

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

佳作

030114

搏扶搖而直上--鞦韆之謎

學校名稱：嘉義縣私立協同高級中學(附設國中)

作者： 國三 林鼎盛 國三 張瑋倫 國三 許文澤	指導老師： 郭建載 陳正泓
---	-----------------------------

關鍵詞：自製裝置、作功、Tracker

摘要

要怎樣才可以使盪鞦韆越盪越高？本研究將單擺在擺盪過程以拉、放線的方式模擬人在盪鞦韆時重心的改變，發現在最低點時拉線將重心提高，最高點時放線讓重心放低，單擺可以越盪越高。分別測量在固定角度變化下：(1)不同擺長 (2)不同拉線長度 (3)不同初始角度。結果發現：(1)擺長越長，所需拉放線次數越多 (2)拉線長度越長，所需拉放線次數減少 (3)初始角度越大，所需拉放線次數越少。實驗裝置原以齒輪變速進行拉放線，因不夠精確，改採以馬達帶動長桿進行拉放線。同時用 C++ 語言算出每次擺盪的角度，求出 15° 上升至 30° 所需的次數與實驗極為接近。最後將理論搭配實驗數值，以程式寫出盪鞦韆動畫，可清楚呈現正確的盪鞦韆方式。

壹、研究動機

每年四月嘉義武當山玄天上帝廟會舉辦一年一度的鞦韆節，而今年的盪鞦韆比賽中，驚人的成績令人啞口無言，與公園遊樂場的盪鞦韆截然不同，這讓我們從小的疑問又再度響起，我們都抱著一個問題：究竟盪鞦韆是怎麼越來越高的，而盪鞦韆的技巧是否會影響的擺角的差異，還是盪鞦韆的本身的設計可以決定成績？

身為嘉義人的我們，除了一同慶祝嘉義鞦韆節之外，也立志找出盪鞦韆的奧秘，於是我們決定從這個出發點進行研究。



圖 1：嘉義高空盪鞦韆比賽--年代新聞

貳、研究目的

- 一、模仿盪鞦韆時，人會蹲下、站起來，藉以改變重心的高度，設計實驗探討收線、放線時機對擺角變化的影響。
- 二、找到增加鞦韆擺角的最有效模式。
- 三、研究改變拉線長度對拉放線次數的影響。
- 四、研究改變擺長對拉放線次數的影響。
- 五、研究不同角度對拉放線次數的影響。
- 六、研究每一次拉放線後的角度變化。
- 七、以作功探討盪鞦韆的原理，利用 C++ 程式語言算出每次的理論擺角，並將理論擺盪方式代入 Vpython 程式寫出盪鞦韆動畫。



圖 2：研究流程圖

參、研究設備及器材

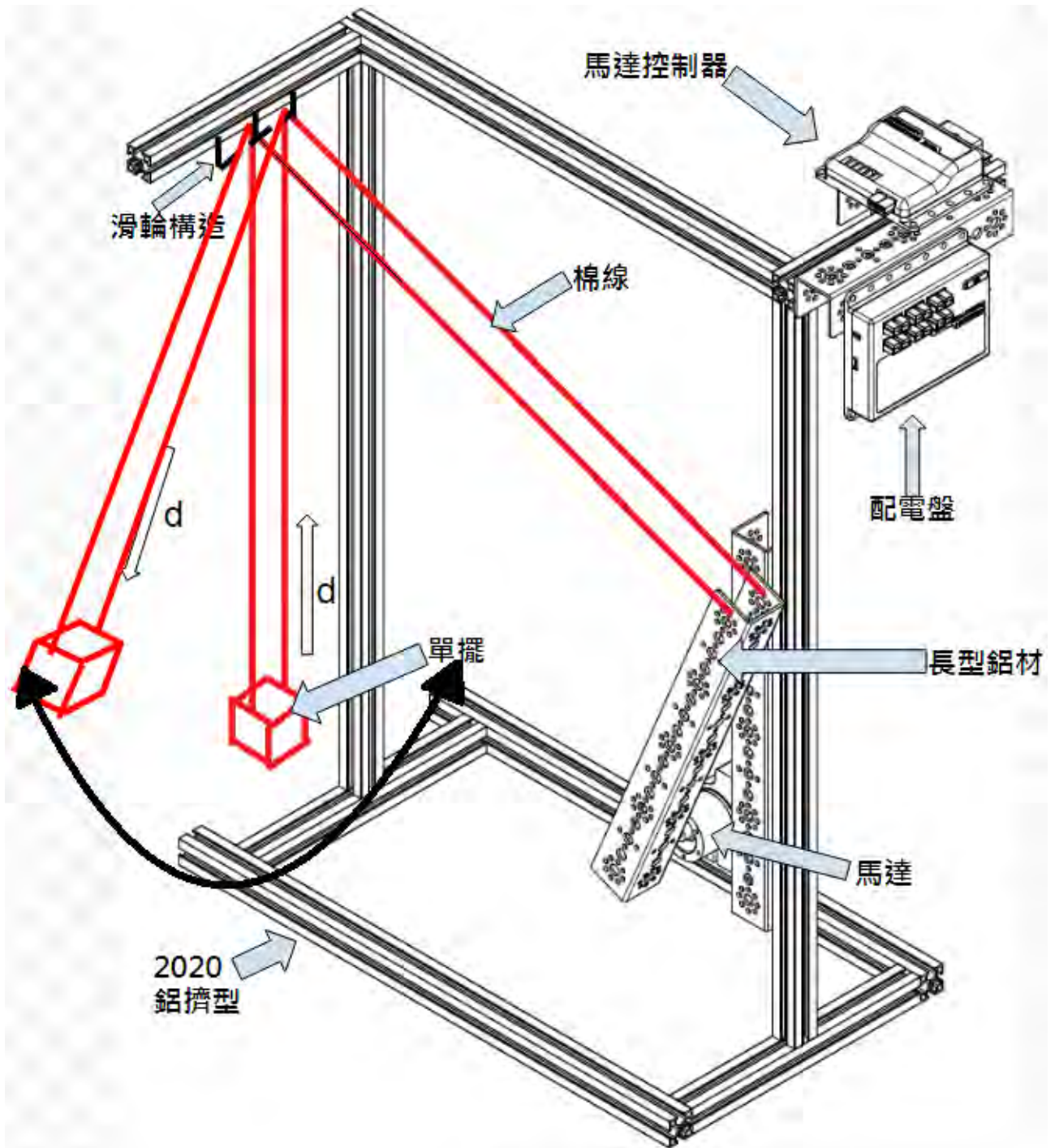


圖 3：實驗裝置圖

肆、研究過程或方法

一、研究過程

(一) 理論分析

如圖 4 所示，當鐵球由擺角 θ 經過最低點 A 點時，根據力學能守恆

$$mgR(1 - \cos\theta) = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta)}$$

在最低點 A 點時，鐵球的速率 v 最大

1. 由圓周運動公式可知：在最低點時繩子張力 T_A ， $T_A - mg = m\frac{v^2}{R}$

$$\Rightarrow T_A = mg + m\frac{v^2}{R} = mg + 2mg(1 - \cos\theta)$$

在最低點時馬達施力 F_A 拉線，將鐵球往上拉一距離 d ，

此時馬達施力 F_A 對鐵球作正功。

施力 F_A 略大於繩子張力 T_A ，故

施力 F_A 作正功 $W_A = F_A \times d \approx T_A \times d = [mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d$

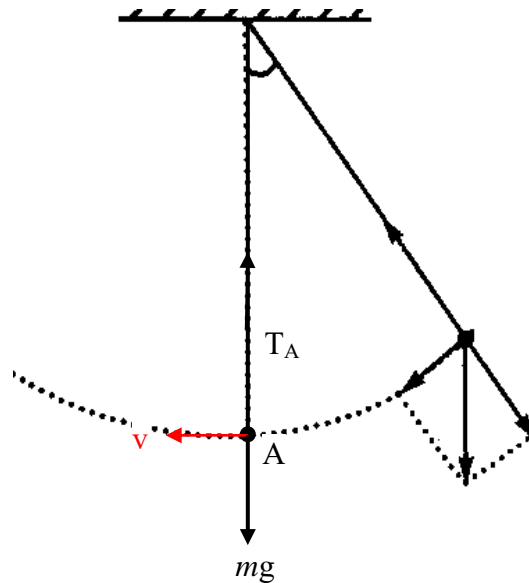


圖 4：A 點受力分析圖

2. 當單擺擺至最高點 B 時，速度為 0，根據力的分析，此時

$$\text{繩子張力 } T_B = mg \cos \theta$$

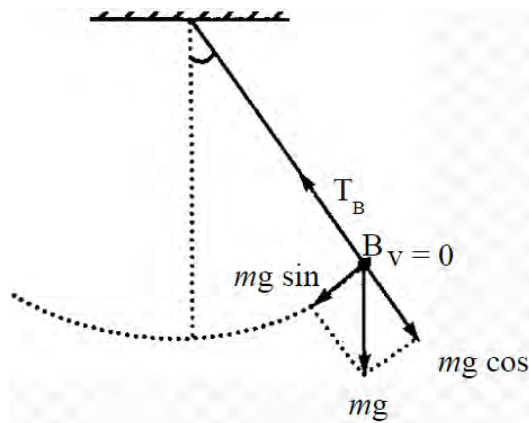


圖 5：B 點受力分析圖

在最高點時，馬達放線，使鐵球沿擺繩方向下移一距離 d ，

此時施力 F_B 對鐵球作負功。

施力 F_B 略小於繩子張力 T_B 。

故施力 F_B 作負功 $W_B = -F_B \times d \approx -T_B \times d = -mg \cos \theta \times d$

3. 在一次最低點拉線、最高點放線的過程，施力淨作功

$$W = W_A + W_B = [mg + 2mg(1 - \cos \theta)] \times d + (-mg \cos \theta \times d)$$

$$= 3mg(1 - \cos \theta) \times d > 0$$

由以上可知，施力對系統淨作功為正，只要持續拉放線，就會提供鐵球能量，因此只要以適當的方法即可使擺角越來越大。

(二) 自製實驗裝置

1. 第一代實驗裝置製作步驟：


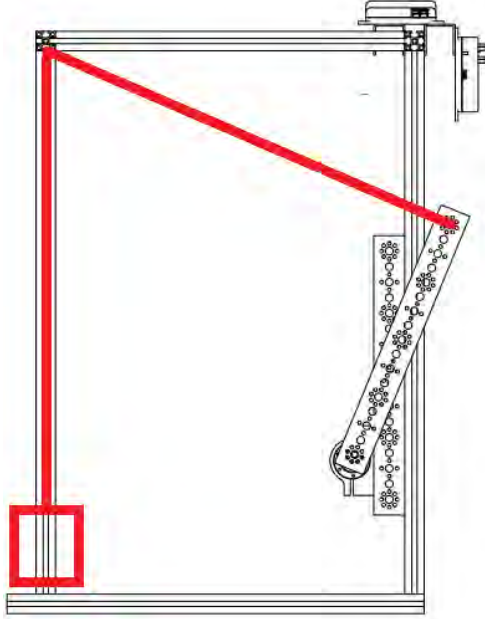
- (1) 製作一個基本骨架，作為滑輪固定的支架。
- (2) 將單擺一端綁線，另一端穿過滑輪，並固定於特製線軸上。
- (3) 將線軸固定於連軸器上，鎖在齒輪上。
- (4) 使用齒輪進行變速。(需定期上油保養)
- (5) 將程式安裝至手機。

2. 第二代實驗裝置製作步驟：

- (1) 使用 2020 鋁擠型搭建一個實驗平台。
- (2) 先安裝一個馬達，並裝上一個適當長的鋁條，做出一個拉線裝置。
- (3) 安裝兩個滑輪在鋁擠型骨架上，且將量角器固定在線的後方，且對準刻度。
- (4) 使用 C 字型的角鐵和鉛球作為擺錘，並將絲線綁好並調整至適當長。
- (5) 將絲線繞過滑輪並將另一端綁在鋁條上。
- (6) 將馬達控制器與配電盤裝在底部鋁擠型骨架，並接上電線和電池。
- (7) 將手機控制端接上。
- (8) 於單擺貼上一個紅色圓點，作為 Tracker 分析之用。

※與前一代實驗裝置比較：

	第一代	第二代(本次主要探討對象)
名稱	齒輪變速法	馬達拉動長桿法
優點	<ol style="list-style-type: none"> 1. 體積較小。 2. 不會有單擺撞到馬達的問題。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 沒有空轉問題，因此可以<u>精準地控制每次拉放線的長度</u>。 2. 維持馬達原本的加速感，因此單擺在<u>擺動時可以更加平滑</u>。(也增加之後使用 Tracker 的方便性) 3. 本次程式寫法是控制馬達轉動角度，並不會受到電壓或控制器等因素的影響。程式會使它轉動到指定角度後才停止。 4. 新增給定初始擺角的裝置，減少用手放的誤差。

<p>缺點</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 齒輪轉動時的微小間隙，使每次馬達轉動時會有短時間的空轉，造成<u>每次拉放線長度不同</u>的問題。 2. 使用齒輪變速，會使馬達原有的<u>加速感消失</u>，使單擺在擺動過程中，會十分的紊亂。 3. 程式寫法是以轉動幾毫秒來控制，可能會因為電池電壓不夠，而受到影響。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 體積較大。 2. 當單擺擺動過大時，可能會撞到一旁的馬達。
<p>示意圖</p>	 <p>圖 6：齒輪變速法結構</p>	 <p>圖 7：馬達拉動長桿法結構</p>

(三) 程式設計(使用 App Inventor 撰寫)：

1. 透過大角度單擺週期公式推估單擺由最高點擺至最低點以及從最低點至最高點所需要的時間，發現其所需時間都皆為 $T/4$ 。(T：週期)
2. 利用 Geogebra 畫出大角度週期公式的函式圖(縱軸為週期秒數,橫軸為弧度)。

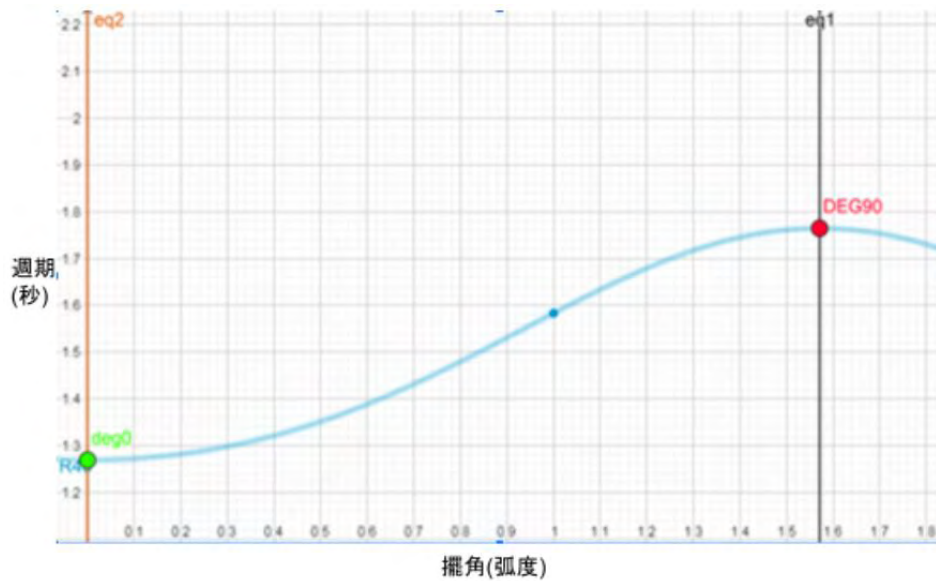


圖 8：大角度週期公式函式圖

3. 程式寫入每過 $1/4$ 個週期則變換一次狀態(拉線+放線)。

例：透過公式計算得出鞦韆於 15° 擺至 30° 之間時，不論擺長或拉放線長度，平均擺角約為 21.19° ，將 21.19° 代入大角度週期公式中可得其週期為 1313 毫秒，將 1313 毫秒除以 4 即可得變換一次狀態(拉線+放線)所需間隔的時間。

4. 程式撰寫

```
to runOpMode
  Put initialization blocks here.
  set a - Mode to RunMode STOP_AND_RESET_ENCODER
  set a - Mode to RunMode RUN_TO_POSITION
  call 40cm 2.1cm waitForStart
  set a - Power to 1
  if call 40cm 2.1cm opModelsActive
  do
    set timer to new ElapsedTime
    resolution Resolution MILLISECONDS
    repeat while call 40cm 2.1cm opModelsActive
    do
      set a - TargetPosition to 0
      call 40cm 2.1cm sleep
      milliseconds 328
      set a - TargetPosition to 25
      call 40cm 2.1cm sleep
      milliseconds 328
      call Telemetry.addData
      key enc
      number a - CurrentPosition
      call Telemetry.update
```

圖 9：App Inventor 程式碼

二、研究方法：

(一) 實驗裝置操作步驟

1. 將單擺固定於伺服馬達(Servo)上方的鐵片，輕靠即可。
2. 左右移動伺服(Servo)以調整單擺擺角。
3. 透過程式完成實驗所需的給定初始擺角以及拉放線過程。
4. 同時利用相機拍出 120 幀的實驗影片。
5. 將影片匯入 Tracker 並進行分析。

(二) Tracker 操作步驟

將影片匯入 Tracker 程式。

利用鞦韆質心上所貼的紅點進行自動追蹤變化已測出擺角變化以及拉放線次數。

(三) 實驗步驟

實驗 1：探討單擺擺角變化與拉、放線時機的關係。

1. 固定擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm。
2. 在單擺最高點處放線、最低點處拉線，測量單擺擺角由 15° 增加至 30° ，所需的拉放線次數 N 。
3. 重複步驟(2)4 次。
4. 改為在最高點處拉線、最低點處放線，測量單擺擺角由 30° 減少至 15° ，所需的拉放線次數 N 。
5. 重複步驟(4)4 次。

表(一)：不同拉放線時機的拉放線次數表

項目	擺角變化	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第一代	$15^\circ \rightarrow 30^\circ$	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第一代	$30^\circ \rightarrow 15^\circ$	20	20	18	19	18	19	1
第二代		18	17	17	17	17	17.2	0.45
理論		15.82						



圖 10：當擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm 時，單擺在最高點時放線、最低點時拉線，測量單擺由 15° 擺至 30°，所需的拉線、放線次數 N。

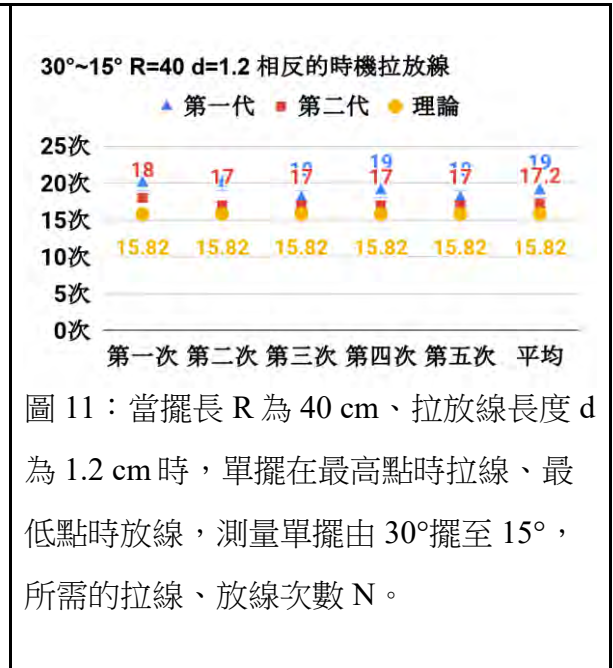


圖 11：當擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm 時，單擺在最高點時拉線、最低點時放線，測量單擺由 30° 擺至 15°，所需的拉線、放線次數 N。

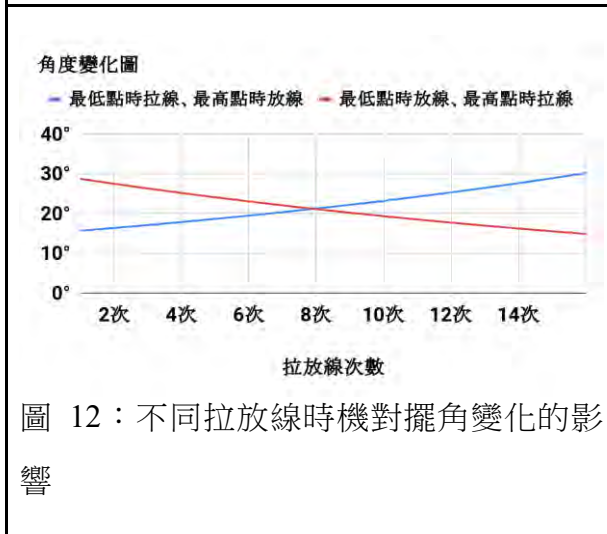


圖 12：不同拉放線時機對擺角變化的影響

由圖 12 發現：

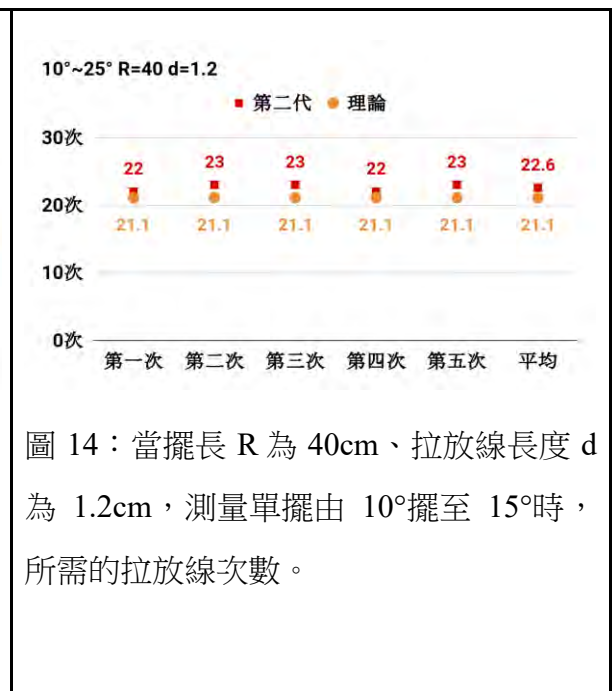
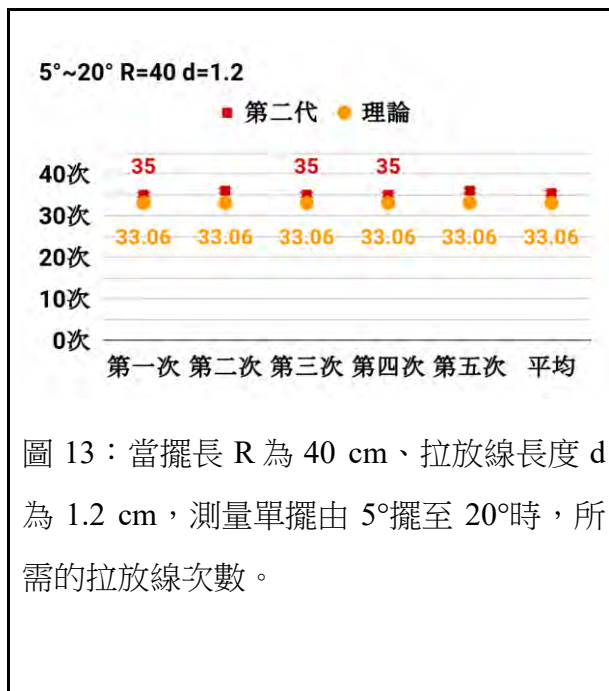
1. 當單擺在最低點時拉線、最高點時放線，擺角會越來越大。
2. 第二代結果極為接近理論值。

實驗 2：探討在相同擺角變化下，所需拉放線次數與不同初始擺角的關係。

1. 固定擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm。
2. 調整初始角為 5°，測量 5° 擺至 20° 所需拉放線次數 N。
3. 重複步驟(2) 4 次。
4. 改變初始角為 15°，測量 15° 擺至 30° 所需拉放線次數 N。
5. 重複步驟(4) 4 次。

表(二)：角度範圍 5°~20°、15°~30°的拉放線次數表

項目(單位)	角度範圍	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第二代	5°→20°	35	36	35	35	36	35.4	0.55
理論		33.06						
第二代	10°→25°	22	23	23	22	23	2.6	0.55
理論		10.6						
第一代	15°→30°	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第二代	20°→35°	15	14	15	15	15	14.8	0.45
理論		13.7						
第二代	25°→40°	12	12	12	12	12	13	0.45
理論		10.6						



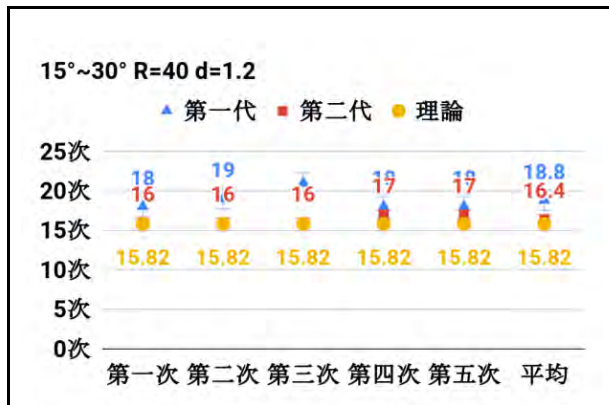


圖 15：當擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm，測量單擺由 15°擺至 30°時，所需的拉放線次數。

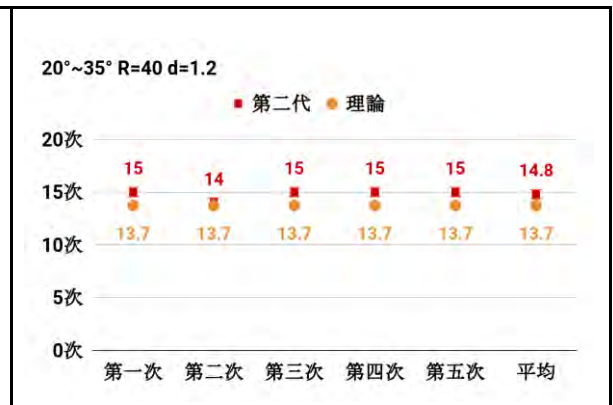


圖 16：當擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm，測量單擺由 20°擺至 35°時，所需的拉放線次數。

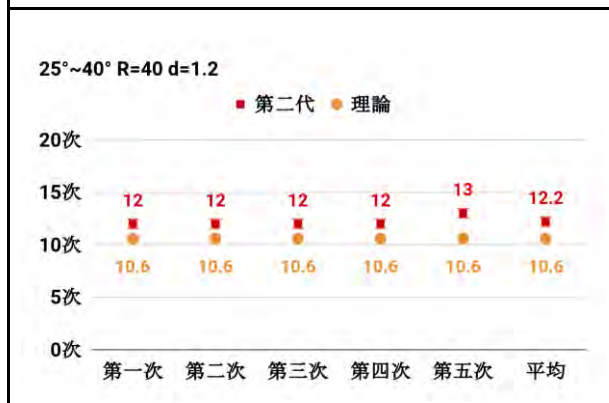


圖 17：當擺長 R 為 40 cm、拉放線長度 d 為 1.2 cm，測量單擺由 25°擺至 40°時，所需的拉放線次數。

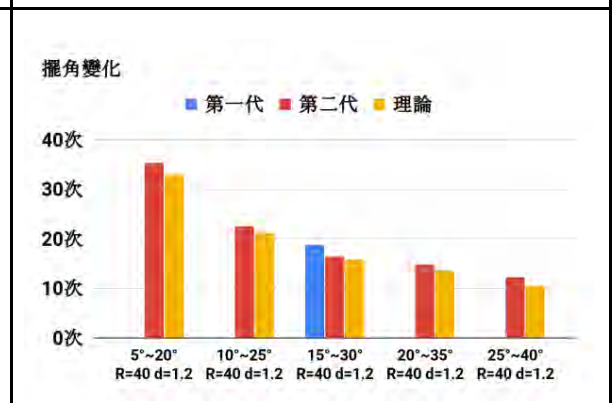


圖 18：在相同角度變化，但不同初始擺角下，所需拉放線次數與初始擺角的關係圖

由圖 18 發現：

當擺角變化(皆為 15°)相同時，初始擺角越大，則所需拉放線次數 N 減少。

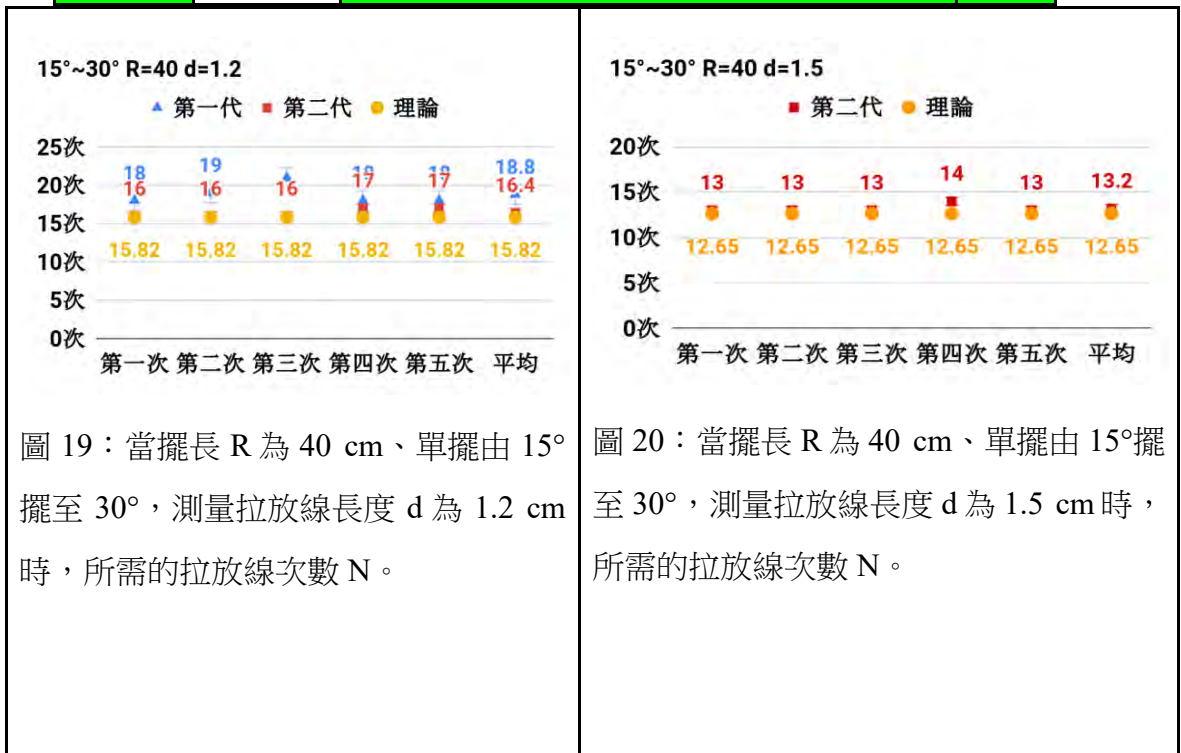
實驗 3：探討所需拉放線次數 N 與拉放線長度 d 的關係。

1. 固定擺長 R 為 40 cm。
2. 調整拉放線長度 d 為 1.2 cm、1.5 cm、1.8 cm、2.1 cm、2.4 cm，測量單擺由 15°擺至 30°所需的拉放線次數 N。
3. 重複步驟(2)各實驗 4 次。

註：拉放線長度 d 若小於 1.2 cm 或大於 2.4 cm 時，誤差會有上升的趨勢，因此僅採用 1.2 cm ~ 2.4 cm 之間的數據。

表(三)：拉放線長度 1.2 cm、1.5 cm、1.8 cm、2.1 cm、4.5 cm 的拉放線次數表

項目(單位)	拉放線長度	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第一代	1.2cm	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第二代	1.5cm	13	13	13	14	13	13.2	0.45
理論		12.65						
第二代	1.8cm	11	12	11	11	11	11.2	0.45
理論		10.55						
第二代	2.1cm	10	10	10	11	10	10.2	0.45
理論		9.04						
第一代	2.4cm	10	10	10	12	9	10.2	1.1
第二代		9	8	8	9	9	8.6	0.55
理論		7.94						



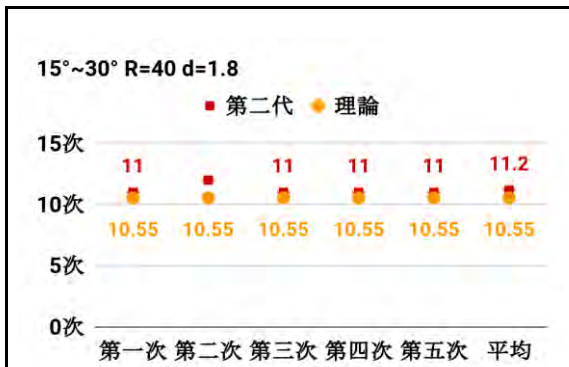


圖 21：當擺長 R 為 40 cm、單擺由 15° 擺至 30° ，測量拉放線長度 d 為 1.8 cm 時，所需的拉放線次數 N 。



圖 22：當擺長 R 為 40 cm、單擺由 15° 擺至 30° ，測量拉放線長度 d 為 2.1 cm 時，所需的拉放線次數 N 。

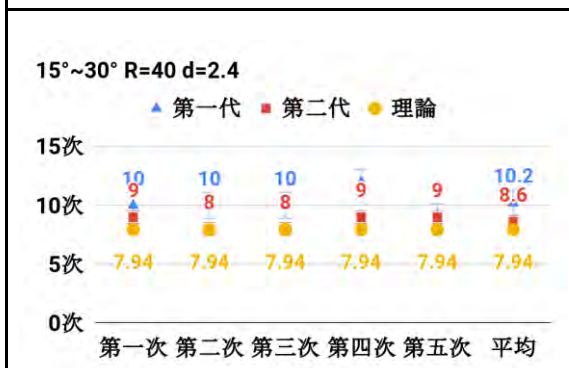


圖 23：當擺長 R 為 40 cm、單擺由 15° 擺至 30° ，測量拉放線長度 d 為 2.4 cm 時，所需的拉放線次數 N 。

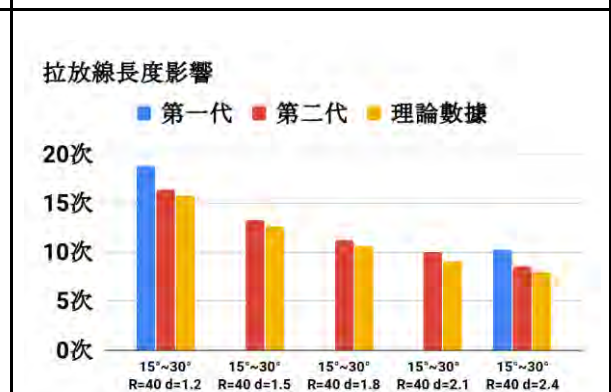


圖 24：在相同初始、終止角度下，所需拉放線次數與拉放線長度的關係圖
由圖 24 發現：當拉放線長度 d 變長，則所需拉放線次數 N 減少。

實驗 4：探討所需拉放線次數 N 與不同擺長 R 的關係。

1. 固定擺長 d 為 1.2 cm。
2. 調整擺長 R 為 25 cm、30 cm、35 cm、40 cm、45 cm，測量單擺由 15° 擺至 30° 所需的拉放線次數 N 。
3. 重複步驟(2)各實驗 4 次。

表(四)：擺長在 25 cm、30 cm、35 cm、40 cm、45 cm 拉放線次數表

項目(單位)	擺長	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第二代	25cm	11	11	11	11	12	11.2	0.45
理論		9.89						
第一代	30cm	13	14	14	13	15	13.8	0.84
第二代		12	13	12	12	13	12.4	0.55
理論		11.86						
第二代	35cm	14	15	15	14	14	14.4	0.5
理論		13.84						
第一代	40cm	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第二代	45cm	19	19	19	19	18	18.8	0.45
理論		17.79						

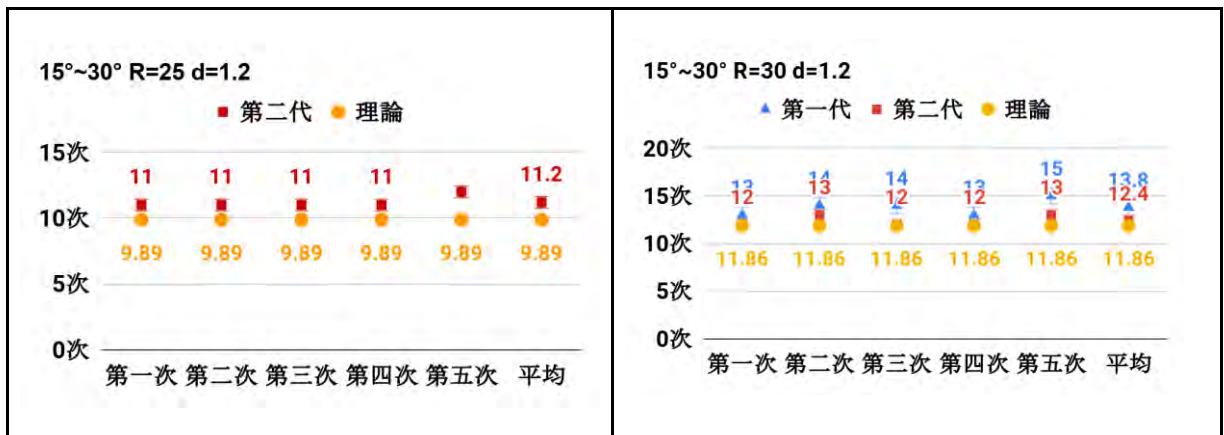


圖 25：當單擺由 15°擺至 30°、拉放線長度 d 為 1.2 cm，測量擺長 R 為 25 cm 時，所需的拉放線次數。

圖 26：當單擺由 15°擺至 30°、拉放線長度 d 為 1.2 cm，測量擺長 R 為 30 cm 時，所需的拉放線次數。



圖 27：當單擺由 15°擺至 30°、拉放線長度 d 為 1.2cm，測量擺長 R 為 35cm 時，所需的拉放線次數。

圖 28：當單擺由 15°擺至 30°、拉放線長度 d 為 1.2cm，測量擺長 R 為 40cm 時，所需的拉放線次數。

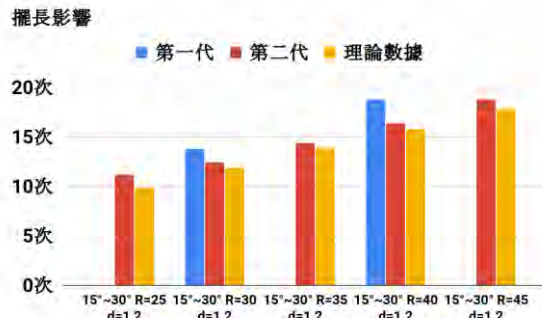


圖 29：當單擺由 15°擺至 30°、拉放線長度 d 為 1.2 cm，測量擺長 R 為 45 cm 時，所需的拉放線次數。

圖 30：在相同初始、終止角度下，所需拉放線次數與擺長的關係圖
由圖 30 發現：擺長變短，則所需拉線、放線次數 N 越少。

實驗 5：單擺在最高點時放線、最低點時拉線。實驗攝影搭配 tracker，紀錄每一次擺盪的角度，並以 C++的程式運算，獲得每次最高點擺角，將最高點擺角反覆帶入公式，測量單擺由 15°擺至 30°過程，每一次拉、放線結束的角度，並以理論計算角度。

1. 由作功等於位能增加量得到：

$$3mg(1 - \cos\theta) \times d = mg\Delta h = mgR(\cos\theta - \cos\phi)$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \cos\theta - \frac{3d(1-\cos\theta)}{R}$$

註： θ 為拉放線一次前的角度， ϕ 為拉放線一次後的角度，其中擺長 $R = 0.400 \text{ m}$ 。

- 由 $\theta = 15^\circ$ 代入運算式中，得到 $\cos \phi$ ，並透過 \arccos 函數算出 $\phi = 15.6644^\circ$ 。再將 $\theta = 15.6644^\circ$ 代入求出 $\cos \phi$ ，並得出 $\phi = 16.3589^\circ$ 。
- 可得知拉放線介於 15 次到 16 次之間角度會超過 30° ，以公式推算拉放線理論次數約為 15.82 次。註：此數據是透過 C++ 程式運算出來的結果。

表(五)：實驗擺角與理論擺角關係表

拉放線次數	理論	實驗	誤差	理論角度變化	實驗角度變化
1	15.6644	15.66	0.0044	0.6644	0.66
2	16.3589	16.35	0.0089	0.6945	0.69
3	17.0844	17.07	0.0144	0.7255	0.72
4	17.8427	17.82	0.0207	0.7583	0.75
5	18.6351	18.61	0.0251	0.7924	0.78
6	19.4635	19.43	0.0305	0.8284	0.82
7	20.3294	20.28	0.0494	0.8659	0.86
8	21.2346	21.18	0.0546	0.9052	0.90
9	22.1812	22.12	0.0612	0.9466	0.94
10	23.1711	23.09	0.0811	0.9899	0.98
11	24.2065	24.13	0.0765	1.0354	1.03
12	25.2895	25.21	0.0795	1.0830	1.08
13	26.4228	26.34	0.0828	1.1333	1.13
14	27.6087	27.53	0.0787	1.1859	1.18
15	28.8501	28.77	0.0801	1.2414	1.24
16	30.1499	30.07	0.0799	1.2998	1.30

角度變化

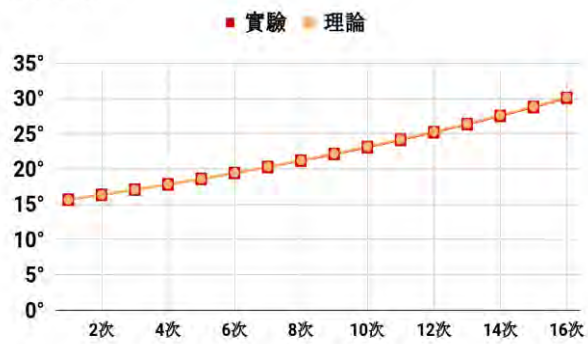


圖 31：實驗擺角與理論擺角關係圖

由表(五)及圖 31 發現，理論擺角與實驗極為相近，顯示理論正確。

誤差值變化

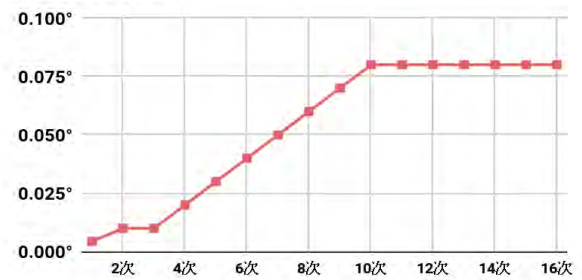


圖 32：實驗擺角與理論擺角間的差距圖

由圖 32 發現，實驗擺角與理論擺角間的差距隨擺動次數增加而變大。

角度變化差

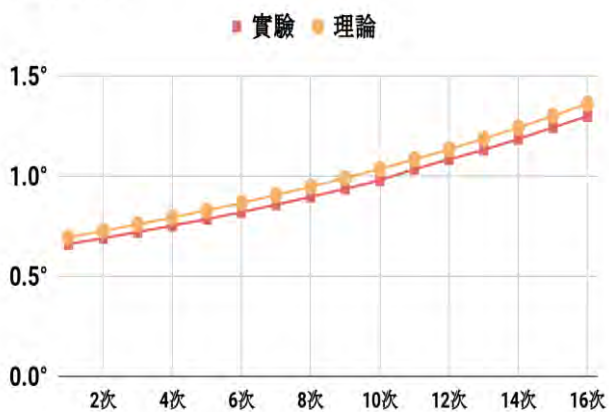


圖 33：相鄰兩次擺角差值與理論間的關係圖

由圖 33 發現，相鄰兩次擺角差值與理論的差異隨擺動次數增加而略增，但整體差異極小。

伍、研究結果

一、由實驗 1 發現：當單擺擺至最低點時馬達拉線，擺至最高點時馬達放線，可使擺角越來越大。當單擺擺至最高點時馬達拉線，擺至最低點時馬達放線，反而使擺角越來越小。故最有效增加鞦韆擺角的方式為：在最低點時馬達拉線，最高點時馬達放線。

二、由實驗 2 發現：當擺角變化(皆為 15°)相同時，初始擺角越大，則所需拉放線次數 N 減少。

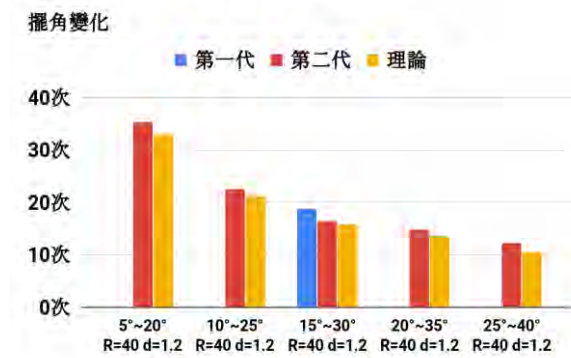


圖 34：不同角度拉放線次數比較圖

由圖 34 發現：當擺角變化(皆為 15°)相同時，初始擺角越大，則所需拉放線次數 N 減少。

三、由實驗 3 發現：將拉線長度 d 由 1.20 cm 變為 2.40 cm，發現拉線長度 d 變長，則所需拉線、放線次數 N 減少。

$$10.8 \div 18.8 = 0.542 \quad 8.6 \div 16.4 = 0.52$$

$$\text{而 } 1.2 \div 2.4 = 0.5$$

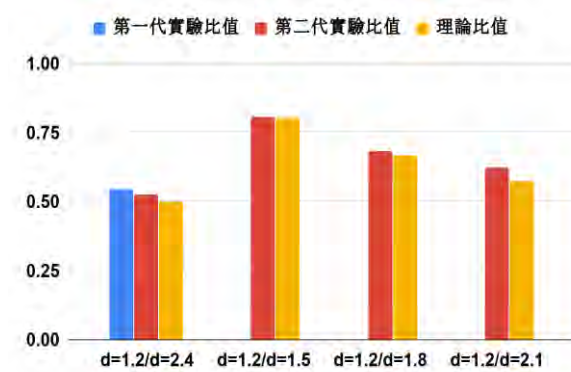


圖 35：不同拉放線長度，拉放線次數比值的柱狀圖。

由圖 35 可知，所需拉線、放線次數 N 與拉線長度 d 約成反比。

四、由實驗 4 發現：擺長由 45 cm 到 25 cm，所需拉線、放線次數 N 減少。

$$13.8 \div 18.8 = 0.734 \quad 12.4 \div 16.4 = 0.756$$

而 $30 \div 40 = 0.75$

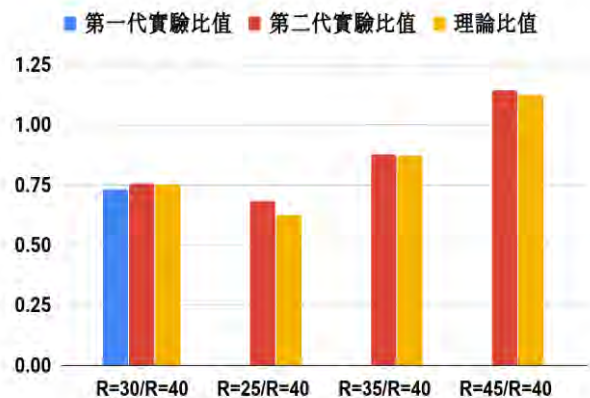


圖 36：擺長 R 不同，拉放線次數比值的柱狀圖

由圖 36 可知，所需拉放線次數 N 與擺長 R 約成正比。

五、由實驗 5 發現：

- (一) 理論擺角與實驗極為相近，顯示理論正確。
- (二) 實驗擺角與理論擺角間的差距隨擺動次數增加而變大。
- (三) 相鄰兩次擺角差與理論間的差異隨擺動次數增加而略為變大，但整體差異極小。

六、以馬達帶動長桿法 + 實驗攝影搭配 tracker，紀錄每一次擺盪的角度，並以 C++ 的程式運算，獲得每次最高點擺角，將最高點擺角反覆帶入公式，可準確求出所需的拉放線次數。所需拉放線次數接近理論值，顯示以此方法擺盪極為穩定。由圖 37 可知：第二代的實驗裝置，比第一代要精準許多。

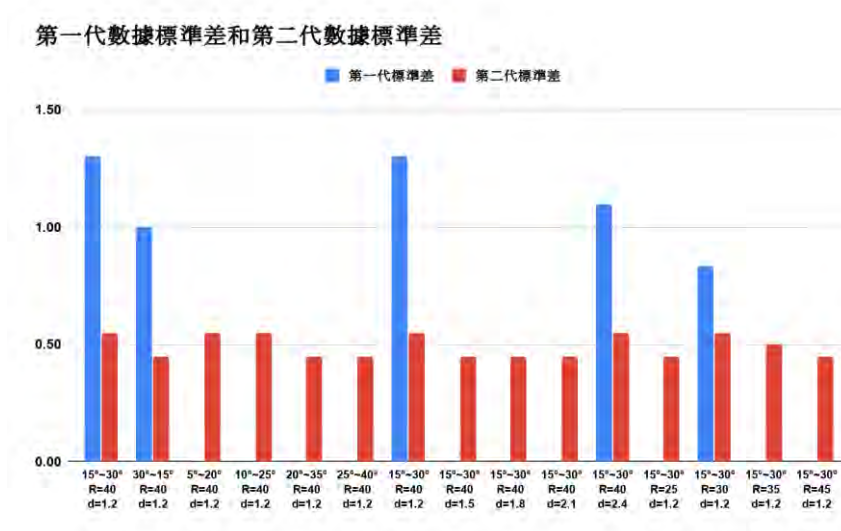


圖 37：第一代數據與第二代數據標準差柱狀圖

陸、討論

一、理論計算：

(一) 拉線一次，施力 F_A 作正功 $W_A \doteq [mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d$

放線一次，施力 F_B 作負功 $W_B = -F_B \times d \doteq -T_B \times d = -mg\cos\theta \times d$

在一次最低點拉線、最高點放線的過程，施力淨作功

$$W = W_A + W_B = [mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d + (-mg\cos\theta \times d)$$

$$= 3mg(1 - \cos\theta) \times d$$

(二) 在最低點的時候，張力作功為 $[mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d$ 。

在最高點的時候，張力作功為 $-mg\cos\theta \times d$ 。

隨著角度隨著時間上升，最低點作正功越來越大，最高點作負功越來越小。故當角度上升時，總作功量會越來越大，故上升角度會越來越大。

(三) 由於在低角度拉線次數較多，故鞦韆能量得到較少，求出所需拉放線次數較高。

(四) 單擺由 15° 盪至 30° ，所需能量 $E = mgR(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)$

$$\text{拉線次數 } N = \frac{E}{W} = \frac{mgR(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3mgd(1 - \cos\theta)}$$

，其中 mg 被消去，由 15° 擺至 30°

平均擺角為 22.5° 。

(五) 由公式 $N = \frac{R(\cos \varphi - \cos \theta)}{3d(1 - \cos \theta)}$ (φ 為初始擺角、 θ 為中止擺角) 和實驗 2 可得知：拉放線

次數 N 與 $\frac{\cos \varphi - \cos \theta}{1 - \cos \theta}$ 成正比，因為實驗的角度變化量皆為 15°

$$\text{故可表示成： } f(\varphi) = \frac{\cos \varphi - \cos(\varphi + \frac{\pi}{12})}{1 - \cos(\varphi + \frac{\pi}{24})}$$

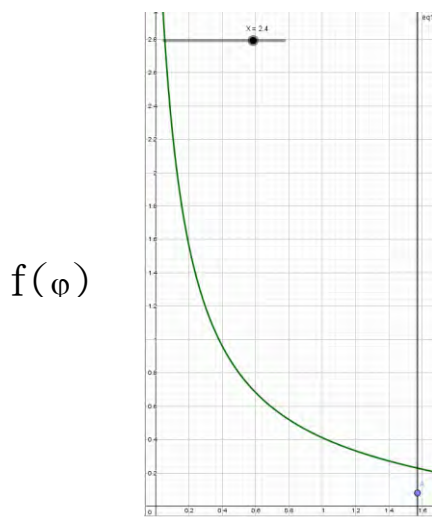


圖 38： $f(\varphi)$ 於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之圖形

由圖 38 可知，當初始擺角越大，則拉放線次數減少。

(六) 由公式 $N = \frac{R(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3d(1 - \cos \theta)}$ 和實驗 3 可得知：拉放線次數 N 與拉放線長度 d 成反比。

(七) 由公式 $N = \frac{R(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3d(1 - \cos \theta)}$ 和實驗 4 可得知：拉放線次數 N 與拉放線長度 R 成正比。

理論一：以初始角為 15° 、終止角為 30° ，而拉線長度 $d = 1.2 \text{ cm} = 0.012$ 公尺。設定平均擺角為 22.5° ，計算所需理論拉放線次數

$$\text{以 } \theta = 22.5^\circ \text{ 代入，得出： } N = \frac{R(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3d(1 - \cos \theta)}$$

N 約等於 15(次)。

註：單擺由 15° 盪至 30° ，由於無法確切得知每次擺盪最高點的角度，故以平均擺角為 22.5° 當為最高點角度進行計算。

結果：因擺角不同時，繩子張力也隨之不同，如擺角大，則張力大，作功大。故以平均擺角為 22.5° 計算理論次數時不夠精準。

理論二：將每一次拉放線後理論角度變化反覆帶入，能準確掌握作功量，故在理論計算次數時較為精準。

由作功等於位能增加量得到：

$$3mg(1 - \cos\theta) \times d = mg\Delta h = mgR(\cos\theta - \cos\phi)$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \cos\theta - \frac{3d(1 - \cos\theta)}{R}$$

經由理論計算，發現單擺由初始角 15° 擺至終止角 30° ，所需拉放線次數 N 為 15.82 次，與實驗所需拉放線的次數為 16.4 次，兩者相近。

二、理論模擬

(一) 利用 Vpython 程式和理論公式撰寫出模擬程式。

(二) 透過 Chrome 瀏覽器將其模擬

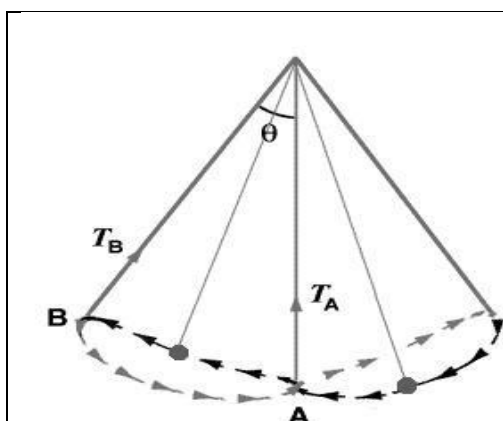


圖 39：單擺實際軌跡圖

圖片來源：[國立中央大學科學教育中心](#)

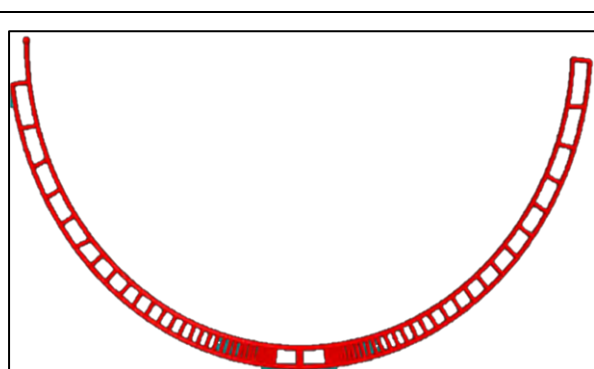

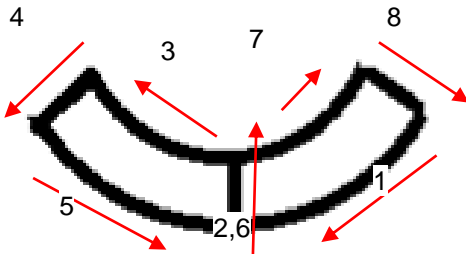


圖 40：VPython 程式模擬軌跡示意圖

註：此圖為擺長 $R = 40 \text{ cm}$ 拉放線長度 $d = 2.4 \text{ cm}$ 下的理論模擬軌跡。

1. 模擬程式中所跑出的數據與理論數據近乎相同。
2. 模擬程式中因鐵球拉放線設定瞬間拉完，故近乎無誤差。

3. 比較實際軌跡與程式模擬軌跡圖。

單次 軌跡 形狀	 <p style="text-align: center;">圖 41 實際軌跡圖</p>	 <p style="text-align: center;">圖 42 程式模擬軌跡圖</p>
差異原因：在程式模擬軌跡圖，拉線和放線都是一瞬間的，但是在實際中拉放線是需要時間的，故折返處會較平緩。		

三、誤差分析

- (一) 拉放線略為提早或延遲的時機很難確定 (最低點拉線、最高點放線)：
- (二) 拉放線需要時間(大約為 7°)造成單擺不會在最低/高點拉/放完所需要的距離，因張力隨角度改變，故在理論計算上的誤差。
- (三) 拉放線瞬間給予一個加速度(非向心加速度)，造成張力隨時間改變。

拉線瞬間的張力分析(在擺長為 40 cm、拉線距離為 3 cm、擺錘為 0.2 kg、擺角為 15 度)

1. 在單擺拉/放線的過程中，擺錘所受的張力會突然產生不規則變化。
2. 在理論計算時，拉放線時的張力皆忽略加速度所造成張力的不同和拉線過程所需要的時間造成擺角變化(張力隨角度而改變)，所以藉由 tracker 來關注在拉線/放線過程中所測得的物理量值算出實際的張力和理論計算時的張力的誤差。

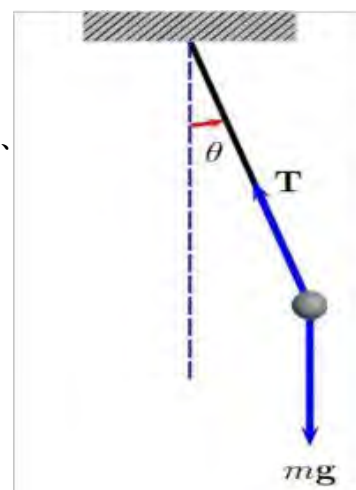


圖 43：單擺於任意點的受力體圖

3. 由加速度 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$ 可得知：

放線方向： $T - mg \cos \theta = ma_r = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) = m\frac{v^2}{r} - m\ddot{r}$ (r 為擺長)， $m\ddot{r}$ 為修正項。

4. 藉由 tracker 分析運動情形以此算出對應擺長變化的關係以此算出 $F = m\ddot{r}$ 對應擺長變化的關係，可得出下圖：

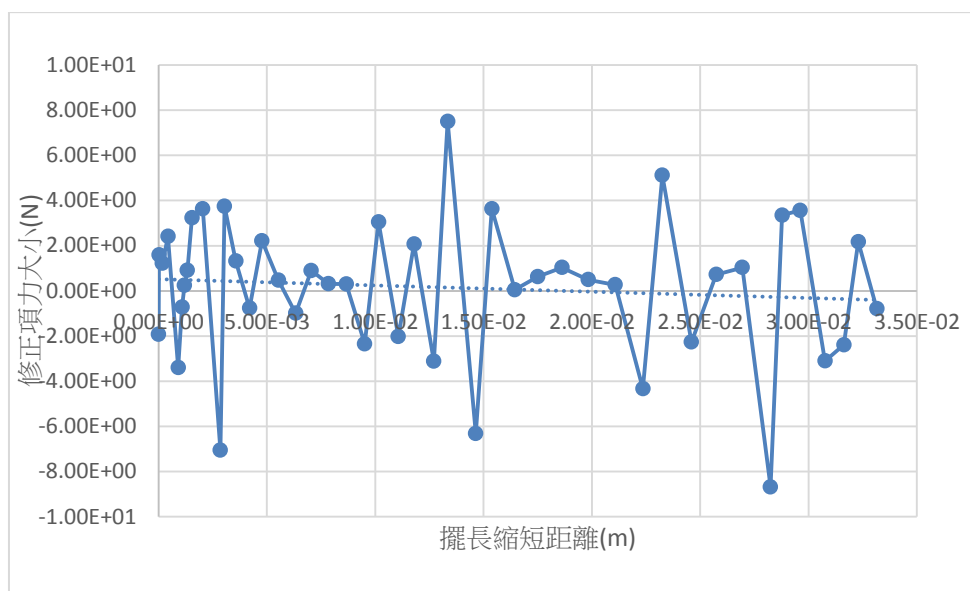


圖 44：修正項力大小對擺長變化的關係圖

- (1)以梯形面積計算修正項大小的總作功，其值為 0.0071J，約為理論張力作功的 0.004 倍。
- (2)即此修正項約佔 0.4%，故忽略不計此誤差。

柒、結論

- 一、欲使單擺的擺角越來越大，拉放線的規則是：當單擺擺至最低點時馬達拉線，擺至最高點時馬達放線，以此為週期持續拉放線，是最有效增加擺角的方式。
- 二、擺長變短，則所需拉線、放線次數 N 減少。所需拉線、放線次數 N 與擺長 R 成正比。
- 三、拉線長度 d 變長，則所需拉線、放線次數 N 減少。所需拉線、放線次數 N 與拉線長度 d 成反比。

四、由公式 $N = \frac{R(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3d(1 - \cos \theta)}$ 可知

理論所需拉放線次數 N 與擺長 R 成正比、與拉線長度 d 成反比，而與擺錘質量無關。實驗結果符合理論推導。

- 五、以馬達帶動長桿法比馬達法拉放線更為穩定。且馬達帶動長桿法更為接近理論次數。
- 六、以攝影搭配 tracker，紀錄每一次擺盪的角度，並以 C++ 的程式運算，獲得每次最高點擺角，將最高點擺角反覆帶入公式，可準確求出 15° 盪至 30° 所需的拉放線次數。

(一) 理論擺角與實驗極為相近，顯示理論正確。

(二) 實驗擺角與理論擺角間的差距隨擺動次數增加而變大。

(三) 相鄰兩次擺角差值與理論間的差異隨擺動次數增加而略為變大，但整體差異極小。

七、未來展望：

(一) 未來研究：

1. 經過 C++ 程式的計算，得到 1 到 39 次的拉放線角度變化如圖 45，但由於鞦韆在大角度擺盪的誤差有增加的趨勢以及繩子在放線過程張力不平均的問題，期望未來能改善這些問題。

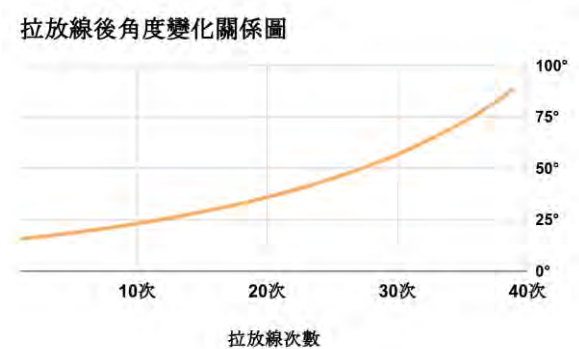


圖 45：拉放線後角度變化圖

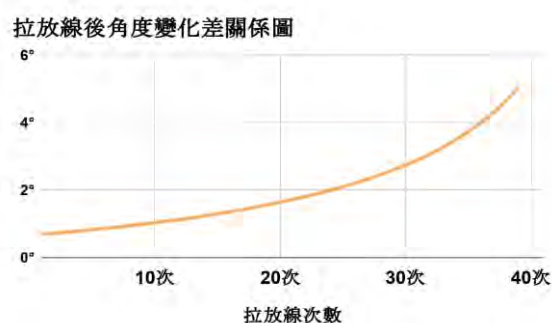


圖 46：拉放線後角度變化差的關係圖

2. 希望未來程式透過輸入初始值(初始擺角、初始擺長、拉線距離)便可以算出所需週期，因為此次實驗是算出平均週期，雖然誤差不大，但是期望能計算出每拉線/或放線一次改變的週期，加入程式的撰寫當中。

(二) 實務應用：

1. 將理論結合實驗數據，以 Vpython 程式寫出盪鞦韆動畫，可充當科普教材。
2. 未來希望可以發展成科學玩具，並開發出 DIY 套件，搭配 Arduino 等各種材料，供學生們自己組裝，並利用實驗所求得的各项數據，製作出一個能自動盪擺的鞦韆。
3. 開發一套手機軟體，除了模擬出鞦韆擺盪的軌跡動畫，也可以加入一些與鞦韆互動的功能，例如：遊戲互動(讓小朋友在鞦韆最高點時按下按鈕等等)、改變重心變化量，可以使學生們更有效的了解盪鞦韆的原理，
4. 在公園的鞦韆旁架設模擬裝置和說明，讓小朋友們可以在玩的同時也能理解其中的物理原理(以淺顯易懂的文字和原理解釋)。

捌、參考資料及其他

1. 自然生活與科技 九年級 上 Ch 3 功與能
2. App Inventor 程式教學
3. C++程式教學
4. FIRST 論壇 https://firstfrc.blob.core.windows.net/ftc/FTC_AppInv_Training.pdf?sv=2017-04-17&sr=b&sig=Wx40G0wh%2BqBcX26cvAq01fboQguyZTaoj4hsSCwVl0w%3D&st=2018-04-03T05:40:22Z&se=2018-04-03T13:45:22Z&sp=r
5. Geogebra 程式教學
6. Vpython 程式教學

【評語】 030114

本作品研究將單擺透過拉、放線的方式使得單擺擺盪過程可以越盪越高。透過理論模擬來搭配實驗數值，並以程式描繪出盪鞦韆動畫，是一件完整但是實作上相對困難的研究。但在本研究的實驗中，不但實驗結果和預期吻合，並且能以非常嚴謹的理論推導和數據模擬給予合理的物理解釋。誤差分析也考慮得相當完整，是一件相當有原創性及完整的佳作。

摘要

要怎樣才可以使盪鞦韆越盪越高？本研究將單擺在擺盪過程，以拉、放線的方式模擬人在盪鞦韆時站起、蹲下的動作，發現在最低點時拉線將重心提高，最高點時放線讓重心放低，單擺可以越盪越高。分別測量在固定角度變化下：(1)不同擺長；(2)不同拉線長度；(3)不同初始角度。結果發現：(1)擺長越長，則所需拉放線次數越多；(2)拉線長度越長，則所需拉放線次數減少；(3)初始角度越大，則所需拉放線次數越少。實驗裝置原以齒輪變速的方式進行拉放線，為求更準確，改採以馬達帶動長桿的方式進行拉放線。以理論算出每次拉放線所需的次數，用C++語言算出每次擺盪的角度，輔助實驗以最正確的拉線、放線時機，求出15°上升至30°所需的次數，結果實驗與理論極為接近。最後將理論搭配實驗數值，以Vpython程式寫出盪鞦韆動畫，可清楚呈現正確的盪鞦韆方式；並且以此設計出一組簡易型教具模組。

一、研究動機

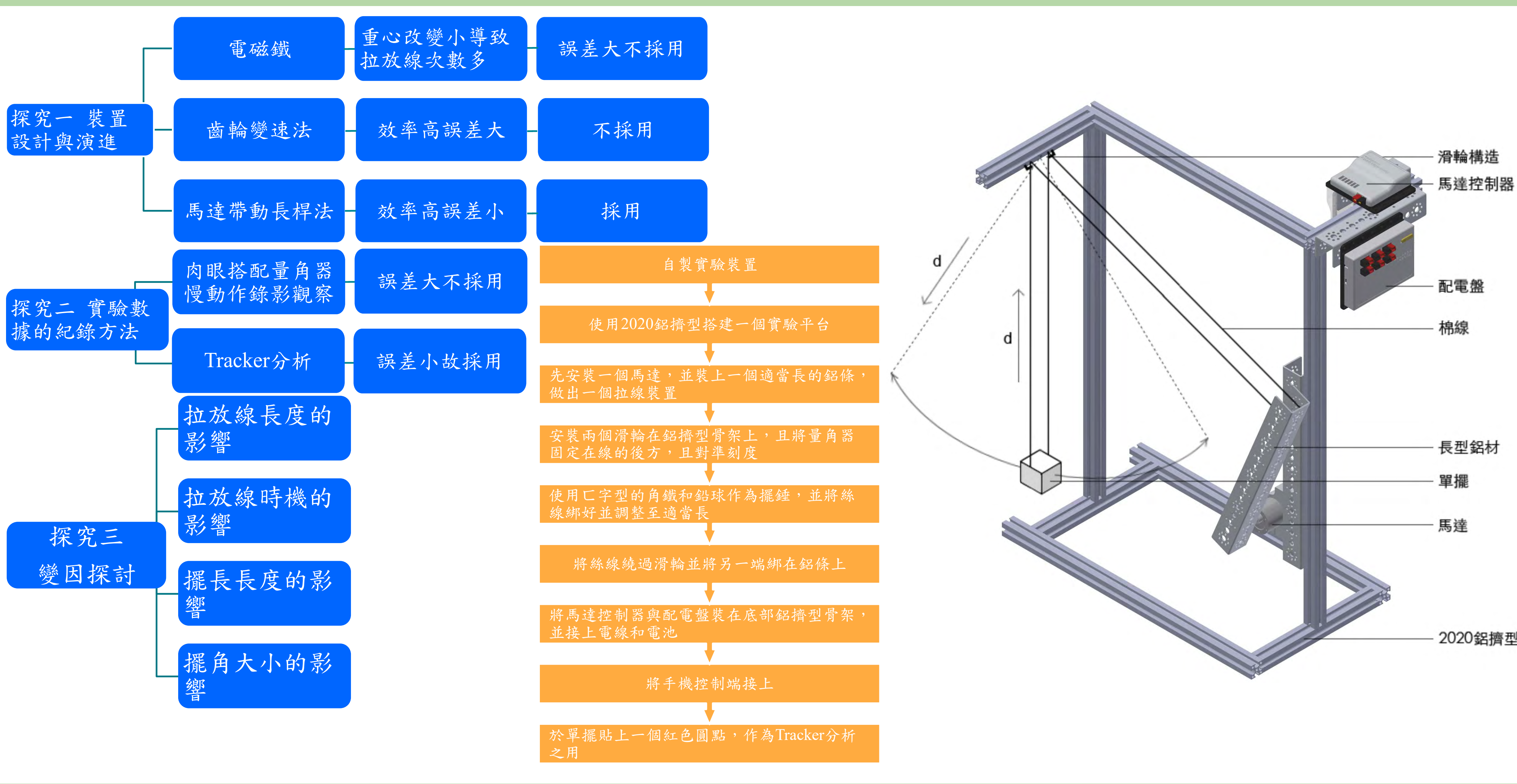
每年四月嘉義武當山玄天上帝廟會舉辦一年一度的鞦韆節，而今年的盪鞦韆比賽中，驚人的成績令人啞口無言，與公園遊樂場的盪鞦韆截然不同，這讓我們從小的疑問又再度響起，我們都抱著一個問題：究竟盪鞦韆是怎麼越來越高的，而盪鞦韆的技巧是否會影響的擺角的差異，還是盪鞦韆的本身的設計可以決定成績？

身為嘉義人的我們，除了一同慶祝嘉義鞦韆節之外，也立志找出盪鞦韆的奧秘，於是我們決定從這個出發點進行研究。

二、研究目的

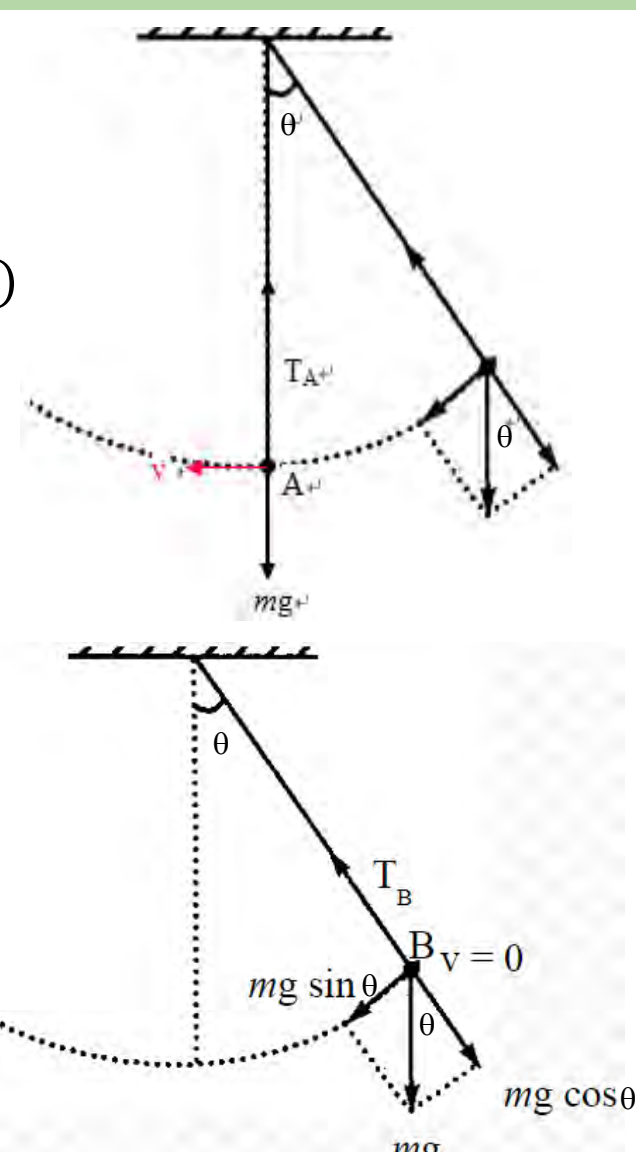
- 一、模仿盪鞦韆時，人會蹲下、站起來，藉以改變重心的高度，設計實驗探討收線、放線時機對擺角變化的影響。
- 二、找到增加鞦韆擺角的最有效模式。
- 三、研究改變拉線長度對拉放線次數的影響。
- 四、研究改變擺長對拉放線次數的影響。
- 五、研究不同角度對拉放線次數的影響。
- 六、研究每一次拉放線後的角度變化。
- 七、以作功探討盪鞦韆的原理，利用C++程式語言算出每次的理論擺角，並將理論擺盪方式代入Vpython程式寫出盪鞦韆動畫。

三、研究流程圖與實驗裝置



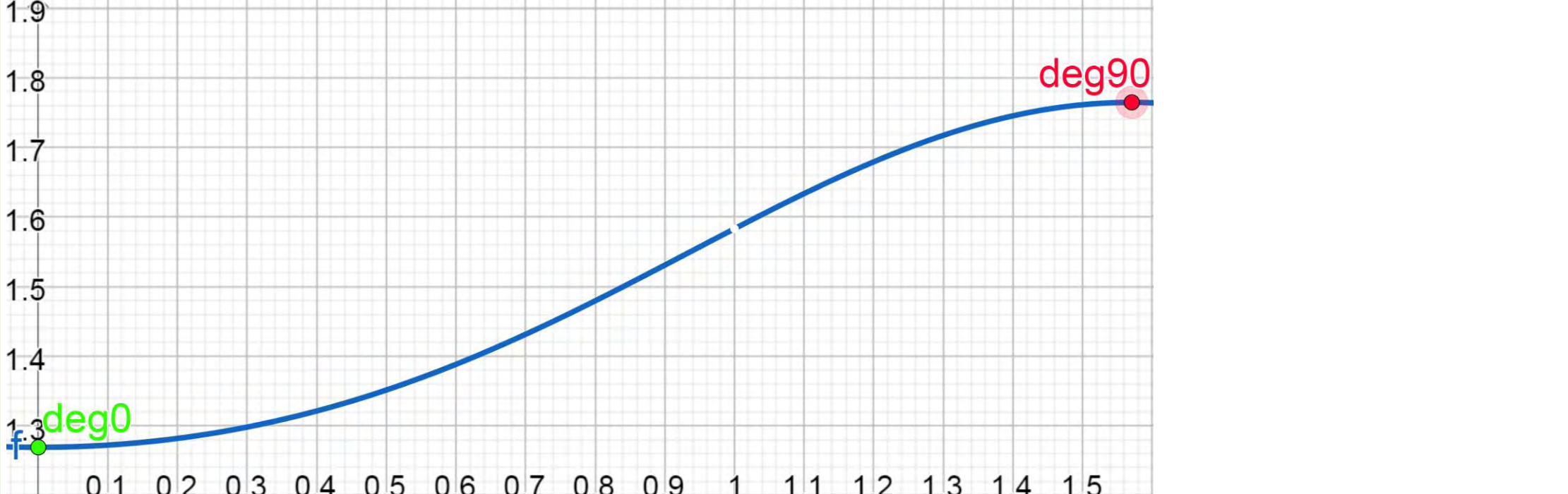
肆、研究過程或方法

1. 當鐵球由擺角 θ 經過最低點A點時，根據力學能守恆 $mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$ 在最低點A點時，鐵球的速率 v 最大，由圓周運動公式可知：在最低點時繩子張力 T_A ， $T_A - mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow T_A = mg + m\frac{v^2}{R} = mg + 2mg(1-\cos\theta)$
2. 在最低點時馬達施力 F_A 拉線，將鐵球往上拉一距離 d ，此時馬達施力 F_A 對鐵球作正功。施力 F_A 略大於繩子張力 T_A ，故施力 F_A 作正功 $W_A = F_A \times d - T_A \times d = [mg + 2mg(1-\cos\theta)] \times d$
3. 當單擺擺至最高點B時，速度為0，根據力的分析，此時繩子張力 $T_B = mg \cos\theta$ 在最高點時，馬達放線，使鐵球沿擺繩方向下移一距離 d 。此時施力 F_B 對鐵球作負功，施力 F_B 略小於繩子張力 T_B 。故施力 F_B 作負功 $W_B = -F_B \times d \sim -T_B \times d = -mg \cos\theta \times d$ 在一次最低點拉線、最高點放線的過程，施力淨作功 $W = W_A + W_B = [mg + 2mg(1-\cos\theta)] \times d + (-mg \cos\theta \times d) = 3mg(1-\cos\theta) \times d > 0$ 由以上可知，施力對系統淨作功為正，只要持續拉放線，就會提供鐵球能量，因此只要以適當的方法即可使擺角越來越大。



程式設計(使用App Inventor撰寫):透過大角度單擺週期公式推估單擺由最高點擺至最低點以及從最低點至最高點所需要的時間，發現其所需時間都皆為 $T/4$ 。(T:週期) 利用Geogebra畫出大角度週期公式的函式圖(縱軸為週期秒數，橫軸為弧度)程式寫入每過1/4個週期則變換一次狀態(拉線+放線)。

例：透過公式計算得出鞦韆於15°擺至30°之間時，不論擺長或拉放線長度，平均擺角約為21.19° 將21.19°帶入大角度週期公式中可得其週期為1313毫秒，將1313毫秒除以4即可得變換一次狀態(拉線+放線)所需間隔的時間。



名稱	優點	缺點
第一代 齒輪變速法	1. 體積較小 2. 不會有單擺撞到馬達的問題	1. 齒輪轉動時的微小間隙，使每次馬達轉動時會有短時間的空轉，造成每次拉放線長度不同的問題。 2. 使用齒輪變速，會使馬達原有的加速感消失，使單擺在擺動過程中，會十分的紊亂。 3. 程式寫法是以轉動幾毫秒來控制，可能會因為電池電壓不夠，而受到影響。
第二代(本次主要探討對象) 馬達拉動長桿法	1. 沒有空轉問題，因此可以精準地控制每次拉放線的長度。 2. 維持馬達原本的加速感，因此單擺在擺動時可以更加平滑。(也增加之後使用Tracker的方便性) 3. 本次程式寫法是控制馬達轉動角度，並不會受到電壓或控制器等因素的影響。程式會使它轉動到指定角度後才停止。 4. 新增給定初始擺角的裝置，減少用手放的誤差。	1. 體積較大。 2. 當單擺擺動過大時，可能會撞到一旁的馬達

二、研究方法：

(一) 實驗裝置操作步驟

- 將單擺固定於伺服馬達(Servo)上方的鐵片,輕靠即可。
- 左右移動伺服(Servo)以調整單擺擺角。
- 透過程式完成實驗所需的給定初始擺角以及拉放線過程。
- 同時利用相機拍出 120 幀的實驗影片。
- 將影片匯入 Tracker 並進行分析。

(二) Tracker 操作步驟

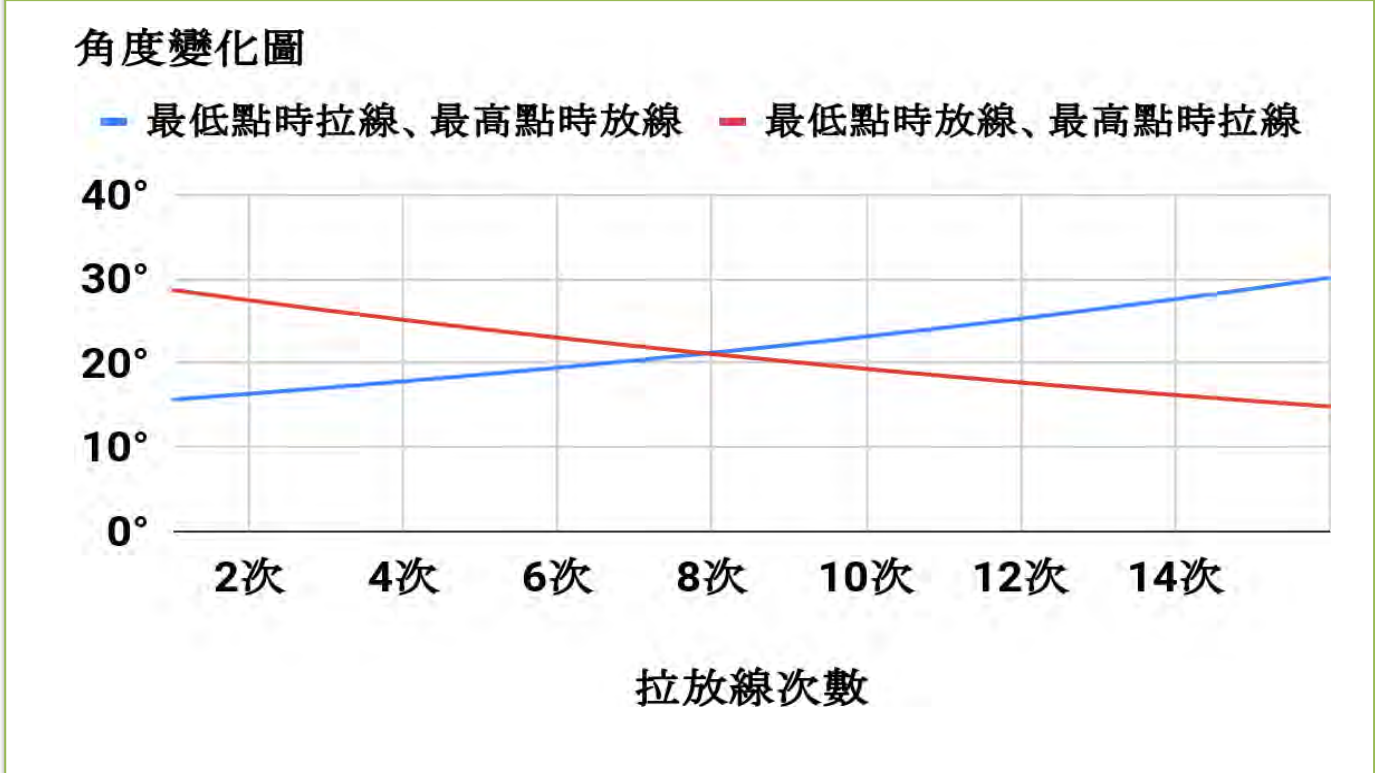
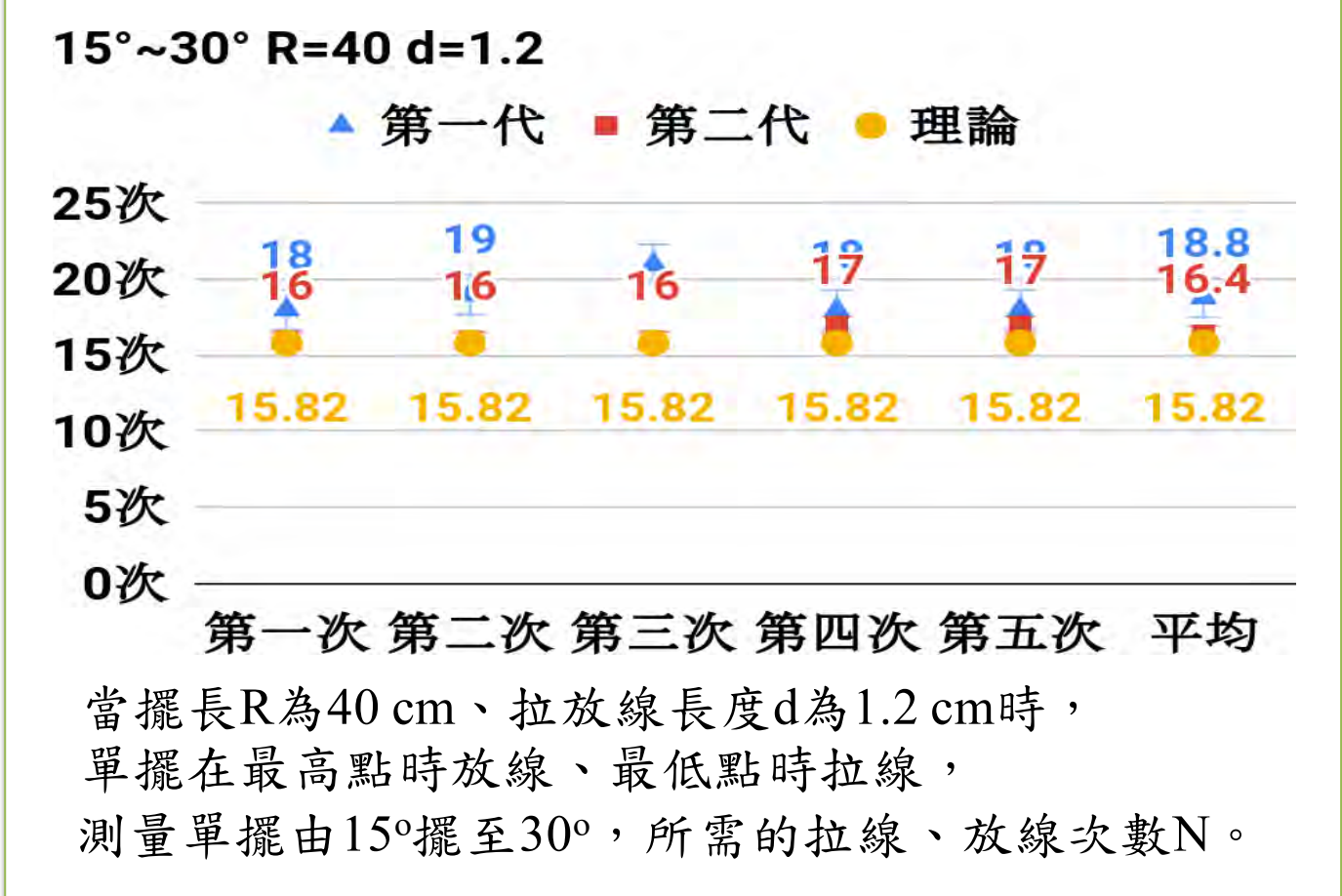
- 將影片匯入 Tracker 程式。
- 利用韃韃質心上所貼的紅點進行自動追蹤變化已測出擺角變化以及拉放線次數。

(三) 實驗步驟

實驗1：探討單擺擺角變化與拉、放線時機的關係。

- 固定擺長R為40 cm、拉放線長度d為1.2 cm。
- 在單擺最高點處放線、最低點處拉線，測量單擺擺角由15°增加至30°，所需的拉放線次數N。
- 重複步驟(2)4次。
- 改為在最高點處拉線、最低點處放線，測量單擺擺角由30°減少至15°，所需的拉放線次數N。
- 重複步驟(4)4次。

表(一)：不同拉放線時機的拉放線次數表								
項目	擺角變化	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第一代	15°→30°	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第一代	30°→15°	20	20	18	19	18	19	1
第二代		18	17	17	17	17	17.2	0.45
理論		15.82						



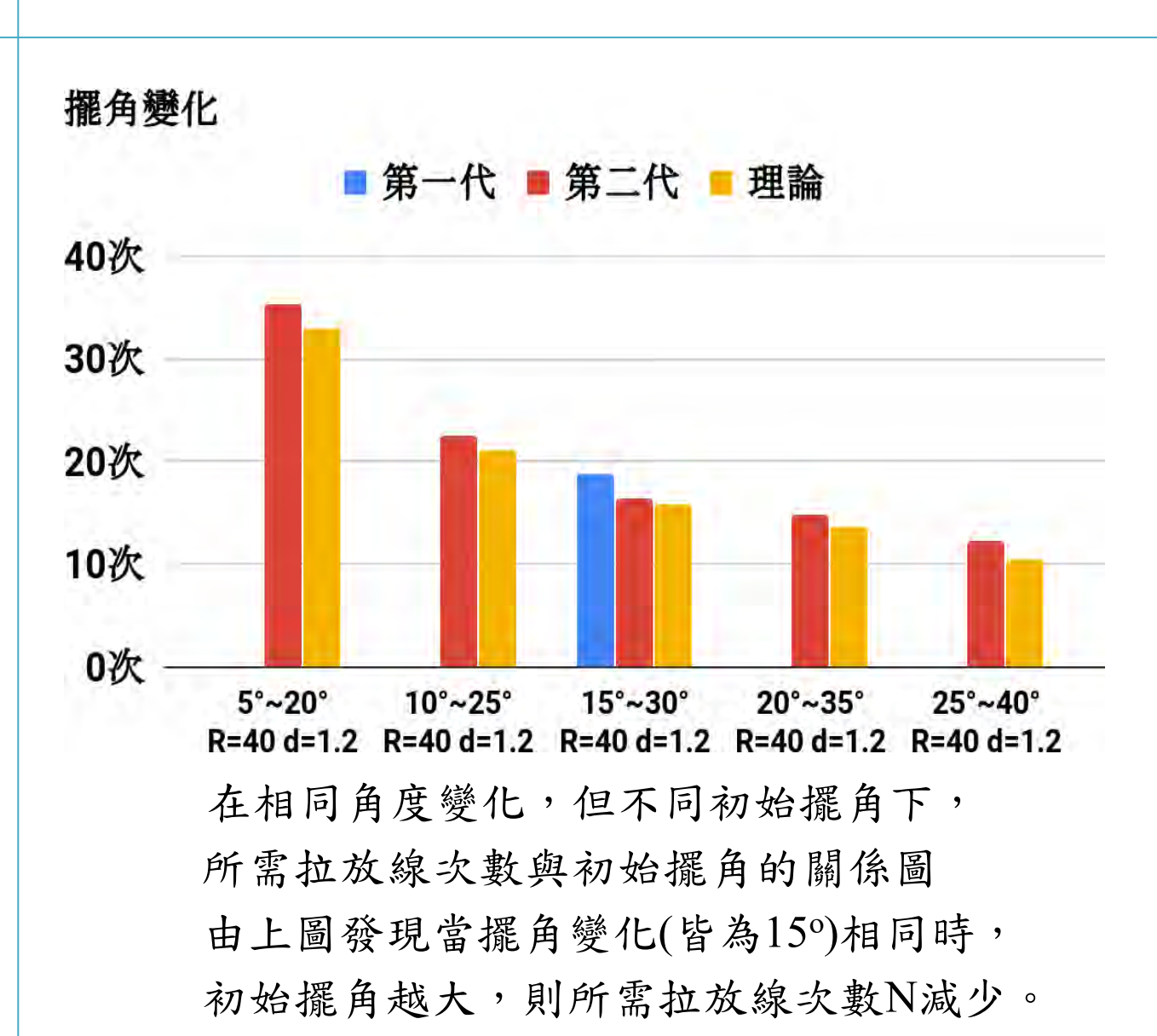
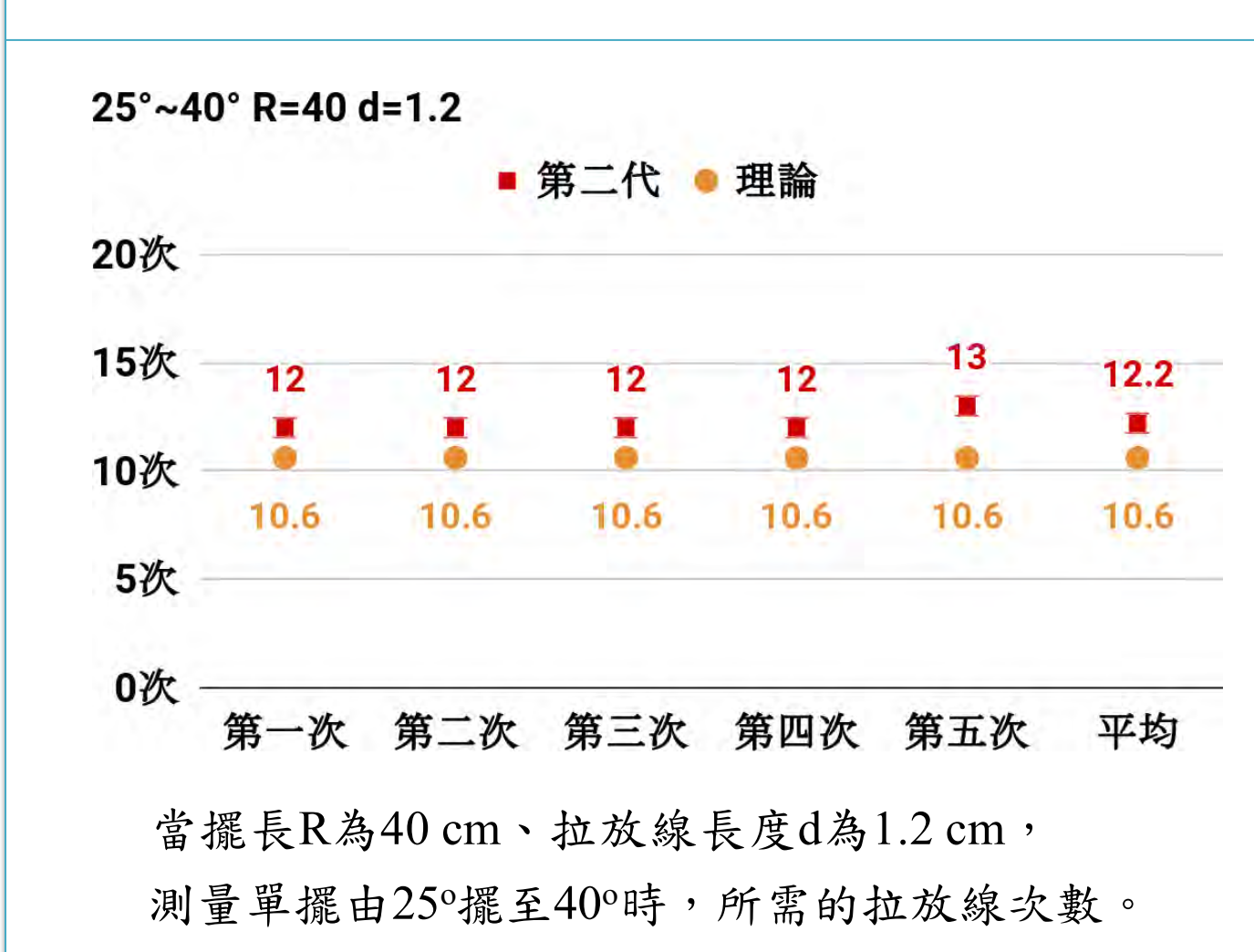
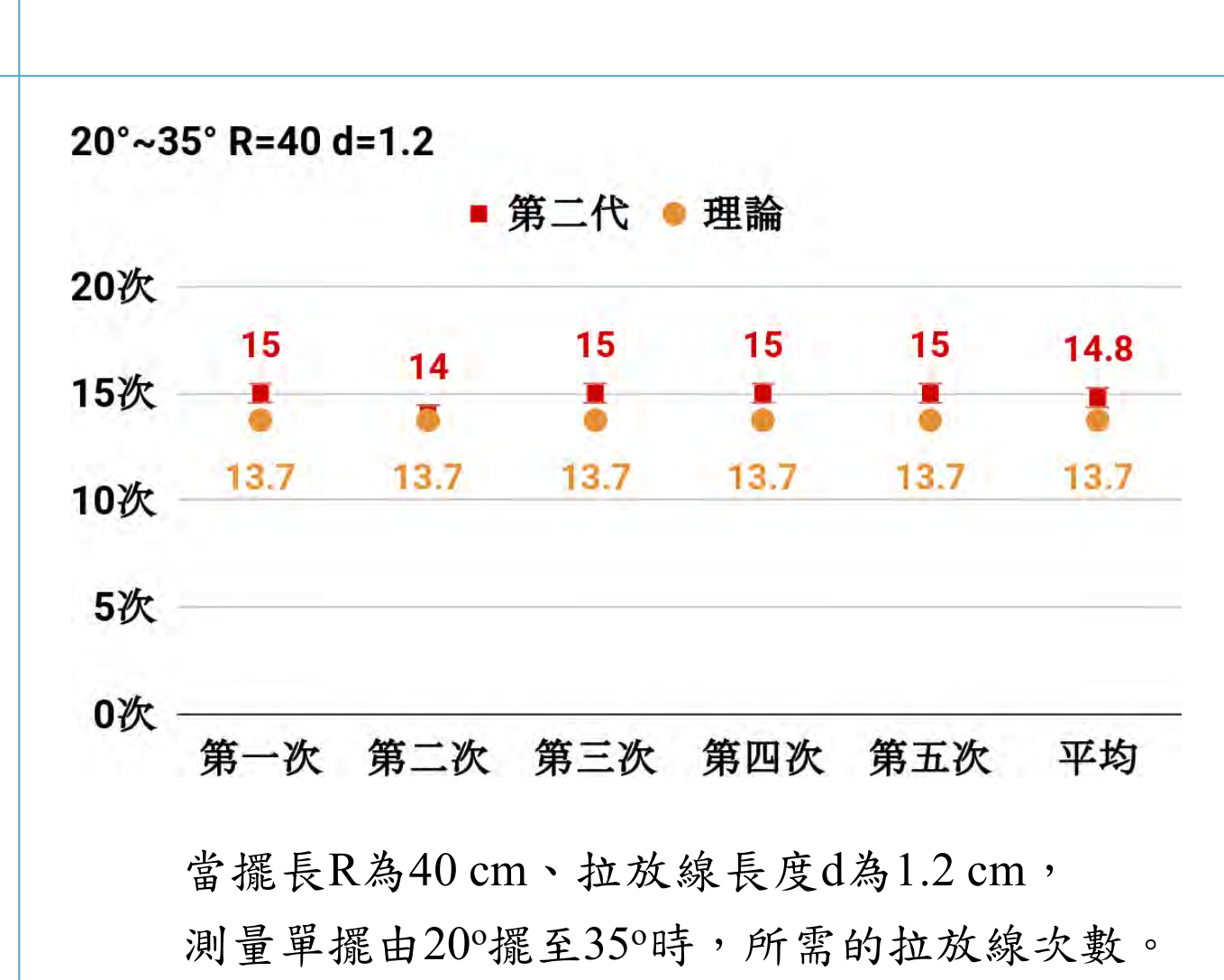
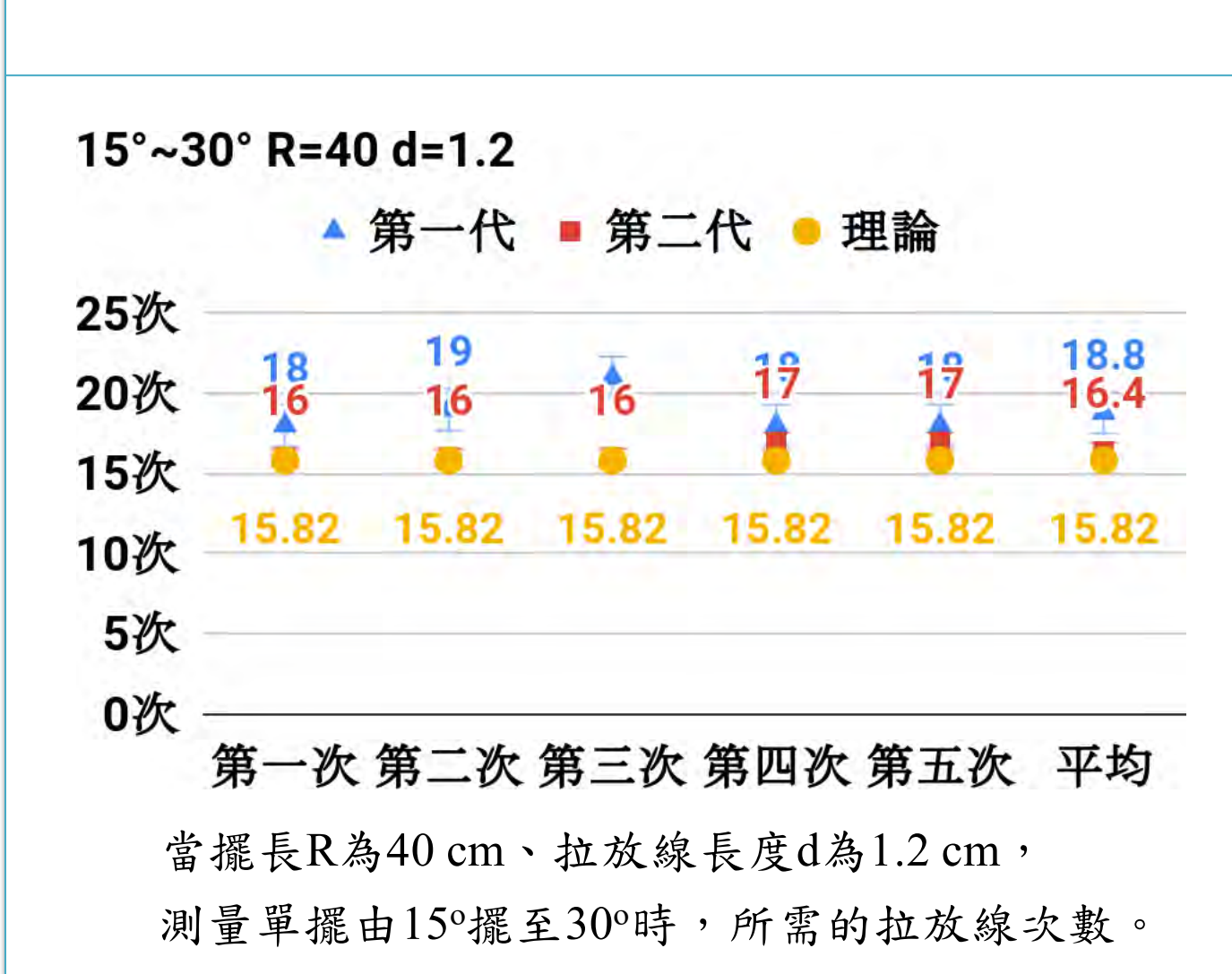
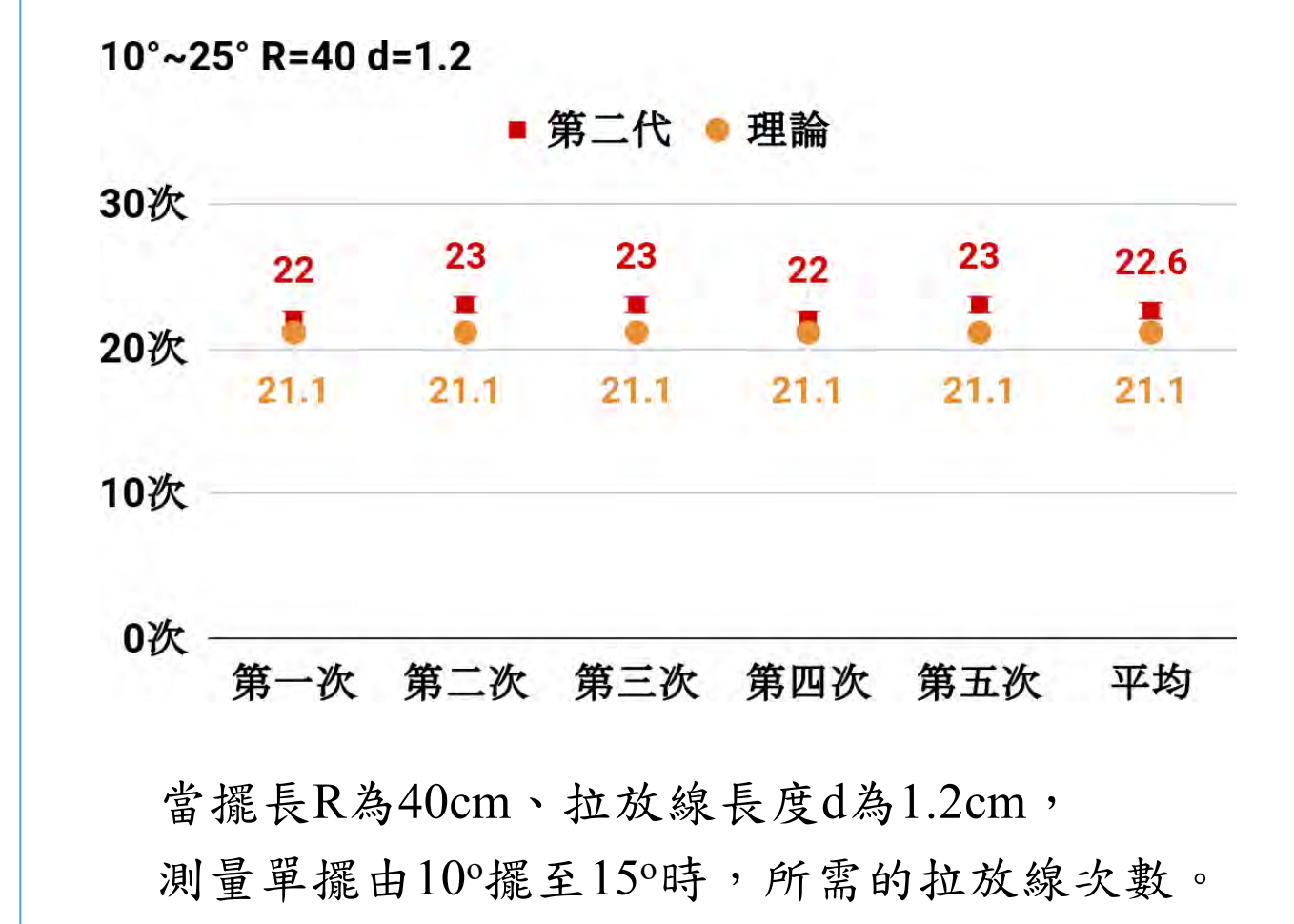
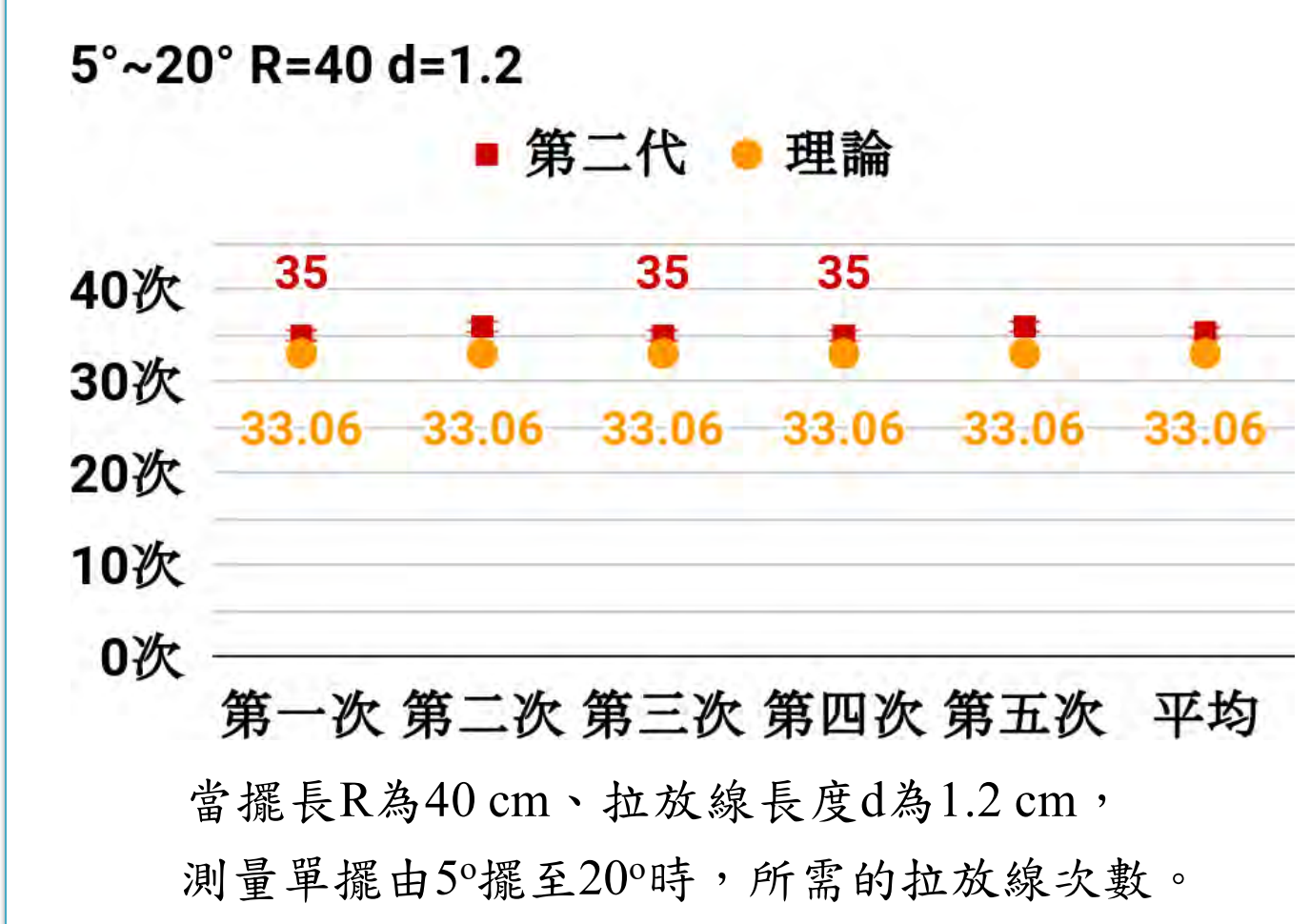
左圖：不同拉放線時機對擺角變化的影響
由左圖發現：

- 當單擺在最低點時拉線、最高點時放線，擺角會越來越大。。
- 第二代結果極為接近理論值。

實驗2：探討在相同擺角變化下，所需拉放線次數與不同初始擺角的關係。

- 固定擺長R為40 cm、拉放線長度d為1.2 cm。
- 調整初始角為5°，測量5°擺至20°所需拉放線次數N。
- 重複步驟(2)4次。
- 改變初始角為15°，測量15°擺至30°所需拉放線次數N。
- 重複步驟(4)4次。

表(二)：角度範圍5°~20°、15°~30°的拉放線次數表								
項目(單位)	角度範圍	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第二代	5°→20°	35	36	35	35	36	35.4	0.55
理論		33.06						
第二代	10°→25°	22	23	23	22	23	22.6	0.55
理論		21.1						
第一代	15°→30°	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第二代	20°→35°	15	14	15	15	15	14.8	0.45
理論		13.7						
第二代	25°→40°	12	12	12	12	12	13	0.45
理論		10.6						

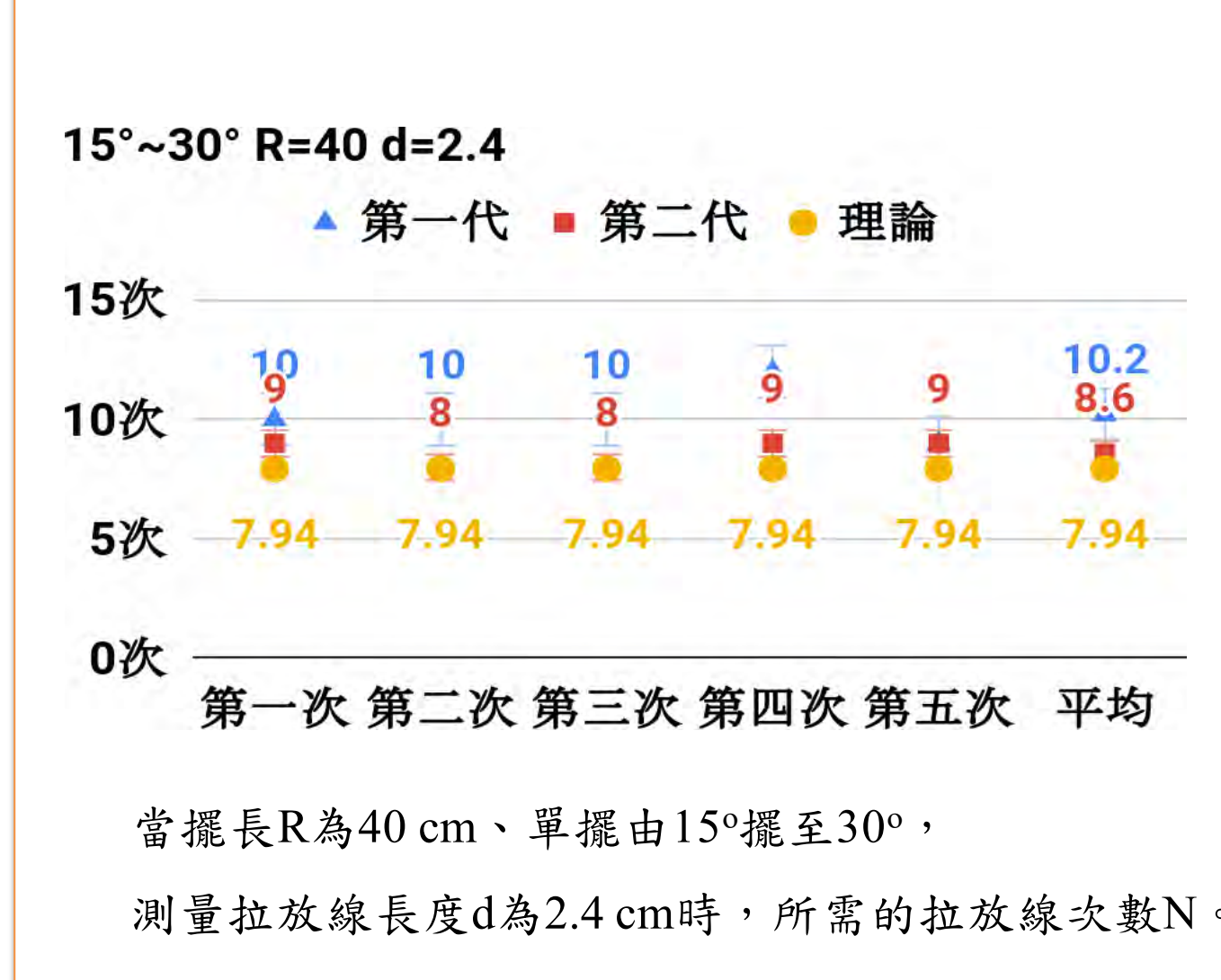
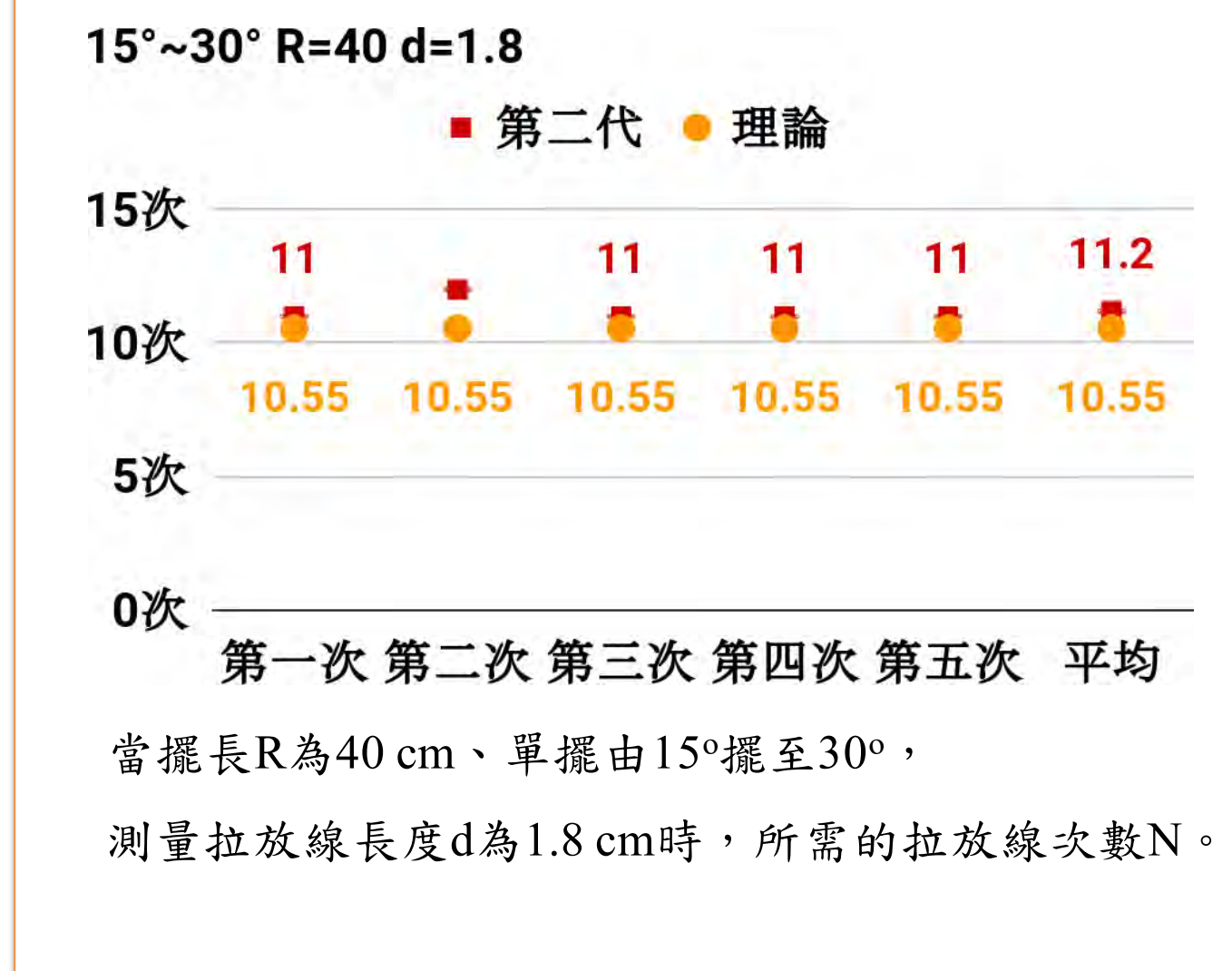
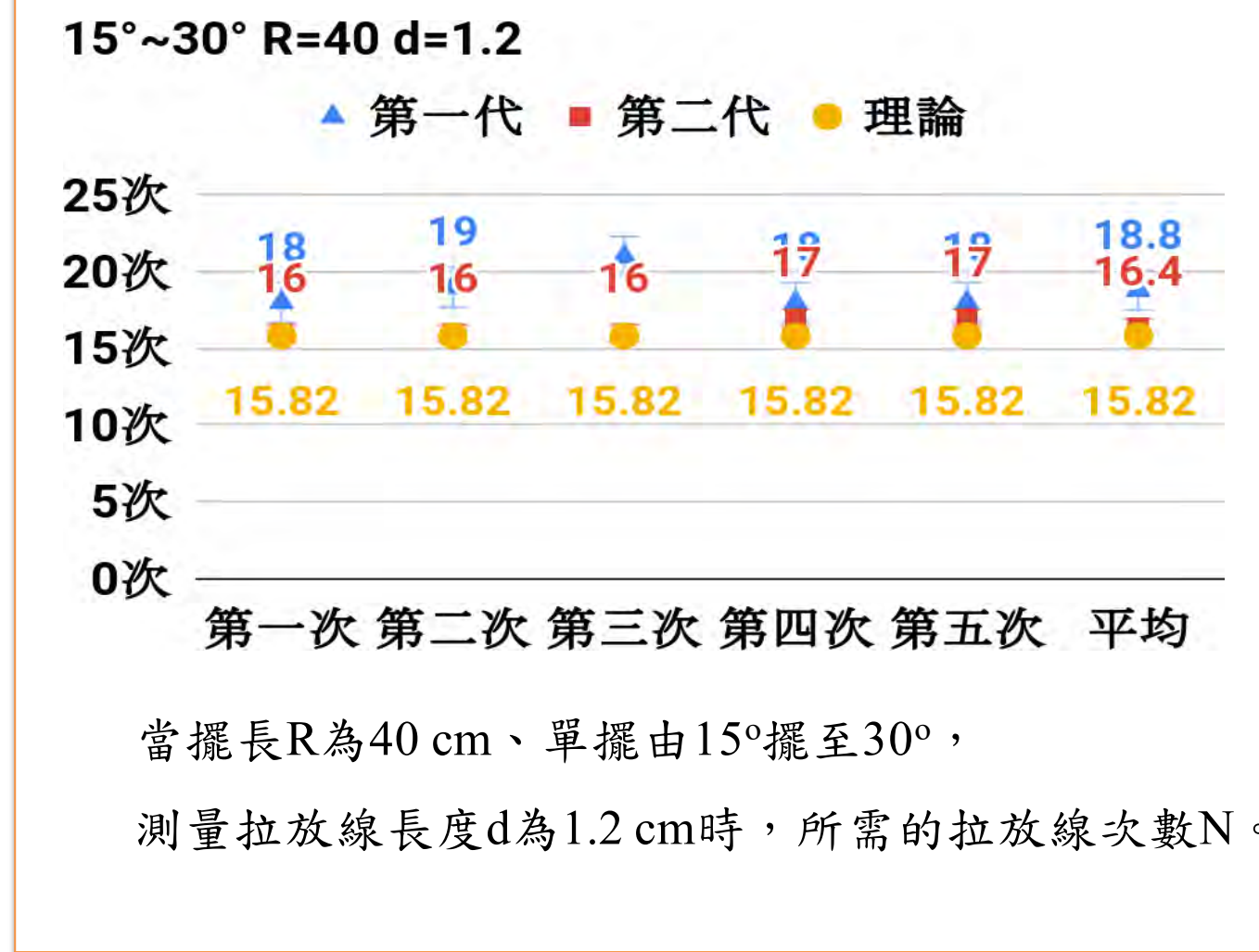


實驗3：探討所需拉放線次數N與拉放線長度d的關係

- 固定擺長R為40 cm。
- 調整拉放線長度d為1.2 cm、1.5 cm、1.8 cm、2.1 cm、2.4 cm，測量單擺由15°擺至30°所需的拉放線次數N。
- 重複步驟(2)各實驗4次。

註：拉放線長度d若小於1.2 cm或大於2.4 cm時，誤差會有上升的趨勢，因此僅採用1.2 cm~2.4 cm之間的數據。

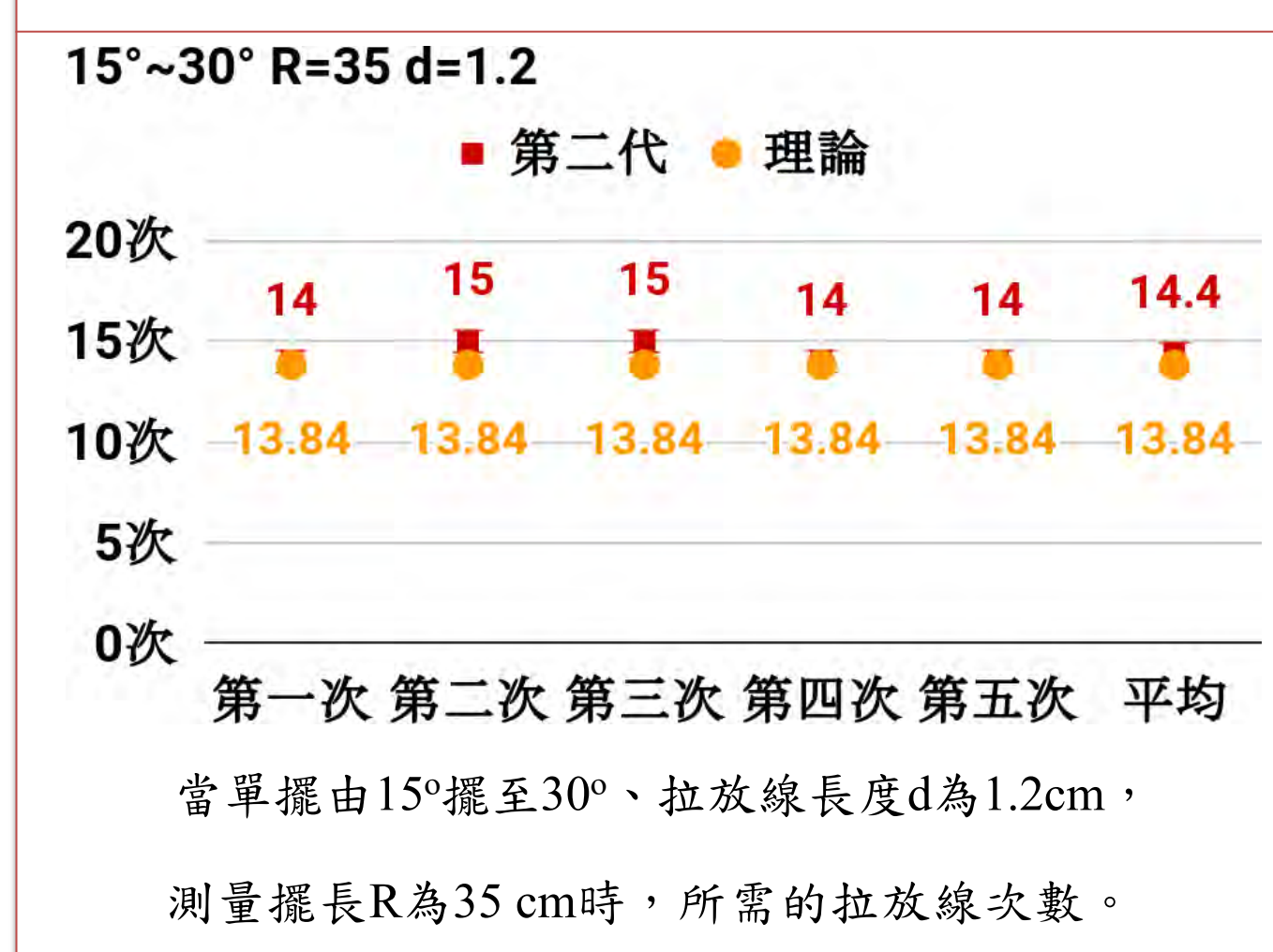
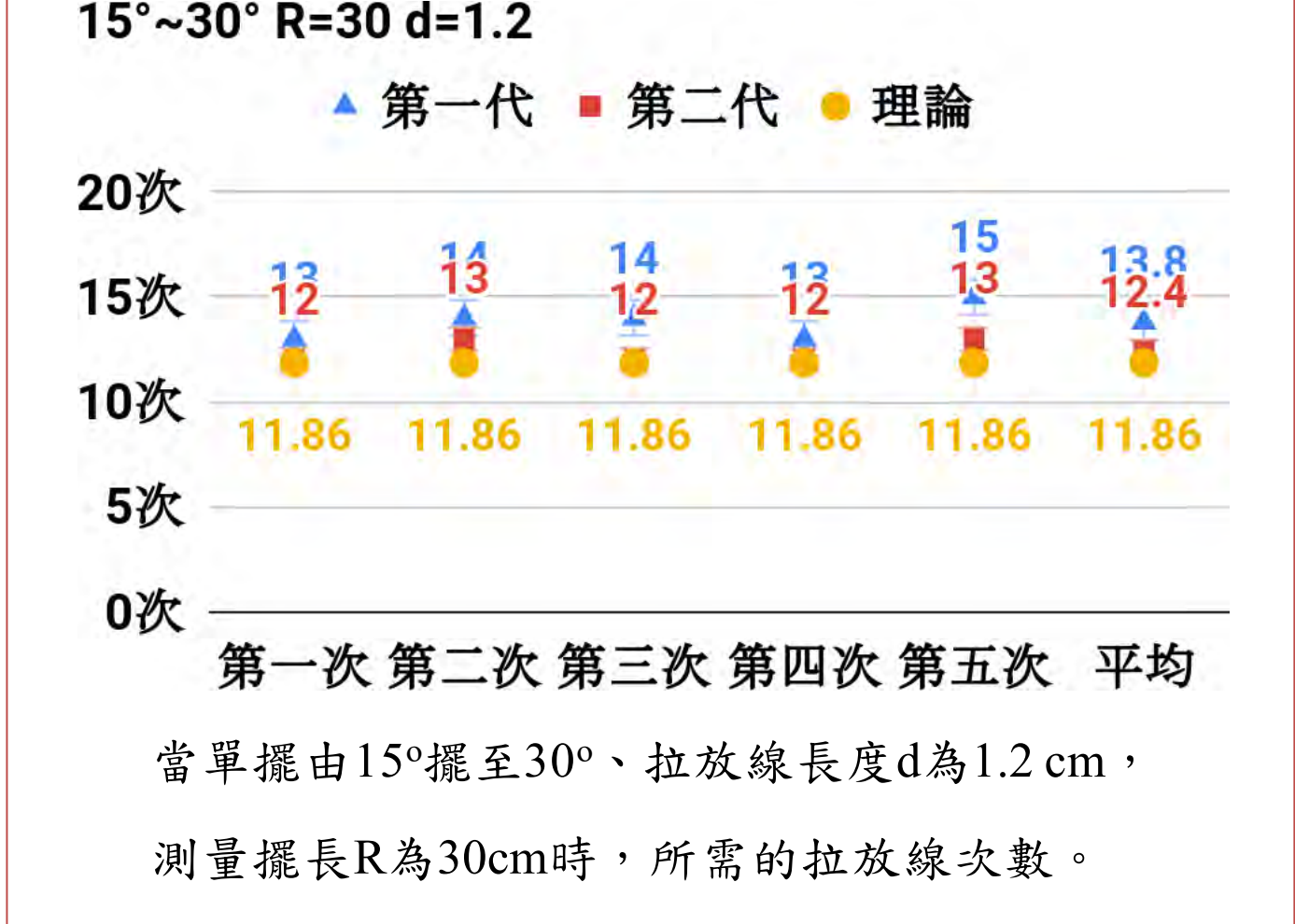
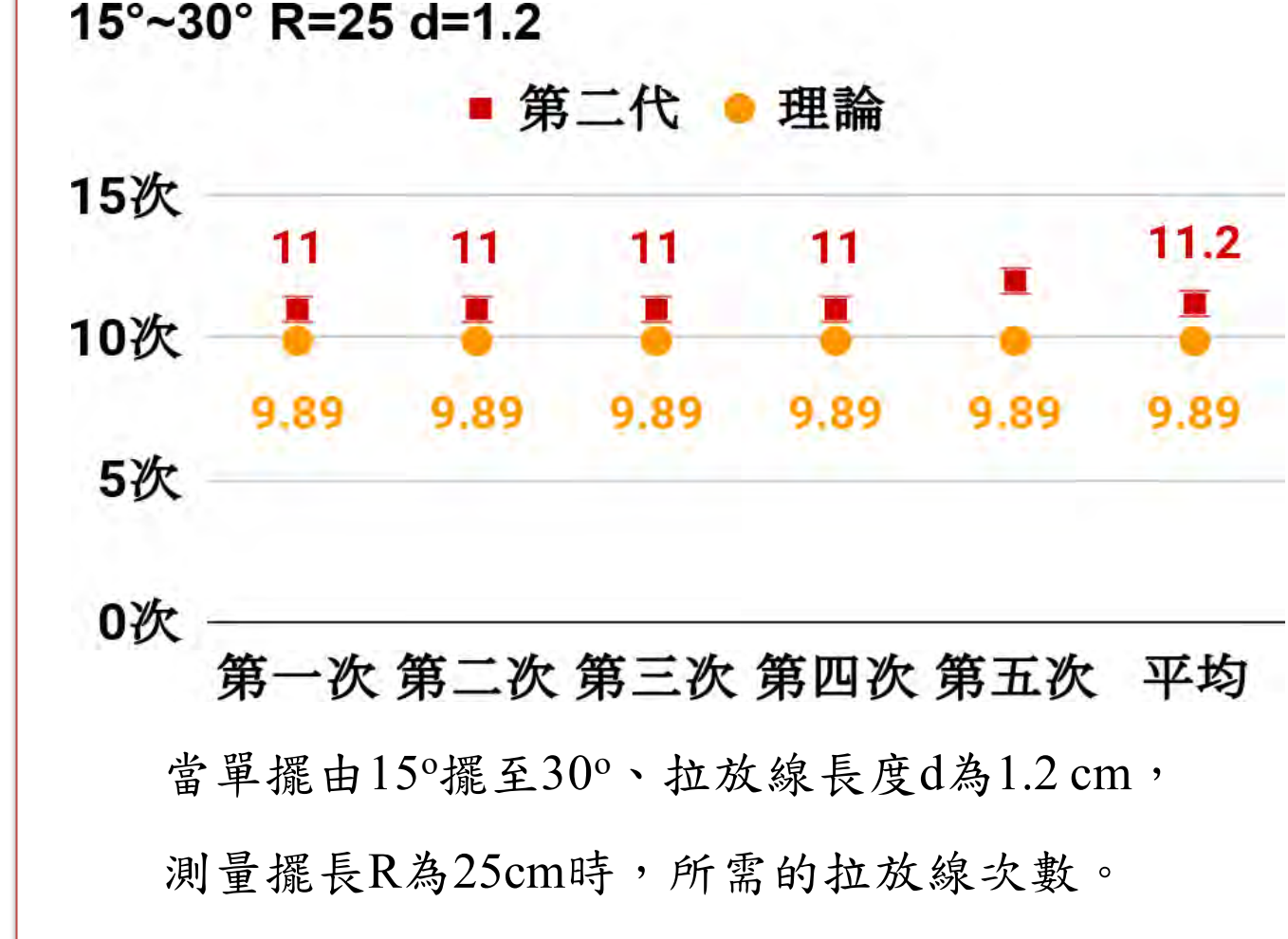
表(三)：拉放線長度1.2 cm、1.5 cm、1.8 cm、2.1 cm、4.5 cm的拉放線次數表								
項目(單位)	拉放線長度	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第一代	1.2cm	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論	15.82							
第二代	1.5cm	13	13	13	14	13	13.2	0.45
理論		12.65						
第二代	1.8cm	11	12	11	11	11	11.2	0.45
理論		10.55						
第二代	2.1cm	10	10	10	11	10	10.2	0.45
理論		9.04						
第一代	2.4cm	10	10	10	12	9	10.2	1.1
第二代		9	8	8	9	9	8.6	0.55
理論		7.94						

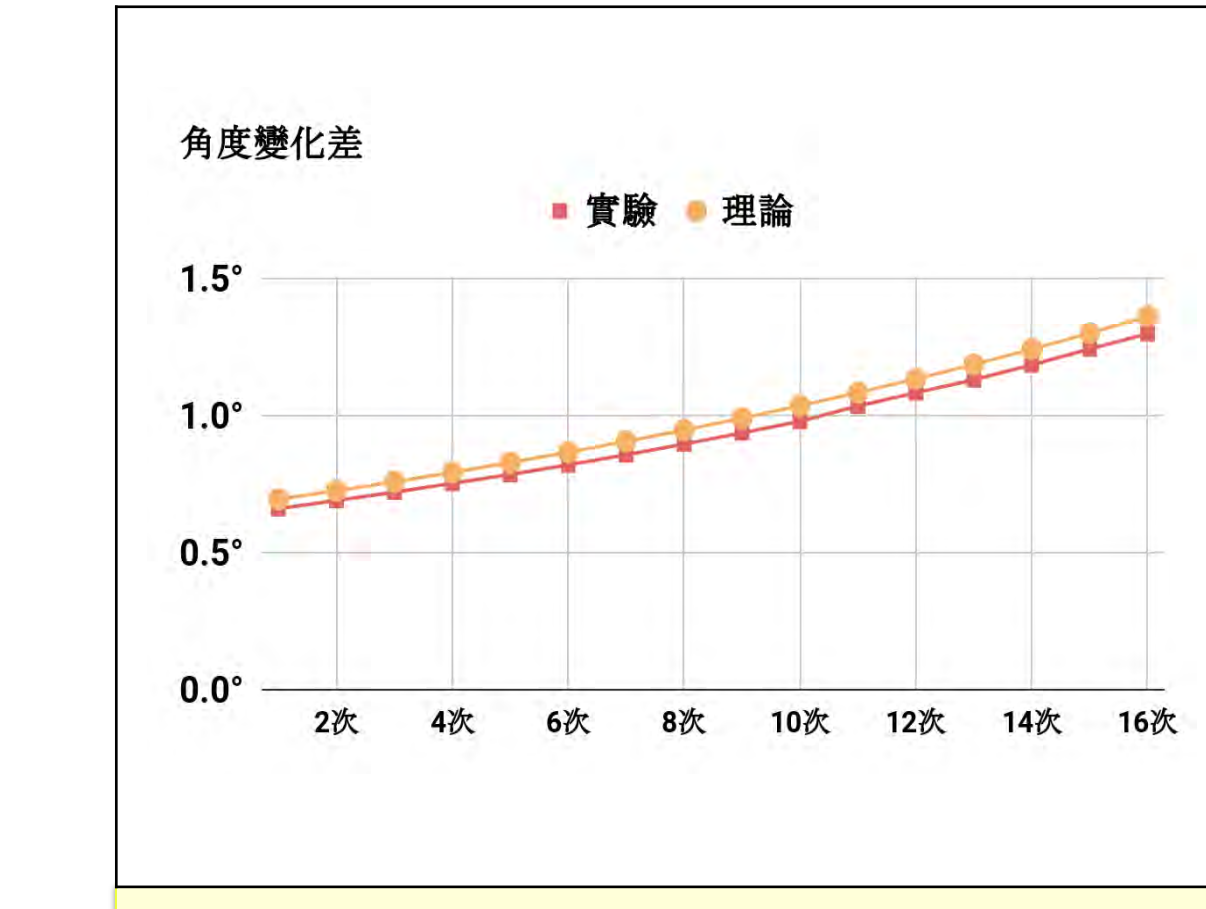
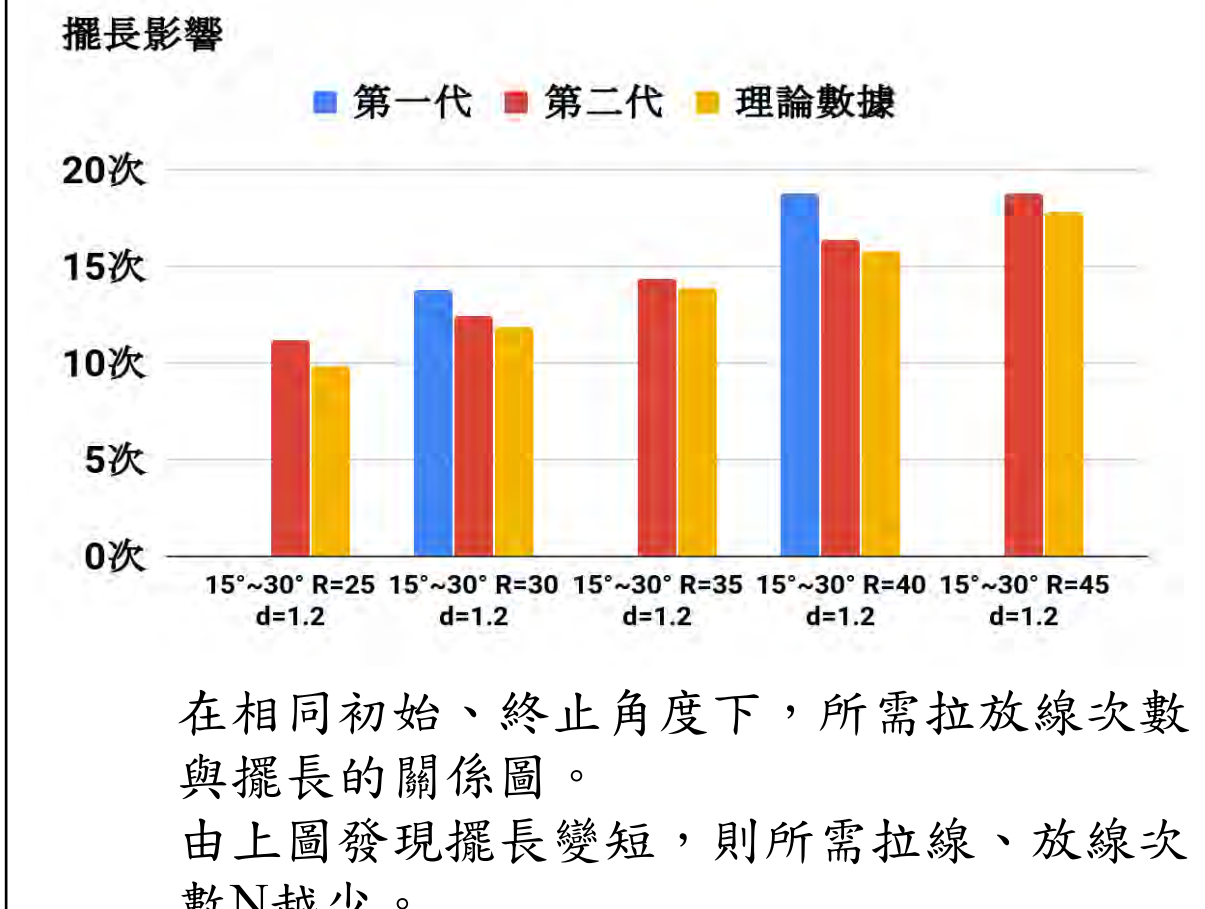
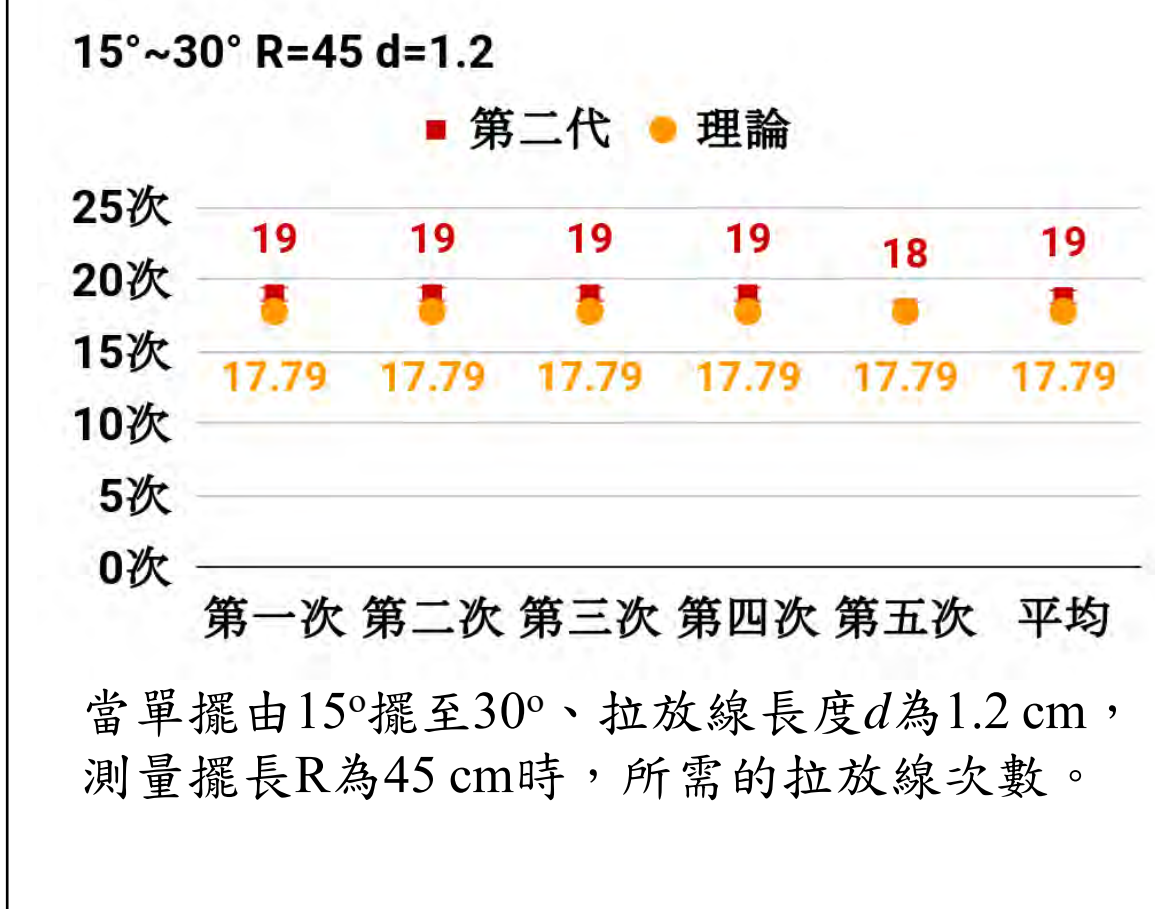


實驗4：探討所需拉放線次數N與不同擺長R的關係。

- 固定擺長d為1.2 cm。
- 調整擺長R為25 cm、30 cm、35 cm、40 cm、45 cm，測量單擺由15°擺至30°所需的拉放線次數N。

表(四)：擺長在25 cm、30 cm、35 cm、40 cm、45 cm拉放線次數表								
項目(單位)	擺長	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	平均次數	標準差
第二代	25cm	11	11	11	11	12	11.2	0.45
理論		9.89						
第一代	30cm	13	14	14	13	15	13.8	0.84
第二代		12	13	12	12	13	12.4	0.55
理論	11.86							
第二代	35cm	14	15	15	14	14	14.4	0.5
理論		13.84						
第一代	40cm	18	19	21	18	18	18.8	1.3
第二代		16	16	16	17	17	16.4	0.55
理論		15.82						
第二代	45cm	19	19	19	19	18	18.8	0.45
理論		17.79						

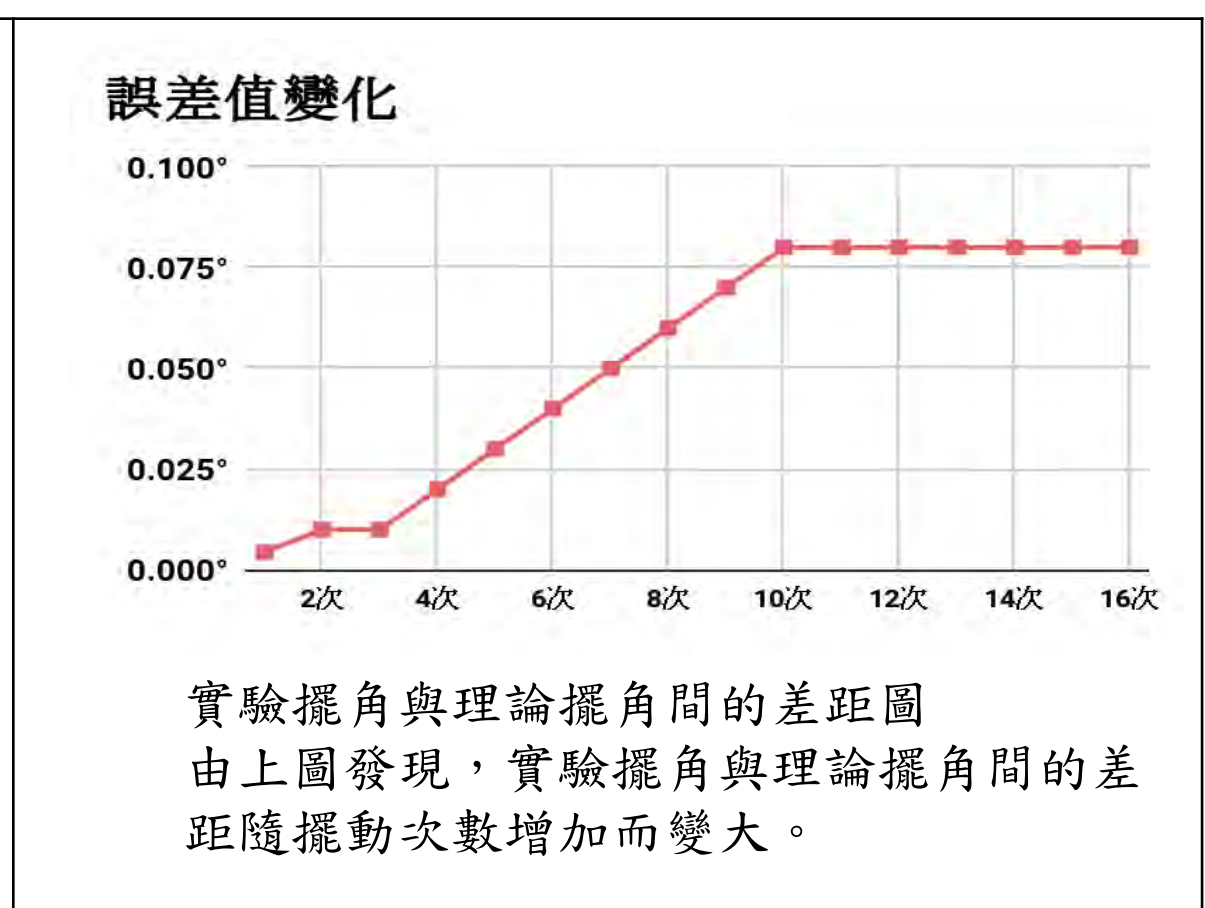
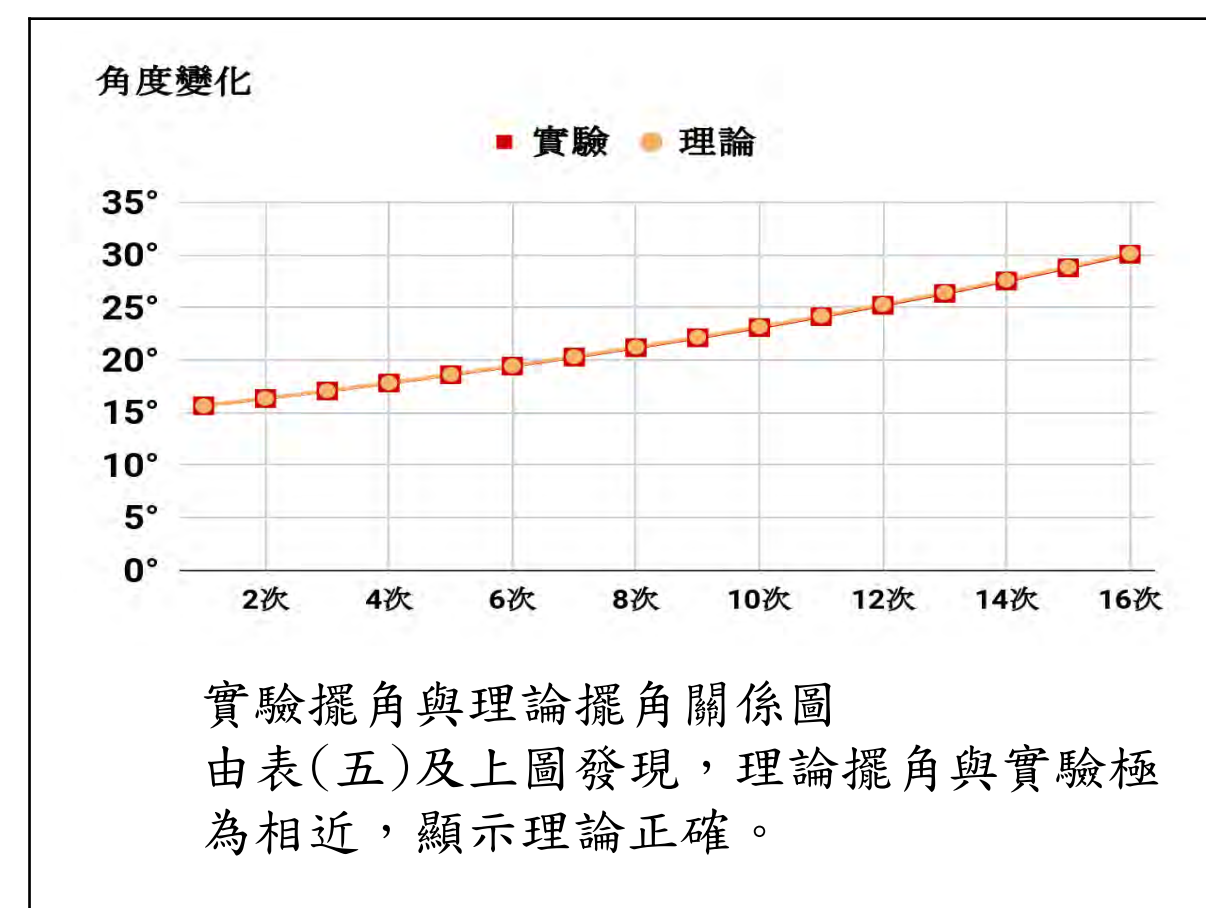




左圖為相鄰兩次擺角差值與理論間的關係圖，由左圖發現，相鄰兩次擺角差值與理論的差異隨擺動次數增加而略增，但整體差異極小。

實驗5：單擺在最高點時放線、最低點時拉線。實驗攝影搭配tracker，紀錄每一次擺盪的角度，並以C++的程式運算，獲得每次最高點擺角，將最高點擺角反覆帶入公式，測量單擺由15°擺至30°過程，每一次拉、放線結束的角度，並以理論計算角度。

- 由作功等於位能增加量得到： $3mg(1-\cos\theta) \times d = mgR(\cos\theta - \cos\phi) \Rightarrow \cos\phi = \cos\theta - \frac{3d}{R}(1-\cos\theta)$
註： θ 為拉放線一次前的角度， ϕ 為拉放線一次後的角度，其中擺長R=0.400 m。
- 由 $\theta_1 = 15^\circ$ 代入運算式中，得到 $\cos\theta_1$ ，並透過arccos函數算出 $\theta_2 = 15.6644^\circ$ 。
再將 $\theta_2 = 15.6644^\circ$ 代入求出 $\cos\theta_3$ ，並得出 $\theta_3 = 16.3589^\circ$ 。
- 可得知拉放線介於15次到16次之間角度會超過30°，以公式推算拉放線理論次數約為15.82次。
註：此數據是透過C++程式運算出來的結果。

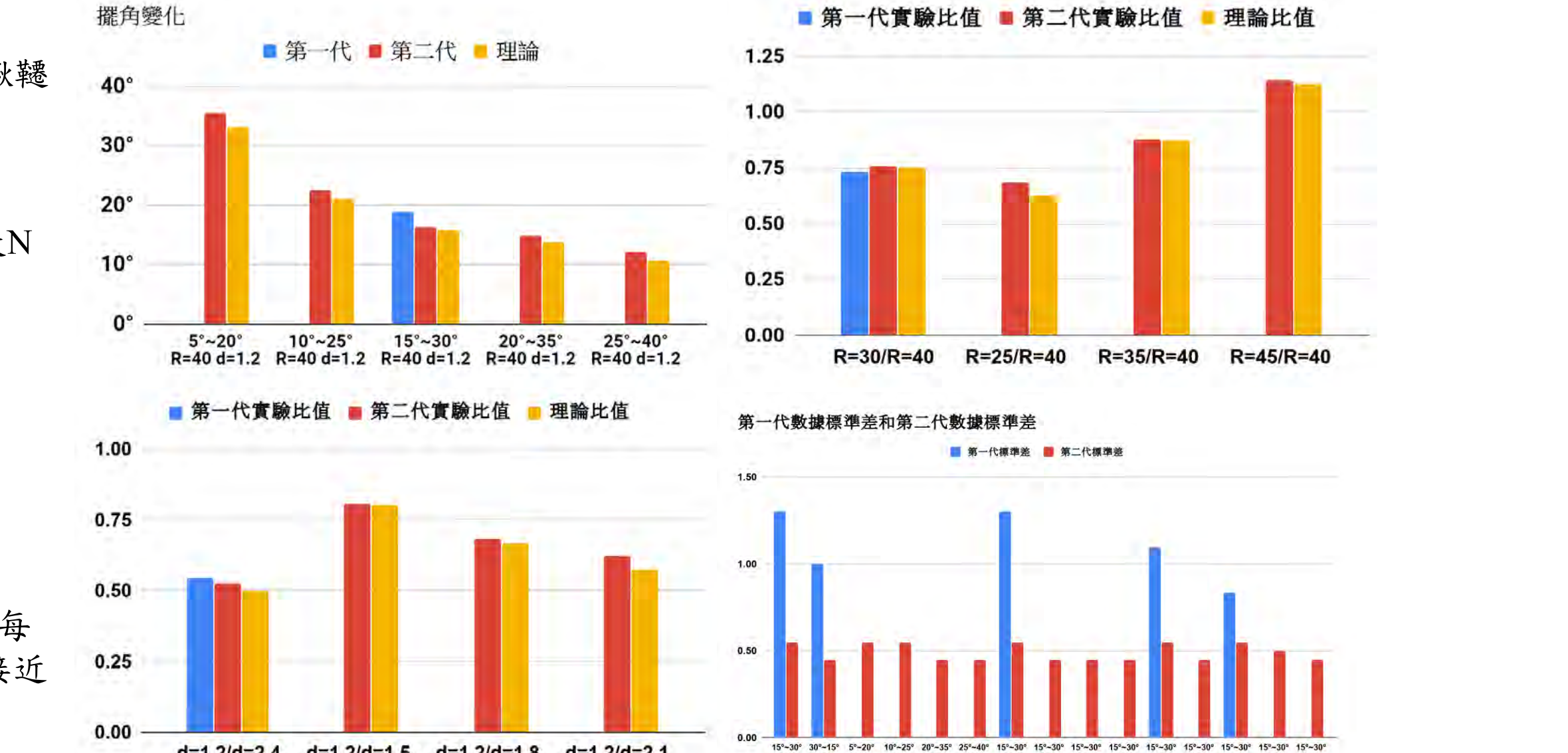


表(五)：實驗擺角與理論擺角關係表

拉放線次數	理論	實驗	誤差	理論角度變化	實驗角度變化
1	15.6644	15.66	0.0044	0.6644	0.66
2	16.3589	16.35	0.0089	0.6945	0.69
3	17.0844	17.07	0.0144	0.7255	0.72
4	17.8427	17.82	0.0207	0.7583	0.75
5	18.6351	18.61	0.0251	0.7924	0.78
6	19.4635	19.43	0.0305	0.8284	0.82
7	20.3294	20.28	0.0494	0.8659	0.86
8	21.2346	21.18	0.0546	0.9052	0.90
9	22.1812	22.12	0.0612	0.9466	0.94
10	23.1711	23.09	0.0811	0.9899	0.98
11	24.2065	24.13	0.0765	1.0354	1.03
12	25.2895	25.21	0.0795	1.0830	1.08
13	26.4228	26.34	0.0828	1.1333	1.13
14	27.6087	27.53	0.0787	1.1859	1.18
15	28.8501	28.77	0.0801	1.2414	1.24
16	30.1499	30.07	0.0799	1.2998	1.30

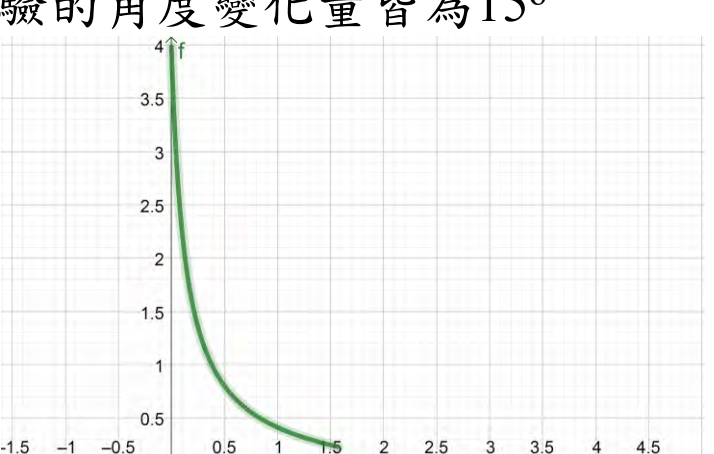
伍、研究結果

- 由實驗1發現：當單擺擺至最低點時馬達拉線，擺至最高點時馬達放線，可使擺角越來越大。當單擺擺至最高點時馬達拉線，擺至最低點時馬達放線，反而使擺角越來越小。故最有效增加鞞繩擺角的方式為：在最低點時馬達拉線，最高點時馬達放線。
- 由實驗2發現：當擺角變化(皆為15°)相同時，初始擺角越大，則所需拉放線次數N減少。
- 由實驗3發現：將拉線長度d由1.20 cm變為2.40 cm，發現拉線長度d變長，則所需拉線、放線次數N減少。即所需拉線、放線次數N與拉線長度d約成反比。
- 由實驗4發現：擺長由45 cm到25 cm，所需拉線、放線次數N減少。即所需拉放線次數N與擺長R約成正比。
- 由實驗5發現：
 - 理論擺角與實驗極為相近，顯示理論正確。
 - 實驗擺角與理論擺角間的差距隨擺動次數增加而變大。
 - 相鄰兩次擺角差與理論間的差異隨擺動次數增加而略為變大，但整體差異極小。
- 以馬達帶動長桿法+實驗攝影搭配tracker，紀錄每一次擺盪的角度，並以C++的程式運算，獲得每次最高點擺角，將最高點擺角反覆帶入公式，可準確求出所需的拉放線次數。所需拉放線次數接近理論值，顯示以此方法擺盪極為穩定。

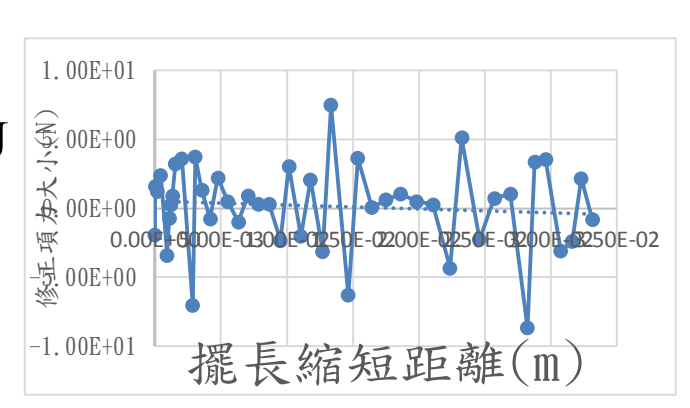


陸、討論

- 理論計算：
 - 拉線一次，施力 F_A 作正功 $W_A = [mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d$
放線一次，施力 F_B 作負功 $W_B = -F_B \times d = -T_B \times d = -mg\cos\theta \times d$
在一次最低點拉線、最高點放線的過程，施力淨作功
 $W = W_A + W_B = [mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d + (-mg\cos\theta \times d) = 3mg(1 - \cos\theta) \times d$
 - 在最低點的時候，張力作功為 $[mg + 2mg(1 - \cos\theta)] \times d$ 。
在最高點的時候，張力作功為 $-mg\cos\theta \times d$
 - 由於在低角度拉線次數較多，故鞞繩能量得到較少，求出所需拉放線次數較高。
 - 單擺由15°盪至30°，所需能量 $E = mgR(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)$
拉線次數 $N = \frac{E}{W} = \frac{mgR(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3mgd(1 - \cos\theta)}$ ，其中mg被消去，
由15°擺至30°平均擺角為22.5°。
 - 由公式 $N = \frac{R(\cos\phi - \cos\theta)}{3d(1 - \cos\theta)}$ (ϕ 為初始擺角、 θ 為中止擺角)和實驗2可得知：
拉放線次數N與 $\frac{\cos\phi - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$ 成正比，因為實驗的角度變化量皆為15°
故可表示成： $f(\phi) = \frac{\cos\phi - \cos(\phi + \frac{\pi}{12})}{1 - \cos(\phi + \frac{\pi}{12})}$

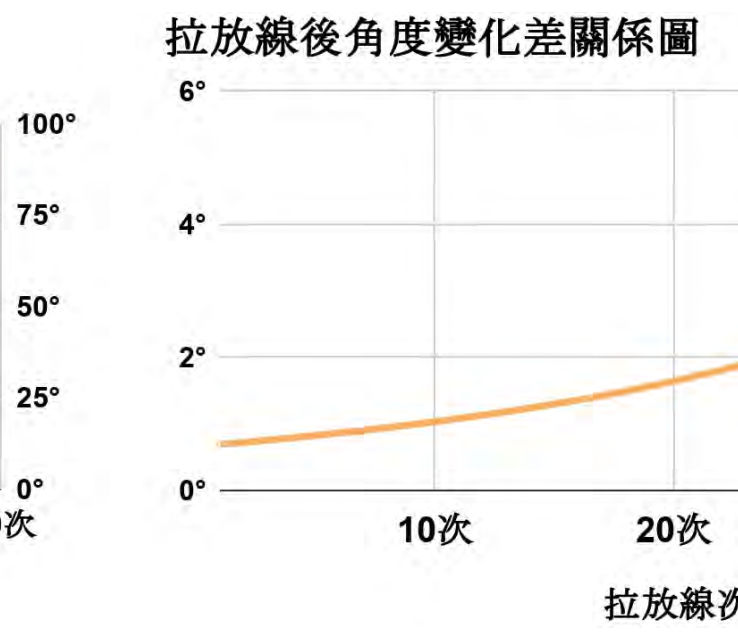
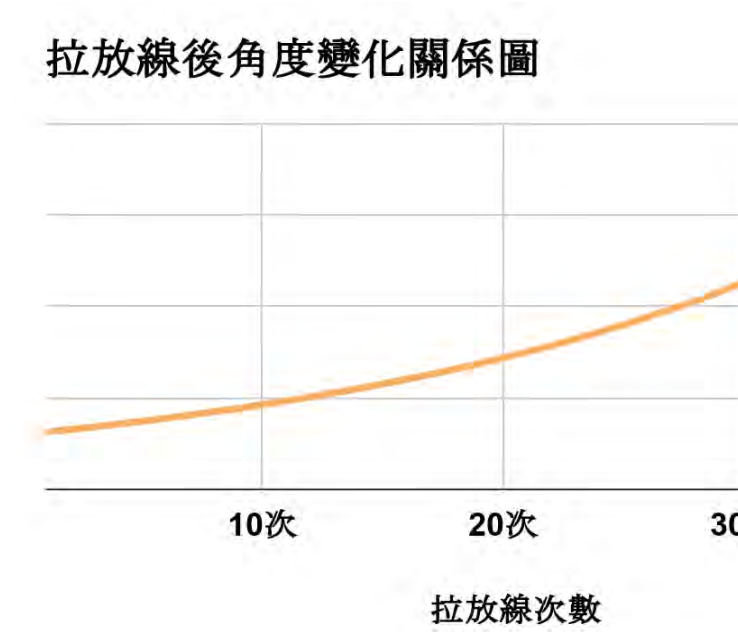


- 理論模擬
 - 利用Vpython程式和理論公式撰寫出模擬程式。
 - 透過Chrome瀏覽器將其模擬
 - 模擬程式中所跑出的數據與理論數據近乎相同。
 - 模擬程式中因鐵球拉放線設定瞬間拉完，故近乎無誤差。
 - 比較實際軌跡與程式模擬軌跡圖
- 單次軌跡形狀
- 單次軌跡形狀
- 差異原因：在程式模擬軌跡圖，拉線和放線都是一瞬間的，但是在實際中拉放線是需要時間的，故折返處會較平緩。
- 誤差分析
 - 拉放線略為提早或延遲的時機很難確定(最低點拉線、最高點放線)
 - 拉放線需要時間(大約為7°)造成單擺不會在最低/高點拉/放完所需要的距離，因張力隨角度改變，故在理論計算上的誤差。
 - 拉放線瞬間給予一個加速度(非向心加速度)，造成張力隨時間改變。
拉線瞬間的張力分析
(在擺長為40 cm、拉線距離為3 cm、擺錘為0.2 kg、擺角為15度)
1. 在單擺拉/放線的過程中，擺錘所受的張力會突然產生不規則變化。
2. 在理論計算時，拉放線時的張力皆忽略加速度所造成張力的不同和拉線過程所需要的時間造成擺角變化(張力隨角度而改變)，所以藉由tracker來關注在拉線/放線過程中所測得的物理量值算出實際的張力和理論計算時的張力的誤差。
3. 由加速度 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta}$ 可得知
法線方向： $T - mg\cos\theta = ma_r = m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) = m\frac{v^2}{r} - m\ddot{r}$
 r 為擺長， $m\ddot{r}$ 為修正項。
4. 藉由tracker分析運動情形以此算出對應擺長變化的關係
以此算出對應擺長變化的關係，可得出下圖：
(1) 以梯形面積計算修正項大小的總作功，其值為0.0071 J
約為理論張力作功的0.004倍。
(2) 即此修正項約佔0.4%，故忽略不計此誤差。



柒、結論

- 欲使單擺的擺角越來越大，拉放線的規則是：當單擺擺至最低點時馬達拉線，擺至最高點時馬達放線，以此為週期持續拉放線，是最有效增加擺角的方式。
- 擺長變短，則所需拉線、放線次數N減少。所需拉線、放線次數N與擺長R成正比。
- 拉線長度d變長，則所需拉線、放線次數N減少。所需拉線、放線次數N與拉線長度d成反比。
- 由公式 $\frac{R(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)}{3d(1 - \cos\theta)}$ 可知
理論所需拉放線次數N與擺長R成正比、與拉線長度d成反比，而與擺錘質量無關。實驗結果符合理論推導。
- 以馬達帶動長桿法比馬達拉放線更為穩定。且馬達帶動長桿法更為接近理論次數。
- 以攝影搭配tracker，紀錄每一次擺盪的角度，並以C++的程式運算，獲得每次最高點擺角，將最高點擺角反覆帶入公式，可準確求出15°盪至30°所需的拉放線次數。
 - 理論擺角與實驗極為相近，顯示理論正確。
 - 實驗擺角與理論擺角間的差距隨擺動次數增加而變大。
 - 相鄰兩次擺角差與理論間的差異隨擺動次數增加而略為變大，但整體差異極小
- 未來展望：
 - 未來研究：
 - 經過C++程式的計算，得到1到39次的拉放線角度變化，但由於鞞繩在大角度擺盪的誤差有增加的趨勢以及繩子在放線過程張力不平均的問題，期望未來能改善這些問題。
 - 希望未來程式透過輸入初始值(初始擺角、初始擺長、拉線距離)便可以算出所需週期，因為此次實驗是算出平均週期，雖然誤差不大，但是期望能計算出每拉線/或放線一次改變的週期，加入程式的撰寫當中。
 - 實務應用：
 - 將理論結合實驗數據，以Vpython程式寫出盪鞞繩動畫，可充當科普教材。
 - 未來希望可以發展成科學玩具，並開發出DIY套件，搭配Arduino等各種材料，供學生們自己組裝，並利用實驗所求得各項數據，製作出一個能自動盪擺的鞞繩。
 - 開發一套手機軟體，除了模擬出鞞繩擺盪的軌跡動畫，也可以加入一些與鞞繩互動的功能，例如：遊戲互動(讓小朋友在鞞繩最高點時按下按鈕等等)、改變重心變化量，可以使學生們更有效的了解盪鞞繩的原理，
 - 在公園的鞞繩旁設模擬裝置和說明，讓小朋友們可以在玩的同時也能理解其中的物理原理(以淺顯易懂的文字和原理解釋)。



捌、參考資料

1. 自然生活與科技九年級上Ch3功與能
2. App Inventer程式教學
3. C++程式教學
4. FIRST論壇
5. Geogebra程式教學
6. Vpython程式教學