

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

030109

逆轉勝---一種測量虛像的新方法

學校名稱：彰化縣私立精誠高級中學(附設國中)

作者： 國二 李冠均 國二 劉韋良	指導老師： 陳俊杰
---------------------------------	------------------

關鍵詞：虛像、逆向光線、相似三角形

摘要

虛像不是真實的光線匯聚而成，無法在紙屏上成像，不能藉由紙屏測量虛像的位置及大小，我們想在紙屏上找到虛像。高中物理對虛像位置及大小的測量，介紹了視差法，此方法誤差較大，在歷屆全國科展的作品中，作者利用自創的「視高法」測量虛像位置及大小，此方法也存在一些缺點，我們想找到更準確更具體的方法來測量虛像位置及大小，於是利用相機和刻度尺，記錄虛像發出的假想光線，依此推算虛像的位置與大小。我們用自創的方法測量平面鏡及凹凸透鏡形成的虛像，都得到和理論值接近的數值。

為了讓虛像的呈現更具體，我們進一步使用雷射筆模擬虛像的假想光線，將虛像假想光線逆像射回，在紙屏上將發出假想光線的虛像位置找出來，結果也和理論值接近。

壹、研究動機

在國中理化課程中，介紹了面鏡、透鏡的成像，其中關於虛像的位置和大小如何測量，課程中沒有詳細介紹，我們心中存在著許多的疑問，譬如，我們視覺上一直覺得平面鏡所產生的虛像比物體小，但理論上是相等，如果有準確具體測量虛像位置和大小方法，應該可以解決心中的一些疑問，於是我們查了高中物理課程，課程中對於虛像位置和大小測量，介紹了視差法，這種方法不夠準確，於是我們又查了全國歷屆科展關於虛像探討的作品，在 53 屆的作品中，作者利用自創的「視高法」測量了虛像位置和大小，我們覺得「視高法」不夠直接具體，也發現「視高法」的一些缺點。

我們希望能夠找到更準確、更具體測量虛像位置和大小方法，最好能具體的在紙屏上尋找虛像的位置，於是開始了以下的探討。

貳、研究目的

- 一、設計新方法，利用虛像發出的假想光線來測量計算虛像的位置、大小，並以實驗驗證其結果是否準確。
- 二、以雷射筆的光線代替虛像的假想光線，逆向射回，讓虛像的點呈現在屏幕上，具體化虛像，並依此紙屏上找到的虛像來測量虛像的像距、像長。

參、研究設備及器材

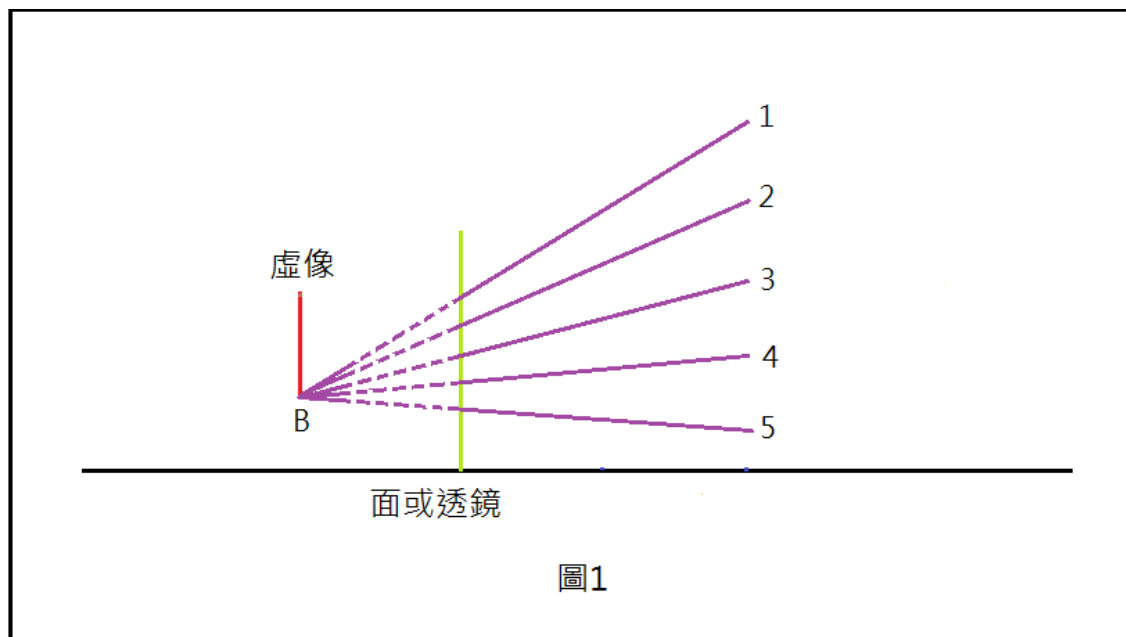
平面鏡、凸透鏡、凹透鏡、相機、光凳、屏幕、刻度尺、雷射筆、相機腳架。

肆、研究方法

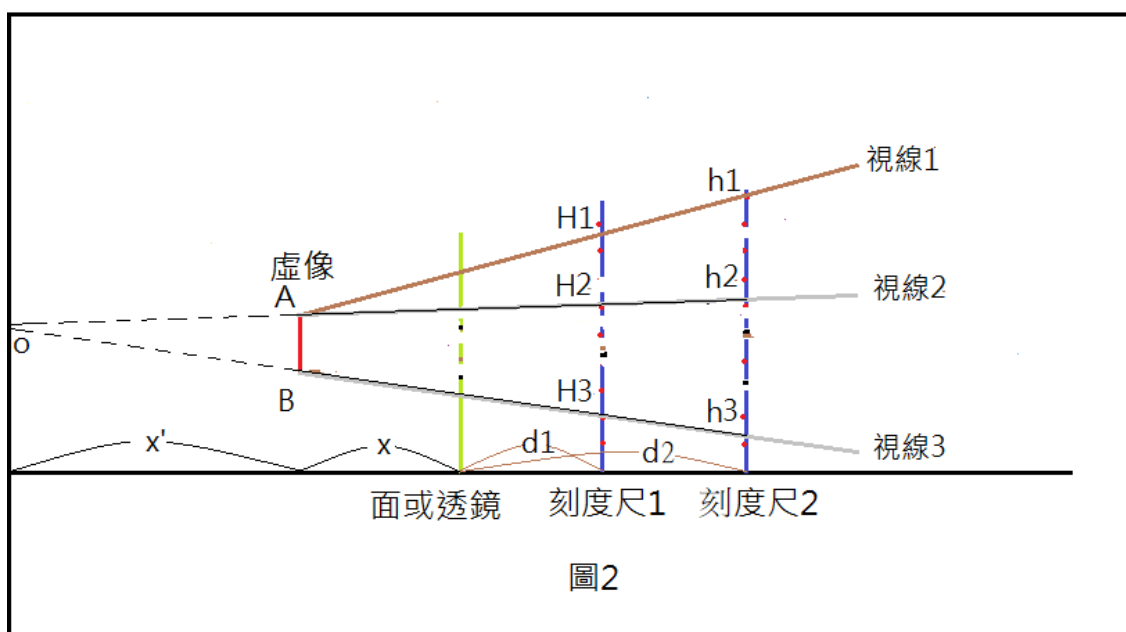
依據虛像成像原理，設計實驗，將平面鏡、凸透鏡、凹透鏡的虛像假想光線具體記錄下來，以數學原理計算虛像的位置和大小，並以雷射光模擬假想光線，取代數學計算方式，以具體操作的方式，分別測量出虛像的位置和大小。

一、虛像成像原理

我們在鏡中看到的虛像，是物體發出的光線，經面鏡反射或透鏡折射後，我們眼睛的視覺感覺物體的光線好像從該點射出，如下圖所示的虛像 B 點。



二、根據兩點決定一線的原則，設計方法，記錄虛像所發出的光線。



- (一)、在鏡前 d_1 的距離處，放置刻度尺 1，刻度尺後的數位相機經透鏡或面鏡對著虛像的頂點 A，取適當高度形成視線 1，拍攝此時的畫面，記錄 A 點和刻度尺 1 重疊的位置，可得 H_1 點刻度。
- (二)、移動刻度尺到鏡前 d_2 的距離處，當作刻度尺 2，拍攝此時的畫面，記錄 A 點和刻度尺 2 重疊的位置，可得 h_1 點刻度。
- (三)、調整數位相機的高度形成視線 2，仿照前面方式，可得 H_2 、 h_2 點的刻度。
- (四)、數位相機經透鏡或面鏡對著虛像的底部 B，取適當高度形成視線 3，仿照前面方式，可得 H_3 、 h_3 點的刻度。

三、依據相似三角形的原理，由所記錄的虛像假想光線，計算虛像的位置和大小。

- (一)、由視線 1、視線 2，依據相似三角形的原理，

$$\frac{x+d_1}{x+d_2} = \frac{d(H_1, H_2)}{d(h_1, h_2)} \text{ 可得虛像像距 } x$$

※ $d(H_1, H_2)$ 表示 H_1 、 H_2 兩點的距離， $d(h_1, h_2)$ 表示 h_1 、 h_2 兩點的距離

- (二)、由視線 2、視線 3，依據相似三角形的原理，可得

$$\frac{x'+x+d_1}{x'+x+d_2} = \frac{d(H_2, H_3)}{d(h_2, h_3)}$$

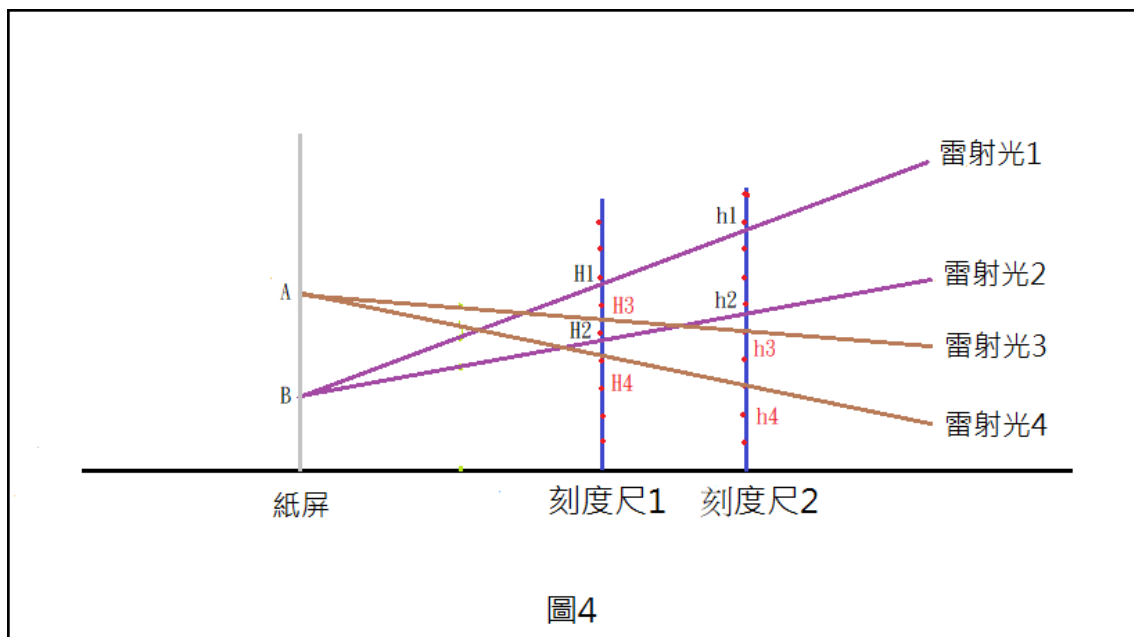
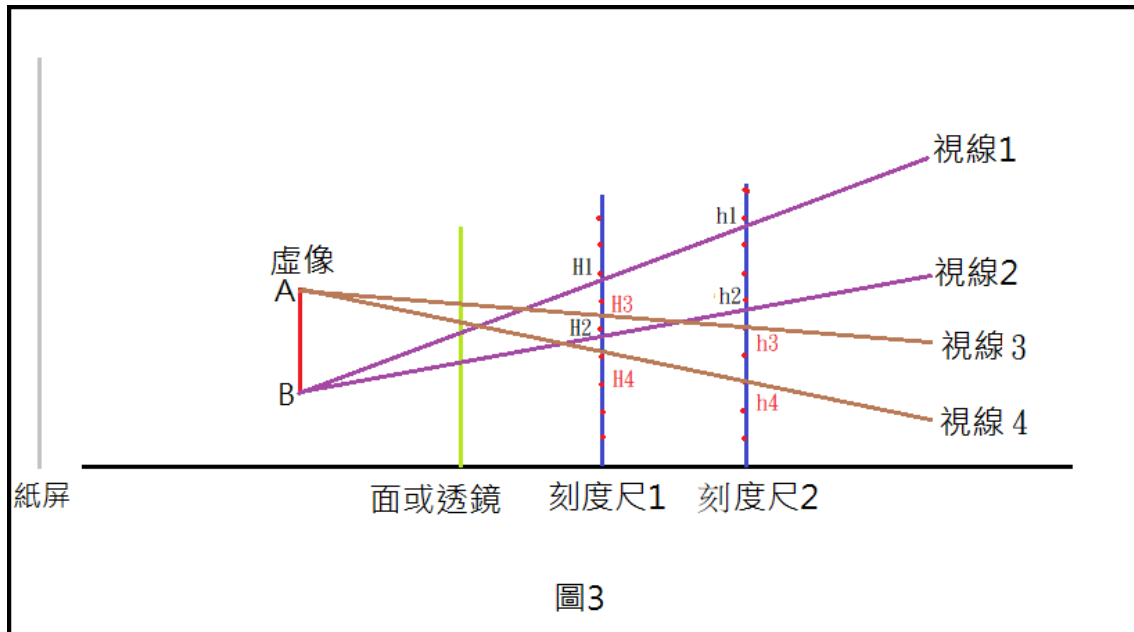
先求出 x' 後，再由

$$\frac{d(A, B)}{d(H_2, H_3)} = \frac{x'}{x'+x+d_1} \text{ 可得虛像大小 } d(A, B)。$$

四、依據前面所設計紀錄虛像假想光線的方法和利用相似三角形原理推出計算虛像像距和像長的公式，對平面鏡、凸透鏡和凹透鏡的虛像位置大小做測量,觀察驗證所設計的方法是否可行準確，並將測量值紀錄在實驗結果中。

因實驗結果顯示我們所設計的方法準確可行，所以我們進一步往虛像具體化的方向邁進，開始下一步驟的探究。

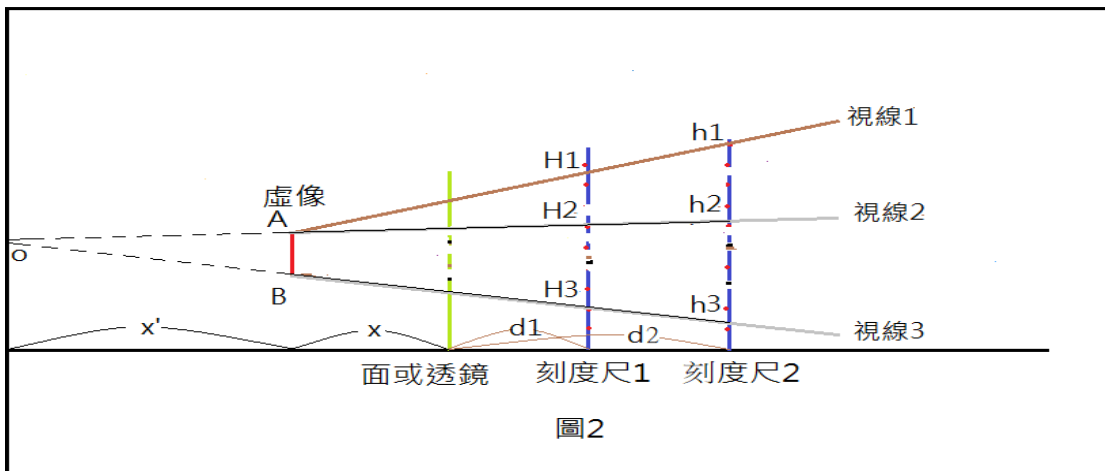
五、以雷射光筆模擬虛像假想光線，以具體操作的方式，測量出虛像的位置和大小。



- (一)、仿照前面紀錄虛像假想光線的方法，紀錄虛像底部 B 點所發出的兩條光線，視線 1 和視線 2，虛像頂點 A 點所發出的兩條光線，視線 3 和視線 4。
- (二)、以雷射光線模擬虛像假想光線的視線 1、視線 2，在透鏡或面鏡後方，放置紙屏，挪開透鏡或面鏡，雷射光線會射向紙屏，前後移動紙屏，當二雷射光線在紙屏上交於一點，該點就是虛像底部的位置，此時，紙屏與原來放置面、透鏡位置的距離，就是像距。
- (三)、仿照前面的方法，可在紙屏上，找到虛像頂部的的位置，兩點的距離就是像長。

伍、研究結果

一、 平面鏡虛像像距的測量與計算(使用相似三角形數學原理)



根據研究方法三推出的公式

$$\frac{x+d1}{x+d2} = \frac{d(H1 \cdot H2)}{d(h1 \cdot h2)} \text{ 可得虛像像距 } x$$



物體置於平面鏡前 15cm、20cm、25cm，找出視線 1、2 一組，將數據代入公式求像距，每一物距找出 10 組視線 1、2，觀察求出的像距是否準確

(一)、實驗數據

平面鏡在物距15、20、25時，所測量出的像距											
物距	d1	d2	H1	h1	H3	h3	H1-H3	h1-h3	像距 x		
15	4	12	11.02	12.29	8.82	9.16	2.2	3.13	14.92473		
			11.51	12.98	9.43	10.03	2.08	2.95	15.12644		
			11.79	13.39	10.05	10.91	1.74	2.48	14.81081		
			12.35	14.17	10.64	11.75	1.71	2.42	15.26761		
			12.75	13.25	10.57	10.16	2.18	3.09	15.16484		
			12.17	12.71	10.18	9.89	1.99	2.82	15.18072		
			12.11	13.27	10.06	10.36	2.05	2.91	15.06977		
			12.07	12.57	10.13	9.82	1.94	2.75	15.16049		
			12.34	13.72	10.17	10.63	2.17	3.09	14.86957		
			11.67	12.44	9.84	9.84	1.83	2.6	15.01299		
20	6	14	12.41	13.76	9.25	9.63	3.16	4.13	20.06186		
			11.82	12.99	9.69	10.21	2.13	2.78	20.21538		
			10.73	11.57	8.34	8.45	2.39	3.12	20.19178		
			11.03	11.66	9.02	9.03	2.01	2.63	19.93548		
			11.11	12.87	8.87	9.94	2.24	2.93	19.97101		
			10.26	11.81	8.65	9.7	1.61	2.11	19.76		
			10.45	11.71	8.46	9.11	1.99	2.6	20.09836		
			11.13	11.95	9.33	9.6	1.8	2.35	20.18182		
			11.25	12.71	9.42	10.32	1.83	2.39	20.14286		
			11.24	11.75	9.46	9.43	1.78	2.32	20.37037		
25	8	16	8.92	9.14	8.43	8.53	0.49	0.61	24.66667		
			10.25	10.8	8.67	8.84	1.58	1.96	25.26316		
			11.01	11.73	8.9	9.11	2.11	2.62	25.09804		
			11.69	12.58	9.44	9.78	2.25	2.8	24.72727		
			11.92	12.93	9.93	10.46	1.99	2.47	25.16667		
			11.16	12.95	8.95	10.21	2.21	2.74	25.35849		
			12.41	12.16	9.72	8.82	2.69	3.34	25.10769		
			10.97	11.48	9.12	9.18	1.85	2.3	24.88889		
			10.65	10.17	9.02	8.15	1.63	2.02	25.4359		
			11.45	12.56	9.12	9.66	2.33	2.9	24.70175		

(二)數據分析

平面鏡在物距15時，所測量出的像距數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖
像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差	
14.92473	15.0588	-0.13407	-0.89034 %	
15.12644		0.06764	0.449187 %	
14.81081		-0.24799	-1.64687 %	
15.26761		0.20881	1.386677 %	
15.16484		0.10604	0.704196 %	
15.18072		0.12192	0.809653 %	
15.06977		0.01097	0.07285 %	
15.16049		0.10169	0.675309 %	
14.86957		-0.18923	-1.25665 %	
15.01299		-0.04581	-0.30422 %	
每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖 平均值接近理論值15				

平面鏡在物距20時，所測量出的像距數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖
像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差	
20.06186	20.09289	-0.03103	-0.15443 %	
20.21538		0.12249	0.609619 %	
20.19178		0.09889	0.492164 %	
19.93548		-0.15741	-0.78341 %	
19.97101		-0.12188	-0.60658 %	
19.76		-0.33289	-1.65676 %	
20.09836		0.00547	0.027224 %	
20.18182		0.08893	0.442594 %	
20.14286		0.04997	0.248695 %	
20.37037		0.27748	1.380986 %	
每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖				

平面鏡在物距25時，所測量出的像距數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖
像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差	
24.66667	25.04145	-0.37478	-1.49664 %	
25.26316		0.22171	0.885372 %	
25.09804		0.05659	0.225985 %	
24.72727		-0.31418	-1.25464 %	
25.16667		0.12522	0.500051 %	
25.35849		0.31704	1.266061 %	
25.10769		0.06624	0.264521 %	
24.88889		-0.15256	-0.60923 %	
25.4359		0.39445	1.575188 %	
24.70175		-0.3397	-1.35655 %	
每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖 平均值接近理論值25				

(三)、分析結論：測量出的像距其平均值和物距幾乎相等，數值集中，表示我們設計紀錄光線、計算像距的方法準確。

二、平面鏡虛像像長的測量與計算(使用相似三角形數學原理)

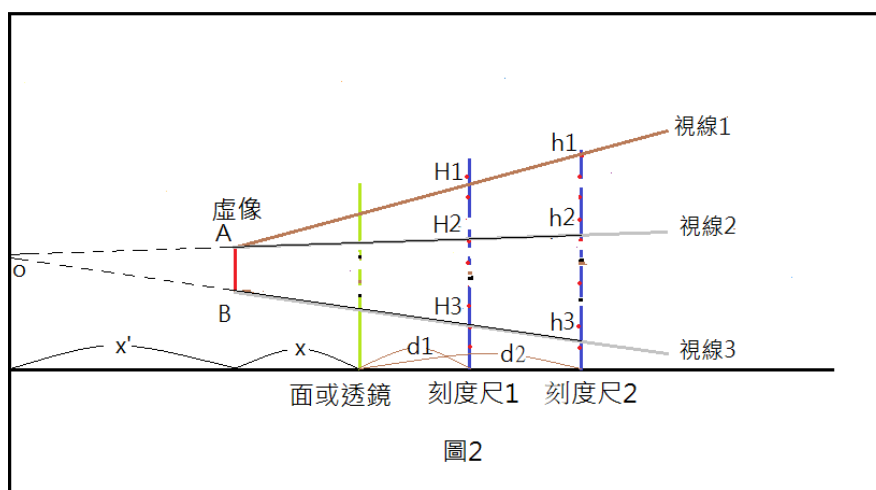


圖2

根據研究方法三推出的公式

$$\frac{x'+x+d1}{x'+x+d2} = \frac{d(H2, H3)}{d(h2, h3)}$$

先求出 x' 後，再由

$$\frac{d(A, B)}{d(H2, H3)} = \frac{x'}{x'+x+d1}$$
 可得虛像大小 $d(A, B)$ 。

取物長 4cm 的物體，置於平面鏡前 15cm、20cm、25cm，找出視線 2、3 一組，將數據代入公式求像長，每一物距找出 10 組視線 2、3，觀察求出的像長是否準確。

(一)、實驗數據

平面鏡在物距15、20、25時，對長度4的物體所測量出的像長													
物距	d1	d2	H3	h3	H4	h4	H3-H4	h3-h4	x	x'	像長		
15	5	10	14.12	14.65	7.79	7.74	6.33	6.91	15	34.56897	4.01		
			16.32	17.4	9.22	9.53	7.1	7.87	15	26.1039	4.02		
			14.41	15.01	7.02	6.81	7.39	8.2	15	25.61728	4.015		
			15.51	16.38	7.72	7.65	7.79	8.73	15	21.43617	4.03		
			15.35	16.11	8.02	7.96	7.33	8.15	15	24.69512	4.05		
			14.99	15.3	7.88	7.41	7.11	7.89	15	25.57692	3.99		
			15.31	14.91	8.13	6.91	7.18	8	15	23.78049	3.9		
			15.23	14.37	8.46	6.9	6.77	7.47	15	28.35714	3.97		
			14.74	15.72	7.53	7.72	7.21	8	15	25.63291	4.05		
			16.03	14.52	9.7	7.63	6.33	6.89	15	36.51786	4.09		
20	8	16	13.26	13.6	7.51	7.37	5.75	6.23	20	67.83333	4.07		
			14.51	15.23	7.02	6.75	7.49	8.48	20	32.52525	4.025		
			15.23	16.15	6.35	5.88	8.88	10.27	20	23.10791	4.015		
			16.11	17.28	6.01	5.44	10.1	11.84	20	18.43678	4.01		
			15.11	16.39	6.43	6.17	8.68	10.22	20	17.09091	3.999608		
			16.15	17.42	7.11	6.73	9.04	10.69	20	15.8303	3.993992		
			14.51	15.31	6.18	5.55	8.33	9.76	20	18.6014	4.014094		
			15.37	16.29	6.34	5.61	9.03	10.68	20	15.78182	3.982744		
			15.5	16.5	6.3	5.6	9.2	10.9	20	15.29412	3.986667		
			16.46	17.32	6.53	5.48	9.93	11.84	20	13.59162	4.017812		
25	10	20	13.31	13.68	7.32	7.1	5.99	6.58	25	66.52542	3.925		
			16.32	17.55	5.33	4.58	10.99	12.97	25	20.50505	4.06		
			15.28	16.22	6.05	5.48	9.23	10.74	25	26.12583	3.945		
			14.45	15.16	6.98	6.69	7.47	8.47	25	39.7	3.97		
			14.48	15.12	7.12	6.51	7.36	8.61	25	23.88	4.005397		
			13.38	14.03	7.33	7.4	6.05	6.63	25	69.31034	4.02		
			14.24	15.38	6.36	6.08	7.88	9.3	25	20.49296	3.987965		
			14.13	14.9	6.7	6.2	7.43	8.7	25	23.50394	4.014217		
			15.53	16.32	5.64	4.4	9.89	11.92	25	13.71921	4.023908		
			14.44	15.89	5.8	5.6	8.64	10.29	25	17.36364	4.015182		

(二)、數據分析

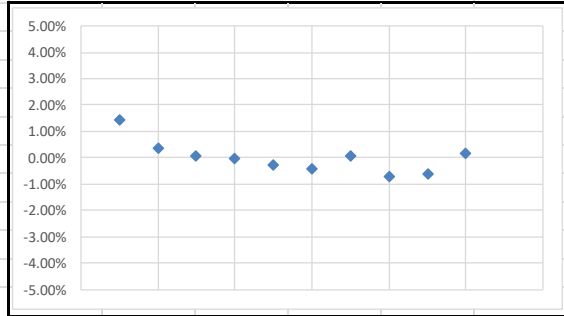
平面鏡在物距15時，對長度4的物體所測量出的像長數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖	
像長	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
4.01	4.0125	-0.0025	-0.06231 %		
4.02	4.0125	0.0075	0.186916 %		
4.015	4.0125	0.0025	0.062305 %		
4.03	4.0125	0.0175	0.436137 %		
4.05	4.0125	0.0375	0.934579 %		
3.99	4.0125	-0.0225	-0.56075 %		
3.9	4.0125	-0.1125	-2.80374 %		
3.97	4.0125	-0.0425	-1.05919 %		
4.05	4.0125	0.0375	0.934579 %		
4.09	4.0125	0.0775	1.931464 %		

每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖平均值接近理論值4

平面鏡在物距20時，對長度4的物體所測量出的像長數據分析			
像長	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
4.07	4.011492	0.058508	1.45851 %
4.025		0.013508	0.336733 %
4.015		0.003508	0.087449 %
4.01		-0.00149	-0.03719 %
3.999608		-0.01188	-0.29625 %
3.993992		-0.0175	-0.43625 %
4.014094		0.002602	0.064864 %
3.982744		-0.02875	-0.71664 %
3.986667		-0.02482	-0.61885 %
4.017812		0.00632	0.157547 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖平均值接近理論值4

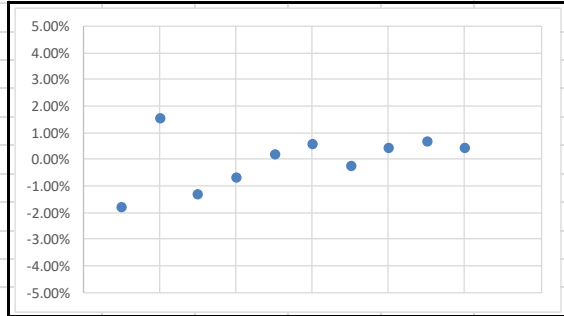
10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖



平面鏡在物距25時，對長度4的物體所測量出的像長數據分析			
像長	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
3.925	3.996667	-0.07167	-1.79925 %
4.06		0.063333	1.590016 %
3.945		-0.05167	-1.29713 %
3.97		-0.02667	-0.66949 %
4.005397		0.00873	0.219172 %
4.02		0.023333	0.58579 %
3.987965		-0.0087	-0.21847 %
4.014217		0.01755	0.440604 %
4.023908		0.027241	0.683903 %
4.015182		0.018515	0.464831 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖平均值接近理論值4

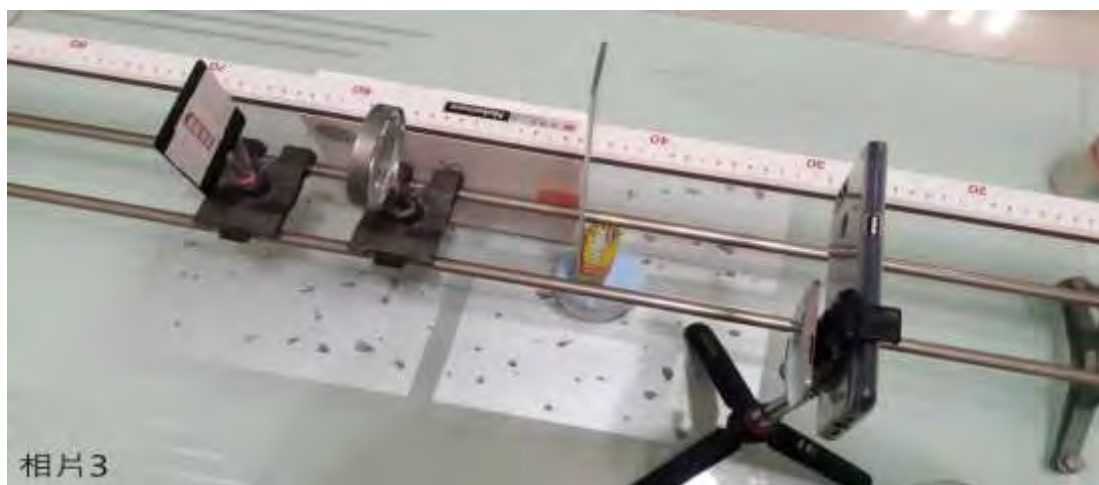
10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖

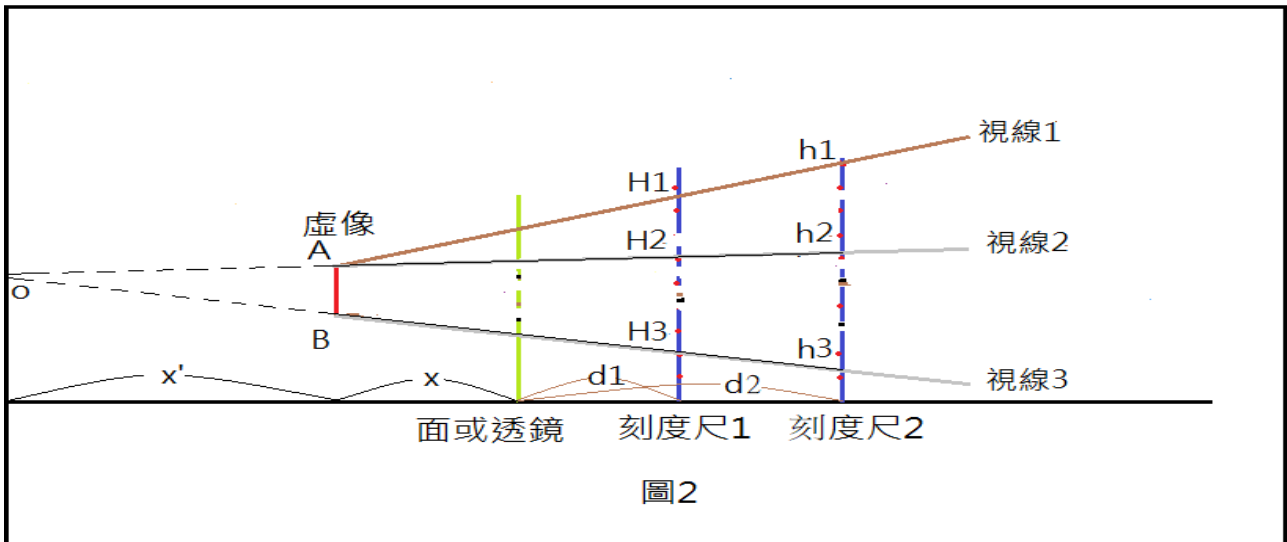


(三)分析結論: 測量出的像長其平均值和物長幾乎相等，數值集中，表示我們設計紀錄光線、計算像長的方法準確。

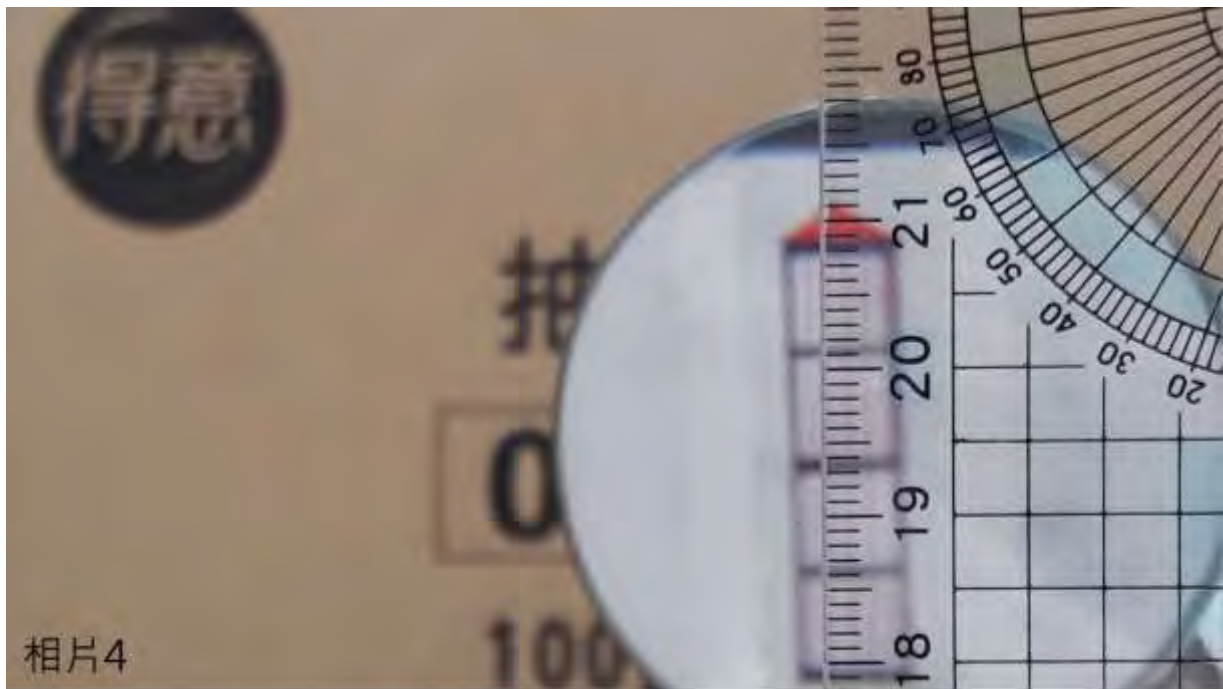
三、凸透鏡虛像像距的測量與計算(使用相似三角形數學原理)

利用傳統方式(遠處大樓在牆壁清晰成像時的像距)測焦距，在此不詳細記錄，僅顯示結果。利用我們設計的方法，測像距、求焦距。





$$\frac{x + d1}{x + d2} = \frac{d(H1 \cdot H2)}{d(h1 \cdot h2)} \text{ 可得虛像像距 } x$$



取物長 3cm 的物體，置於凸透鏡前 5cm、8cm、10cm，找出視線 1、2 一組，將數據代入公式求像距，每一物距找出 10 組視線 1、2，觀察求出的像距是否準確，並利用造鏡者公式求焦距

(一)、實驗數據

凸透鏡在物距5、8、10時，所測量出的虛像像距和利用造鏡者公式求出的焦距											
物距	d1	d2	H1	h1	H3	h3	H1-H3	h1-h3	像距 x	焦距f	
5	5	10	13.21	14.16	7.49	5.99	5.72	8.17	6.673469	19.93902	
			14.15	15.49	8.66	7.66	5.49	7.83	6.730769	19.44444	
			15.62	17.59	9.33	8.61	6.29	8.98	6.69145	19.78022	
			16.24	18.49	10.25	9.93	5.99	8.56	6.653696	20.11765	
			14.12	16.54	8.97	9.18	5.15	7.36	6.651584	20.13699	
			14.21	16.55	8.99	9.09	5.22	7.46	6.651786	20.13514	
			14.15	17.43	8.88	9.9	5.27	7.53	6.659292	20.06667	
			13.84	16.36	8.38	8.56	5.46	7.8	6.666667	20	
			14.31	16.78	8.83	8.95	5.48	7.83	6.659574	20.0641	
			14.52	16.88	9.18	9.25	5.34	7.63	6.659389	20.06579	
平均值									19.97499		
8	5	10	12.51	12.64	8.21	7.17	4.3	5.47	13.37607	19.90461	
			13.42	13.81	9.25	8.5	4.17	5.31	13.28947	20.0995	
			13.12	14.28	9.18	9.25	3.94	5.03	13.07339	20.61483	
			15.53	16.49	11.65	11.55	3.88	4.94	13.30189	20.07117	
			14.33	14.97	10.13	9.62	4.2	5.35	13.26087	20.16529	
			12.38	12.76	7.96	7.12	4.42	5.64	13.11475	20.51282	
			13.67	14.02	9.24	8.36	4.43	5.66	13.00813	20.77922	
			13.93	14.8	10	9.8	3.93	5	13.36449	19.93031	
			14.36	15.75	10.2	10.45	4.16	5.3	13.24561	20.20067	
			14.47	15.78	10.28	10.45	4.19	5.33	13.37719	19.90212	
平均值									20.21805		
10	5	10	13.01	13.02	11.66	11.4	1.35	1.62	20	20	
			12.05	11.86	10.44	9.93	1.61	1.93	20.15625	19.84615	
			11.31	10.97	9.37	8.64	1.94	2.33	19.87179	20.12987	
			10.46	9.95	8.52	7.62	1.94	2.33	19.87179	20.12987	
			12.1	11.65	10.57	9.81	1.53	1.84	19.67742	20.33333	
			12.63	11.95	11.29	10.34	1.34	1.61	19.81481	20.18868	
			11.45	10.33	9.56	8.06	1.89	2.27	19.86842	20.13333	
			12.65	11.93	11.04	10	1.61	1.93	20.15625	19.84615	
			11.5	10.35	9.86	8.38	1.64	1.97	19.84848	20.15385	
			12.42	11.28	11.11	9.7	1.32	1.58	20.38462	19.62963	
平均值									20.06247		
本研究的凸透鏡焦距平均值=19.98			傳統方法20.0085			廠商標示20					

(二)、數據分析

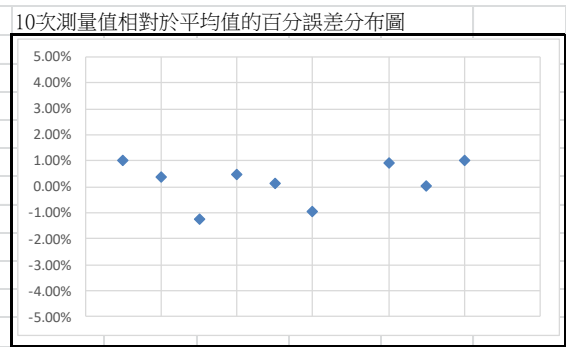
凸透鏡在物距5時，所測量出的虛像像距數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖	
像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
6.673469	6.669768	0.003701	0.055496 %		
6.730769		0.061001	0.914605 %		
6.69145		0.021682	0.32508 %		
6.653697		-0.01607	-0.24096 %		
6.651584		-0.01818	-0.27264 %		
6.651786		-0.01798	-0.26961 %		
6.659292		-0.01048	-0.15707 %		
6.666667		-0.0031	-0.0465 %		
6.659575		-0.01019	-0.15283 %		
6.659389		-0.01038	-0.15562 %		

每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖

凸透鏡在物距8時，所測量出的虛像像距數據分析

像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
13.37607	13.24119	0.134878	1.018624 %
13.28947		0.048284	0.36465 %
13.07339		-0.1678	-1.26723 %
13.30189		0.060697	0.458395 %
13.26087		0.01968	0.148627 %
13.11475		-0.12644	-0.95487 %
13.00813		-0.23306	-1.76011 %
13.36449		0.123296	0.931155 %
13.24561		0.004424	0.033411 %
13.37719		0.136003	1.027121 %

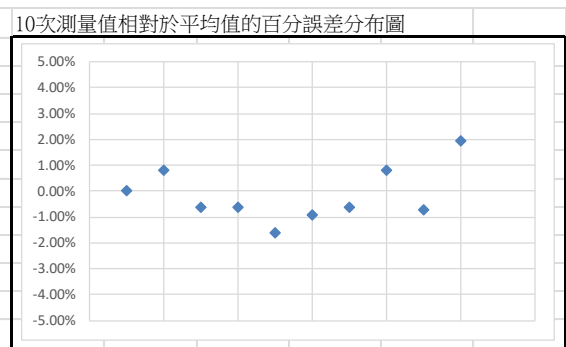
每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖



凸透鏡在物距10時，所測量出的虛像像距數據分析

像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
20	19.96499	0.00501	0.025104 %
20.15625		0.16126	0.808043 %
19.8718		-0.1232	-0.61731 %
19.8718		-0.1232	-0.61731 %
19.67742		-0.31757	-1.59129 %
19.81485		-0.18015	-0.90267 %
19.86842		-0.12657	-0.63421 %
20.15625		0.16126	0.808043 %
19.84849		-0.14651	-0.73411 %
20.38462		0.389625	1.952337 %

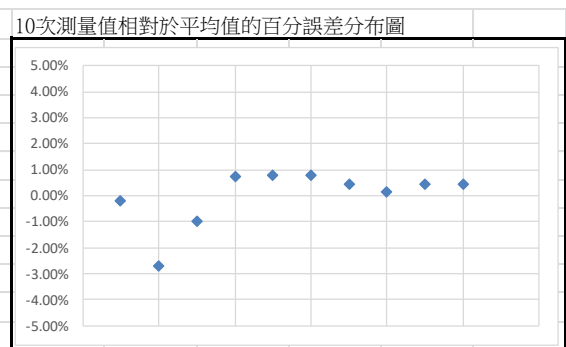
每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖



凸透鏡在物距5時，利用造鏡者公式求出的焦距的數據分析

焦距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
19.93902	19.975	-0.03598	-0.18043 %
19.44444		-0.53056	-2.72857 %
19.78022		-0.19478	-0.98472 %
20.11767		0.142674	0.709197 %
20.13699		0.161986	0.80442 %
20.13514		0.160135	0.795301 %
20.06667		0.091667	0.456812 %
20		0.025	0.125 %
20.0641		0.089103	0.444092 %
20.06579		0.090789	0.452457 %

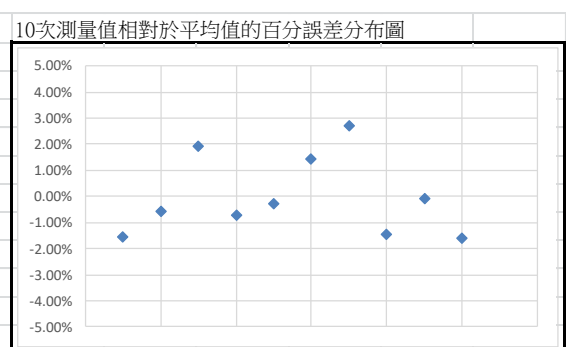
每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖
平均值接近廠商值20



凸透鏡在物距8時，利用造鏡者公式求出的焦距的數據分析

焦距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
19.90461	20.21805	-0.31344	-1.57471 %
20.0995		-0.11855	-0.58981 %
20.61483		0.396778	1.924721 %
20.07117		-0.14688	-0.73178 %
20.16529		-0.05276	-0.26164 %
20.51282		0.294771	1.437009 %
20.77922		0.561171	2.700635 %
19.93031		-0.28774	-1.44371 %
20.20067		-0.01738	-0.08604 %
19.90212		-0.31593	-1.58741 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖
平均值接近廠商值20

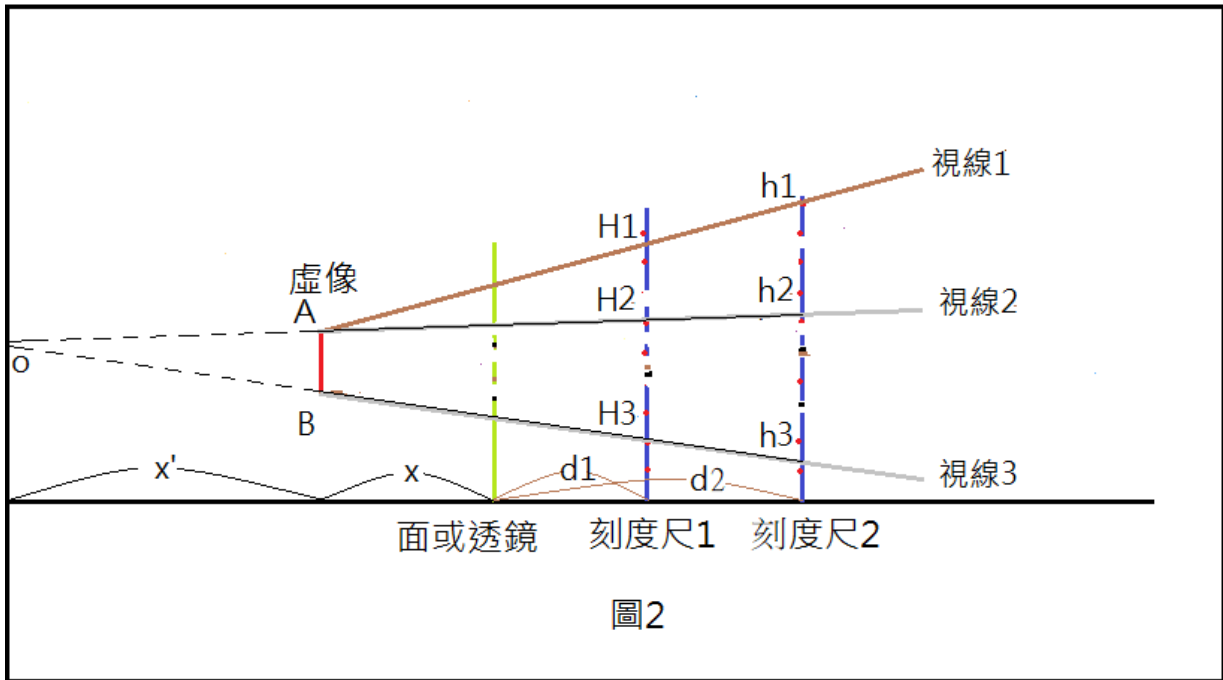


凸透鏡在物距10時，利用造鏡者公式求出的焦距的數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖	
焦距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
20	20.03909	-0.03909	-0.19507 %		
19.84615		-0.19294	-0.96282 %		
20.12987		0.09078	0.453015 %		
20.12987		0.09078	0.453015 %		
20.33333		0.294243	1.468345 %		
20.18868		0.149589	0.746486 %		
20.13333		0.094243	0.470296 %		
19.84615		-0.19294	-0.9628 %		
20.15385		0.114756	0.572661 %		
19.62963		-0.40946	-2.04331 %		

每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖
平均值接近廠商值20

(三)、分析結論: 根據測量出的像距計算凸透鏡焦距,其平均值和傳統方法測出的焦距很接近,和廠商值也很接近,數值集中,表示我們設計紀錄光線、計算像距的方法準確。

四、凸透鏡虛像像長的測量與計算(使用相似三角形數學原理)



$$\frac{x+d1}{x+d2} = \frac{d(H1, H2)}{d(h1, h2)} \text{ 可得虛像像距 } x$$

$$\frac{x'+x+d1}{x'+x+d2} = \frac{d(H2, H3)}{d(h2, h3)}$$

先求出 x' 後,再由

$$\frac{d(A, B)}{d(H2, H3)} = \frac{x'}{x'+x+d1} \text{ 可得虛像大小 } d(A, B)。$$

取物長 3cm 的物體，置於凸透鏡前 10cm，找出視線 1、2 一組，將數據代入公式求像距，共找出 10 組視線 1、2，求像距,再求平均值。
再找出視線 2、3 一組，將數據代入公式求像像長，共找出 10 組視線 2、3，分別求像長，求證結果是否準確

(一)、實驗數據

物體高度3cm, 置於凸透鏡前10cm, 利用相似三角形數學原理計算像距與像長											
物距	d1	d2	H1	h1	H2	h2	H1-H2	h1-h2	x		
10	5	10	16.53	16.84	12.16	11.59	4.37	5.25	19.82955		
10	5	10	17.32	17.78	13.23	12.88	4.09	4.9	20.24691		
10	5	10	18.46	19.15	14.51	14.41	3.95	4.74	20		
10	5	10	19.52	20.42	15.62	15.74	3.9	4.68	20		
10	5	10	17.92	18.04	13.65	12.91	4.27	5.13	19.82558		
10	5	10	18.17	18.58	13.93	13.49	4.24	5.09	19.94118		
10	5	10	19.36	19.67	14.63	13.99	4.73	5.68	19.89474		
10	5	10	17.73	18.07	14.59	14.3	3.14	3.77	19.92063		
10	5	10	18.61	18.94	14.45	13.95	4.16	4.99	20.06024		
10	5	10	18.58	19.83	14.25	14.63	4.33	5.2	19.88506		
								平均像距=	19.96039		
物距	d1	d2	H2	h2	H3	h3	H2-H3	h2-h3	x	x'	像長
10	5	10	16.53	16.84	7.76	7.51	8.77	9.33	19.9604	53.30857	5.97056
			17.32	17.78	8.36	8.23	8.96	9.55	19.9604	50.9372	6.01059
			18.46	19.15	9.73	9.88	8.73	9.27	19.9604	55.83833	6.03054
			19.52	20.42	11.26	11.71	8.26	8.71	19.9604	66.78278	6.01045
			18.42	19.23	9.94	10.25	8.48	8.98	19.9604	59.805	5.9805
			17.59	18.2	8.43	8.41	9.16	9.79	19.9604	47.70341	6.01063
			16.56	16.73	7.63	7.21	8.93	9.52	19.9604	50.68297	5.98059
			17.92	18.81	9.47	9.87	8.45	8.94	19.9604	61.22949	6.00049
			18.63	19.65	9.85	10.31	8.78	9.34	19.9604	53.39786	5.98056
			19.25	19.92	11.87	12.27	7.38	7.65	19.9604	111.6717	6.03027
										平均像長=	6.000518

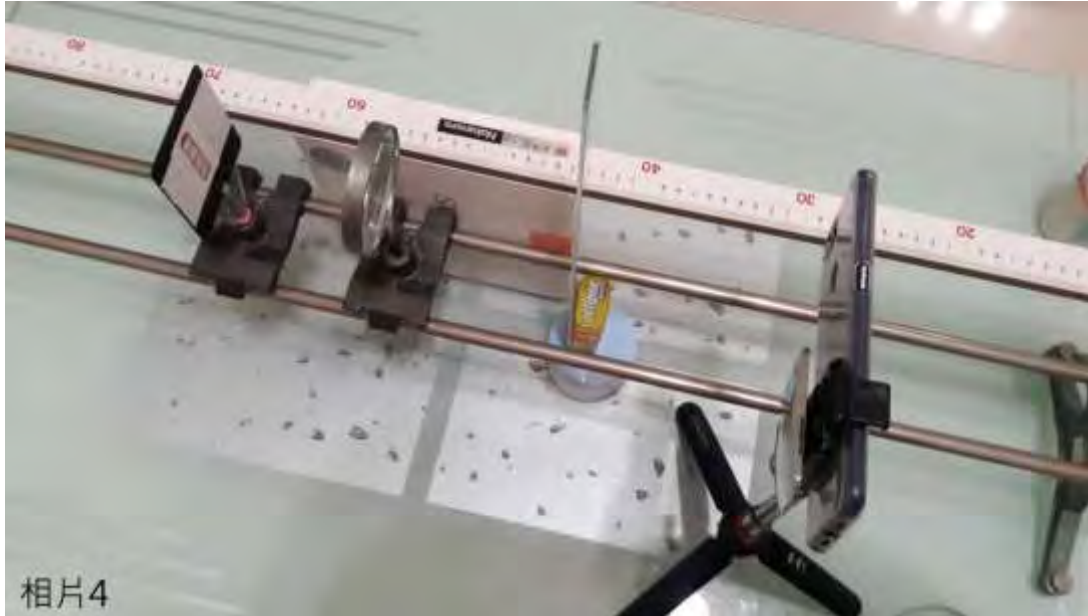
(二)、數據分析

物長3置於凸透鏡前10時, 所測量出的像長數據分析				10個像長值相對於平均值的百分誤差分布圖	
像長	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
5.97056	6.000518	-0.02996	-0.49926 %		
6.01059		0.010072	0.167852 %		
6.03054		0.030022	0.500323 %		
6.01045		0.009932	0.165519 %		
5.9805		-0.02002	-0.3336 %		
6.01063		0.010112	0.168519 %		
5.98059		-0.01993	-0.3321 %		
6.00049		-2.8E-05	-0.00047 %		
5.98056		-0.01996	-0.3326 %		
6.03027		0.029752	0.495824 %		
每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內, 可參考右圖 像距約物距10的2倍, 像長約物長3的2倍, 和理論吻合					

凸透鏡焦距 20cm，將物距(10)、焦距(20)代入簡易造鏡者公式 $(1/f)=(1/p)+(1/q)$ ， $(1/20)=(1/10)+(1/q)$ ，求出 $q=-20$ ，表示像距 20cm，根據傳統方法中(物距)/(像距)=(物長)/(像長)， $10/20=3/(像長)$, 像長=6cm，這理論值和實驗測出的像長幾乎相等

(三)分析結論: 理論值和實驗測出的像長幾乎相等，且數值集中，表示我們設計紀錄光線、計算像長的方法準確。

五、凹透鏡虛像像距的測量與計算(使用相似三角形數學原理)



利用傳統方式(凹透鏡在陽光下平行光發散，再利用相似三角形數學原理計算焦距)測焦距，在此不詳細記錄，僅顯示結果。
利用我們設計的方法，測像距、求焦距。



取物長 3cm 的物體，置於凹透鏡前 15cm、20cm、25cm，找出視線 1、2 一組，將數據代入公式求像距，每一物距找出 10 組視線 1、2，觀察求出的像距是否準確並，利用造鏡者公式求焦距

(一)、實驗數據

凹透鏡在物距15、20、25時，所測量出的像距和利用造鏡者公式求出的焦距											
物距	d1	d2	H1	h1	H3	h3	H1-H3	h1-h3	像距 x	焦距f	
15	5	10	10.25	10.34	6.51	5.22	3.74	5.12	8.550725	19.88764	
			11.32	11.81	7.49	6.57	3.83	5.24	8.58156	20.05525	
			12.41	13.3	8.33	7.71	4.08	5.59	8.509934	19.66837	
			13.36	14.6	9.21	8.92	4.15	5.68	8.562092	19.94924	
			11.28	12.17	7.49	6.98	3.79	5.19	8.535714	19.80663	
			12.42	13.67	8.33	8.08	4.09	5.59	8.633333	20.34031	
			13.55	14.97	9.42	9.32	4.13	5.65	8.585526	20.07692	
			12.33	13.21	8.19	7.54	4.14	5.67	8.529412	19.77273	
			11.84	10.68	8.7	6.39	3.14	4.29	8.652174	20.44521	
			13.47	14.85	9.31	9.16	4.16	5.69	8.594771	20.12755	
平均值										20.01298	
20	5	10	11.15	11.53	8.44	7.92	2.71	3.61	10.05556	20.22346	
			12.36	13.15	9.25	9	3.11	4.15	9.951923	19.80861	
			12.59	13.45	9.83	9.77	2.76	3.68	10	20	
			13.23	14.3	10.24	10.32	2.99	3.98	10.10101	20.40816	
			12.48	13.42	9.47	9.41	3.01	4.01	10.05	20.20101	
			11.23	12.07	8.58	8.54	2.65	3.53	10.05682	20.22857	
			12.38	13.12	9.52	9.31	2.86	3.81	10.05263	20.21164	
			12.29	13.03	9.93	9.88	2.36	3.15	9.936709	19.74843	
			13.1	14.16	10.14	10.21	2.96	3.95	9.949495	19.79899	
			12.51	13.5	9.74	9.81	2.77	3.69	10.05435	20.21858	
平均值										20.08475	
25	5	10	11.19	11.57	9.33	9.13	1.86	2.44	11.03448	19.75309	
			11.53	12	9.59	9.46	1.94	2.54	11.16667	20.18072	
			12.21	12.9	10.21	10.28	2	2.62	11.12903	20.05814	
			12.55	13.34	10.56	10.73	1.99	2.61	11.04839	19.79769	
			11.62	12.12	9.66	9.55	1.96	2.57	11.06557	19.85294	
			11.34	11.67	9.56	9.34	1.78	2.33	11.18182	20.23026	
			12.13	12.51	10.15	9.92	1.98	2.59	11.22951	20.3869	
			11.83	12.31	10.56	10.65	1.27	1.66	11.28205	20.56075	
			12.45	13.78	10.35	11.03	2.1	2.75	11.15385	20.13889	
			12.66	13.86	10.15	10.57	2.51	3.29	11.08974	19.93088	
平均值										20.08903	
本方法的凹透鏡焦距平均值=20.06225					傳統值=20.10			廠商值=20			

(二)、數據分析

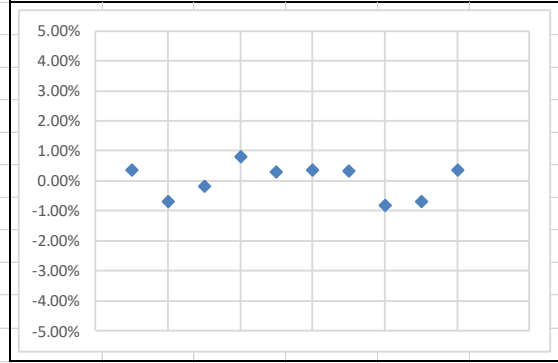
凹透鏡在物距15時，所測量出的像距數據分析				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖	
像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
8.550725	8.573524	-0.02282	-0.26613 %		
8.58156		0.008018	0.09352 %		
8.509934		-0.06361	-0.74191 %		
8.562092		-0.01145	-0.13355 %		
8.535714		-0.03783	-0.44122 %		
8.633333		0.059791	0.697391 %		
8.585526		0.011984	0.139779 %		
8.529412		-0.04413	-0.51472 %		
8.652174		0.078632	0.917149 %		
8.594771		0.021229	0.247611 %		
每個測量值相對於平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖					

凹透鏡在物距20時，所測量出的像距數據分析

像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
10.05556	10.02085	0.03471	0.346378 %
9.951923		-0.06893	-0.68784 %
10		-0.02085	-0.20807 %
10.10101		0.08016	0.799932 %
10.05		0.02915	0.290893 %
10.05682		0.03597	0.358952 %
10.05263		0.03178	0.317139 %
9.936709		-0.08414	-0.83966 %
9.949495		-0.07135	-0.71207 %
10.05435		0.0335	0.334303 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖

10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖

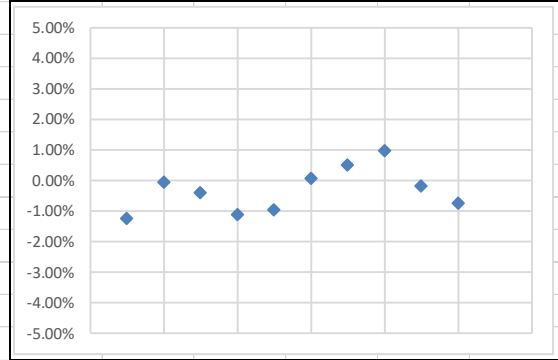


凹透鏡在物距25時，所測量出的像距數據分析

像距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
11.03448	11.13811	-0.14053	-1.25754 %
11.16667		-0.00834	-0.07463 %
11.12903		-0.04598	-0.41145 %
11.04839		-0.12662	-1.13306 %
11.06557		-0.10944	-0.97933 %
11.18182		0.00681	0.06094 %
11.22951		0.0545	0.487695 %
11.28205		0.10704	0.957851 %
11.15385		-0.02116	-0.18935 %
11.08974		-0.08527	-0.76304 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖

10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖

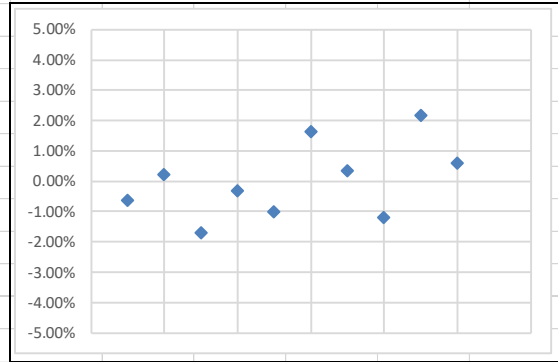


凹透鏡在物距15時，利用造鏡者公式求出的焦距

焦距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
19.88764	20.01299	-0.12535	-0.62634 %
20.05525		0.04226	0.211163 %
19.66837		-0.34462	-1.72198 %
19.94924		-0.06375	-0.31854 %
19.80663		-0.20636	-1.03113 %
20.34031		0.32732	1.635538 %
20.07692		0.06393	0.319443 %
19.77273		-0.24026	-1.20052 %
20.44521		0.43222	2.159697 %
20.12755		0.11456	0.572428 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖
平均值接近廠商值20

10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖

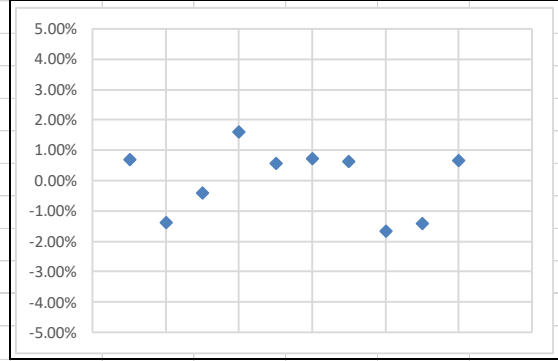


凹透鏡在物距20時，利用造鏡者公式求出的焦距

焦距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差
20.22346	20.08475	0.13871	0.690623 %
19.80861		-0.27614	-1.37487 %
20		-0.08475	-0.42196 %
20.40816		0.32341	1.610227 %
20.20101		0.11626	0.578847 %
20.22857		0.14382	0.716066 %
20.21164		0.12689	0.631773 %
19.74843		-0.33632	-1.6745 %
19.79899		-0.28576	-1.42277 %
20.21858		0.13383	0.666326 %

每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖
平均值接近廠商值20

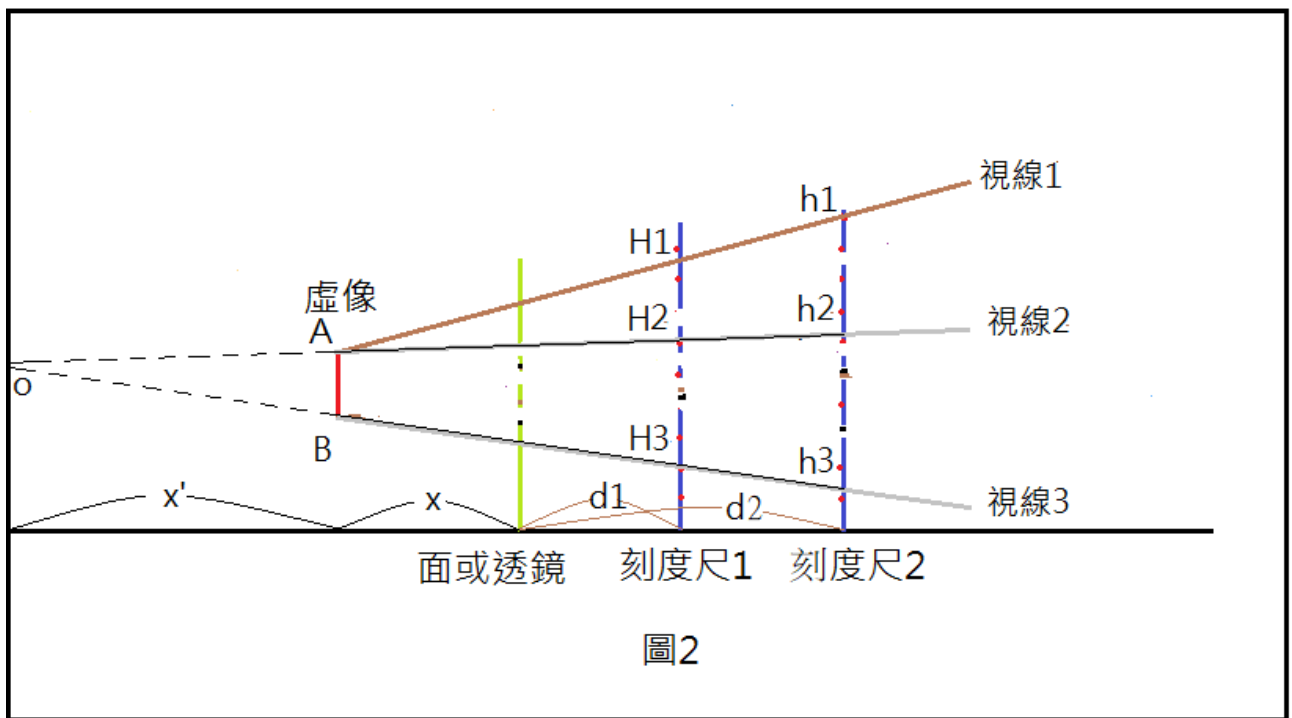
10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖



凹透鏡在物距25時，利用造鏡者公式求出的焦距				10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖	
焦距	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
19.75309	20.08903	-0.33594	-1.67226 %		
20.18072		0.09169	0.456418 %		
20.05814		-0.03089	-0.15377 %		
19.79769		-0.29134	-1.45024 %		
19.85294		-0.23609	-1.17522 %		
20.23026		0.14123	0.703021 %		
20.3869		0.29787	1.48275 %		
20.56075		0.47172	2.348147 %		
20.13889		0.04986	0.248195 %		
19.93088		-0.15815	-0.78725 %		
每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內，可參考右圖					
平均值接近廠商值20					

(三)分析結論：根據測量出的像距計算凹透鏡焦距，其平均值和傳統方法測出的焦距接近，也和廠商值接近，且數值集中，表示我們設計紀錄光線、計算像距的方法準確。

六、凹透鏡虛像像長的測量與計算(使用相似三角形數學原理)



$$\frac{x + d1}{x + d2} = \frac{d(H1, H2)}{d(h1, h2)} \text{ 可得虛像像距 } x$$

$$\frac{x' + x + d1}{x' + x + d2} = \frac{d(H2, H3)}{d(h2, h3)}$$

先求出 x' 後，再由

$$\frac{d(A, B)}{d(H2, H3)} = \frac{x'}{x' + x + d1} \text{ 可得虛像大小 } d(A, B)。$$

取物長 4cm 的物體，置於凹透鏡前 20cm，找出視線 1、2 一組，將數據代入公式求像距，共找出 10 組視線 1、2，求像距,再求平均值。
再找出視線 2、3 一組，將數據代入公式求像像長，共找出 10 組視線 2、3，分別求像長，求證結果是否準確

(一)、實驗數據

物體長度4cm, 置於凹透鏡前20cm, 利用相似三角形數學原理計算像距與像長												
物距	d1	d2	H1	h1	H2	h2	H1-H2	h1-h2	x			
20	5	10	11.15	11.53	8.44	7.92	2.71	3.61	10.05556			
20	5	10	12.36	13.15	9.25	9	3.11	4.15	9.951923			
20	5	10	12.59	13.45	9.83	9.77	2.76	3.68	10			
20	5	10	13.23	14.3	10.24	10.32	2.99	3.98	10.10101			
20	5	10	12.41	12.93	8.3	7.45	4.11	5.48	10			
20	5	10	12.53	13.15	8.52	7.8	4.01	5.35	9.962687			
20	5	10	13.43	14.11	9.54	8.93	3.89	5.18	10.07752			
20	5	10	11.42	11.95	8.49	8.04	2.93	3.91	9.94898			
20	5	10	12.11	12.36	8.71	7.83	3.4	4.53	10.04425			
20	5	10	12.34	13.19	8.54	8.12	3.8	5.07	9.96063			
									平均像距=	10.01025		
物距	d1	d2	H2	h2	H3	h3	H2-H3	h2-h3	x	x'	像長	
20	5	10	8.44	7.92	4.64	3.52	3.8	4.4	10.01025	16.66667	1.999353	
20	5	10	9.25	9	4.52	3.36	4.73	5.64	10.01025	10.98901	1.999211	
20	5	10	9.83	9.77	4.25	3	5.58	6.77	10.01025	8.445378	2.009121	
20	5	10	10.24	10.32	4.61	3.49	5.63	6.83	10.01025	8.458333	2.029113	
20	5	10	8.3	7.45	4.66	3.26	3.64	4.19	10.01025	18.09091	1.989384	
20	5	10	8.52	7.8	4.72	3.4	3.8	4.4	10.01025	16.66667	1.999353	
20	5	10	9.54	8.93	4.62	3.04	4.92	5.89	10.01025	10.36082	2.009188	
20	5	10	8.49	8.04	4.67	3.62	3.82	4.42	10.01025	16.83333	2.01935	
20	5	10	8.71	7.83	4.74	3.21	3.97	4.62	10.01025	15.53846	2.019322	
20	5	10	8.54	8.12	4.67	3.63	3.87	4.49	10.01025	16.20968	2.00934	
										平均像長=	2.008273	

(二)、數據分析

物長4置於凹透鏡前20時, 所測量出的像長數據分析				10個像長值相對於平均值的百分誤差分布圖	
像長	平均值	離均差	相對平均值百分誤差		
1.999353	2.008274	-0.00892	-0.44421 %		
1.999211		-0.00906	-0.45128 %		
2.009121		0.000847	0.042176 %		
2.029113		0.020839	1.037657 %		
1.989384		-0.01889	-0.94061 %		
1.999353		-0.00892	-0.44421 %		
2.009188		0.000914	0.045512 %		
2.01935		0.011076	0.551518 %		
2.019322		0.011048	0.550124 %		
2.00934		0.001066	0.05308 %		
每個測量值相對平均值的百分誤差都在3%以內, 可參考右圖					
像距約物距20一半, 像長約物長4的一半, 和理論吻合					

凹透鏡焦距 20cm，將物距(20)、焦距(20)代入簡易造鏡者公式 $(1/f)=(1/p)+(1/q)$ ， $(-1/20)=(1/20)+(1/q)$ ，求出 $q = -10$ ，表示像距 10cm，根據傳統方法中(物距)/(像距)=(物長)/(像長)， $20/10=4/(像長)$, 像長=2cm，實驗測出的平均像長和理論值很接近

(三)、分析結論：實驗測出的平均像長和理論值很接近，且實驗數值集中，表示我們設計紀錄光線、計算像長的方法準確。

七、使用雷射光測量凸透鏡虛像像長

以雷射光將記錄的虛像假想光線逆向反射，在紙屏上找出兩條光線交點，測量虛像像長。

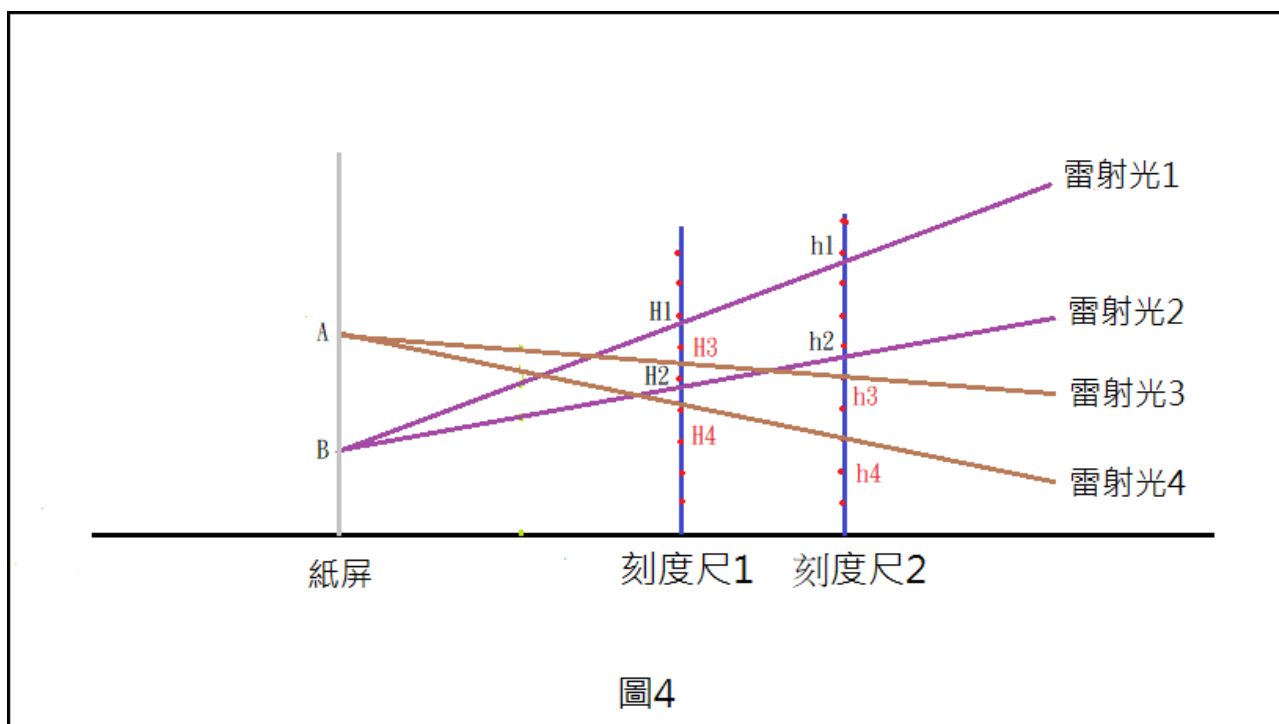


圖4

(一)、實驗數據

物體高度3cm，置於凸透鏡前10cm，以雷射光逆向反射虛像假想光線，利用紙屏上測量像長					
	第一次		第二次		
物距 10	通過A點的2條光線		通過A點的2條光線		
d1 5	H3 16.53	h3 16.84	H3 17.32	h3 17.78	
d2 10	H4 19.52	h4 20.42	H4 18.46	h4 19.15	
	通過B點的2條光線		通過B點的2條光線		
	H1 7.76	h1 7.51	H1 8.36	h1 8.23	
	H2 11.26	h2 11.71	H2 9.73	h2 9.88	
	測量出的像長約 6.0		測量出的像長約 6.0		

(二)、數據分析與結論：使用雷射光在紙屏上找到虛像，再測量虛像的像長，所測出的像長和結果四中用相似三角形數學原理測出得像長幾乎相等，表示以雷射光在紙屏上測量像長的方法是可行的。

陸、討論

- 一、眼睛的視線不容易固定，利用數位相機和腳架，我們可以得到一固定的視線，有了固定的視線，就可以慢慢仔細的利用我們設計的方法，紀錄虛像假想光線，因而更精確掌握光線的路徑，而有更好的實驗結果。
- 二、在研究結果一、二中，我們任意改變數位相機的視線，用我們設計的方法，紀錄這些視線，再利用相似三角形的數學原理計算平面鏡虛像成像位置和像長，不同視線計算出的結果幾乎相同，而且接近理論值(物距=像距，物長=像長)，代表我們設計出的紀錄虛像假想光線的方法，是可靠的。
- 三、在研究結果三、四中，我們繼續使用我們所設計的方法來測量凸透鏡的虛像位置和像長，將所測得的像距代入簡易造鏡者公式 $(1/f)=(1/p)+(1/q)$ ，求得凸透鏡的焦距 f ，其平均值與我們利用傳統方式(遠處大樓在牆壁清晰成像時的像距)所測得的焦距接近；所測得的像長也接近傳統方式中，(物距)/(像距)=(物長)/(像長)的關係，再一次證明我們設計紀錄光線的方法正確。
- 四、在研究結果五、六中，我們繼續使用我們所設計的方法來測量凹透鏡的虛像位置和像長，將所測得的像距代入簡易造鏡者公式 $(1/f)=(1/p)+(1/q)$ 求 f ，將所測得的像長代入(物距)/(像距)=(物長)/(像長)的關係式，結果也很理想。
- 五、研究結果一~六中，已經確定可以精確掌握光線的路徑，所以更進一步設計了利用雷射光筆將虛像假想光線逆向射回，在紙屏上找到虛像，這樣，使得虛像位置的尋找又更具體。
- 六、為了比較我們所設計測量虛像的方法和視差法準確度的差異，我們擷取了 53 屆全國科展文獻中，以視差法(視線差針法)測量虛像的實驗數據，並將其放在附錄(一)，供讀者對照比較。經過我們分析，視差法(視線差針法)相對於我們的方法，誤差很大(可參考附錄三)。
- 七、在 53 屆全國科展以視高法探究虛像大小和位置的探究過程中，凸透鏡必須滿足(1)平行主軸的光線會通過焦點、(2)通過鏡心的光線不偏折這兩個條件，才有凸透鏡虛像的視高與虛像長度的關係式出現，才能由測得的視高推算出虛像的大小和位置(可參考附錄二的文獻資料)，但是真實透鏡其光線的行進沒有那麼理想，所以利用視高法求得虛像大小和位置並不是虛像真正的大小和位置，是理想值。然而我們測量虛像的方法是直接由虛像的假想光線找到虛像的位置和大小，即使光線的行進不符合上述(1)、(2)兩條件，找到的像的位置仍然是真正虛像的位置，只要物體能清晰成像，都能準確的找到虛像的位置。
- 八、在視高法探究虛像的研究中，其過程是經由一連串的數學推導後，由視高求出虛像的位置和大小，在視覺上，沒有虛像具體存在的感受，但在我們的研究中，我們想到了移開透鏡或面鏡，使虛像發出的假想光線可以逆向射回原處，進而具體的呈現在紙屏上，讓虛像具體化，所以可以說，我們找到了比視差法、視高法更準確、更具體測量虛像的新方法。
- 九、平面鏡形成的虛像，視覺上變小，那是有關於視角、視直徑的原因，我們已經在其它書籍閱讀相關理論，這個疑問，不再於本研究探討了。

柒、結論

- 一、利用我們設計的方法，可以相當準確的紀錄虛像發出的假想光線並且準確的計算出虛像的位置和大小，也可以利用細線或雷射光筆和屏幕，在真實的空間中，具體且準確的找到虛像位置。
- 二、本研究提供一種新的測量虛像的方法。
- 三、本研究的設計是源自於虛像成像原理，所以平面鏡、凸透鏡、凹透鏡的虛像測量，本研究的方法皆可適用。
- 四、在這次探究的過程中，我們想將虛像發出的假想光線，利用雷射光筆模擬光線，使其逆向反射，成功的在紙屏上找到虛像的位置，如此，利用紙屏尋找像的方法，可以由實像擴展到虛像，使像的觀察方法更具一貫性。
- 五、本研究在紙屏上看到虛像的真正位置，方法具體，理論淺顯，實驗的操作過程有助於虛像成像原理概念的學習，極適合當做國中理化課程的實驗教材。

捌、參考資料

國中理化課本第三冊、高中物理課本第三冊、全國科展 53 屆國中組作品。

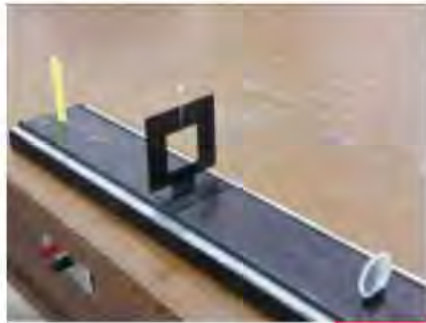
玖、未來展望

這個實驗所需的器材不多，在一般國中理化實驗室就有，普遍性較高，且實驗之操作方法容易、也不須太多時間，一般國中生就可理解並操作，因此推薦將此實驗併入原本國中課程的實像測定、可以改變現在只能測定實像的窘境，並且打破了「虛像無法從紙屏上找到」的理論，所以我們認為這個實驗適合推廣。

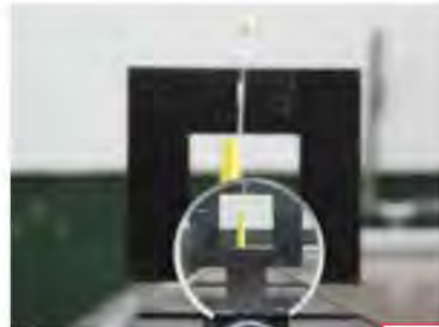
附錄一：視差法(視線差針法)實驗數據的文獻資料(擷取自 53 屆全國科學展國中組物理科第二名作品)

六、討論凹透鏡焦距的測量

(一)凹透鏡焦距的測量在高中課程中一直是十分困難的，有的版本使用視差法(裝置如下)，在實驗操作過程中觀察者透過凹透鏡，並左右擺動上半身，判斷鏡中虛像與凹透鏡後方參考像屏的位置無相對運動時，像屏的位置即為虛像的位置，而且像屏要中空，才不會擋住物體，這種方法不僅操作不易、判斷不易，所求出焦距的差異也很大。

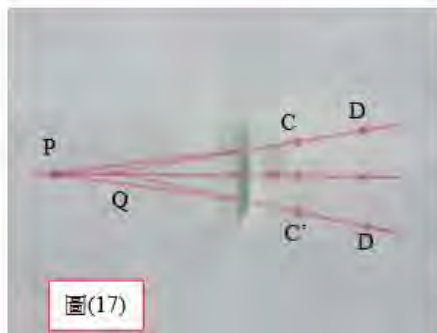


圖(15)



圖(16)

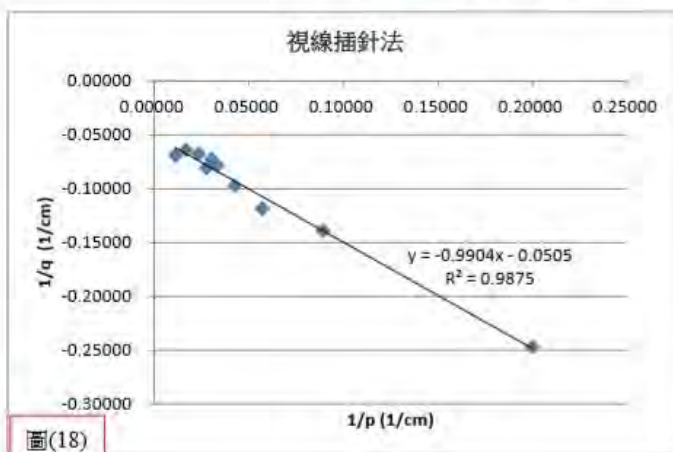
(二)高中課程中，有的版本使用視線插針法來測量凹透鏡的焦距，將凹透鏡的一半塞在保麗龍板上，在主軸上插上大頭針 P，從凹透鏡的另一側，以單眼透過凹透鏡觀察大頭針 P 的像，在此視線插上大頭針 C 以及 D，以相同的方法，在主軸的另一側插大頭針 C' 以及 D'，射線 CD 與 C'D' 的交會點 Q 即為大頭針 A 的成像處，以此方法的實驗結果如下。



圖(17)

物距 p(cm)	像距 q(cm)	1/p	1/q	焦距 f(cm)
5.00	-4.05	0.20000	-0.24691	-21.32
11.20	-7.20	0.08929	-0.13889	-20.16
17.45	-8.45	0.05731	-0.11834	-16.38
23.50	-10.30	0.04255	-0.09709	-18.34
29.90	-12.75	0.03344	-0.07843	-22.23
33.00	-13.85	0.03030	-0.07220	-23.87
36.00	-12.40	0.02778	-0.08065	-18.92
42.35	-14.85	0.02361	-0.06734	-22.87
59.30	-15.70	0.01686	-0.06369	-21.35
87.60	-14.50	0.01142	-0.06897	-17.38

表(26)



圖(18)

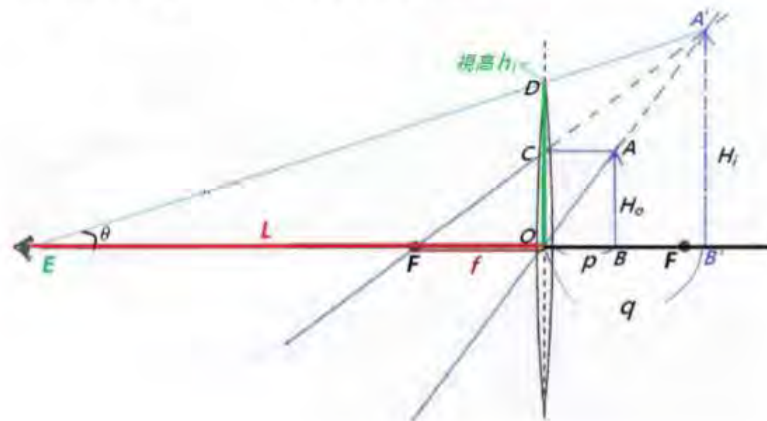
利用截距求出焦距

$$f = \frac{1}{0.0505} = 19.80\text{cm}$$

附錄二：凸透鏡視高和虛像關係推導過程的文獻資料(擷取自 53 屆全國科展國中組物理科第二名作品)

(三) 以『視高-三角形法』推導凸透鏡中虛像的位置及高度

- | | |
|------------------|----------------------|
| (1) H_o : 物體高度 | L : 相機(觀察者)與平面鏡的距離 |
| H_i : 像的高度 | p : 物與平面鏡的距離 |
| h_i : 像的視高度 | q : 像與平面鏡的距離 |



由物 A 發出的光線 \overline{AC} ，平行主軸經透鏡折射後通過焦點 F，又光線 \overline{AO} 通過鏡心不

偏折，兩光線的延長線交於像 A'，利用相似三角形，得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{q}{p}$ ①'

人眼觀測(相機拍攝)時，在相同的視角下，像 A'、鏡面上 D 點及觀測者 E 在同一

視線，利用相似三角形 $\triangle EDO \sim \triangle E A' B'$ ，得 $\frac{H_i}{h_i} = \frac{q+L}{L}$ ②'

將 ①' 中 $H_i = \frac{q}{p} H_o$ 代入 ②'，可以得到像距 $q = \frac{ph_i L}{H_o L - ph_i}$ ③'

竟然和平面鏡推導的式子一樣

(2) 拍攝視角定為 $\tan \theta = \frac{h_i}{L}$ ④'

(3) 若凸透鏡放大率 m 定義為像高 H_i 除以物高 H_o 的絕對值，

放大率 $m = \frac{H_i}{H_o} = \frac{q}{p}$ ⑤'

則像的高度為 $H_i = m H_o = \left(\frac{q}{p}\right) H_o$ ⑥'

(4) 凸透鏡的焦距 f

利用相似三角形 $\triangle FCO \sim \triangle F A' B'$ ，得 $\frac{H_i}{H_o} = \frac{q+f}{f}$ ⑦'

將 ⑤' = ⑦'，可得焦距 $f = \frac{pq}{q-p}$ 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{f}$ ⑧'

附錄三：文獻資料(53 屆全國科展國中組物理科第二名作品)視差法(視線差針法)實驗數據的誤差分析

視線插針法					10次測量值相對於平均值的百分誤差分布圖	
焦距	離差	離差/平均值	相對平均值的百分誤差			
21.32	1.038	0.051178	5.117838 %			
20.16	-0.122	-0.00602	-0.60152 %			
16.38	-3.902	-0.19239	-19.2387 %			
18.34	-1.942	-0.09575	-9.57499 %			
22.23	1.948	0.096046	9.604575 %			
23.87	3.588	0.176906	17.69056 %			
18.92	-1.362	-0.06715	-6.71531 %			
22.87	2.588	0.127601	12.76008 %			
21.35	1.068	0.052658	5.265753 %			
17.38	-2.902	-0.14308	-14.3083 %			
平均值						
20.282						

相對平均值的百分誤差最大17.69056%，比起我們都在3%以內，誤差太大

【評語】 030109

本作品，「逆轉勝---一種測量虛像的新方法」，係利用自行發展「相似三角形」的方法，亦是基於光線追蹤 (Ray Tracing) 的工作原理，尋找虛像位置。量測方法係利用雷射光筆，塑膠尺和屏幕，回推虛像的大小及位置。並用於量測透鏡、反射鏡等光學元件等產生的虛像位置。

量測方法雖原理可行，但實際實施上卻容易干擾現有的光學成像系統，不易快速量測虛像的位置，且是既成之光線追蹤方法的一個特殊應用範例。本作品若能進一步改善與簡化雷射的使用，降低對待測之光學成像系統的干擾，達到快速量測，當更能突顯作品的價值與應用。

摘要

虛像不是真實的光線匯聚而成，無法在紙屏上成像，不能藉由紙屏測量虛像的位置及大小，我們想在紙屏上找到虛像。高中物理對虛像位置及大小的測量，介紹了視差法，此方法誤差較大，在歷屆全國科展的作品中，作者利用自創的「視高法」測量虛像位置及大小，此方法也存在一些缺點，我們想找到更準確更具體的方法來測量虛像位置及大小，於是利用相機和刻度尺，記錄虛像發出的假想光線，依此推算虛像的位置與大小。

我們用自創的方法測量平面鏡及凹凸透鏡形成的虛像，都得到和理論值接近的數值。

為了讓虛像的呈現更具體，我們進一步使用雷射筆模擬虛像的假想光線，將虛像假想光線逆像射回，在紙屏上將發出假想光線的虛像位置找出來，結果也和理論值接近。

研究動機

在國中理化課程中，介紹了面鏡、透鏡的成像，其中關於虛像的位置和大小如何測量，課程中沒有詳細介紹，我們心中存在著許多的疑問，譬如，我們視覺上一直覺得平面鏡所產生的虛像比物體小，但理論上是相等，如果有準確具體測量虛像位置和大小方法，應該可以解決心中的一些疑問，於是我們查了高中物理課程，課程中對於虛像位置和大小測量，介紹了視差法，這種方法不夠準確，於是我們又查了全國歷屆科展關於虛像探討的作品，在53屆的作品中，作者利用自創的「視高法」測量了虛像位置和大小，我們覺得「視高法」不夠直接具體，也發現「視高法」的一些缺點。

我們希望能夠找到更準確、更具體測量虛像位置和大小方法，最好能具體的在紙屏上尋找虛像的位置，於是開始了以下的探討。

研究設備及器材

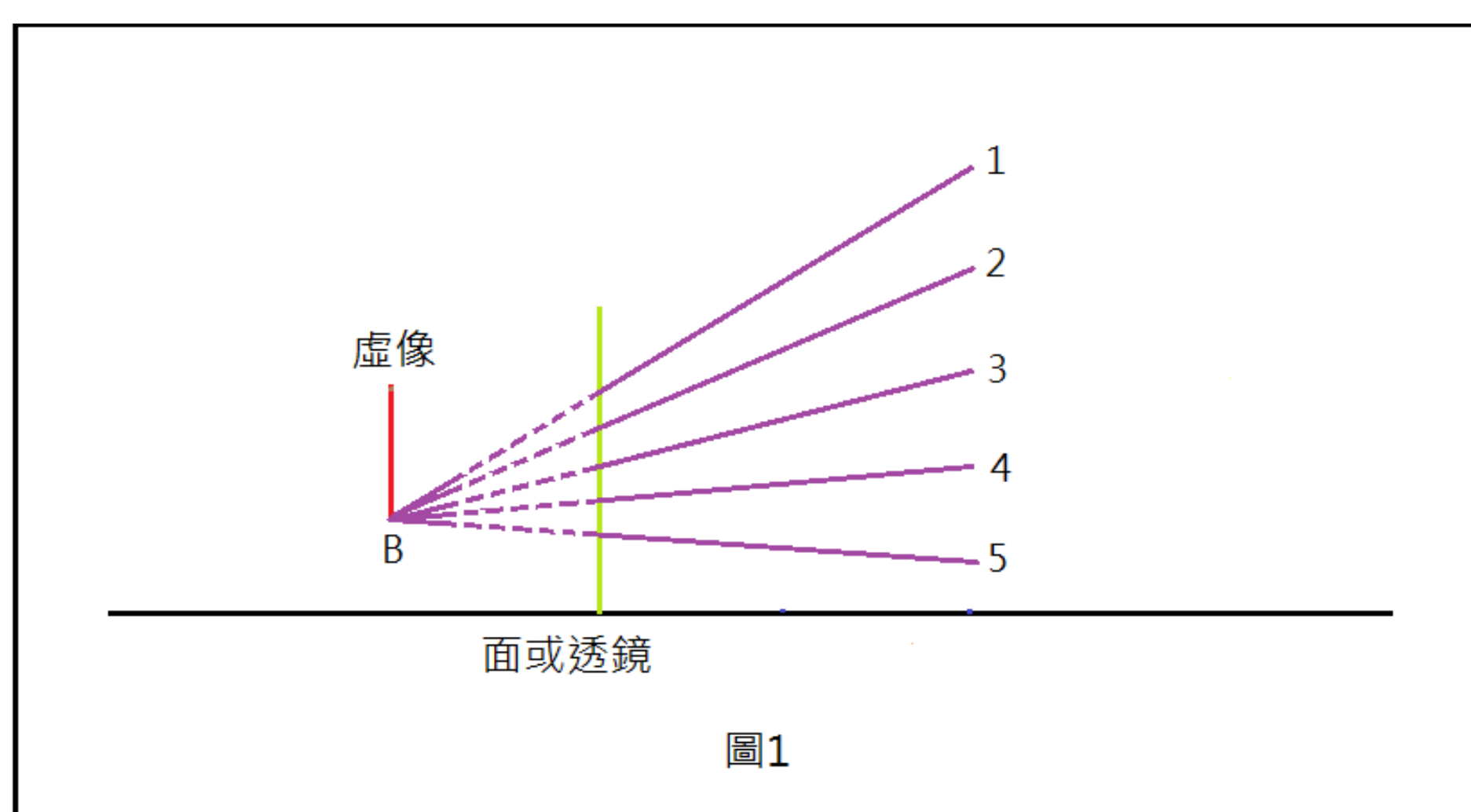
平面鏡、凸透鏡、凹透鏡、相機、光凳、屏幕、刻度尺、雷射筆、相機腳架。

研究方法

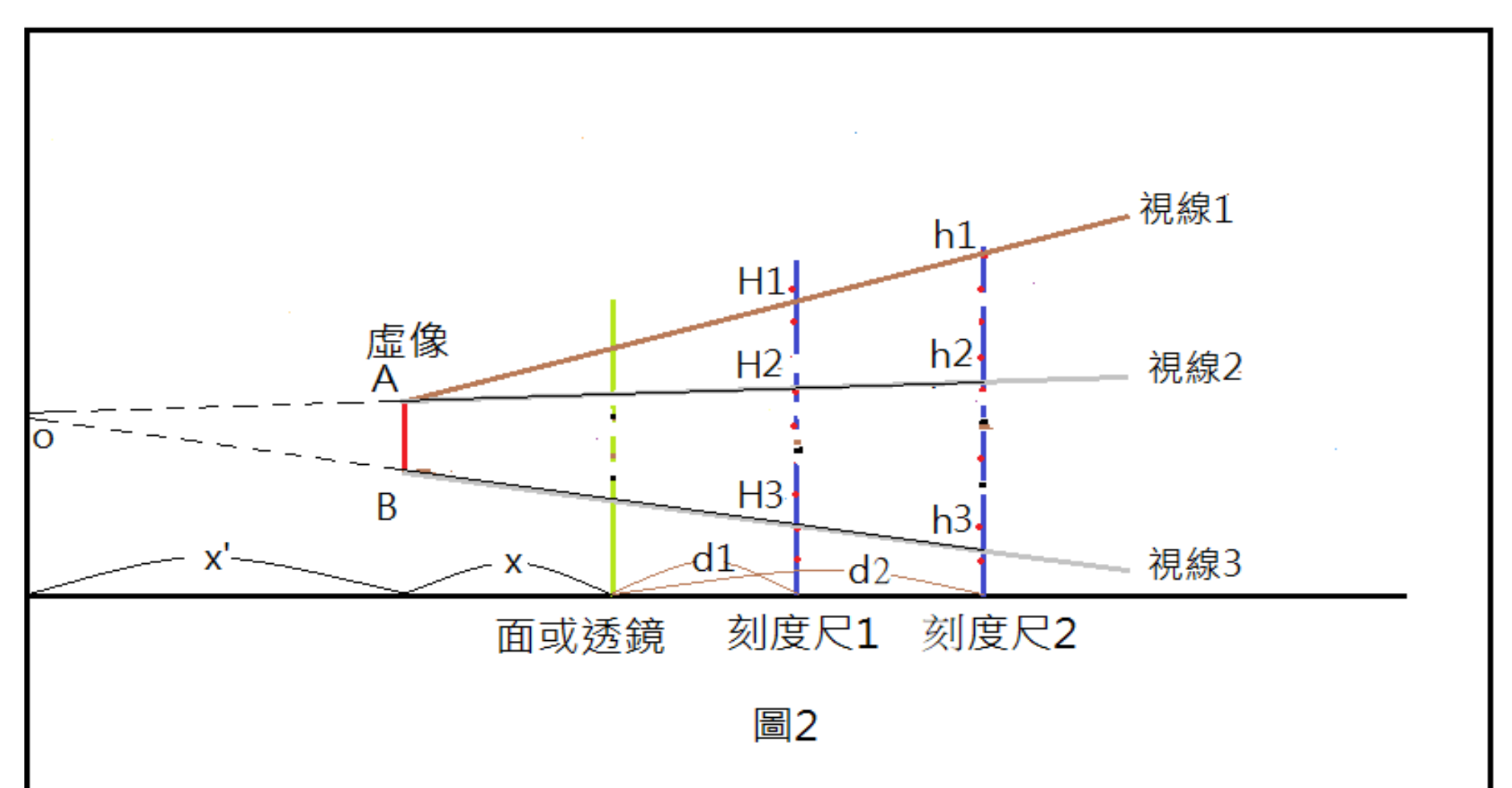
依據虛像成像原理，設計實驗，將平面鏡、凸透鏡、凹透鏡的虛像假想光線具體記錄下來，以數學原理計算虛像的位置和大小，並以雷射光模擬假想光線，取代數學計算方式，以具體操作的方式，分別測量出虛像的位置和大小。

虛像成像原理

我們在鏡中看到的虛像，是物體發出的光線，經面鏡反射或透鏡折射後，我們眼睛的視覺感覺物體的光線好像從該點射出，如下圖所示的虛像B點。



根據兩點決定一線的原則，設計方法，記錄虛像所發出的光線



(一)、在鏡前 d_1 的距離處，放置刻度尺1，刻度尺後的數位相機經透鏡或面鏡對著虛像的頂點A，取適當高度形成視線1，拍攝此時的畫面，記錄A點和刻度尺1重疊的位置，可得H1點刻度。

(二)、移動刻度尺到鏡前 d_2 的距離處，當作刻度尺2，拍攝此時的畫面，記錄A點和刻度尺2重疊的位置，可得h1點刻度。

(三)、調整數位相機的高度形成視線2，仿照前面方式，可得H2、h2點的刻度。

(四)、數位相機經透鏡或面鏡對著虛像的底部B，取適當高度形成視線3，仿照前面方式，可得H3、h3點的刻度。

依據相似三角形的原理，由所記錄的虛像假想光線，計算虛像的位置和大小

(一)、由視線1、視線2，依據相似三角形的原理，

$$\frac{x+d1}{x+d2} = \frac{d(H1, H2)}{d(h1, h2)}$$

可得虛像像距 x'

※ $d(H1, H2)$ 表示 $H1$ 、 $H2$ 兩點的距離， $d(h1, h2)$ 表示 $h1$ 、 $h2$ 兩點的距離

(二)、由視線2、視線3，依據相似三角形的原理，可得

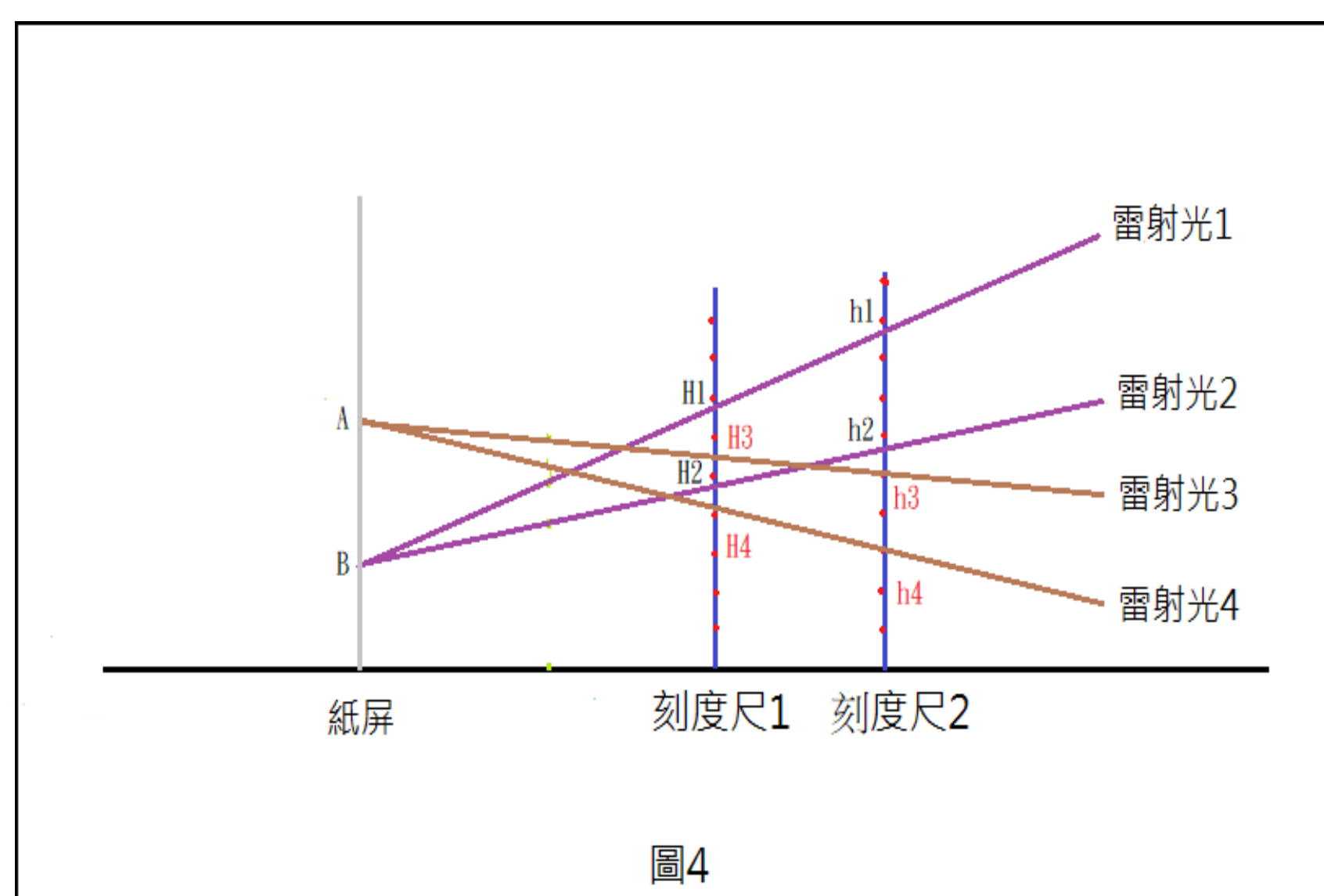
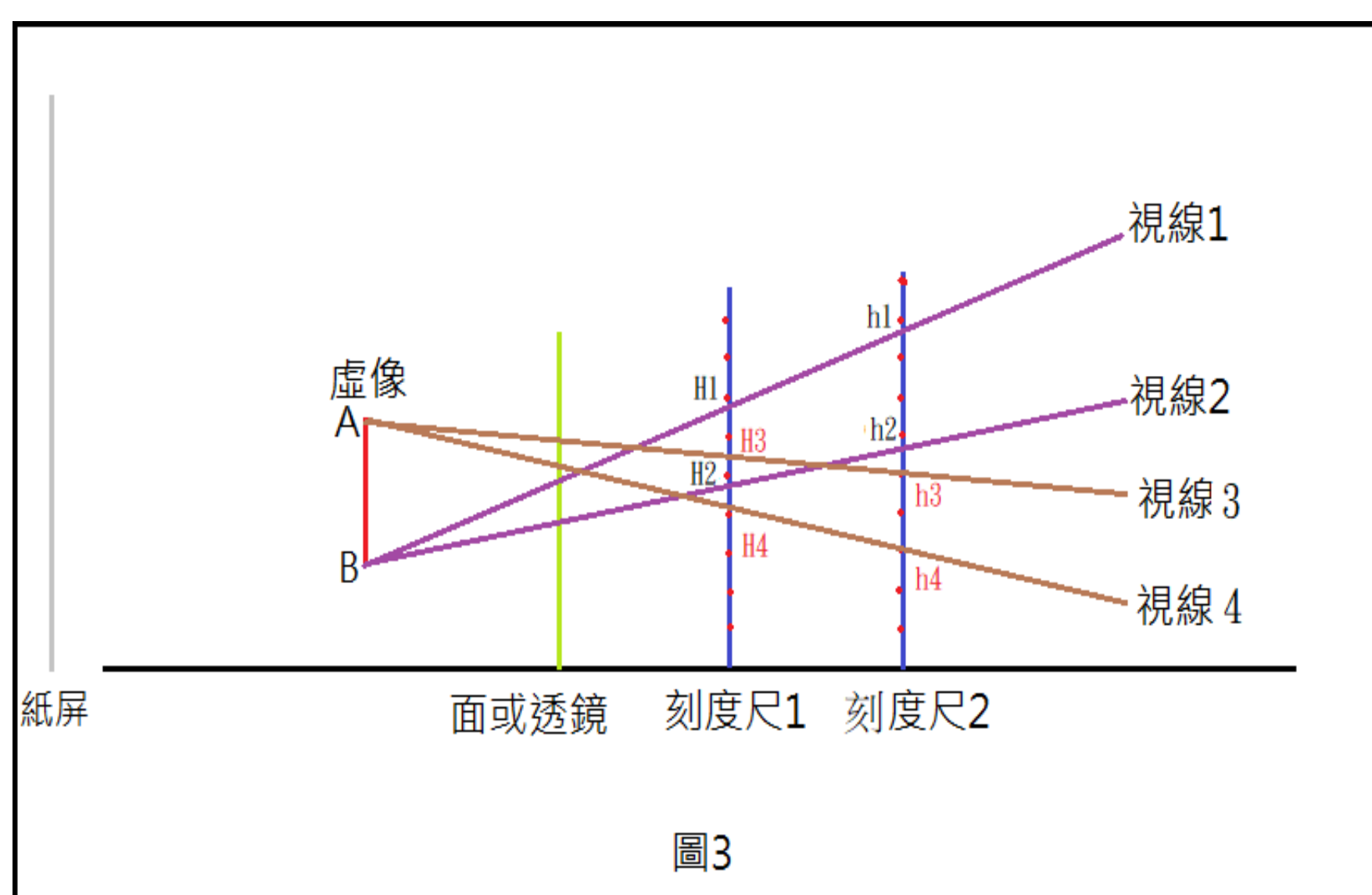
$$\frac{x'+x+d1}{x'+x+d2} = \frac{d(H2, H3)}{d(h2, h3)}$$

先求出 x' 後，再由

$$\frac{d(A, B)}{d(H2, H3)} = \frac{x'}{x'+x+d1}$$

可得虛像大小 $d(A, B) \cdot x'$

以雷射光筆模擬虛像假想光線，以具體操作的方式，測量出虛像的位置和大小。



(一)、仿照前面紀錄虛像假想光線的方法，紀錄虛像底部B點所發出的兩條光線，視線1和視線2，虛像頂點A點所發出的兩條光線，視線3和視線4。

(二)、以雷射光線模擬虛像假想光線的視線1、視線2，在透鏡或面鏡後方，放置紙屏，挪開透鏡或面鏡，雷射光線會射向紙屏，前後移動紙屏，當二雷射光線在紙屏上交於一點，該點就是虛像底部的位置，此時，紙屏與原來放置面、透鏡位置的距離，就是像距。

(三)、仿照前面的方法，可在紙屏上，找到虛像頂部的位置，兩點的距離就是像長。

研究結果

	平面鏡虛像像距			平面鏡虛像像長			凸透鏡虛像像距			凸透鏡虛像像長		
百分誤差	0.0047			0.0052			0.0071			0.24%		
標準偏差	0.073			0.092			0.023			0.007		
	凹透鏡虛像像距			凹透鏡虛像像長			使用雷射光測量凸透鏡虛像像長					
百分誤差	0.53%			0.39%			0.01%					
標準偏差	0.043			0.051			0.17					

討論

1.眼睛的視線不容易固定，利用數位相機和腳架，我們可以得到一固定的視線，有了固定的視線，就可以慢慢仔細的利用我們設計的方法，紀錄虛像假想光線，因而更精確掌握光線的路徑，而有更好的實驗結果。

2.在研究結果一、二中，我們任意改變數位相機的視線，用我們設計的方法，紀錄這些視線，再利用相似三角形的數學原理計算平面鏡虛像成像位置和像長，不同視線計算出的結果幾乎相同，而且接近理論值(物距=像距，物長=像長)，代表我們設計出的紀錄虛像假想光線的方法，是可靠的。

3.在研究結果三、四中，我們繼續使用我們所設計的方法來測量凸透鏡的虛像位置和像長，將所測得的像距代入簡易造鏡者公式 $(1/f)=(1/p)+(1/q)$ ，求得凸透鏡的焦距 f ，其平均值與我們利用傳統方式(遠處大樓在牆壁清晰成像時的像距)所測得的焦距接近；所測得的像長也接近傳統方式中，(物距)/(像距)=(物長)/(像長)的關係，再一次證明我們設計紀錄光線的方法正確。

4.在研究結果五、六中，我們繼續使用我們所設計的方法來測量凹透鏡的虛像位置和像長，將所測得的像距代入簡易造鏡者公式 $(1/f)=(1/p)+(1/q)$ 求 f ，將所測得的像長代入(物距)/(像距)=(物長)/(像長)的關係式，結果也很理想。

- 研究結果一~六中，已經確定可以精確掌握光線的路徑，所以更進一步設計了利用雷射光筆將虛像假想光線逆向射回，在紙屏上找到虛像，這樣，使得虛像位置的尋找又更具體。
- 為了比較我們所設計測量虛像的方法和視差法準確度的差異，我們擷取了53屆全國科展文獻中，以視差法(視線差針法)測量虛像的實驗數據，並將其放在附錄(一)，供讀者對照比較。經過我們分析，視差法(視線差針法)相對於我們的方法，誤差很大(可參考附錄三)。
- 在53屆全國科展以視高法探究虛像大小和位置的探究過程中，凸透鏡必須滿足(1)平行主軸的光線會通過焦點、(2)通過鏡心的光線不偏折這兩個條件，才有凸透鏡虛像的視高與虛像長度的關係式出現，才能由測得的視高推算出虛像的大小和位置(可參考附錄二的文獻資料)，但是真實透鏡其光線的行進沒有那麼理想，所以利用視高法求得虛像大小和位置並不是虛像真正的大小和位置，是理想值。然而我們測量虛像的方法是直接由虛像的假想光線找到虛像的位置和大小，即使光線的行進不符合上述(1)、(2)兩條件，找到的像的位置仍然是真正虛像的位置，只要物體能清晰成像，都能準確的找到虛像的位置。
- 在視高法探究虛像的研究中，其過程是經由一連串的數學推導後，由視高求出虛像的位置和大小，在視覺上，沒有虛像具體存在的感受，但在我們的研究中，我們想到了移開透鏡或面鏡，使虛像發出的假想光線可以逆向射回原處，進而具體的呈現在紙屏上，讓虛像具體化，所以可以說，我們找到了比視差法、視高法更準確、更具體測量虛像的新方法。
- 平面鏡形成的虛像，視覺上變小，那是有關於視角、視直徑的原因，我們已經在其它書籍閱讀相關理論，這個疑問，不再於本研究探討了。

參考資料

國中理化課本第三冊、高中物理課本第三冊、全國科展53屆國中組作品

未來展望

這個實驗所需的器材不多，在一般國中理化實驗室就有，普遍性較高，且實驗之操作方法容易、也不須太多時間，一般國中生就可理解並操作，因此推薦將此實驗併入原本國中課程的實像測定、可以改變現在只能測定實像的窘境，並且打破了「虛像無法從紙屏上找到」的理論，所以我們認為這個實驗適合推廣。

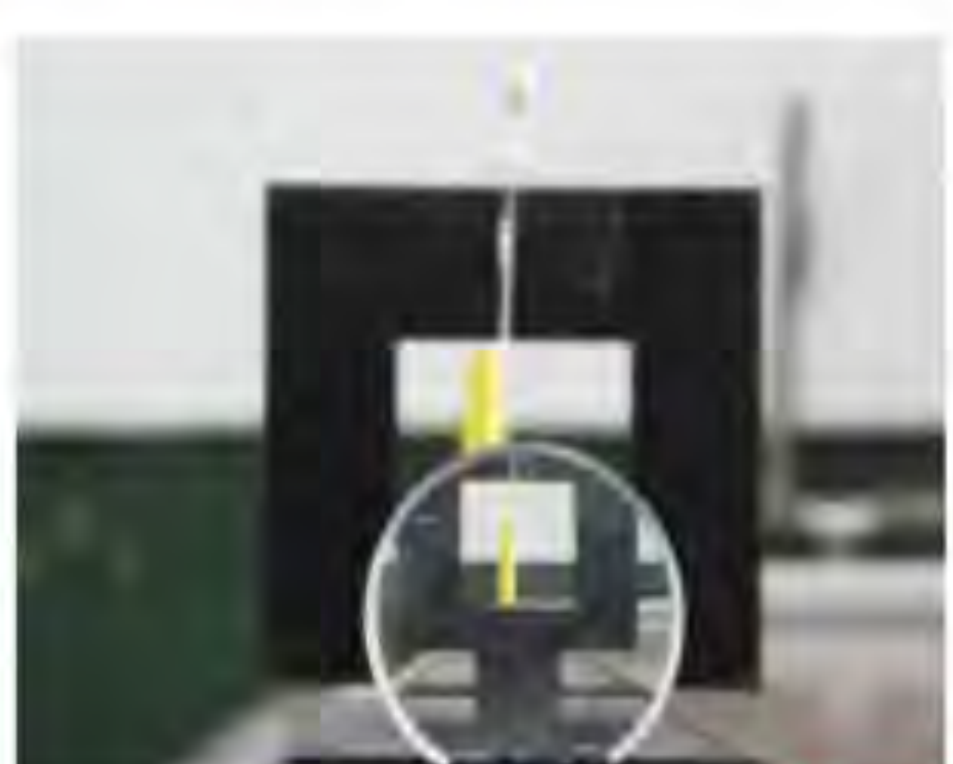
附錄一：視差法(視線差針法)實驗數據的文獻資料(擷取自53屆全國科展國中組物理科第二名作品)

六、討論凹透鏡焦距的測量

(一)凹透鏡焦距的測量在高中課程中一直是十分困難的，有的版本使用視差法(裝置如下)，在實驗操作過程中觀察者透過凹透鏡，並在左右擺動上半身，判斷鏡中虛像與凹透鏡後方參考像屏的位置無相對運動時，像屏的位置即為虛像的位置，而且像屏要中空，才不會擋住物體，這種方法不僅操作不易、判斷不易，所求出焦距的差異也很大。

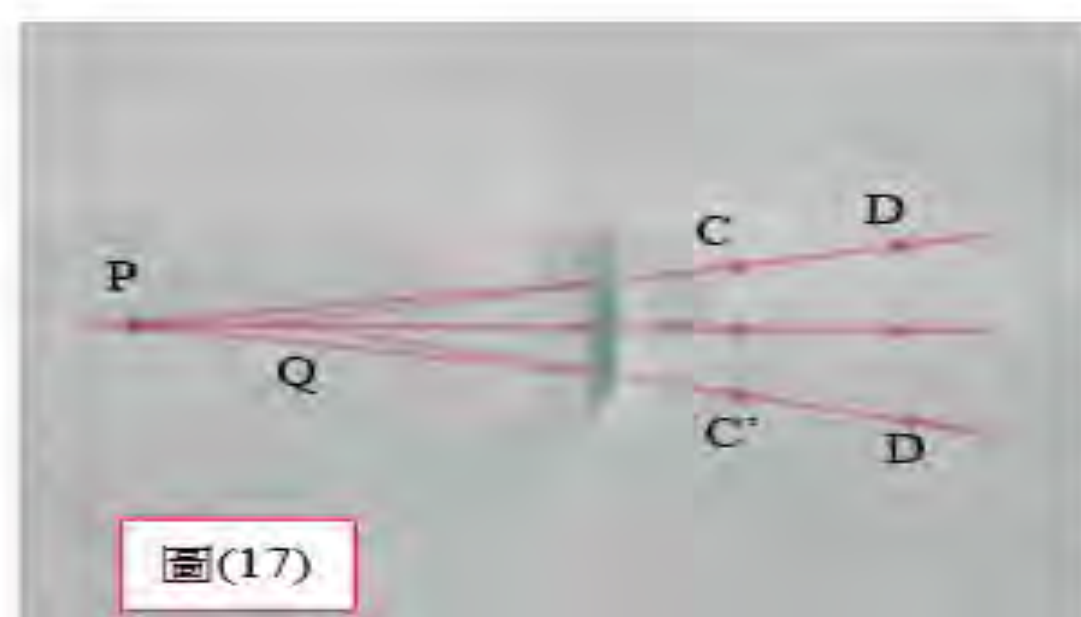


圖(15)



圖(16)

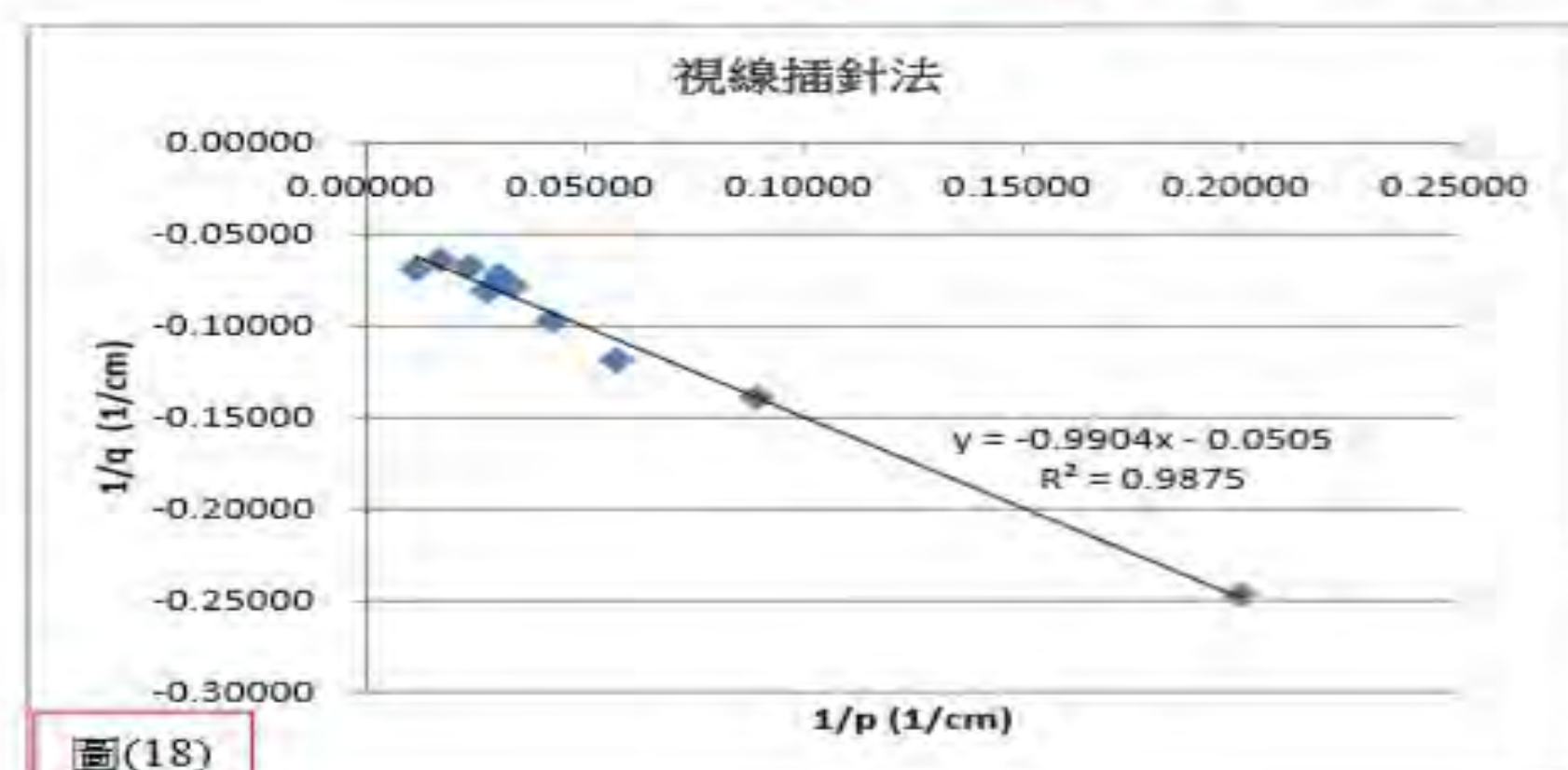
(二)高中課程中，有的版本使用視線插針法來測量凹透鏡的焦距，將凹透鏡的一半塞在保麗龍板上，在主軸上插上大頭針 P，從凹透鏡的另一側，以單眼透過凹透鏡觀察大頭針 P 的像，在此視線線上插大頭針 C 以及 D，以相同的方法，在主軸的另一側插大頭針 C' 以及 D'，射線 CD 與 C'D' 的交會點 Q 即為大頭針 A 的成像處，以此方法的實驗結果如下。



圖(17)

物距 p(cm)	像距 q(cm)	1/p	1/q	焦距 f(cm)
5.00	-4.05	0.20000	-0.24691	-21.32
11.20	-7.20	0.08929	-0.13889	-20.16
17.45	-8.45	0.05731	-0.11834	-16.38
23.50	-10.30	0.04255	-0.09709	-18.34
29.90	-12.75	0.03344	-0.07843	-22.23
33.00	-13.85	0.03030	-0.07220	-23.87
36.00	-12.40	0.02778	-0.08065	-18.92
42.35	-14.85	0.02361	-0.06734	-22.87
59.30	-15.70	0.01686	-0.06369	-21.35
87.60	-14.50	0.01142	-0.06897	-17.38

表(26)



圖(18)

利用截距求出焦距

$$f = \frac{1}{0.0505} = 19.80 \text{ cm}$$

附錄三：文獻資料(53屆全國科展國中組物理科第二名作品)視差法(視線差針法)實驗數據的誤差分析

視線插針法				
焦距	離差	離差/平均值	相對平均值的百分誤差	
21.32	1.038	0.051178	5.117838 %	
20.16	-0.122	-0.00602	-0.60152 %	
16.38	-3.902	-0.19239	-19.2387 %	
18.34	-1.942	-0.09575	-9.57499 %	
22.23	1.948	0.096046	9.604575 %	
23.87	3.588	0.176906	17.69056 %	
18.92	-1.362	-0.06715	-6.71531 %	
22.87	2.588	0.127601	12.76008 %	
21.35	1.068	0.052658	5.265753 %	
17.38	-2.902	-0.14308	-14.3083 %	
平均值				
20.282				

相對平均值的百分誤差最大17.69056%，比起我們都在3%以內，誤差太大

