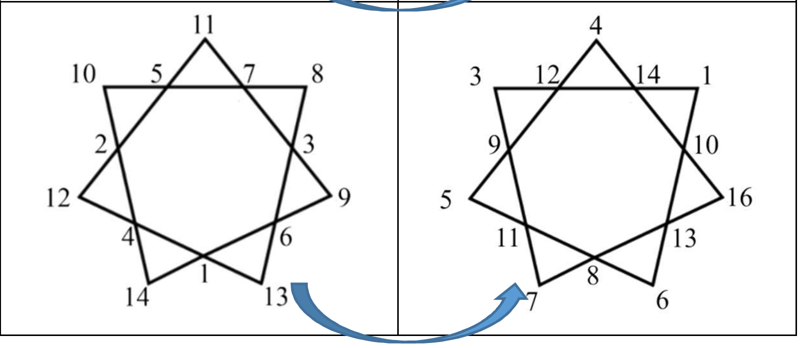
所以七角幻星的頂點和範圍為 28~77。



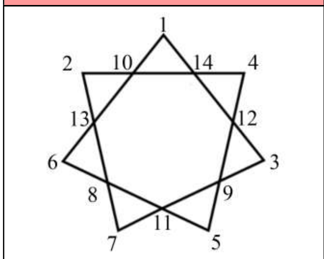
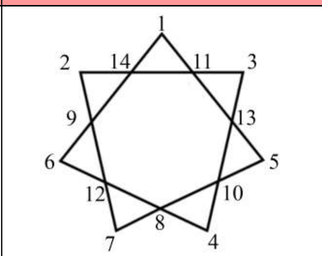
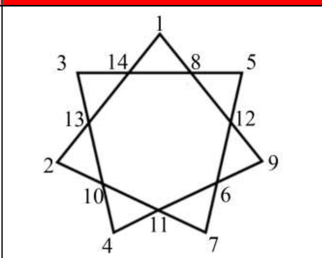
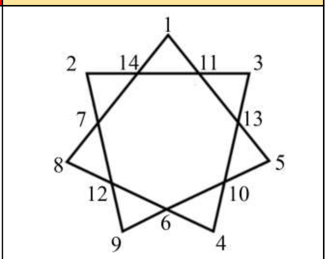
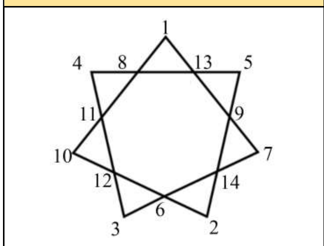
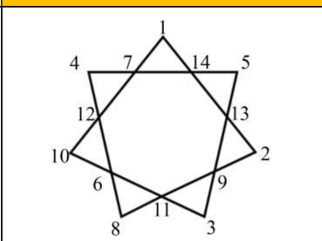
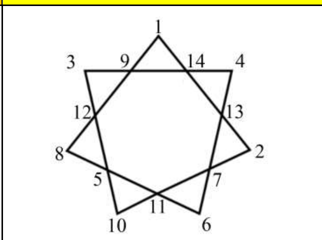
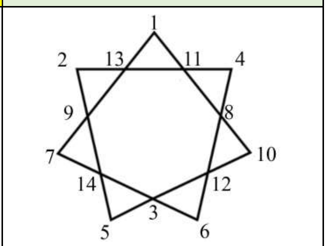
(三) 發展完成七角幻星的策略與通解

在確定七角幻星的頂點和範圍後，我們想出了三種可以快速完成七角幻星的策略，以方便我們找出七角幻星的通解。用表格方式整理如下：

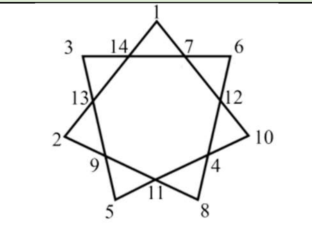
1.七角幻星的策略

<table>
<tr><th></th><th>策略說明</th><th>示例說明</th></tr>
<tr><td>第一型</td><td>對於任意完成之七角幻星，將其各點上每一數 x 替換成該數對於 15 之補數(15-x)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>第二型</td><td>對於頂點和為最小值 28 之幻星，此時頂點數為 1~7，將頂點數加 7，並將內圈數都減 7</td><td>
</td></tr>
<tr><td>第三型</td><td>對於頂點和為最大值 77 之幻星，此時頂點數為 8~14，將頂點數減 7，並將內圈數都加 7</td><td>
</td></tr>
</table>

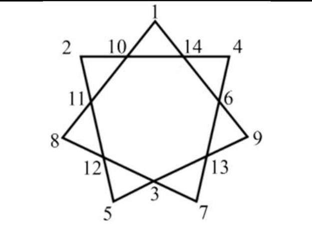
2.七角幻星的通解列表

<table>
<tr><th>頂點和:28</th><th>頂點和:28</th><th>頂點和:31</th><th>頂點和:32</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th>頂點和:32</th><th>頂點和:33</th><th>頂點和:34</th><th>頂點和:35</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

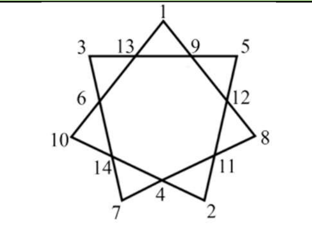
頂點和:35



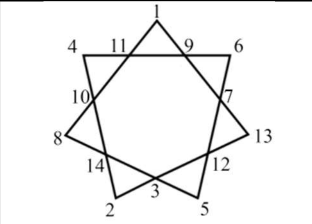
頂點和:36



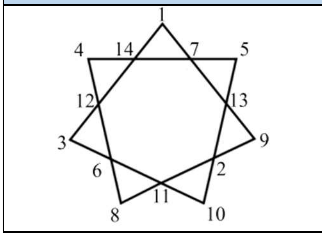
頂點和:36



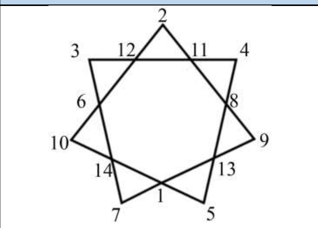
頂點和:39



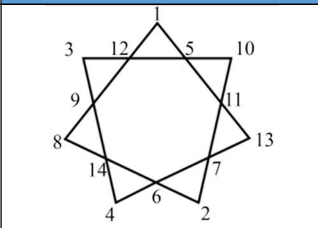
頂點和:40



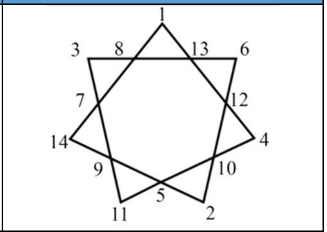
頂點和:40



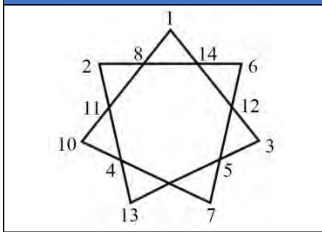
頂點和:41



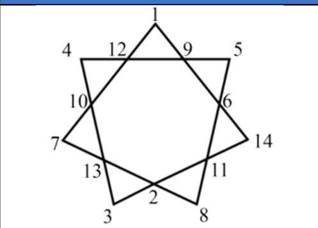
頂點和:41



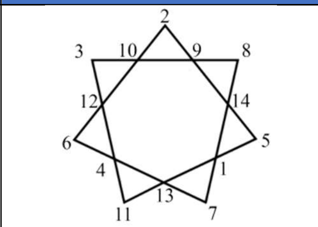
頂點和:42



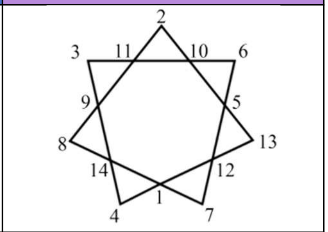
頂點和:42



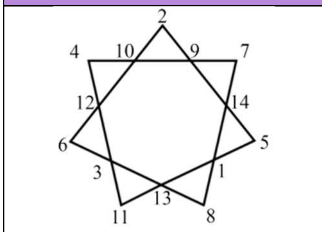
頂點和:42



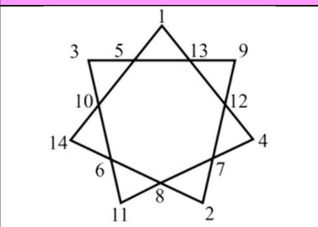
頂點和:43



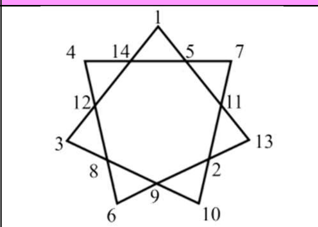
頂點和:43



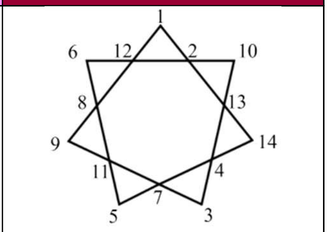
頂點和:44



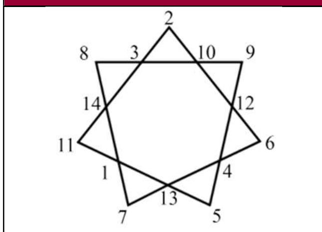
頂點和:44



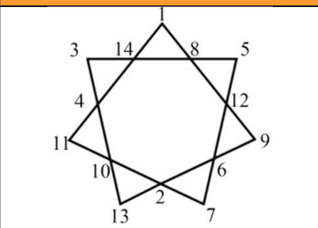
頂點和:48



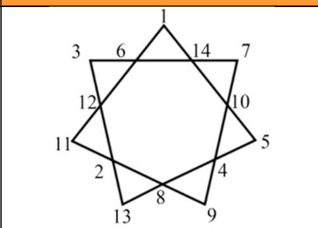
頂點和:48



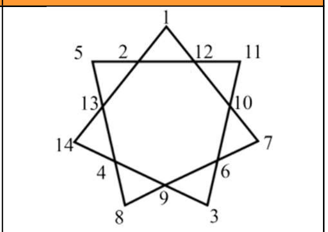
頂點和:49



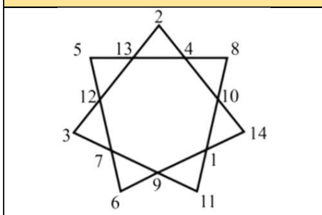
頂點和:49



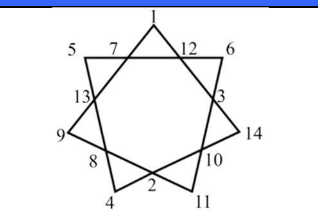
頂點和:49



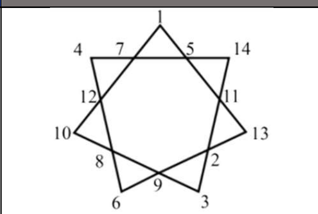
頂點和:49



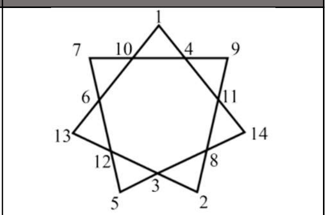
頂點和:50



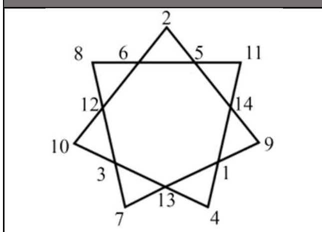
頂點和:51



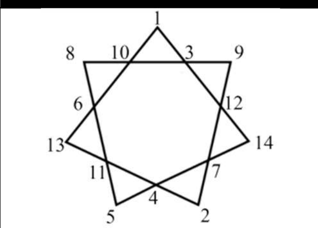
頂點和:51



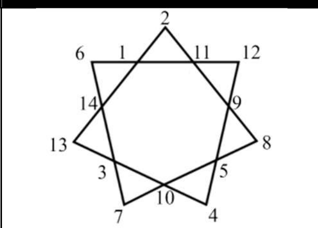
頂點和:51



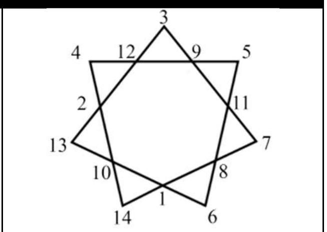
頂點和:52



頂點和:52



頂點和:52



因受作品頁數限制，將全部七角幻星通解置於下方連結，請自行參閱：

https://drive.google.com/open?id=1fL0_d7PLfMYiyfpglZ6GYkdtwBUb_D6_

(四) 驗證七角幻星頂點和與解的個數對稱性

從探討六角幻星時，我們發現頂點和解的個數形成左右對稱的有趣現象。因此我們預測七角幻星也有此現象，以下列出了頂點和與解個數的表格，發現解的分布情況如下表，同樣也有對稱現象存在。(以藍色線為對稱軸)

頂點和	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
個數	2	0	0	1	2	1	1	2	2	0	0	1	2	2	3	2	2	0	0	0	2	4	1	3	3
頂點和	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53
個數	2	0	0	1	2	1	1	2	2	0	0	1	2	2	3	2	2	0	0	0	2	4	1	3	3

得出七角幻星通解共 72 組，與網路資料（參考資料三）不符，我們實際檢查後發現網路解答中有重複者，但作者並未察覺，故應利用對稱性推理，72 組才是正確的七角幻星組數。

(五) 頂點和 29、76 之七角幻星不存在證明

我們在做完全部通解才發現某些頂點和無法構成幻星，所以我們想試著以之前的數字特徵發現及定理直接用數學證明的方式來推理不存在的頂點和。

以 **29 為例**，如果欲知其他頂點和，可依此類推。

依照公式 $M=4n+2$，得 $M=4\times7+2=30$，故每邊和與頂點和均為 30。

假設頂點和 $30+x$。

1. 如果 x 為偶數

   則頂點數必為（7 偶 0 奇）or（5 偶 2 奇）or（3 偶 4 奇）or（1 偶 6 奇）

   此四種情形分為討論如下：

   (1) 頂點為 7 偶 0 奇

   則此 7 數必為 2、4、6、8、10、12、14

   又此 7 數和為 $2+4+6+8+10+12+14=56>30$ →←

   (2) 頂點為 5 偶 2 奇

   則此 7 數最小值為 $2+4+6+8+10+1+3=34>30$ →←

   (3) 頂點為 3 偶 4 奇

   則此 7 數最小值為 $1+2+3+4+5+6+7=28<30$

(4) 頂點為 1 偶 6 奇

則此 7 數最小值為 $1+2+3+5+7+9+11=38>30$ $\rightarrow\leftarrow$

2. 如果 x 為奇數

則頂點數必為（6 偶 1 奇）or（4 偶 3 奇）or（2 偶 5 奇）or（0 偶 7 奇）

此四種情形分為討論如下:

(1) 頂點為 6 偶 1 奇

則此 7 數最小值為 $1+2+4+6+8+10+12=43>30$ $\rightarrow\leftarrow$

(2) 頂點為 4 偶 3 奇

則此 7 數最小值為 $1+2+3+4+5+6+8=29<30$

(3) 頂點為 2 偶 5 奇

則此 7 數最小值為 $1+2+3+4+5+7+9=31>30$ $\rightarrow\leftarrow$

(4) 頂點為 0 偶 7 奇

則此 7 數最小值為 $1+3+5+7+9+11+13=49>30$ $\rightarrow\leftarrow$

3. 如右圖接續討論

由幻星常數 $B+C+D+E=30$，$A+B+H+L+N+I+E=30+x$

$\Rightarrow C+D+x=A+H+L+N+I$……① 同理 $C+F+x=B+L+N+I+E$……②

①+②$\Rightarrow 2C+D+F+2x=A+B+H+E+2(L+N+I)$

$\Rightarrow 2C+D+F+2x=L+N+I+30+x$……③ 同理 $2D+C+G+2x=H+L+N+30+x$……④

③+④$\Rightarrow 3C+3D+F+G+2x=2(L+N)+H+I+60$

$\Rightarrow 90-3B-3E+F+G+2x=2(L+N)+H+I+60$

$\Rightarrow 30+2x=3B+3E+2(L+N)+H+I-F-G=2B+2E+L+N-F-G+30+x-A$

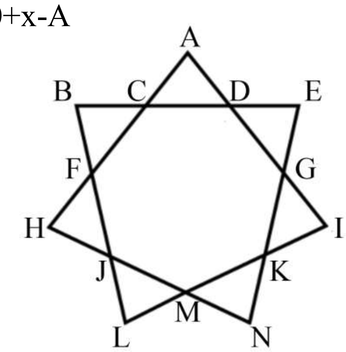
$\Rightarrow A+F+G+x=2B+2E+L+N$

$\Rightarrow A+F+G+x=B+30-F-J+E+30-G-K$

$\Rightarrow A+2F+2G+J+K+x=60+B+E$

令 $x=-1$，則 $A+B+H+L+N+I+E=30+x=29$

又因 x 為奇數$\Rightarrow$頂點數必只可為 1、2、3、4、5、6、8



則內圈數字為 7、9、10、11、12、13、14

$A+2F+2G+J+K=61+B+E$

$2F+2G+J+K$ 的最小值為 53（取 $F=7,G=9,J=10,F=11$）

$\Rightarrow A+53=60+B+E\Rightarrow A=B+E+7\rightarrow\leftarrow$（$\because$最大值 $A=8$，B、$E\in N$）

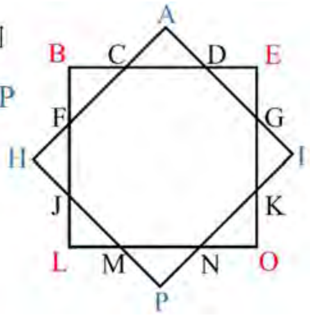
故不存在頂點和為 29 之七角幻星

並由對稱型 2n+1(定理三、四)得頂點和為 76 之七角幻星也不存在。

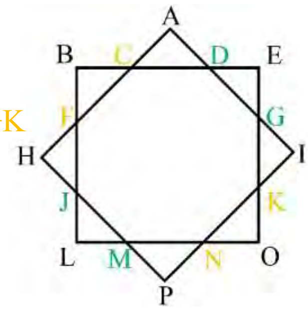
五、正八角幻星之探討

(一) 八角幻星的特徵發現與證明

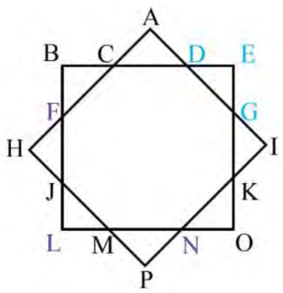
<table>
<tr>
<td>
發現 1
紅字母和=藍字母和
B+E+L+O=A+H+I+P
(即半頂點和相等)



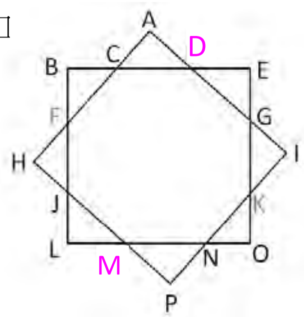
</td>
<td>
Pf：
∵每一條線的和均為 34
A+C+F+H+H+J+M+P+P+N+K+I+A+D+G+I
=B+C+D+E+E+G+I+O+O+M+N+L+L+J+F+B
即 2(A+H+P+I)+C+D+F+J+M+N+K+G
=2(B+E+L+O)+C+D+F+J+M+N+K+G
故 A+H+P+I=B+E+L+O
</td>
</tr>
<tr>
<td>
發現 2
綠字母和=黃字母和
D+G+J+M=C+F+N+K



</td>
<td>
Pf：
設頂點和為 X，則一次內圈和為 136-X
故 D+G+J+M=(136-X)-34-34(兩條線)=68-X
同理 C+F+N+K=(136-X)-34-34(兩條線)=68-X
∴D+G+J+M=C+F+N+K
</td>
</tr>
<tr>
<td>
發現 3
藍字母和=紫字母和
E+D+G=L+F+N



</td>
<td>
Pf：由發現 2 知 D+G+J+M=C+F+N+K
B+E+L+O=$\frac{1}{2}$(136-2(C+F+N+K))=68-(C+F+N+K)
⇒B+E+L+O+G+D+J+M=68
∴B+F+J+L+L+M+N+O=B+E+L+O+D+G+J+M
故 E+D+G=L+F+N　同理 A+C+D=J+P+K
B+C+F=M+O+G　F+H+J=D+I+N
J+L+M=C+E+K　M+N+P=F+A+G
N+O+K=B+D+J　K+I+G=C+H+M
</td>
</tr>
<tr>
<td>
發現 4
粉字母和=橘字母和
M+D=K+F



</td>
<td>
Pf：
∵E+G+K+O=L+M+N+O
∴E+G+K=L+M+N…①
由發現 3 E+D+G=L+F+N…②
①-②⇒K-D=M-F
∴K+F=M+D
同理 C+N=G+J
</td>
</tr>
</table>

(二) 實作出八角幻星的通解

因為最小的四數為 1、2、3、4 故其最小值從 10 開始探討

10⇒1+2+3+4(不合)

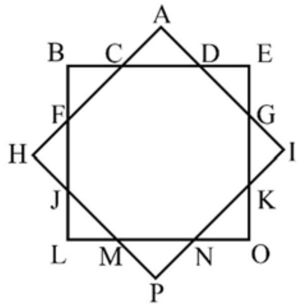
11⇒1+2+3+5(不合)

12⇒1+2+3+6=1+2+4+5(兩兩搭配後均有重複，故不合)

13⇒1+2+3+7=1+2+4+5(兩兩搭配後均有重複，故不合)

經檢驗後八角幻星半頂點和的最小值為 19，且此時的可能性為【(1、5、6、7)，(2、3、4、10)】

1. 【(1、5、6、7)，(2、3、4、10)】，可能性有 24 種，經實作研究後可發現只有一組成立。



2. 【(1、5、6、7)，(2、3、4、10)】求解

   (1) 決定配對順序

   pf：因為頂點和已被 1、2、3、4、5、6、7、10 填入，

   故只剩 8、9、11、12、13、14、15、16 為內圈。

   又因頂點和總合為 $19\times2=38$，故內圈和為 136-38=98，

   則 C+F+N+K=98÷2=49=D+G+J+M

   故 8、9、11、12、13、14、15、16 可分為兩組，分別為(8、11、14、16)與(9、12、13、15)

   (2) 利用發現 4 檢驗

   pf：D+M=J+G，又(8、11、14、16)與(9、12、13、15)中

   8+14=9+13；11+16=12+15；8+16=9+15；11+14=12+13

   故最後可用發現 4 來驗證其正確性。

3. 代入頂點和，求解

   以(1、5、6、7)為標準，用 M 扣掉兩兩相加之後的和。共有六個數，分別為 21、22、23、26、27、28，又唯有 28=12+16，但 12 與 16 卻不在同一條線上。34-28=6=1+5，故可確定 1 和 5 必為 B，E，L，O 上的其中兩點。由對稱性的關係，不失一般性設 B=1，C=16，D=12，E=5，

   則 F=11，A+H=34-(C+F)=34-(16+11)=7=3+4，由發現 4：C+N=J+G，

   故假設 N=8，又發現 4：D+M=F+K，故 M=13，K=14。

   此時只剩 15 和 9 未定位，又 F+J=15+11=26 or F+J=11+9= 20(不合)

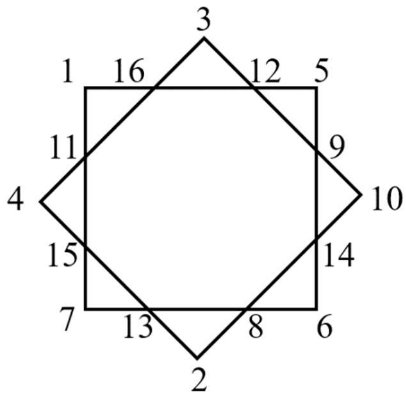
   故 J=15，G=9。

4. 固定頂點和

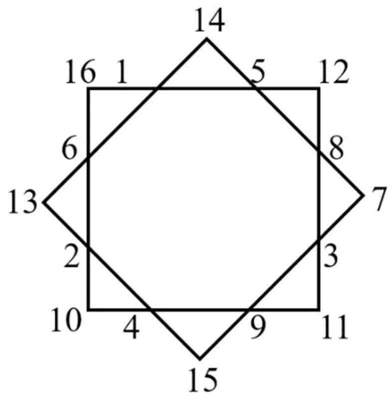
pf：∵A+H=7 且 A+I=13，∴A=3，H=4，I=10，故 P=2。

∵B+E=6 且 B+L=8，∴B=1，E=5，L=7，故 O=6(如下圖一)。

5. 利用定理三，完成另一種解如圖二，此即為解八角幻星的策略步驟。



(圖一)



(圖二)

(三) 八角幻星頂點和的通解個數：

從六角、七角幻星頂點和與解的個數都有對稱的現象，在八角幻星中特別的是，其頂點和是以 68 為對稱中心，以下列出了頂點和與解個數的表格如下，同樣也有對稱現象存在。(以橘色線為對稱軸)

頂點和	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68
個數	2	0	2	1	5	1	4	5	3	2	6	7	5	1	3	18
頂點和	98	96	94	92	90	88	86	84	82	80	78	76	74	72	70	
個數	2	0	2	1	5	1	4	5	3	2	6	7	5	1	3	

得出八角幻星通解共 112 組，與網路資料（參考資料四）給的 104 組解不符，我們實際檢查後發現網路解答中有遺漏者，但作者並未察覺，故應利用對稱性推理，112 組才是正確的八角幻星組數。因受作品頁數限制，八角幻星通解置於下方連結，請自行參閱：

https://drive.google.com/open?id=1ZRrNz7Z7ZUiiPHJfZ8tiglrfxve-Xjfq

伍、研究結論

一、在 n 角星其 n 個頂點及邊的交點上填入 1 至 2n 的整數，使得每一條邊上的四個數字相加後皆相等，此數字和即為幻星常數。證明幻星常數與角數 n 相關，M =4n+2。

二、證明出五角幻星不存在，即不可能將連續 10 個整數填入五角星形的頂點及邊上的交點，使得每一條邊上的四個數字總和皆相等。

三、證明網路流言：將 1 至 10 正整數中剔除 7，加入 12 可變成一個有解的終極幻星(頂點和恰等於幻星常數)，此說法並不正確。證明後發現剔除 7，加入 12 只能使得每一條邊上的數字和相等，並不可能使頂點和恰等於幻星常數，即只能使五角幻星成立，未達終極幻星境界。

四、在六角星形部分，發現三種數字組成特徵及三種對稱變換方式，能使六角幻星成立，且六角幻星頂點和與通解個數呈現出對稱性(如第 14~18 頁表)。

五、證明出唯有六角星形中有終極幻星存在，共有六種解(如研究中第 12 頁所示)。而其他多角星形皆不可能有終極幻星解。

六、利用奇偶性與極值證明不存在七角終極幻星，但七角幻星可成立，找到三種可以快速完成七角幻星的策略，發現頂點和與解的個數亦形成對稱的有趣現象(如第 22.23 頁表)。

七、證實網路流言：六角幻星、七角幻星、八角幻星的通解個數分別為 80、72、104 個，此說法錯誤，應用本研究頂點和與解的對稱性可達成通解個數的正確性。

八、正多角幻星特徵比較表

	五角	六角	七角	八角
填入數字	1~10	1~12	1~14	1~16
幻星常數	22	26	30	34
解的個數	0	80	72	112
頂點和範圍	無	24~54	28~77	38~98
不存在的頂點和值	因五角幻星不成立故不討論	28、50	29、30、37、38、45、46、47 76、75、68、67、60、59、58	40、96
是否有終極幻星	無	有	無	無
與網路資料比較	網路資料錯誤	網路資料錯誤	網路資料錯誤	網路資料錯誤

九、運用五、六、七角幻星找解的實作經驗，證明出八角幻星的四種數字組合特徵，並提供快速完成八角幻星的策略。

十、完成 n 角幻星策略步驟：計算幻星常數→尋找數字組合特徵發現→找出頂點和極值→利用連續相異整數及奇偶性→實作出一組解→利用定理三得另一組解。

十一、 證明出 n 角幻星的通解具有成對性，所以 n 角幻星通解組數必為偶數，可分成第一型與變化型，第一型的交點與其變化型對應交點和為 2n+1，第一型頂點和與變化型的頂點和，兩型總頂點和為$2n^2+n$。

十二、 回應到研究動機中的遊戲，我們可以提供一些遊戲規則的建議

1. 可由六角星的情境，推廣到七角星、八角星都可有幻星的成立。
2. 由本研究找出的頂點和範圍及通解個數，可以增加遊戲的困難度與多樣性。

陸、未來展望

目前我們發現五角幻星、六角幻星、七角幻星、八角幻星的通解個數分別為 0、80、72、112，希望未來能找出 n 角幻星，n 與幻星通解個數的函數關係；n 與 n 角幻星頂點和最大值、最小值的對應函數關係。

柒、參考資料與其他

一、維基百科：

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%BB%E6%98%9F

二、六角幻星：

http://blog.sina.com.cn/s/blog_4cfcf1650102volb.html

三、七角幻星：

http://blog.sina.cn/dpool/blog/s/blog_4cfcf1650102wgex.html?cre=blogpagew&mod=f&loc=1&r=10&rfunc=-1

四、八角幻星：

http://blog.sina.com.cn/s/blog_4cfcf1650102w0bo.html

五、“星星的秘密”第四十五屆全國中小學數學科展作品

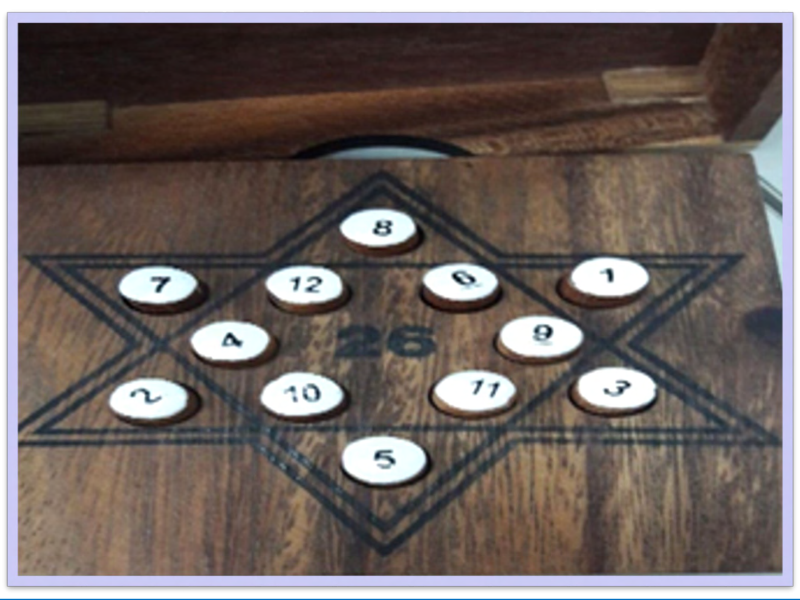
【評語】030401

考慮在 n 角星形各邊的交點上標 1~2n 這些整數（每個數字恰出現一次），使得每個邊上的點所標的數字的總和相同的問題。作者們針對五、六、七、八角星形的解作了分析，給出了解答。對於更進一步，要滿足星形各頂點的數字總和等於各邊的數字和的標號方式是否存在的問題，也做了完整的討論。這是由魔方陣問題所衍生而出的有趣的問題。作者們先從原本的限制條件出發，推導出一些基本規則，再藉由這些規則，給出了滿足條件的解的特性，並進一步的運用這些特性來找出所有的解。想法很好，值得嘉許。比較美中不足的是，有部分的論述過程稍嫌紊亂，看起來比較像是作者們直觀的想像，而不像是邏輯推演的結果。這樣的說明會讓人對結論是否正確無誤產生疑問。如果在說理的時候能更仔細，把論述的過程表述的更為清楚，會更好。

作品海報

研究動機

我們到廈門參加華羅庚金杯數學競賽，最後團體賽是在時間內將 1~12 的棋子填入一個六角星形，使其每一個邊之和都為 26，且六個頂點和也為 26。我們想研究這個題目，幫它取了一個與知名填數字遊戲「魔方陣」異曲同工的名稱-幻星，想探討幻星的數字組合特徵？找出所有符合題目要求的通解？試試看別的多角星形是否也存在相通的規則？同時和網路上一些未附證明的解答相比較，檢驗網路資料是否正確。



研究目的

一. 探討出能讓正多角幻星成立的數字組合特徵

二. 找出能滿足頂點和與同一線上數字和相等的終極幻星

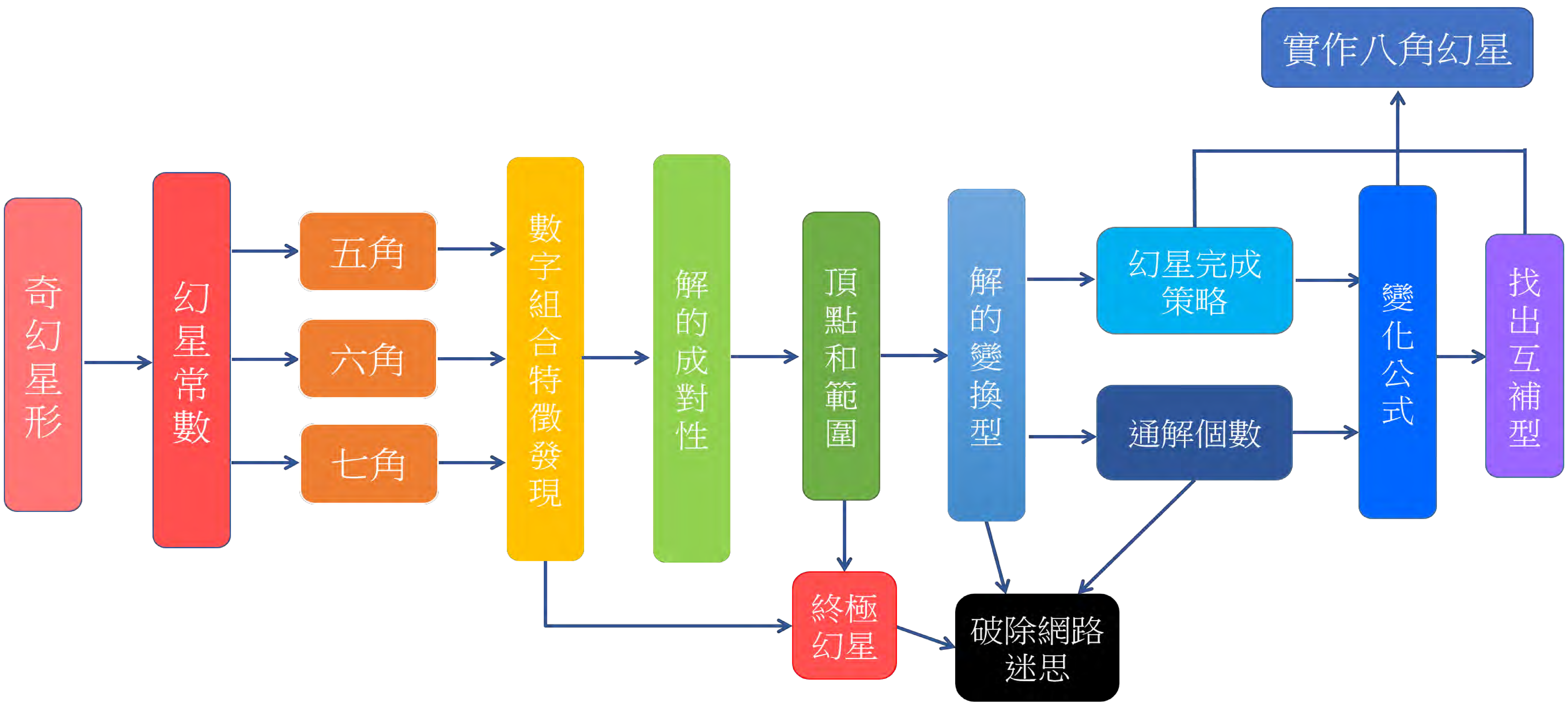
三. 找出正 N 角幻星(N=5~8)的通解個數及頂點和範圍

四. 發展出能完成正 N 角幻星的策略

自訂名詞解釋

- **幻星**：是在正 n 角星上的頂點與交點填入 1 到 2n 的連續數字，並使在 n 角星上共線的四個點和相等。
- **幻星常數**：指每一條邊上之交點或頂點數字和皆相等成立時，每一條邊上的四個數字和稱為幻星常數，本研究中簡稱為 M。
- **終極幻星**：當一個正 n 角幻星，其 n 個頂點和恰等於幻星常數時稱之。

研究架構



研究過程與方法

幻星常數及終極幻星限制之證明

定理一

***n* 角幻星，幻星常數為 M=4*n*+2 ($n \geq 5, n \in N$)**

定理二

能使終極幻星成立的角數範圍為五、六、七角星

定理三

若$\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n}\}$是滿足 n 角幻星的一組解，且 $A_1+B_1=A_2+B_2=A_3+B_3=\cdots=A_{2n}+B_{2n}=2n+1$，

則$\{B_1,B_2,B_3,\ldots B_{2n}\}$必是滿足此 n 角幻星的另一組解。

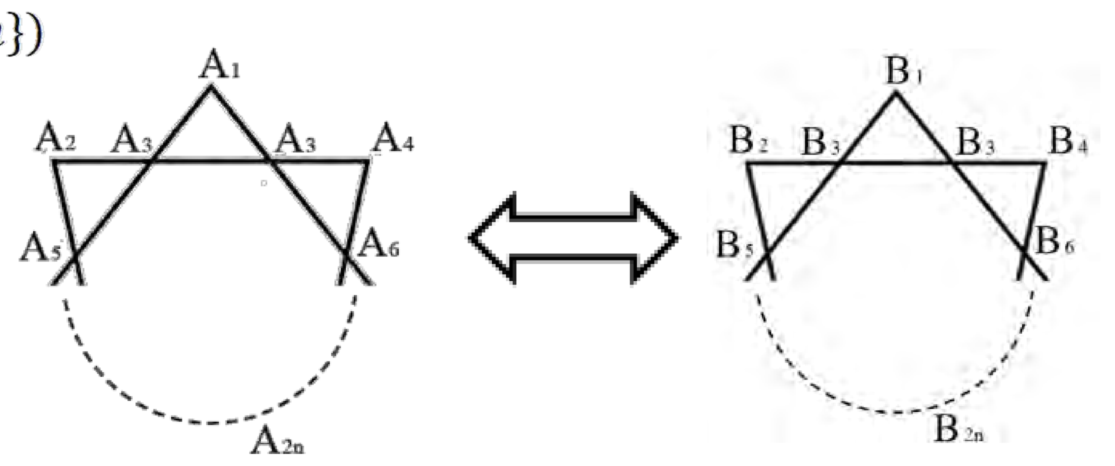
pf:設A_i,A_j,A_h,A_k位於同一條線上$\Rightarrow A_i+A_j+A_h+A_k=4n+2\ \ (i,j,h,k\in\{1,2,\ldots,2n\})$

又$A_1+B_1=A_2+B_2=A_3+B_3=\cdots=A_{2n}+B_{2n}=2n+1$

$\Rightarrow[(2n+1)-B_i]+[(2n+1)-B_j]+[(2n+1)-B_h]+[(2n+1)-B_k]=4n+2$

$\Rightarrow B_i+B_j+B_h+B_k=4n+2=$幻星常數M

$\therefore\{B_1,B_2,B_3,\ldots B_{2n}\}$必是滿足此$n$角幻星的另一組解



定理四

若$\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n\}$是滿足 n 角幻星解的頂點數字，且 $A_1+B_1=A_2+B_2=A_3+B_3=\cdots=A_n+B_n=2n+1$，

則$\{B_1,B_2,B_3,\ldots,B_n\}$必是滿足此 n 角幻星解的另一組頂點數字，且$\sum_{i=1}^{n}A_i+\sum_{i=1}^{n}B_i=2n^2+n$。

pf:由定理三知道n角幻星解有成對性，位置相對應的兩點數字和為$2n+1$

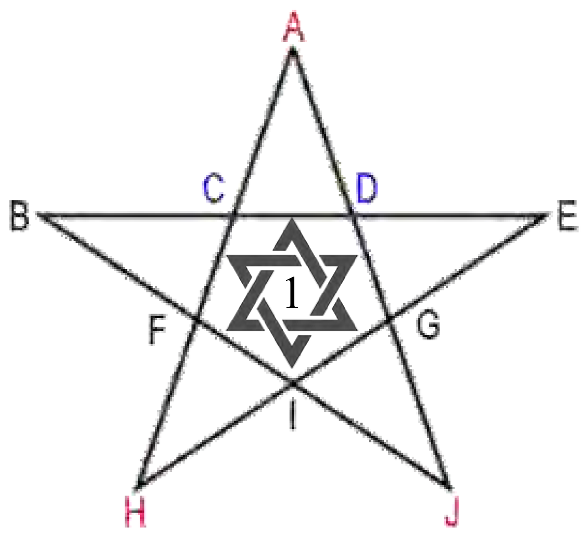
已知$\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n\}$是滿足解的頂點數字，且$A_1+B_1=A_2+B_2=\cdots=A_n+B_n=2n+1$

$\Rightarrow\{B_1,B_2,B_3,\ldots B_n\}$必是滿足此$n$角幻星解的另一組頂點數字

$\therefore\sum_{i=1}^{n}A_i+\sum_{i=1}^{n}B_i=\sum_{i=1}^{n}(A_i+B_i)=\sum_{i=1}^{n}2n+1=n(2n+1)=2n^2+n$

正五角星形之探討

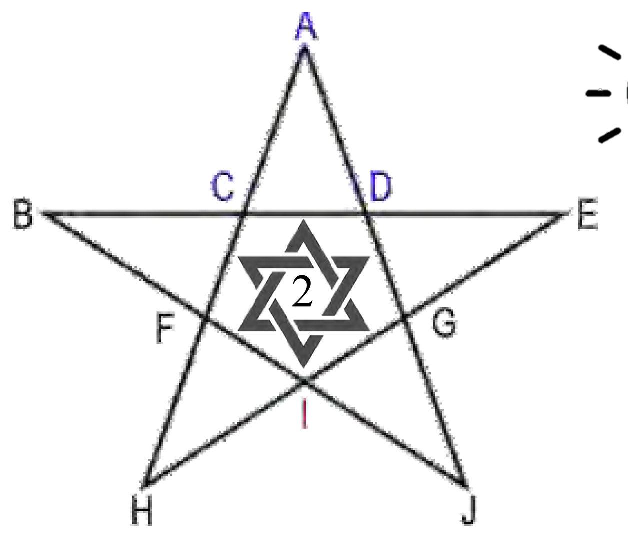
五角終極幻星的數字組合特徵發現



C+D=A+H+J

pf. ∵ B+C+D+E=A+B+E+H+J

∴ C+D=A+H+J



A+C+D=11+I

pf. ∵ C+D=A+H+J

∴ A+C+D=A+H+A+J=22-(C+F)+22-(D+G)

=44-(C+D+F+G)

又 C+D+F+I+G=55-(A+B+E+H+J)=55-22=33

故 A+C+D=44-(33-I)=11+I

正五角星形之探討

五角幻星不存在的證明

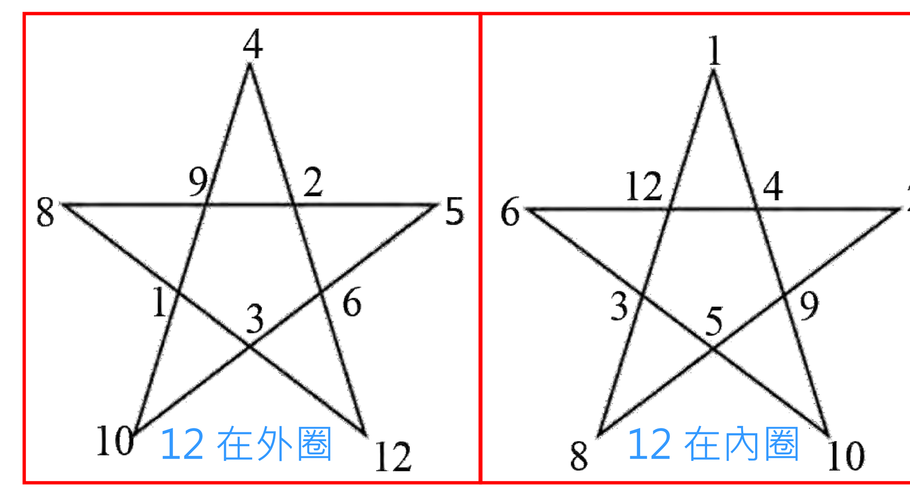
由反證法推論→數字 1 和 10 必在同一條線上
不失一般性將 1 和 10 放入討論，會出現重複數字，與相異整數的規則矛盾。
故不存在填入 1~10 連續整數構成的五角幻星
亦不存在任意連續 10 個整數之五角幻星

網路迷思 1

將 1 至 10 正整數中剔除 7，加入 12 可變成一個有解的「終極幻星」

破解之道

新幻星常數 24，只有五角幻星，沒有終極幻星。

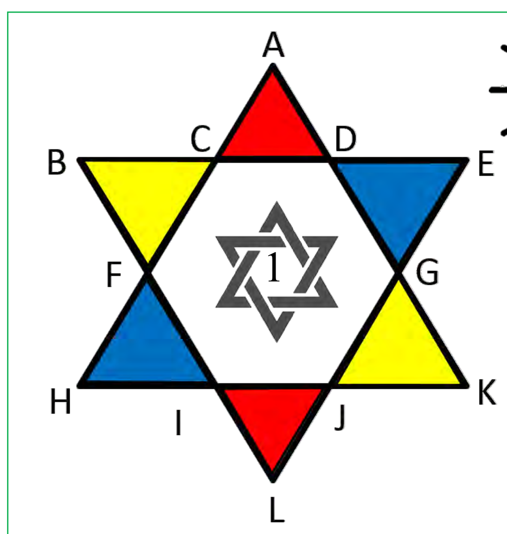


五角星形結語

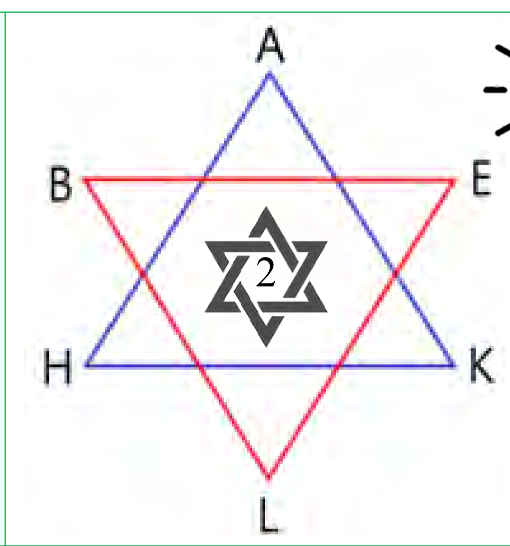
在文獻探討中（第 45 屆國中數學科展作品＜星星的秘密＞）比較差異點：
在＜星星的秘密＞中並沒有探討終極幻星的面向，最後以放寬填入數字範圍，不使用連續正整數，只探究了五角星形部分。我們希望能遵守初始研究動機之遊戲規則，也就是使用 1 到 2n 的連續正整數來探討 n 角星，所以在接下來的六角星、七角星、八角星依然採用連續整數來探討出幻星通解及終極幻星的存在性。

正六角星形之探討

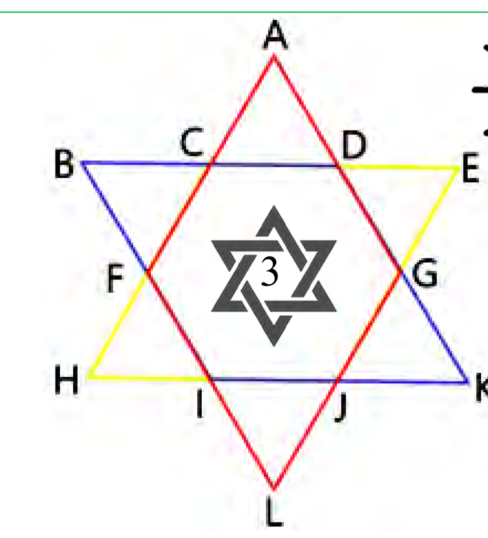
六角幻星的數字組合特徵發現



A+C+D=I+J+L
F+H+I=D+E+G
B+C+F=J+G+K



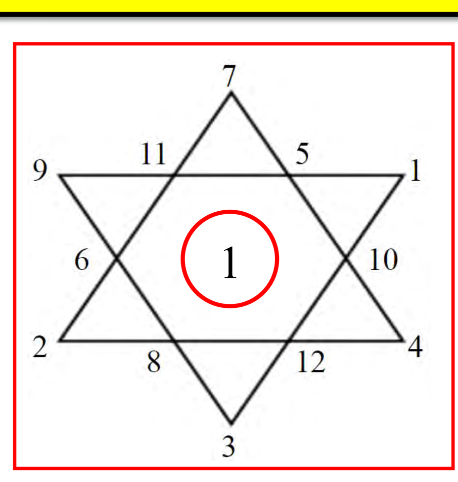
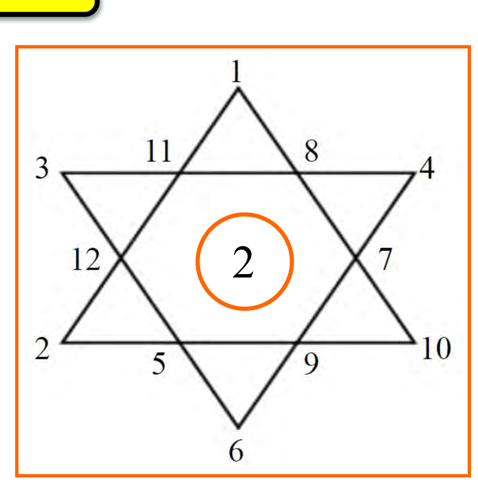
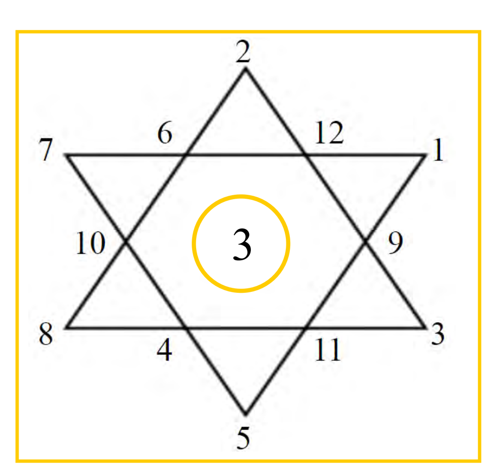
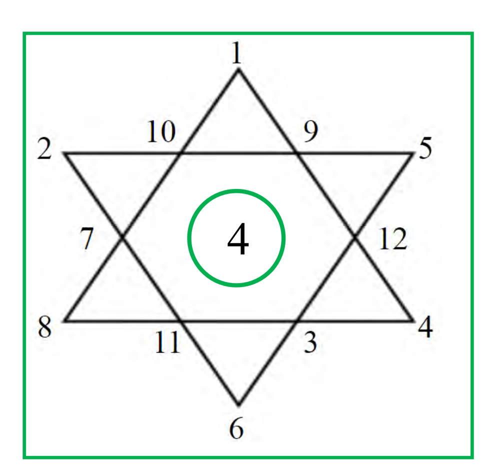
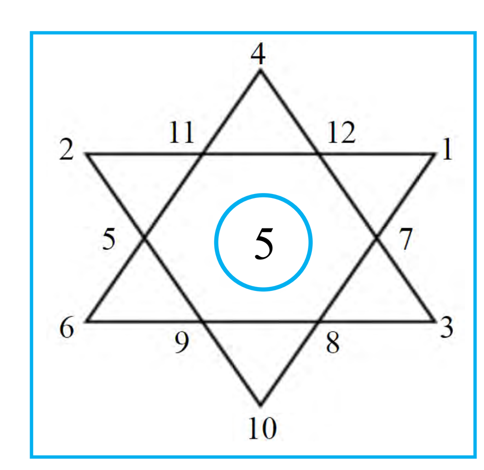
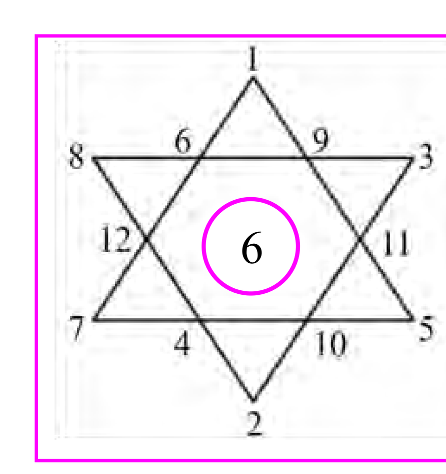
A+H+K=B+E+L



A+F+G+L=26
B+D+I+K=26
C+E+H+J=26

六角終極幻星的六組解

頂點和=六角幻星常數 26

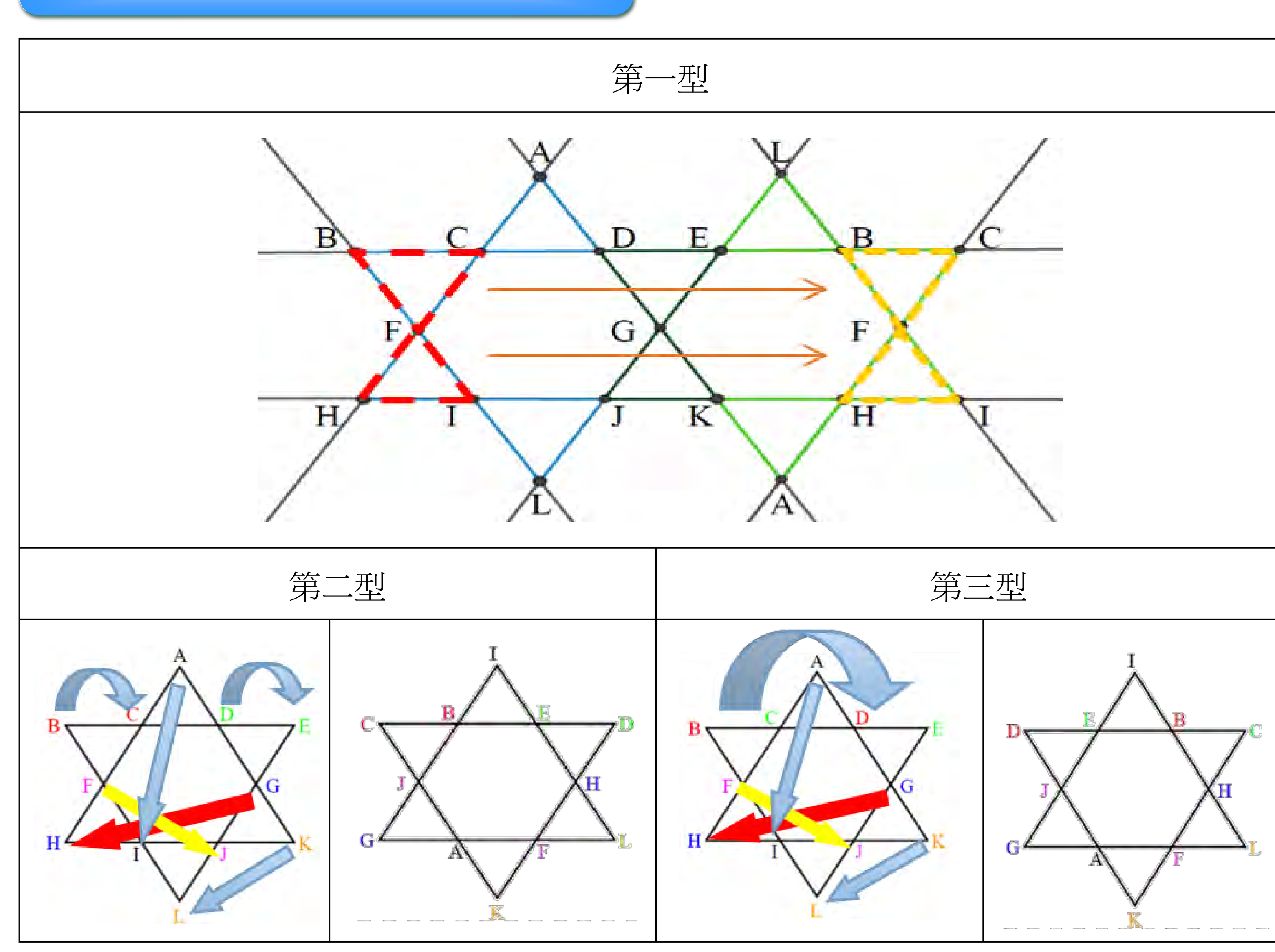
六角幻星頂點和範圍的探討

探討六頂點和最小值→發現 2 得知 A+H+K=B+E+L，所以要找 1~12 中六個不同數字，三個一組加起來值一樣的最小解。
經驗證後【(1,2,9)(3,4,5)】【(1,3,8)(2,4,6)】【(1,5,6)(2,3,7)】這三組成立並算出三組幻星。 所以六角星形六個頂點和最小為 24。
利用對稱性推論出頂點和最大為 54。

網路迷思 2

網路上的資料不符，我們檢查後發現網路解答中有重複者及遺漏者，但作者並未察覺。

六角幻星幾何對稱變換型



六角幻星頂點和及解的個數

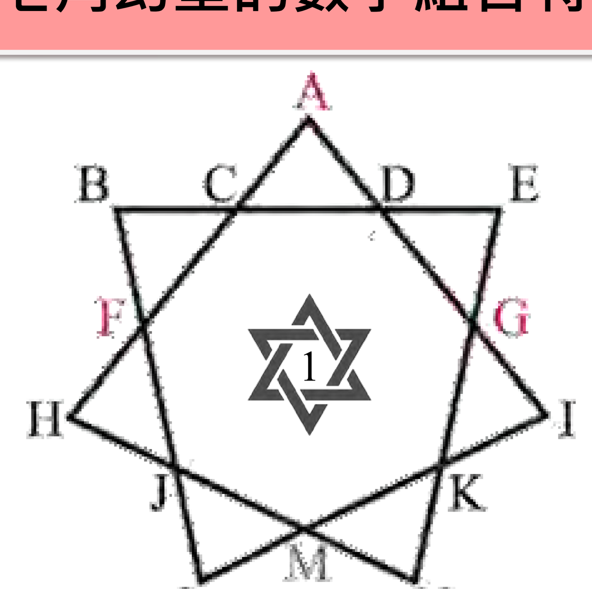
頂點和	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
個數	3	5	0	2	5	7	7	9	9	7	7	5	2	0	5	3

頂點和 28、50 之六角幻星不存在證明

由特徵發現 2、3 來討論，最後推得數字重複，故頂點和 28 矛盾。又因定理三、四，若頂點和 28 不存在，則頂點和 50 亦不存在。

正七角星形之探討

七角幻星的數字組合特徵發現



A+F+G=M+15

七角終極幻星不存在的證明

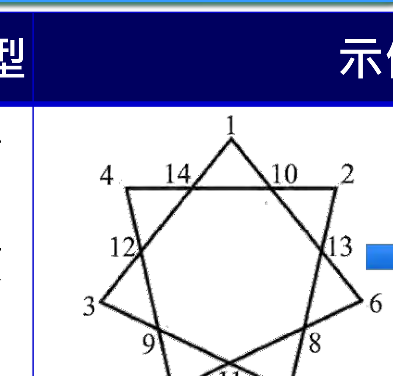
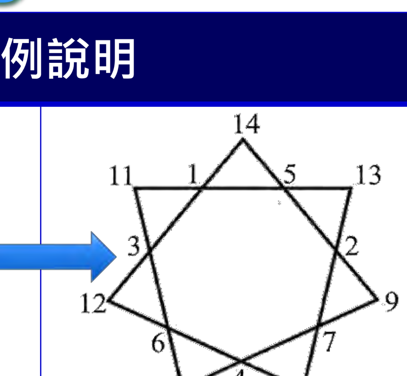
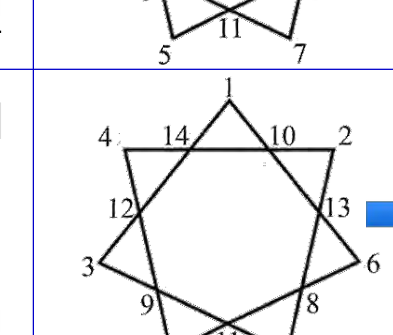
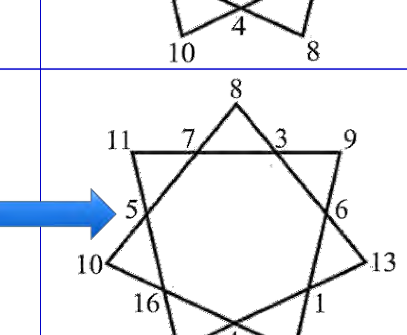
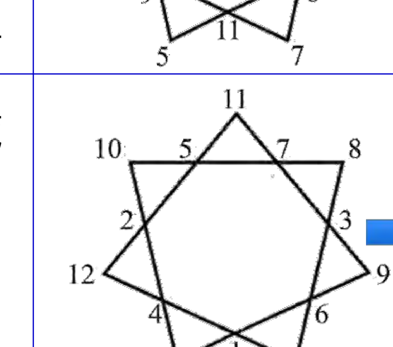
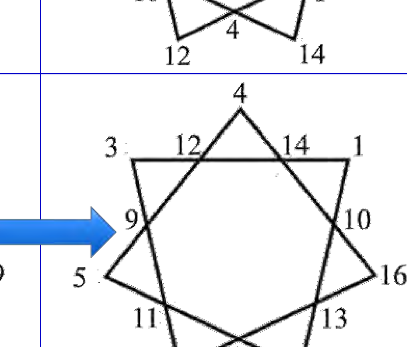
七角幻星常數 M=4×7+2=30，故每邊和與頂點和均為 30，則頂點數必為 7 偶 0 奇 or5 偶 2 奇 or3 偶 4 奇 or1 偶 6 奇
檢驗只有 3 偶 4 奇可成立。

- 頂點只可為 1、2、3、4、5、6、9，
  則內圈為 7、8、10、11、12、13、14
- 頂點只可為 1、2、3、4、5、7、8，
  則內圈為 6、9、10、11、12、13、14

接著分類代入討論➔發現都不成立

完成七角幻星的策略

有助完成七角幻星

類型		示例說明	
第一型	補數型		
第二型	加 7 型		
第三型	減 7 型		

七角幻星頂點和及解的個數

頂點和	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
個數	2	0	0	1	2	1	1	2	2	0	0	1	2	2	3	2	2	0	0	0	2	4	1	3	3

頂點和	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
個數	3	3	1	4	2	0	0	0	2	2	3	2	2	1	0	0	2	2	1	1	2	1	0	0	2

正七角星形之探討

網路迷思 3 網路上的資料(76 組)不符，我們檢查後發現網路解答中有重複者，但作者並未察覺。

破解之道 七角幻星的頂點和範圍為 28~77 ，並利用對稱性推得七角幻星通解共 72 組才是正確的七角幻星組數。

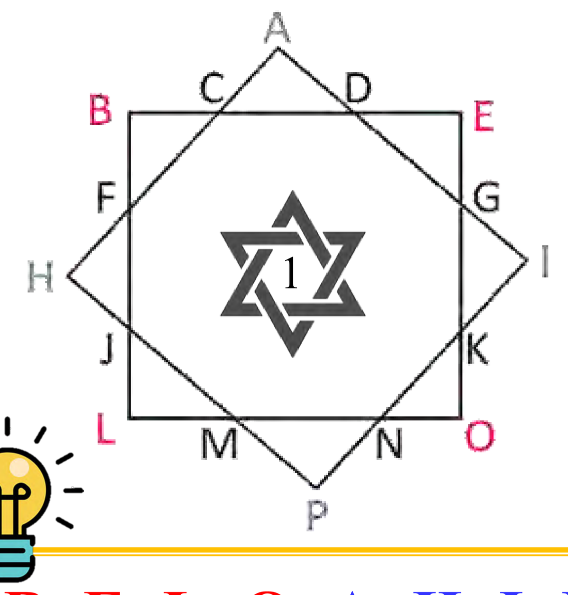
頂點和 29、76 之七角幻星不存在證明

假設頂點和 30+x ，若 x 為-1 則頂點數必為 6 偶 1 奇 / 4 偶 3 奇 / 2 偶 5 奇 / 0 偶 7 奇，檢驗只有 4 偶 3 奇可成立。

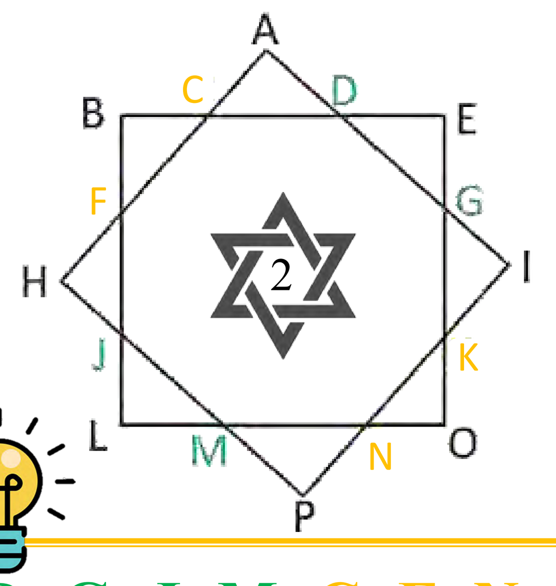
接著代入討論➔代入發現頂點和為 29 之七角幻星不成立➔並由對稱型 2n+1(定理三、四)得頂點和為 76 也不存在。

正八角星形之探討

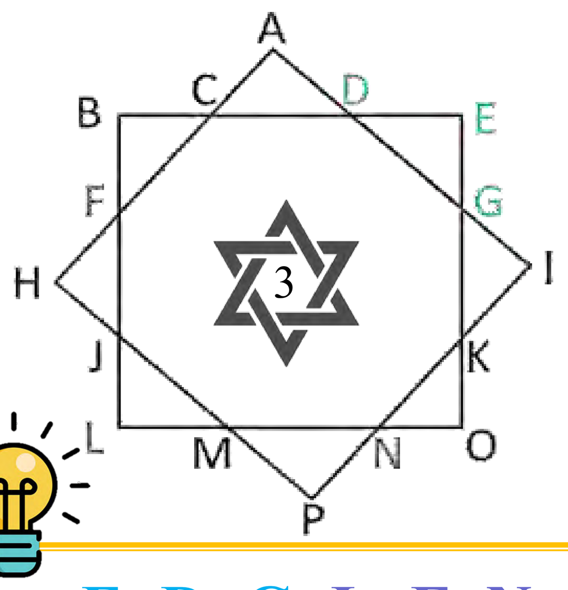
八角幻星的數字組合特徵發現



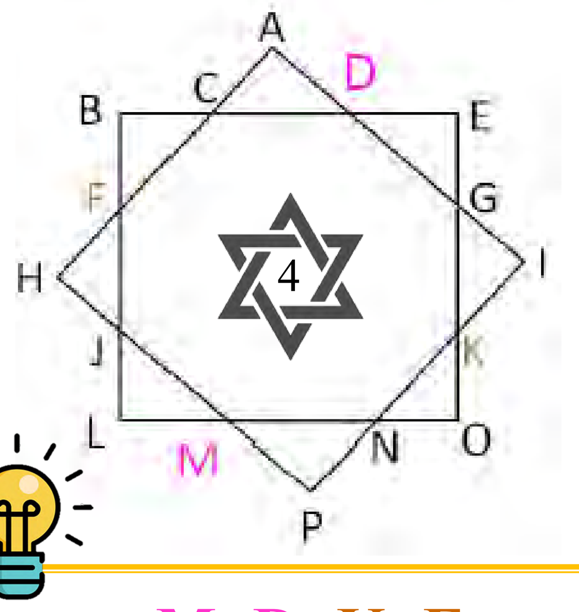
B+E+L+O=A+H+I+P



D+G+J+M=C+F+N+K

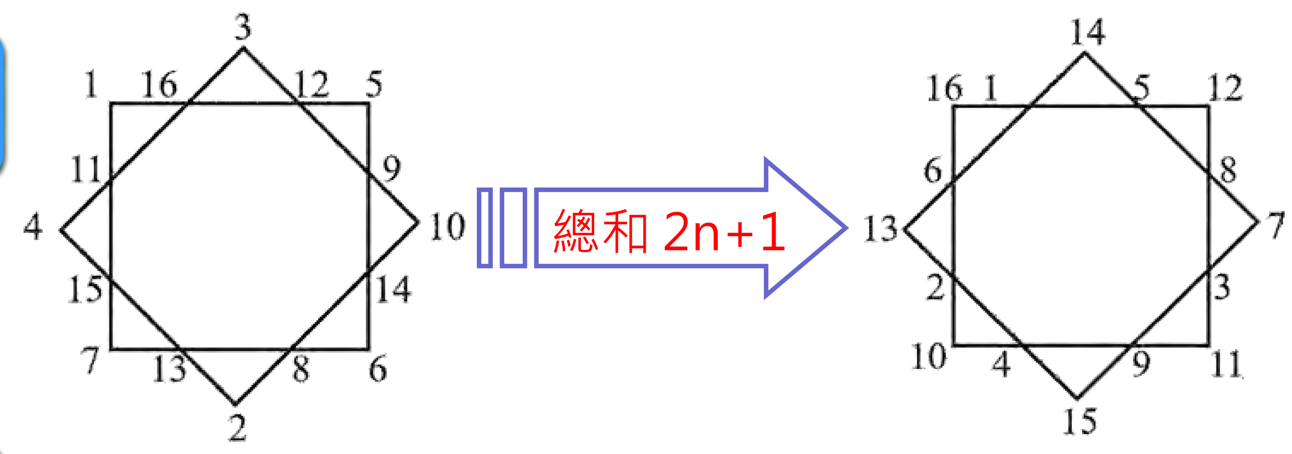


E+D+G=L+F+N



M+D=K+F

利用幻星策略實作八角幻星



八角幻星頂點和及解的個數

得出通解共 112 組，符合對稱性，與網路上的 104 組不合，證實網路資料錯誤

頂點和	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98
個數	2	0	2	1	5	1	4	5	3	2	6	7	5	1	3	18	3	1	5	7	6	2	3	5	4	1	5	1	2	0	2

研究結果

一、在 n 角形的頂點及邊的交點上填入 1 至 2n 的整數，使得每一條邊上的四個數字和皆相等，此數字和即為幻星常數。證明幻星常數與角數 n 相關，M =4n+2。

二、在六角星形部分，發現三種數字擺放特徵及三種對稱翻轉方式，能使六角幻星成立，且六角幻星頂點和與通解個數呈現出對稱性。

三、證明出唯有六角星形中有終極幻星存在，共有六種解。而其他多角星形皆不可能有終極幻星解。

四、利用奇偶性與極值證明不存在七角終極幻星，但七角幻星可成立，找到三種可以快速完成七角幻星的策略，發現頂點和與解的個數亦形成對稱的有趣現象。

五、運用五、六、七角幻星找解的實作經驗，證明出八角幻星的四種數字組合特徵，並提供快速完成八角幻星的策略。

六、完成 n 角幻星策略步驟：計算幻星常數 ➔ 尋找數字組合特徵發現 ➔ 找出頂點和極值 ➔ 利用連續相異整數及奇偶性 ➔ 實作出一組解 ➔ 利用定理三得另一組解

七、證明出 n 角幻星的通解具有成對性，所以 n 角幻星通解組數必為偶數，可分成第一型與互補型，第一型的交點與其互補型對應交點和為 2n+1，第一型頂點和與互補型的頂點和，兩型總頂點和為 $2n^2$+n。

八、回應到研究動機中的遊戲，我們可以提供一些遊戲規則的建議：

(1) 可由六角星的情境，推廣到七角星、八角星都可有幻星的成立。

(2) 由本研究找出的頂點和範圍及通解個數，可以增加遊戲的困難度與多樣性。

	五角	六角	七角	八角
填入數字	1~10	1~12	1~14	1~16
幻星常數	22	26	30	34
解的個數	0	80	72	112
頂點和範圍	無	24~54	28~77	38~98
不存在的頂點和值	因五角幻星不成立故不討論	28、50	29、30、37、38、45、46、47 76、75、68、67、60、59、58	40、96
是否有終極幻星	無	有	無	無
與網路資料比較	網路資料錯誤	網路資料錯誤	網路資料錯誤	網路資料錯誤

未來展望與應用

一、 目前找出五角幻星、六角幻星、七角幻星、八角幻星的通解個數分別為 0、80、72、112，面臨計算量越來越龐大的處境，已自學程式 python 找出九、十、十一角幻星的通解，希望未來能找出 n 角幻星，與其通解個數的函數關係以及 n 與 n 角幻星成立頂點和最大值、最小值的對應函數關係。

二、 在二階 n 角星中唯六角星形有終極幻星成立，目前利用程式 python 驗證三階七角到十七角星形都有終極幻星，期望能找到更簡明的數學方法證明之，進一步找出 n 階 n 角終極幻星之分布規律及解數，完成 n 階 n 角終極幻星的方法。

三、 多角幻星的解組合複雜度高，在遊戲方面可製成棋類遊戲，並可利用其特性設計成密碼鎖或共線平衡裝置。