中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080415

正多邊形的圓舞曲

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者：	指導老師：
小六 王晨諺 小五 鄧价閔 小五 簡碩君 小四 張書晨	陳志平

關鍵詞：正多邊形、旋轉、摺紙

摘要

一、本研究討論正多邊形透過旋轉，產生內接正方形以及頂點相接的正多邊形，找出其中的特性。

二、我們發現邊長為 a 的正方形，其四個角落切去四個邊長為 c 的正方形，則內部剩下的空間可放入最大的正方形面積為 a^2-2ac。

三、若在邊長為 a 正方形中放入一個邊長為 b 的內接正方形，則原正方形內部的其中一個角落可以切去的最大正方形面積為$(a^2-b^2)^2/4a^2$。

四、正方形內部有一旋轉θ角的內接正方形，內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$。

五、找出日本設計師三宅一生所設計 132-5 系列服飾摺紙的展開圖。

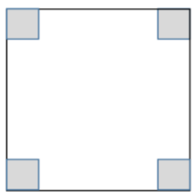
六、將正多邊形旋轉產生的圖形利用摺紙的方式摺出來。

壹、研究動機

在翰林版 5 上數學課本平面圖形單元中介紹正多邊形，我們在 2015 年美國 AMC8 數學測驗的題目中找到一個有趣的題目：

「如圖一，在邊長為 5 公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為 1 公分的正方形。試問在剩下的區域內能放入最大的正方形面積為多少平方公分？」

另外日本著名時尚設計師三宅一生於 2010 年推出的 132-5 系列服飾，以可摺疊成內接正方形的服裝設計大獲好評。一個是數學測驗題目，一個是時裝設計，兩者之間有著極為相似的圖形，引發了我們加以研究的興趣。



圖一

貳、研究目的

一、找出內接正方形與原正方形彼此之間的關係。

二、找出內接正方形與原正方形四個角落可切除的正方形大小的關係。

三、探討內接正方形旋轉角度與原正方形的邊長關係。

四、正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的情形。

五、將三宅一生 132-5 摺紙結合正多邊形的旋轉。

參、研究設備及器材

紙、筆、尺、剪刀、電腦、Microsoft Word 軟體、動態幾何系統 the geometer's sketchpad、計算機。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討：

本研究以數學測驗結合服飾工藝與摺紙，歷屆科展中並無類似主題，但仍可以找到一些摺紙的研究，為我們在研究過程中提供參考，整理如表一、表二：

表一：第 47 屆全國科展國小組數學第一名作品（林筱倩、鮑泓逸及張子芸，2007）		
作品名稱	研究摘要與探討	對本研究的啟發
翻天轉地多角星	將長條紙以固定的規律做往上或往下摺疊，每次摺疊都沿著上一次的摺痕，摺完後把紙全部攤開，長條紙上會有規律性的摺痕，如圖 A-1，將部分摺痕再摺疊翻轉即可產生多角星，如圖 A-2。	有些多角星是由角旋轉 2~3 圈所產生，如圖 A-2 即為旋轉了 2 圈的七角星。我們在完成正多邊形繞外面 1 點旋轉一圈的圖形後，也進而研究做出轉 2~4 圈的圖形，如圖 A-3。

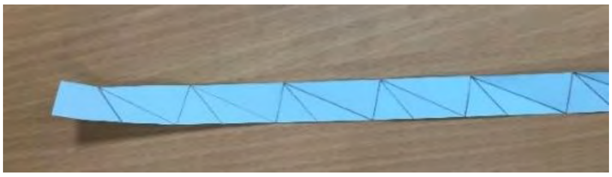


圖 A-1


圖 A-2


圖 A-3

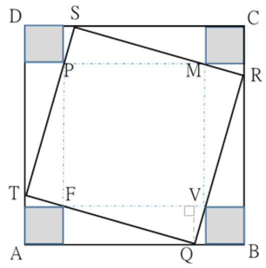
表二：第 51 屆全國科展國小組數學作品（林姿吟、張芸蓁及林威成，2011）		
作品名稱	研究摘要與探討	對本研究的啟發
正多邊形的圓舞曲	將圓形利用直徑劃分為若干個相同的扇形，再將各個扇形上的弓形向圓心方向摺起來，即可形成正多邊形，如圖 B-1。	該研究主要研究圓形裡面摺出各種的正多邊形。我們研究正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的情形後，利用摺紙也順利摺出圓內接正多邊形，如圖 B-2。

圖 B-1

圖 B-2

二、找出內接正方形與原正方形彼此之間的關係。

(一)2015 年美國 AMC8 數學測驗的題目中，如圖二，要求在邊長為 5 公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為 1 公分的正方形，正方形內部剩下的區域內能放入最大的正方形面積，內部正方形 TQRS 的頂點必須與原正方形 ABCD 的邊相接才能產生最大的面積。計算如下：



圖二

正方形 FVMP 面積=3×3=9

△FQV 面積=$3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$(底$\overline{FV}$=3，高為 1)

所求最大正方形為 TQRS

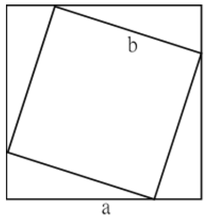
其面積為 $9+4\times\frac{3}{2}=15$ 平方公分

(二)原正方形、四個角落正方形與內接的正方形間的關係？

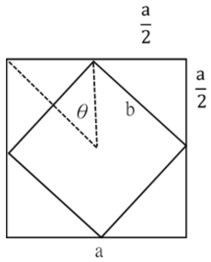
由上述解答發現，原正方形面積為 25，四個角落的正方形面積各為 1，內部最大的正方形面積為 15，兩個正方形面積相差 10，亦即△TAQ 的面積=10÷4=2.5，我們可推導出原正方形減去四個△TAQ 的面積即為內部最大的正方形。我們假設原正方形的邊長為 a，減去的四個角落正方形的邊長為 c，可以算出△TAQ 的面積=$\frac{1}{2}(a-2c)\times c+c^2$，則內部最大的正方形面積為 $a^2-4\times〔\frac{1}{2}(a-2c)\times c+c^2〕= a^2-2ac$。

(三)邊長為 a 的正方形 A，要使得另一個邊長為 b 的正方形 B 內接於正方形 A，則 b<a 如圖三。

(四)當 b 的長度縮短，則 B 往順時針方向的旋轉角度 θ 愈大，當 θ 等於 45°時，如圖四，正方形 B 為最小能內接於正方形 A 的正方形，由畢氏定理可知 $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$。



圖三

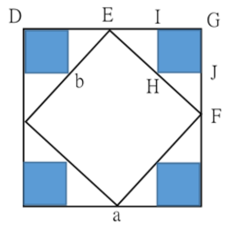


圖四

(五)邊長為 b 的正方形 B 內接於邊長為 a 的正方形 A，其邊長關係為 $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqq b < a$。

三、找出內接正方形與原正方形四個角落可切除的正方形大小的關係。

(一)當正方形 B 邊長 $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$時，內接的正方形 B 最小，原正方形的四個角落可切除的正方形最大，如圖五。取$\overline{EF}$的中點 H，由點 H 分別做鉛直線及水平線分別交正方形 A 於點 I 及點 J，因為內接正方形 B 順時針旋轉 45°，所以∠HEI=∠HFJ=45°, △HEI 及△HFJ 為全等的等腰直角三角形，四邊形 IHJG 的四個角為直角，且$\overline{IH}=\overline{JH}$，所以 IHJG 為正方形，且$\overline{IG}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{1}{4}\overline{DG}$，當內接正方形 B 的邊長為$\frac{a\sqrt{2}}{2}$時，其中 a 為外圍的大正方形的邊長，大正方形其中一個角落可切除的最大正方形邊長為$\frac{1}{4}$a，面積為$\frac{1}{16}a^2$。



圖五

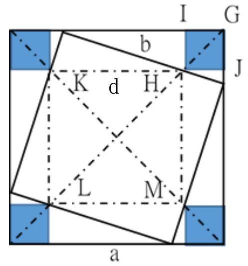
(二)當$\frac{a\sqrt{2}}{2}<b<a$，如圖六，畫出原正方形 A 的對角線，分別與內接的正方形 B 相交於點 KLMH，由點 H 分別做鉛直線及水平線分別交正方形 A 於點 I 及點 J，其中 IHJG 為原正方形 A 其中一個角落可切除的最大正方形，另外正方形 B 內部也內接了正方形 KLMH，假設正方形 KLMH 的邊長為 d，

正方形 B 的面積$=b^2=d^2+\frac{1}{2}d\times\frac{(a-d)}{2}\times 4$，

$b^2=d^2+ad-d^2$，

$b^2=ad$，

$d=b^2/a$



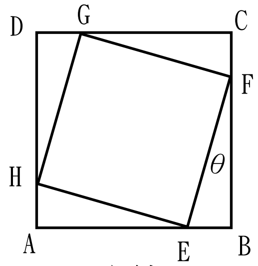
圖六

可以得出正方形 IHJG 邊長為$\frac{a-d}{2}$=〔$a-(b^2/a)$〕$/2=(a^2-b^2)/2a$，面積為$(a^2-b^2)^2/4a^2$

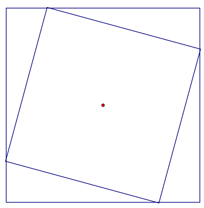
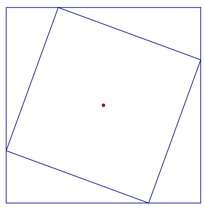
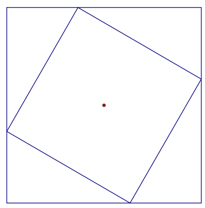
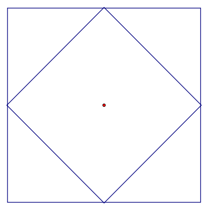
四、內接正方形旋轉角度與原正方形的邊長關係。

我們發現當內接正方形旋轉了 45°時邊長最短，那麼其它旋轉角度的內接正方形與原正方形的邊長關係又是如何？

(一) 原正方形 ABCD 內部有一旋轉θ角的內接正方形 EFGH，如圖七，我們假設內接正方形 EFGH 的邊長為 1，則$\overline{BE}=\sin\theta$，$\overline{BF}=\cos\theta$，$\overline{AE}=\overline{BF}$，所以 $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=\overline{BF}+\overline{BE}=\sin\theta+\cos\theta$，故內接正方形與原正方形邊長的比值為 $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，我們利用動態幾何軟體畫出部分旋轉角度的內接正方形如下表：



圖七

旋轉角度	15 度	20 度	30 度	45 度
圖形				
內接正方形與原正方形邊長比值 ($\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$)	約 0.82	約 0.78	約 0.73	約 0.71

五、正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的情形。

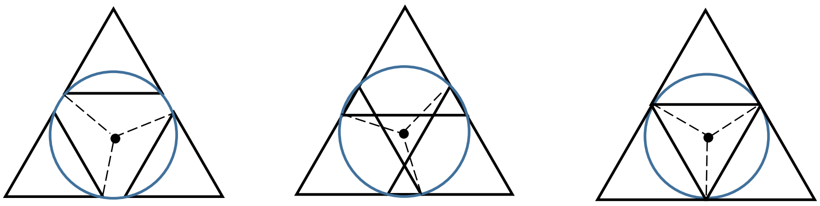
上述的研究中，原正方形內部的內接正方形旋轉角度介於 0~45 度，旋轉角度愈大，內接正方形的面積愈小。如果讓正多邊形繞著外部的一點旋轉，產生頂點相接的圖形，那麼每次旋轉的角度為何？與旋轉中心距離多少？

(一)正三角形

1.旋轉一圈後成封閉圖形

使正三角形繞著底邊中點下方一點旋轉，如圖八，若底邊距離旋轉中心過大，則頂點間無法相接，如圖八-a；若底邊距離旋轉中心過小，則正三角形的邊會

相連，頂點無法相接，如圖八-b；要使其旋轉後產生的新正三角形和原正三角形頂點相接，底邊和旋轉中心必須有一定的距離，如圖八-c。

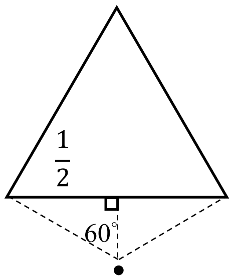


a　　b　　c

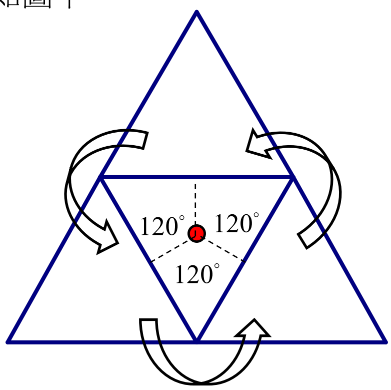
圖八

要形成封閉圖形，必須旋轉一周且最後一個正三角形與第一個正三角形頂點相接，旋轉一周為 360 度，且正三角形的個數為整數個，我們讓旋轉角度也為整數，$360=2^3\times3^2\times5$，正因數的個數為質因數指數加 1 相乘，共有$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$ 個， 360 的正因數中 1 無法形成封閉圖形，所以共有 24-1=23 種的正三角形旋轉所產生的圖形。

以三個正三角形為例，$360\div3=120$，每次旋轉 120°，正三角形及其旋轉中心如圖九，為了方便計算，我們令正三角形的邊長為 1，其底邊與旋轉中心距離為$\frac{1}{2}\cot60^\circ\fallingdotseq0.29$，每次旋轉 120°，旋轉後產生的圖形如圖十。



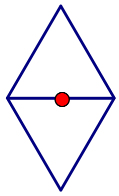
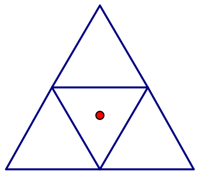
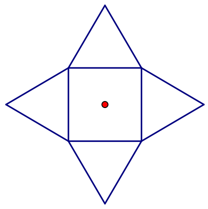
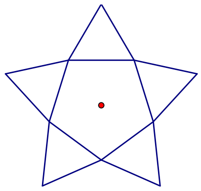
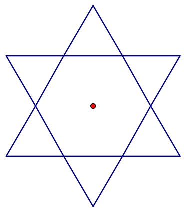
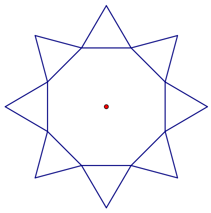
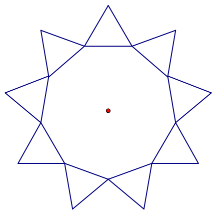
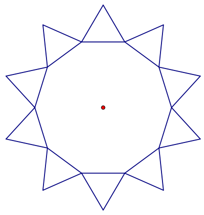
圖九

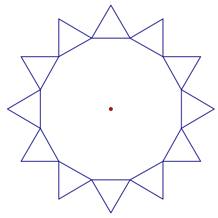
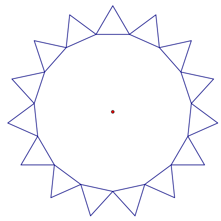
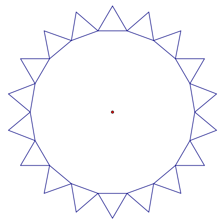


圖十

正三角形旋轉後底邊會形成一個正 n 邊形，其中 n 為正三角形的數量，每次正三角形旋轉的角度為$\frac{360^\circ}{n}$，底邊與旋轉中心的距離為$\frac{1}{2}\cot\frac{360^\circ}{2n}=\frac{1}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}$

我們整理出所有 23 種正三角形旋轉一圈產生的圖形如下表：

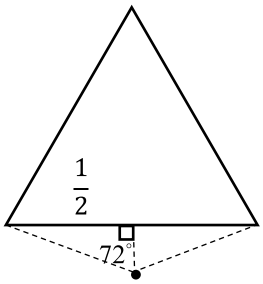
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
2	$360^\circ \div 2 =$ 180°	$\frac{1}{2}\cot 90^\circ = 0$	
3	$360^\circ \div 3 =$ 120°	$\frac{1}{2}\cot 60^\circ \fallingdotseq 0.29$	
4	$360^\circ \div 4 =$ 90°	$\frac{1}{2}\cot 45^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$	
5	$360^\circ \div 5 =$ 72°	$\frac{1}{2}\cot 36^\circ \fallingdotseq 0.69$	
6	$360^\circ \div 6 =$ 60°	$\frac{1}{2}\cot 30^\circ \fallingdotseq 0.87$	
8	$360^\circ \div 8 =$ 45°	$\frac{1}{2}\cot 22.5^\circ \fallingdotseq 1.21$	
9	$360^\circ \div 9 =$ 40°	$\frac{1}{2}\cot 20^\circ \fallingdotseq 1.37$	
10	$360^\circ \div 10 =$ 36°	$\frac{1}{2}\cot 18^\circ \fallingdotseq 1.54$	

12	$360^{\circ}\div12=$ 30°	$\frac{1}{2}\cot15^{\circ}\fallingdotseq1.87$	
15	$360^{\circ}\div15=$ 24°	$\frac{1}{2}\cot12^{\circ}\fallingdotseq2.35$	
18	$360^{\circ}\div18=$ 20°	$\frac{1}{2}\cot10^{\circ}\fallingdotseq2.84$	
20	$360^{\circ}\div20=18^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot9^{\circ}\fallingdotseq3.16$	圖示省略
24	$360^{\circ}\div24=15^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot7.5^{\circ}\fallingdotseq3.8$	
30	$360^{\circ}\div30=12^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot6^{\circ}\fallingdotseq4.76$	
36	$360^{\circ}\div36=10^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot5^{\circ}\fallingdotseq5.72$	
40	$360^{\circ}\div40=9^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot4.5^{\circ}\fallingdotseq6.35$	
45	$360^{\circ}\div45=8^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot4^{\circ}\fallingdotseq7.15$	
60	$360^{\circ}\div60=6^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot3^{\circ}\fallingdotseq9.54$	
72	$360^{\circ}\div72=5^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot2.5^{\circ}\fallingdotseq11.45$	
90	$360^{\circ}\div90=4^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot2^{\circ}\fallingdotseq14.31$	
120	$360^{\circ}\div120=3^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot1.5^{\circ}\fallingdotseq19.09$	
180	$360^{\circ}\div180=2^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot1^{\circ}\fallingdotseq28.64$	
360	$360^{\circ}\div360=1^{\circ}$	$\frac{1}{2}\cot0.5^{\circ}\fallingdotseq57.29$	

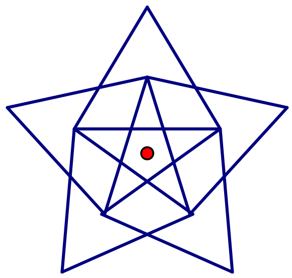
2.旋轉兩圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉 2 圈，且最後能夠頂點相接，則須符合 $360\times2\div n=m$，其中 n 為正三角形的數量，$n=2k+1$，$k\in N$ (亦即 n 為奇數個，可使正三角形繞 1 圈時多$\frac{1}{2}$個，繞兩圈時剛好可以頂點相接) ，m 為每次正三角形旋轉的角度，$720=2^4\times3^2\times5$，且 $720=(2k+1)\times m$，(2k+1)的個數為奇質因數的指數加 1 相乘，共有$(2+1)\times(1+1)=6$ 個，為 1、3、5、9、15、45，其中 1 個正三角形無法產生封閉圖形，3 個正三角形的圖形和旋轉一圈的重覆(註：請參考討論一)，故會產生旋轉 2 圈的正三角形數量共有 5、9、15、45 等四種。

由 5 個正三角形組成旋轉兩圈的圖形，共旋轉了 720°，$720\div5=144$，每次旋轉了 144°，如圖十一，其底邊與旋轉中心距離為$\frac{1}{2}\cot72^\circ\fallingdotseq0.16$，旋轉後產生的圖形如圖十二。

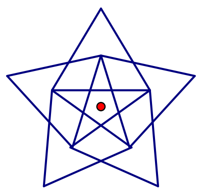


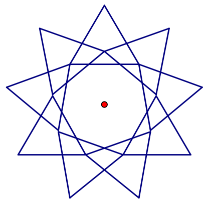
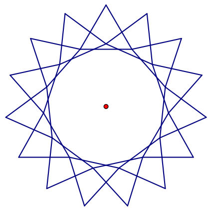
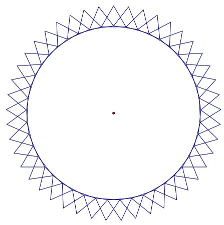
圖十一


圖十二

正三角形旋轉兩圈後頂點要相接，每次正三角形旋轉的角度為$\frac{720^\circ}{n}$，底邊與旋轉中心的距離為$\frac{1}{2}\cot\frac{720^\circ}{2n}=\frac{1}{2}\cot\frac{360^\circ}{n}$

我們整理出所有 4 種正三角形旋轉兩圈產生的圖形如下表：

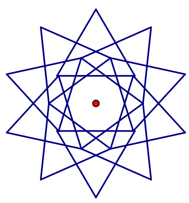
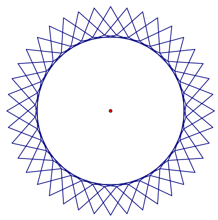
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
5	$720^\circ\div5=$ 144°	$\frac{1}{2}\cot72^\circ\fallingdotseq0.16$	

9	$720^\circ \div 9=$ 80°	$\frac{1}{2}\cot 40^\circ$ ≒ 0.6	
15	$720^\circ \div 15=$ 48°	$\frac{1}{2}\cot 24^\circ$ ≒ 1.12	
45	$720^\circ \div 45=$ 16°	$\frac{1}{2}\cot 8^\circ$ ≒ 3.56	

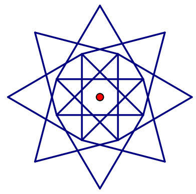
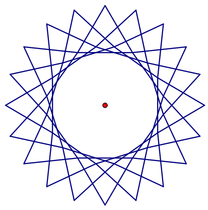
3.旋轉三圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉 3 圈，且最後能夠頂點相接，則符合 $360\times3\div n=m$，其中 n 為正三角形的數量且 $n=3k+1$，$k\in N$ 或 $n=3k+2$，$k\in N$ (註：n 不可為 3 的倍數，若為 3 的倍數，在轉第 1 圈時就會產生頂點相接的情形) ，m 為每次正三角形旋轉的角度，$1080=2^3\times3^3\times5$，當 $1080=(3k+1)\times m$ 時，求出 3k+1 共有 4、10、40 三種，其中 4 個正三角形的圖形和旋轉一圈的重覆(註：請參考討論一)，故會產生旋轉 3 圈且頂點相接的正三角形數量有 10 個和 40 個兩種，

n=3k+1 旋轉三圈的圖形如下表：

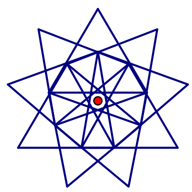
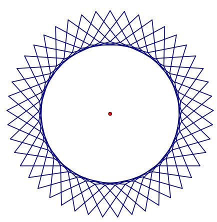
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
10	$1080^\circ \div 10=$ 108°	$\frac{1}{2}\cot 54^\circ$ ≒ 0.36	
40	$1080^\circ \div 40=$ 27°	$\frac{1}{2}\cot 13.5^\circ$ ≒ 2.08	

當 n=3k+2 時，求出 3k+2 共有 5、8、20 三種，其中 5 個正三角形的圖形和旋轉兩圈的重覆(註：請參考討論一)，故只有 8 和 20 個兩種，n=3k+2 旋轉三圈的圖形如下表：

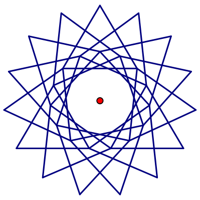
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
8	$1080^\circ \div 8 =$ 135°	$\frac{1}{2}\cot 67.5^\circ \fallingdotseq 0.21$	
20	$1080^\circ \div 20 =$ 54°	$\frac{1}{2}\cot 27^\circ \fallingdotseq 0.98$	

4.旋轉四圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉 4 圈，且最後能夠頂點相接，則符合 $360 \times 4 \div n = m$，其中 n 為正三角形的數量且 n=4k+1，k∊N 或 n=4k+3，k∊N(註：n=4k 時會在轉第 1 圈時就會產生頂點相接的情形，n=4k+2 時會在轉第 2 圈時就會產生頂點相接的情形)，m 為每次正三角形旋轉的角度，$1440=2^5 \times 3^2 \times 5$，且 $1440=(4k+1) \times m$，求出 4k+1 共有 5、9、45 三種，其中 5 個正三角形的圖形和旋轉一圈的重覆(註：請參考討論一)，故會產生旋轉 4 圈的正三角形數量只有 9 個和 45 個兩種，n=4k+1 旋轉四圈的圖形如下表：

正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
9	$1440^\circ \div 9 =$ 160°	$\frac{1}{2}\cot 80^\circ \fallingdotseq 0.09$	
45	$1440^\circ \div 45 =$ 32°	$\frac{1}{2}\cot 16^\circ \fallingdotseq 1.74$	

當 n=4k+3 時，求出 4k+3 只有 15 一種，圖形如下表

正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
15	$1440^\circ \div 15 = 96^\circ$	$\frac{1}{2}\cot 48^\circ ≒ 0.45$	

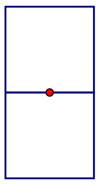
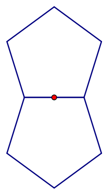
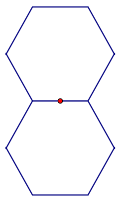
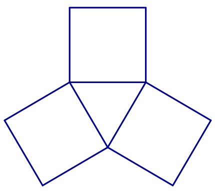
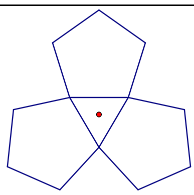
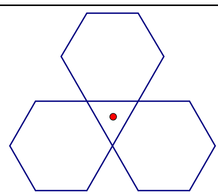
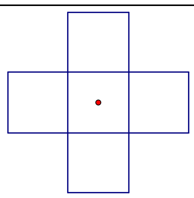
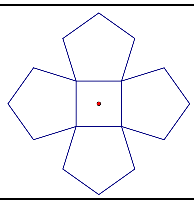
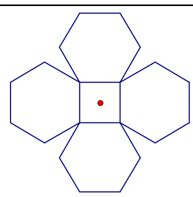
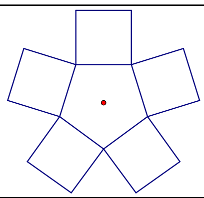
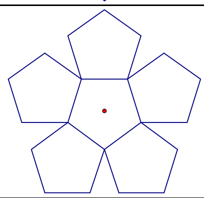
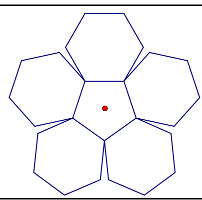
5.旋轉任意圈後成封閉圖形

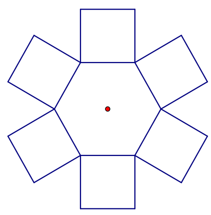
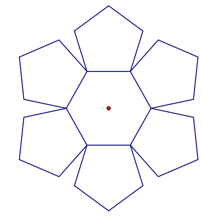
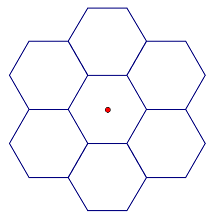
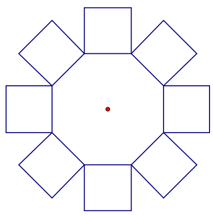
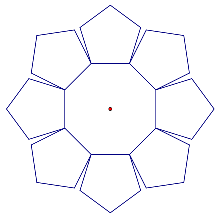
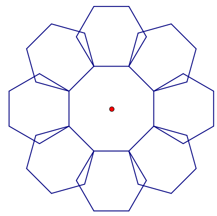
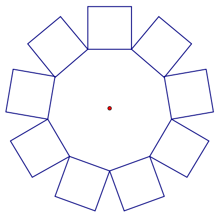
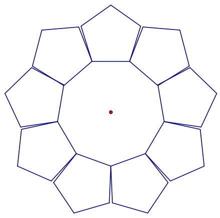
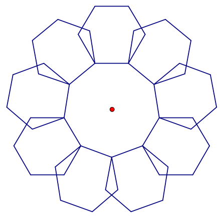
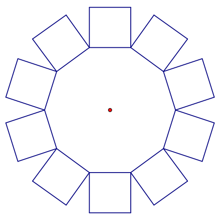
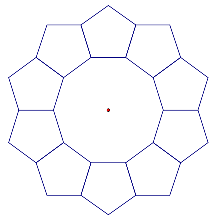
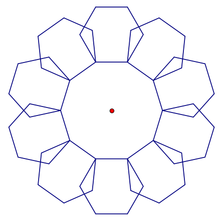
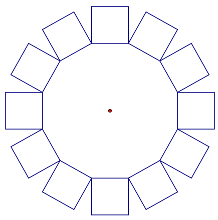
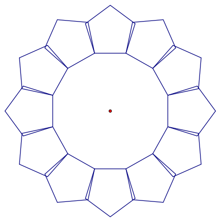
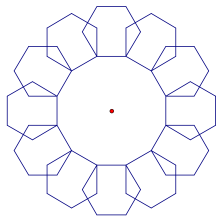
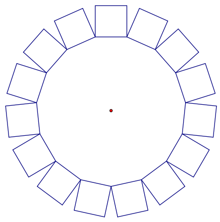
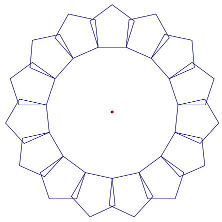
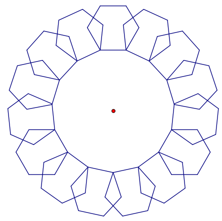
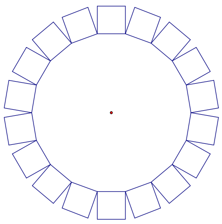
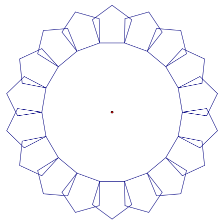
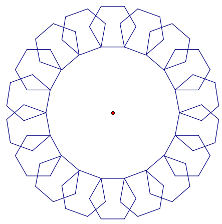
若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉 r 圈，r 為正整數，且最後能夠頂點相接，則符合 $360 \times r \div n = m$，其中 n 為正三角形的數量，且 $n = rk + w$，其中 k、$w \in N$，$w < r$，且 w 不可為 r 的因數，m 為每次正三角形旋轉的角度，其底邊與旋轉中心距離為 $\frac{1}{2}\cot\frac{m}{2}$。

(二)正方形、正五邊形、正六邊形

我們依上述的研究整理出正方形、正五邊形、正六邊形繞旋轉中心旋轉的圖形

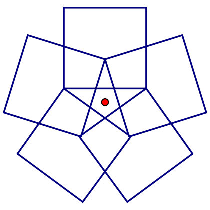
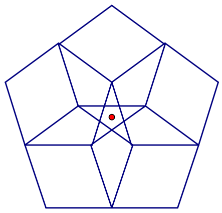
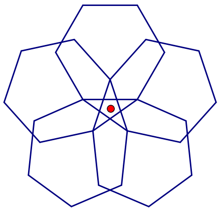
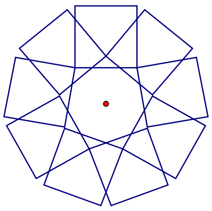
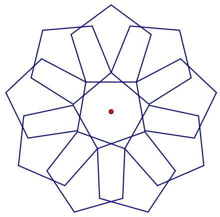
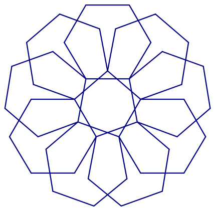
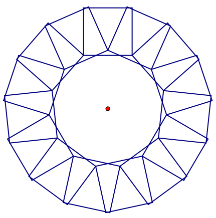
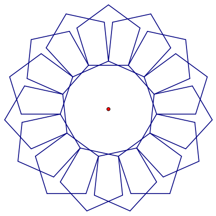
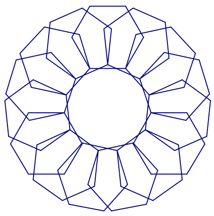
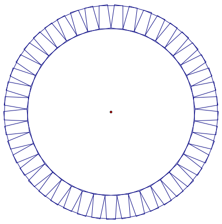
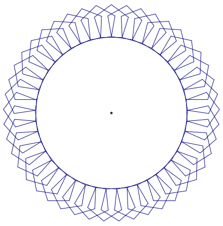
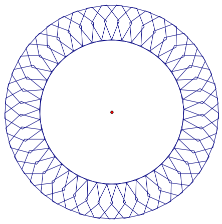
1.旋轉一圈後成封閉圖形

正多邊形數量	正方形產生的圖形	正五邊形產生的圖形	正六邊形產生的圖形
2			
3			
4			
5			

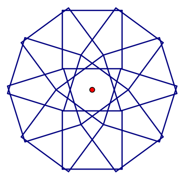
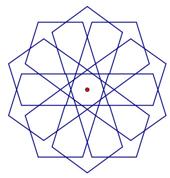
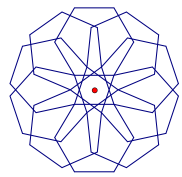
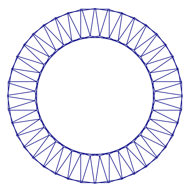
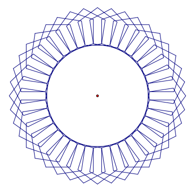
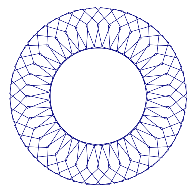
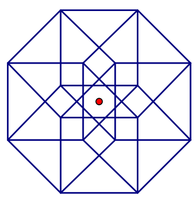
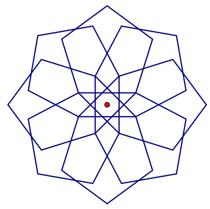
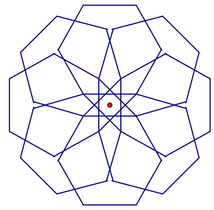
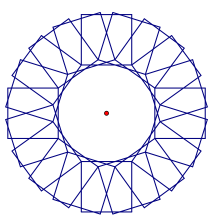
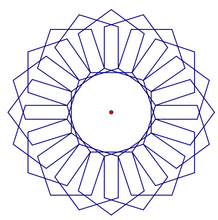
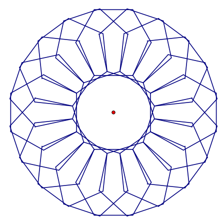
6			
8			
9			
10			
12			
15			
18			
20	圖示省略		
24			
30			

36	
40	
45	
60	
72	圖示省略
90	
120	
180	
360	

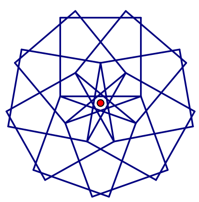
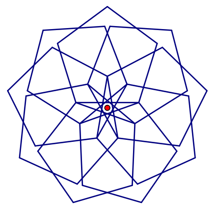
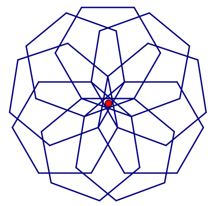
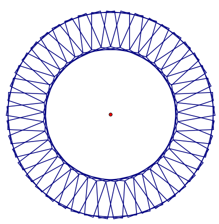
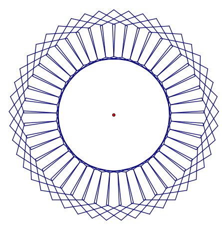
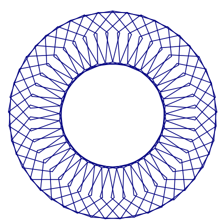
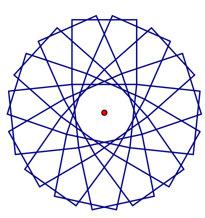
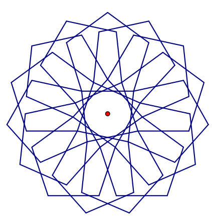
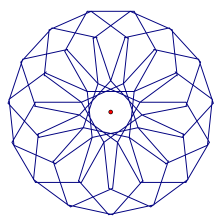
2.旋轉兩圈後成封閉圖形

正多邊形數量	正方形產生的圖形	正五邊形產生的圖形	正六邊形產生的圖形
5			
9			
15			
45			

3.旋轉三圈後成封閉圖形

<table>
<tr><th colspan="2">正多邊形數量</th><th>正方形產生的圖形</th><th>正五邊形產生的圖形</th><th>正六邊形產生的圖形</th></tr>
<tr><td rowspan="2">n=3k+1</td><td>k=3
n=10</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>k=13
n=40</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=3k+2</td><td>k=2
n=8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>k=6
n=20</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

4.旋轉四圈後成封閉圖形

<table>
<tr><th colspan="2">正多邊形數量</th><th>正方形產生的圖形</th><th>正五邊形產生的圖形</th><th>正六邊形產生的圖形</th></tr>
<tr><td rowspan="2">n=4k+1</td><td>k=2
n=9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>k=11
n=45</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n=4k+3</td><td>k=3
n=15</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

六、將三宅一生 132-5 摺紙結合正多邊形的旋轉。

日本知名時尚設計師三宅一生於 2010 年推出 132-5 系列服飾，如圖十三，這系列創造出摺紙般被摺疊的布，當它的邊角被拉伸，便會顯現出一件 3D 立體效果的衣服，132-5 的每個數字都有其隱含的意義，數字 1 表示使用一整塊布料，3 代表三維立體，2 則表示可摺疊成二維平面，最後的 5 則代表由此設計帶來的全新立體體驗(雖然網站沒提到，但我們覺得 5 也可能代表平面圖形由 5 個正方形組成)。我們發現當這件衣服摺疊成平面時，竟然和我們研究的內接正方形一樣，但卻可用摺疊的方式進行平面與立體的轉換，我們試著找出它的摺疊原理，並加以運用在我們的研究中。

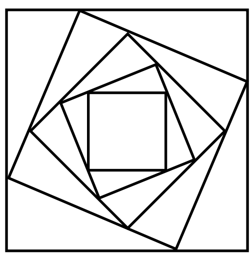
a　圖十三　b

摘自：http://www.tokyofashiondiaries.com/132-5/

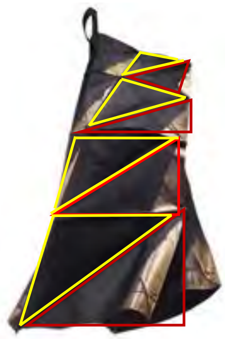
(一)解開 132-5 摺疊之謎

觀察圖十三-a 可知，摺疊後共有 5 個正方形，彼此間為內接的關係，而圖十三-b 則為拉開後的立體圖，可以明顯看出其摺疊痕跡，只要把這兩個圖形的相對位置找出來就可以解開摺疊之謎了。我們試著將這兩個圖形繪製出來。首先是圖十三-a，這個圖較簡單，為五個內接正方形，繪製出如圖十四，

圖十三-b 雖然左右兩側的圖形無法判斷，但中間由下到上可以明顯看出有四對的三角形摺痕，如圖十五，



圖十四



圖十五

我們將圖十四和圖十五進行比較分析，並將相對位置標出，如圖十六，將圖十六-b 中的△BCD 沿著$\overline{BD}$對摺，讓 C 落在$\overline{AD}$上，就會形成圖十六-a 的右下角，由圖十六中可以得知四邊形 ABCD 有幾項性質，1.∠A 為正方形的其中一角，所以∠A=90°。2.因為圖十六-a 中第一個內接正方形旋轉了∠1，所以$\overline{AB}=\overline{CD}$。3.△BCD 沿著$\overline{BD}$對摺，C 落在$\overline{AD}$上。所以∠ADB=∠CDB。4.圖十六-a 中，每個正方形皆由外側的正方形旋轉縮小而成，最內側的正方形由最外側的正方形旋轉了 90°，平均分給 4 次的旋轉可得∠1=∠2=∠3=∠4=22.5°，$\overline{AC}$：$\overline{AB}$ =tan22.5° ≒0.41，則$\overline{AD}$：$\overline{AB}$≒1.41。這樣我們就能製作一個摺疊的元件，這個元件繪製方式為：

1.畫一條 1 單位長的鉛直線$\overline{AB}$。

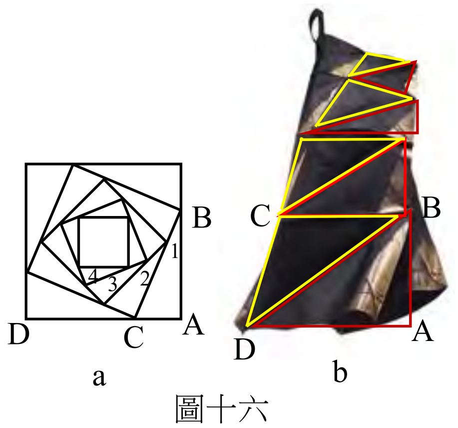
2.從 A 點畫出一條 1.41 單位長的$\overline{AD}$，並使得$\overline{AD}$垂直$\overline{AB}$。

3.連接$\overline{BD}$。

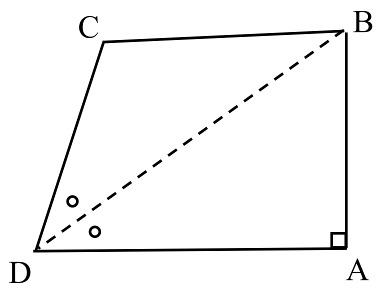
4.從 D 點畫一條 1 單位長的$\overline{CD}$，並使∠CDB =∠ADB。

5.連接$\overline{BC}$，如圖十七，我們完成了摺疊元件的繪製。

而這個元件組成了摺疊正方形的一角。

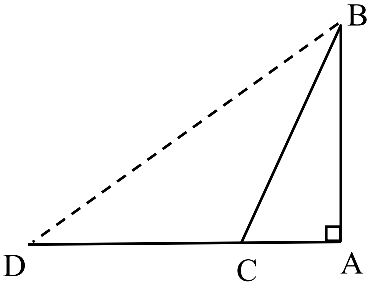


圖十六

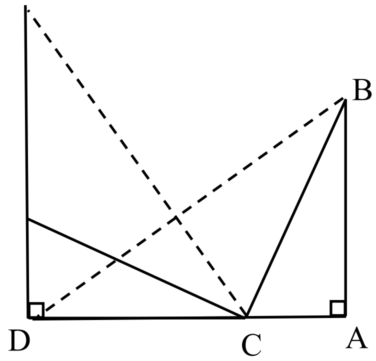


圖十七

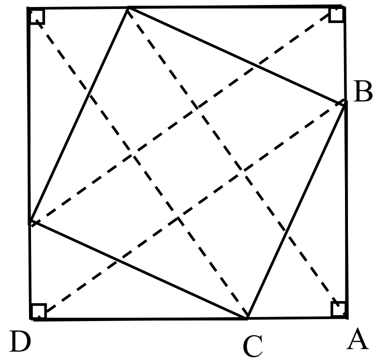
將圖十七中△BCD 沿著$\overline{BD}$摺下可形成圖十八，為正方形的一角，再將另一個元件的$\overline{AB}$結合原元件的$\overline{CD}$，則可完成圖十九，以此類推重覆使用四個元件則可摺疊出圖二十，形成一個正方形；由圖十六 b 中衣服的摺痕可發現四邊形的元件往上縮小重覆了三次，如此我們就完成了圖二十一即為圖十六的展開圖，為了讓展開圖形成完整封閉形體，我們在右邊增加了黏貼處，和左側進行黏合，利用這個展開圖，我們順利的做出摺疊的衣服如圖二十二。



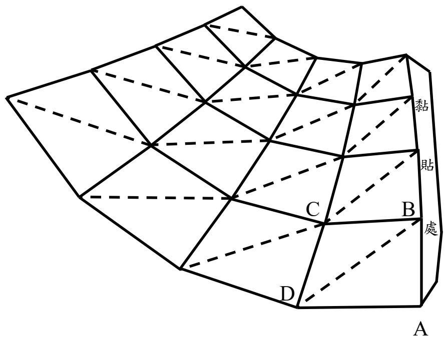
圖十八



圖十九



圖二十



圖二十一

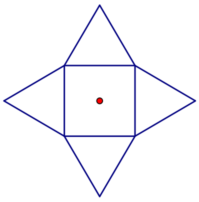
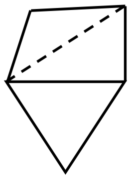
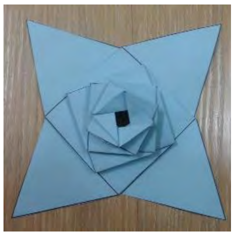
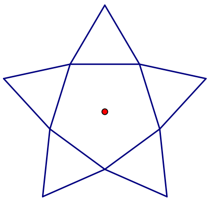
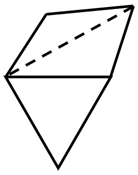
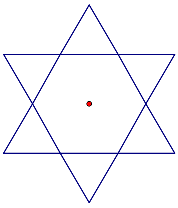
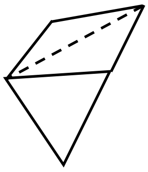
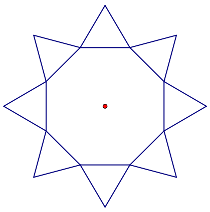
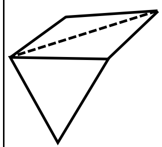
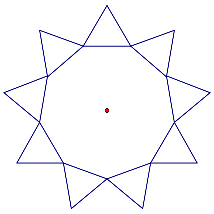
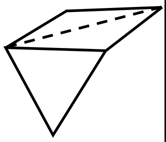
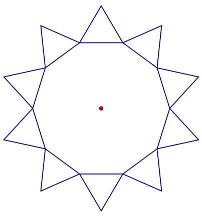
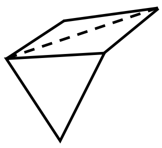
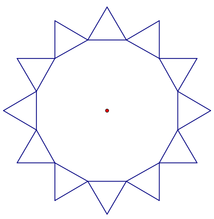
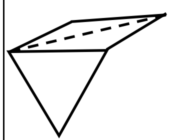

圖二十二

(二)運用 132-5 摺疊方式摺出正多邊形旋轉圖形

在上述的研究中我們利用動態幾何軟體畫出正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的圖形，我們試著運用 132-5 摺疊方式摺出上述的圖形。

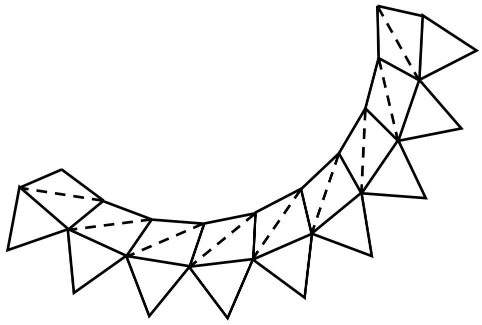
1.正三角形旋轉一圈的圖形：

正三角形繞底邊下方一點旋轉，產生頂點相接的情形，我們將上面圖十七中的元件，改變∠A 的角度，讓∠A=(180°-每次旋轉的角度 θ)(註：詳如討論二)，並以$\overline{AD}$為邊往外畫出一個正三角形，即為正三角形旋轉一圈的圖形展開圖的一個元件，為了方便區分，我們自訂了編號規則如：4-1-90，第一個數字 4 表示使用了 4 個正三角形，第二個數字 1 表示旋轉了 1 圈，第三個數字 90 表示每個元件右下角為 90°，亦即∠A=90°。各種旋轉角度、元件、編號及摺紙的成品如下表：

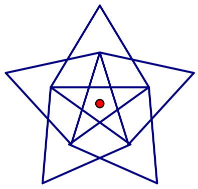
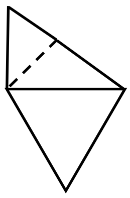
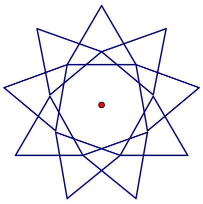
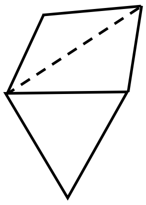
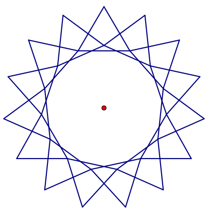
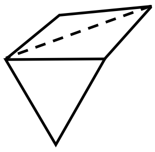
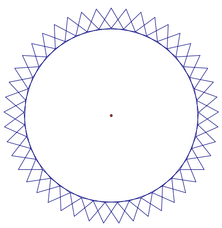
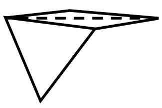
原始圖形	編號 (正多邊形數-圈數-∠A)	摺紙元件	旋轉角度 (θ)	$180^{\circ}-\theta$ (∠A)	摺紙成品
	4-1-90		90°	90°	
	5-1-108		72°	108°	
	6-1-120		60°	120°	
	8-1-135		45°	135°	
	9-1-140		40°	140°	
	10-1-144		36°	144°	
	12-1-150		30°	150°	

2.正三角形旋轉二圈的圖形：

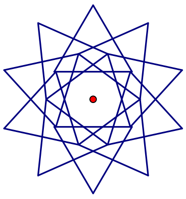
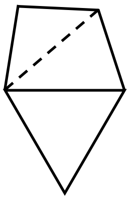
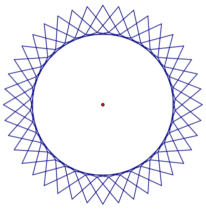
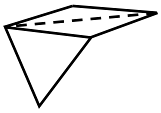
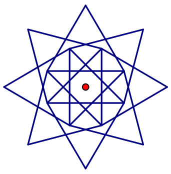
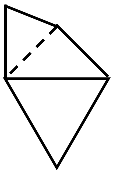
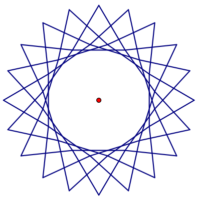
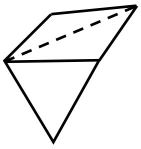
因為旋轉二圈以上的圖形，摺疊後已經會往上方堆疊，故不需如圖二十一往上方再重覆延伸三層，只需將元件往左方重覆延伸至所需的個數，如圖二十三，我們將旋轉二圈的各種旋轉角度、元件、編號及摺紙的成品如下表：



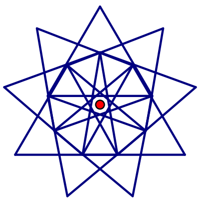
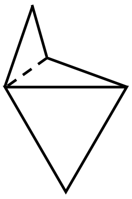
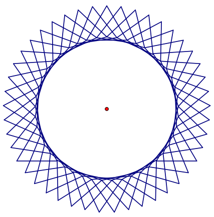
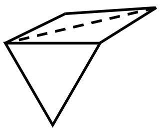
圖二十三

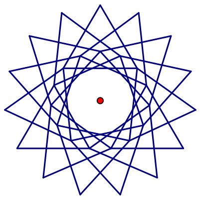
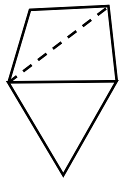
原始圖形	編號 (正多邊形數-圈數-∠A)	摺紙元件	旋轉角度 (θ)	$180^\circ-\theta$ (∠A)	摺紙成品
	5-2-36		144°	36°	
	9-2-100		80°	100°	
	15-2-132		48°	132°	
	45-2-164		16°	164°	

3.正三角形旋轉三圈的圖形：

原始圖形	編號 (正多邊形數-圈數-∠A)	摺紙元件	旋轉角度 (θ)	180°-θ (∠A)	摺紙成品
	10-3-72		108°	72°	
	40-3-153		27°	153°	
	8-3-45		135°	45°	
	20-3-126		54°	126°	

4.正三角形旋轉四圈的圖形：

原始圖形	編號 (正多邊形數-圈數-∠A)	摺紙元件	旋轉角度 (θ)	180°-θ (∠A)	摺紙成品
	9-4-20		160°	20°	
	45-4-148		32°	148°	

	15-4-84		96°	84°	

伍、研究結果

一、證明在邊長為 a 正方形的四個角落各減去一個邊長為 c 的正方形，則內部剩下的空間可以放置最大的正方形面積為 a^2-2ac。

二、另外證明若在邊長為 a 正方形放入一個邊長為 b 的內接正方形，則原正方形內部的其中一個角落可以切去的最大正方形面積為 $(a^2-b^2)^2/4a^2$。

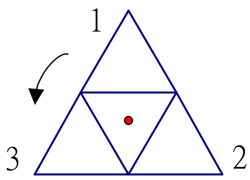
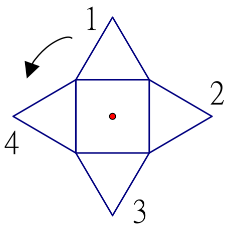
三、原正方形內部有一旋轉 θ 角的內接正方形，證明內接正方形與原正方形邊長的比值為 $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$。

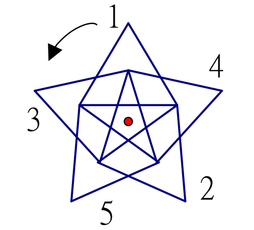
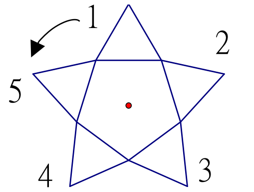
四、利用動態幾何軟體將正多邊形經過旋轉後頂點相接的圖形畫出來。

五、找出了三宅一生 132-5 系列服飾摺紙的展開圖，並應用在正多邊形旋轉後頂點相接的圖形。

陸、討論

一、正三角形旋轉產生頂點相接圖形，若正三角形的個數過少會產生圖形重覆的情形。我們發現正三角形繞著底邊下方一點旋轉，若正三角形的個數較少，每次旋轉的角度超過 180°時，就有可能產生圖形重覆的情形，若圖形重覆我們就不重覆列入較多旋轉圈數中。整理如下表：

旋轉圈數	正三角形個數	旋轉角度	產生圖形	重覆情形
2	3	$720^\circ \div 3$ $=240^\circ$		與旋轉一圈，每次轉 120° 圖形相同
3	4	$1080^\circ \div 4$ $=270^\circ$		與旋轉一圈，每次轉 90° 圖形相同

3	5	1080° ÷5 =216°		與旋轉兩圈，每次轉 144° 圖形相同
4	5	1440° ÷5 =288°		與旋轉一圈，每次轉 72° 圖形相同

二、正多邊形旋轉角度 θ 與三宅一生 132-5 摺紙元件角度 $\angle A$ 之間的關係。

我們讓一個正多邊形(此處以正三角形表示)繞著點 O，每次逆時針旋轉 θ 度，產生頂點相接的圖形，$\angle A$ 為正多邊形旋轉後兩個正多邊形所夾的角度，如圖二十四-a，而圖二十四-b 為其摺紙展開圖，我們探討 θ 和 $\angle A$ 的關係如下：

因為正多邊形繞著點 O 旋轉，所以 $\overline{OB}=\overline{OC}$，

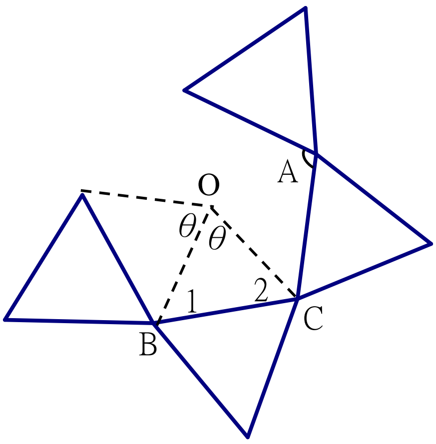
$\triangle OBC$ 為等腰三角形，$\angle 1=\angle 2$，

$\angle A=2\times\angle 1=2\times\angle 2$，

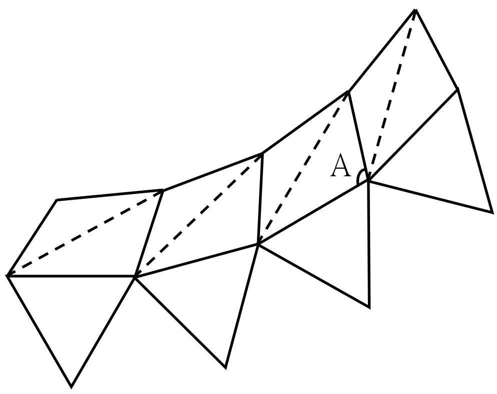
$\angle 1=(180^\circ-\theta)\div 2$，

$\angle A=2\times\angle 1=2\times(180^\circ-\theta)\div 2=180^\circ-\theta$

故 $\angle A=180^\circ-\theta$



a

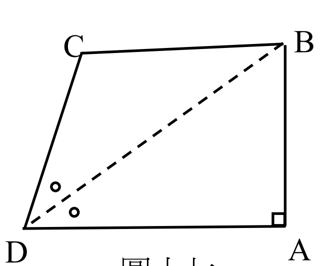


b

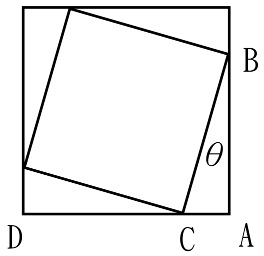
圖二十四

三、三宅一生 132-5 系列服飾摺紙不同的旋轉角度

在之前的研究中，三宅一生 132-5 系列服飾摺紙為了讓最內側的正方形與最外側的正方形平行，所以每個內接正方形旋轉了 22.5°，因此也讓元件中的$\overline{AD}$：$\overline{AB}$≒1.41，如圖十七，只要改變元件中$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的比值，就可以改變內接正方形旋轉的角度，在前面研究過程中第四項，我們已經得知內接正方形旋轉角度與原正方形的邊長關係，內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，下圖二十五中，令 AB=1，則$\overline{AD}$：$\overline{AB}$=$\overline{AD}$：1=($\overline{CD}$+$\overline{AC}$)：1=($\overline{AB}$+$\overline{AC}$)=1+tan θ 。

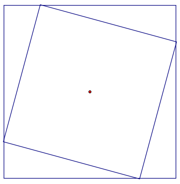
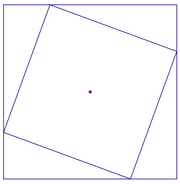
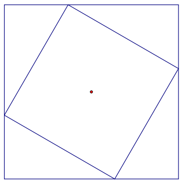
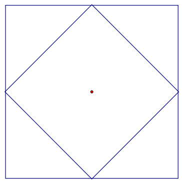
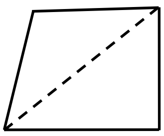
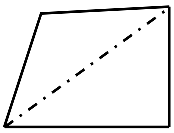
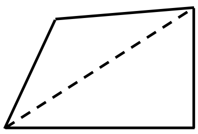
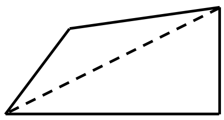
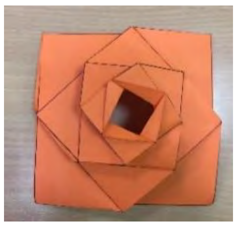


圖十七



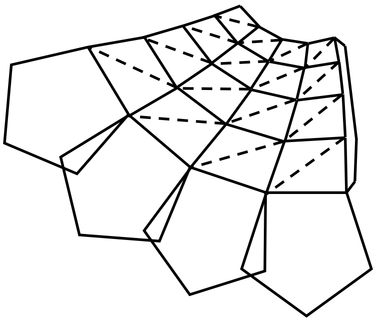
圖二十五

我們利用$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的比值為 1+tan θ 的結果，將內接正方形旋轉固定角度的摺紙摺出如下表

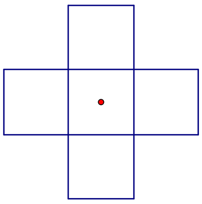
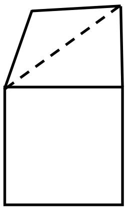
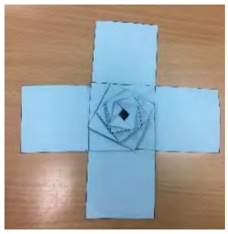
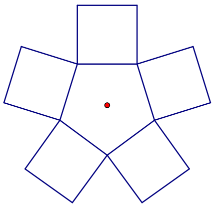
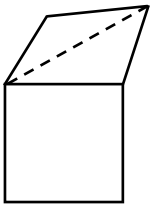
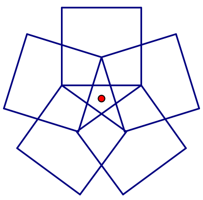
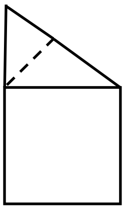
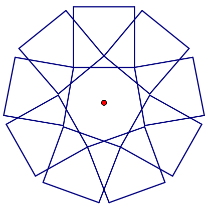
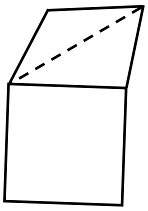
旋轉角度	15 度	20 度	30 度	45 度
圖形				
內接正方形與原正方形邊長比值 ($\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$)	約 0.82	約 0.78	約 0.73	約 0.71
$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的比值 (1+tan θ)	約 1.27	約 1.36	約 1.58	2
摺紙元件				
摺紙成品				

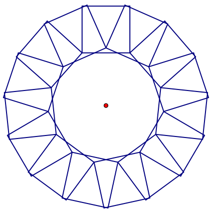
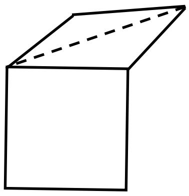
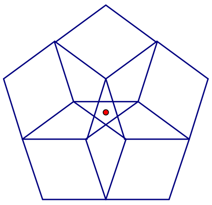
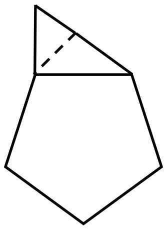
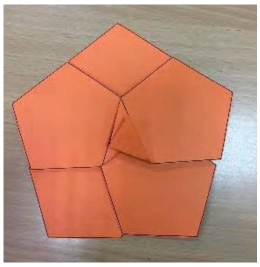
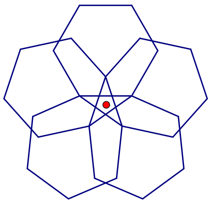
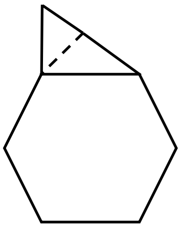
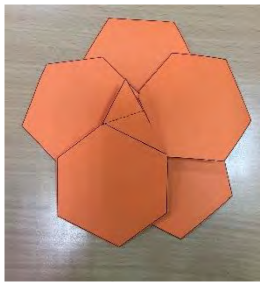
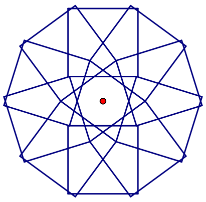
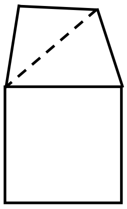
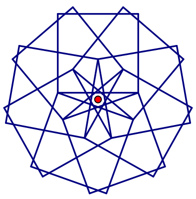
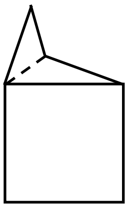
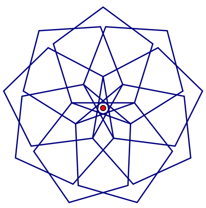
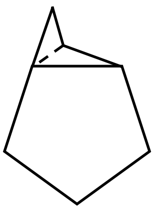
四、用摺紙摺出其他正多邊形旋轉頂點相接的圖形

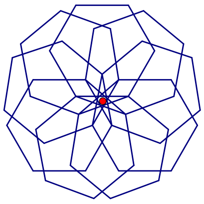
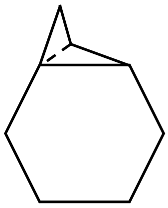
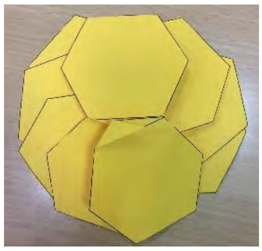
我們只要將原展開圖元件的$\overline{AD}$上增加的正三角形改成其他正多邊形即可做出其他正多邊形旋轉頂點相接圖形的展開圖，但若旋轉的角度過小且正多邊形的內角角度過大則會產生正多邊形重疊的情形，如圖二十六，這種圖形不適合用摺紙摺出，我們將部分旋轉一~四圈的摺紙做出如下表：



圖二十六

原始圖形	編號 (正多邊形數-圈數-∠A)	摺紙元件	旋轉角度 (θ)	$180^\circ-\theta$ (∠A)	摺紙成品
	4-1-90		90°	90°	
	5-1-108		72°	108°	
	5-2-36		144°	36°	
	9-2-100		80°	100°	

	15-2-132		48°	132°	
	5-2-36		144°	36°	
	5-2-36		144°	36°	
	10-3-72		108°	72°	
	9-4-20		160°	20°	
	9-4-20		160°	20°	

	9-4-20		160°	20°	

柒、結論

一、數學起源於解決生活中的問題，數學之美在與生活息息相關，並能找出令人感動的規律，我們從一個數學測驗中的題目開始著手，最後結合日本著名服裝設計師三宅一生的設計，測驗的題目與現實生活中的服飾工藝竟產生了密不可分的連結，讓我們在研究的過程中感受到數學帶來的震撼與喜悅。

二、研究的過程雖然辛苦，但每次找到新的成果都令我們覺得很開心，我們能從一個小問題開始，進而完成整個研究，覺得好有成就感。

三、我們在研究中找出內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，其他的正多邊形與其內接圖形應該也有類似的公式，我們在研究過程中有試著去找出來，不過其他正多邊形的邊長、面積等計算超出我們所能處理，故後來沒有繼續往這個方向研究，若將來具備更多數學能力後可以再研究正多邊形的內接問題。另外我們在參考三宅一生服裝設計網站時，除了我們研究的服裝外，還有許多的摺疊服飾，如圖二十七，可以試著找出這些服飾的展開圖，創造出更多漂亮摺紙藝術。

圖二十七

捌、參考資料及其他

一、國民小學數學領域翰林版教課書・五年級上學期 (106 年版)・翰林出版事業股份有限公司。

二、陳榮輝(2011)・美國 AMC8 數學測驗歷屆試題暨詳解(II)・台北市：博凱出版社有限公司，187。

三、林筱倩、鮑泓逸、張子芸(2007)・翻天轉地多角星・中華民國第 47 屆中小學科學展覽會作品說明書。

四、林姿吟、張芸蓁、林威成(2011)・正多邊形的圓舞曲・中華民國第51屆中小學科學展覽會作品說明書。

五、MATH IS FUN(2017)・取自 https://www.mathsisfun.com/geometry/rotation.html。

六、時尚變革成為現實(2017)・取自 http://www.tokyofashiondiaries.com/132-5/。

七、常文武、王儷娟、呂安雲(2017)・三宅一生的服裝設計與扭棱摺疊・數學傳播，69-73。

附錄

在直角三角形中，可由三角函數得知三角形的內角與邊長間的相對應關係，本研究中使用的三角函數有 SIN=$\frac{對邊}{斜邊}$、COS=$\frac{鄰邊}{斜邊}$、TAN=$\frac{對邊}{鄰邊}$、COT=$\frac{鄰邊}{對邊}=\frac{1}{TAN}$，三角函數值可利用工程計算機算出，也可以查表得知，下表為三角函數表。

三角函数	SIN	COS	TAN	三角函数	SIN	COS	TAN
0°	0	1	0	90°	1	0	無
1°	0.0174	0.9998	0.0174	89°	0.9998	0.0174	57.2899
2°	0.0348	0.9993	0.0349	88°	0.9993	0.0348	28.6362
3°	0.0523	0.9986	0.0524	87°	0.9986	0.0523	19.0811
4°	0.0697	0.9975	0.0699	86°	0.9975	0.0697	14.3006
5°	0.0871	0.9961	0.0874	85°	0.9961	0.0871	11.4300
6°	0.1045	0.9945	0.1051	84°	0.9945	0.1045	9.5143
7°	0.1218	0.9925	0.1227	83°	0.9925	0.1218	8.1443
8°	0.1391	0.9902	0.1405	82°	0.9902	0.1391	7.1153
9°	0.1564	0.9876	0.1583	81°	0.9876	0.1564	6.3137
10°	0.1736	0.9848	0.1763	80°	0.9848	0.1736	5.6712
11°	0.1908	0.9816	0.1943	79°	0.9816	0.1908	5.1445
12°	0.2079	0.9781	0.2125	78°	0.9781	0.2079	4.7046
13°	0.2249	0.9743	0.2308	77°	0.9743	0.2249	4.3314
14°	0.2419	0.9702	0.2493	76°	0.9702	0.2419	4.0107
15°	0.2588	0.9659	0.2679	75°	0.9659	0.2588	3.7320
16°	0.2756	0.9612	0.2867	74°	0.9612	0.2756	3.4874
17°	0.2923	0.9563	0.3057	73°	0.9563	0.2923	3.2708
18°	0.3090	0.9510	0.3249	72°	0.9510	0.3090	3.0776
19°	0.3255	0.9455	0.3443	71°	0.9455	0.3255	2.9042
20°	0.3420	0.9396	0.3639	70°	0.9396	0.3420	2.7474
21°	0.3583	0.9335	0.3838	69°	0.9335	0.3583	2.6050
22°	0.3746	0.9271	0.4040	68°	0.9271	0.3746	2.4750
23°	0.3907	0.9205	0.4244	67°	0.9205	0.3907	2.3558
24°	0.4067	0.9135	0.4452	66°	0.9135	0.4067	2.2460
25°	0.4226	0.9063	0.4663	65°	0.9063	0.4226	2.1445
26°	0.4383	0.8987	0.4877	64°	0.8987	0.4383	2.0503
27°	0.4539	0.8910	0.5095	63°	0.8910	0.4539	1.9626
28°	0.4694	0.8829	0.5317	62°	0.8829	0.4694	1.8807
29°	0.4848	0.8746	0.5543	61°	0.8746	0.4848	1.8040
30°	0.5000	0.8660	0.5773	60°	0.8660	0.5000	1.7320
31°	0.5150	0.8571	0.6008	59°	0.8571	0.5150	1.6642
32°	0.5299	0.8480	0.6248	58°	0.8480	0.5299	1.6003
33°	0.5446	0.8386	0.6494	57°	0.8386	0.5446	1.5398
34°	0.5591	0.8290	0.6745	56°	0.8290	0.5591	1.4825
35°	0.5735	0.8191	0.7002	55°	0.8191	0.5735	1.4281
36°	0.5877	0.8090	0.7265	54°	0.8090	0.5877	1.3763
37°	0.6018	0.7986	0.7535	53°	0.7986	0.6018	1.3270
38°	0.6156	0.7880	0.7812	52°	0.7880	0.6156	1.2799
39°	0.6293	0.7771	0.8097	51°	0.7771	0.6293	1.2348
40°	0.6427	0.7660	0.8390	50°	0.7660	0.6427	1.1917
41°	0.6560	0.7547	0.8692	49°	0.7547	0.6560	1.1503
42°	0.6691	0.7431	0.9004	48°	0.7431	0.6691	1.1106
43°	0.6819	0.7313	0.9325	47°	0.7313	0.6819	1.0723
44°	0.6946	0.7193	0.9656	46°	0.7193	0.6946	1.0355
45°	0.7071	0.7071	1	45°	0.7071	0.7071	1

摘自網站：http://www.360docs.net/doc/info-daf6f7ce2cc58bd63186bdae.html

【評語】080415

此作品探討平面紙張的摺紙問題，特別是有趣的對稱摺紙，研究團隊顯然受到三宅一生所推出的可摺疊成內接正方形的時尚服裝設計（132-5 系列服飾）所吸引並啟發研究。本作品巧妙的將數學應用在生活與摺紙，透過旋轉產生內接正方形、頂點相接的正多邊形、以及星狀圖形，作品的實用、教學與趣味性都很高。另外，作者利用幾何軟體，將設計的摺紙結構畫出來，懂得善用數學工具非常好，值得鼓勵。數學結合服飾設計的工藝，原來數學可以好時尚！是不是三宅一生在台灣有了小小傳人+s？

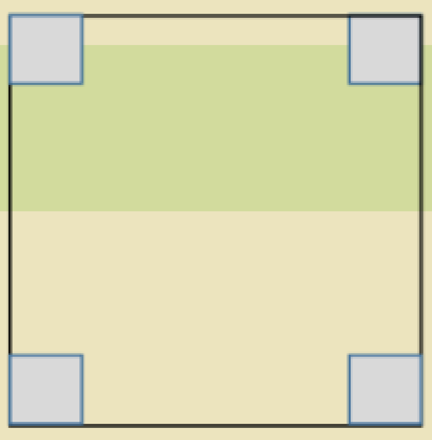
作品海報

摘要

一、本研究討論正多邊形透過旋轉，產生內接正方形以及頂點相接的正多邊形，找出其中的特性。
二、我們發現邊長為a的正方形，其四個角落切去四個邊長為c的正方形，則內部剩下的空間可放入最大的正方形面積為a^2-2ac。
三、若在邊長為a正方形中放入一個邊長為b的內接正方形，則原正方形內部的其中一個角落可以切去的最大正方形面積為$(a^2-b^2)^2/4a^2$。
四、正方形內部有一旋轉θ角的內接正方形，內接正方形與原正方形邊長的比值為 $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$。
五、找出日本設計師三宅一生所設計132-5系列服飾摺紙的展開圖。
六、將正多邊形旋轉產生的圖形利用摺紙的方式摺出來。

壹、研究動機

在翰林版5上數學課本平面圖形單元中介紹正多邊形，我們在2015年美國AMC8數學測驗的題目中找到一個有趣的題目：「如圖一，在邊長為5公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為1公分的正方形。試問在剩下的區域內能放入最大的正方形面積為多少平方公分？」另外日本著名時尚設計師三宅一生於2010年推出的132-5系列服飾，以可摺疊成內接正方形的服裝設計大獲好評。一個是數學測驗題目，一個是時裝設計，兩者之間有著極為相似的圖形，引發了我們加以研究的興趣。


圖一

貳、研究目的

一、找出內接正方形與原正方形彼此之間的關係。
二、找出內接正方形與原正方形四個角落可切除的正方形大小的關係。
三、探討內接正方形旋轉角度與原正方形的邊長關係。
四、正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的情形。
五、將三宅一生132-5摺紙結合正多邊形的旋轉。

參、研究器材

紙、筆、尺、剪刀、電腦、Microsoft Word軟體、動態幾何系統the geometer's sketchpad、計算機。

肆、研究過程

一、文獻探討

本研究以數學測驗結合服飾工藝與摺紙，歷屆科展中並無類似主題，但仍可以找到一些摺紙的研究，為我們在研究過程中提供參考，整理如表一、表二：

表一：第47屆全國科展國小組數學第一名作品（林筱倩、鮑泓逸及張子芸，2007）

作品名稱	研究摘要與探討	對本研究的啟發
翻天轉地多角星	將長條紙以固定的規律做往上或往下摺疊，每次摺疊都沿著上一次的摺痕，摺完後把紙全部攤開，長條紙上會有規律性的摺痕，如圖A-1，將部分摺痕再摺疊翻轉即可產生多角星，如圖A-2。	有些多角星是由角旋轉2~3圈所產生如圖A-2即為旋轉了2圈的七角星。我們在完成正多邊形繞外面1點旋轉一圈的圖形後，也進而研究做出轉2~4圈的圖形，如圖A-3。

表二：第51屆全國科展國小組數學作品（林姿吟、張芸蓁及林威成，2011）

作品名稱	研究摘要與探討	對本研究的啟發
正多邊形的圓舞曲	將圓形利用直徑劃分為若干個相同的扇形，再將各個扇形上的弓形向圓心方向摺起來，即可形成正多邊形，如圖B-1。	該研究主要研究圓形裡面摺出各種的正多邊形。我們研究正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的情形後，利用摺紙也順利摺出圖內接正多邊形，如圖B-2。


圖A-1


圖A-2

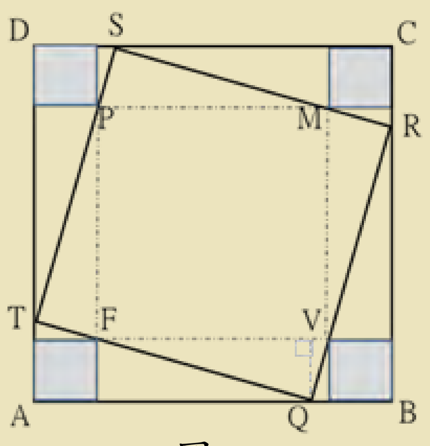

圖A-3


圖B-1


圖B-2

二、找出內接正方形與原正方形彼此之間的關係。

(一)2015年美國AMC8數學測驗的題目中，如圖二，要求在邊長為5公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為1公分的正方形，正方形內部剩下的區域內能放入最大的正方形面積，內部正方形TQRS的頂點必須與原正方形ABCD的邊相接才能產生最大的面積。計算如下：
正方形FVMP面積$=3\times3=9$
△ FQV面積$=3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$(底$\overline{FV}=3$，高為1)
所求最大正方形為TQRS
其面積為$9+4\times\frac{3}{2}=15$平方公分



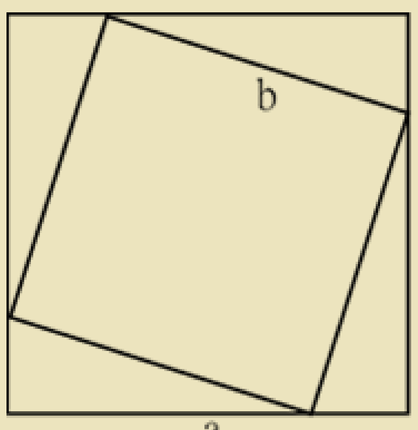
圖二

(二)原正方形、四個角落正方形與內接的正方形間的關係？
由上述的解答發現，原正方形面積為25，四個角落的正方形面積各為1，內部最大的正方形面積為15，
兩個正方形面積相差10，亦即△TAQ的面積=10÷4=2.5，我們可以推導出原正方形減去四個△TAQ的面積即為內部最大的正方形。
我們假設原正方形的邊長為a，減去的四個角落正方形的邊長為c，可以算出△TAQ的面積$=\frac{1}{2}(a-2c)\times c+c^2$，則內部最大的正方形面積為
$a^2-4\times〔\frac{1}{2}(a-2c)\times c+c^2〕$
$=a^2-2ac$。

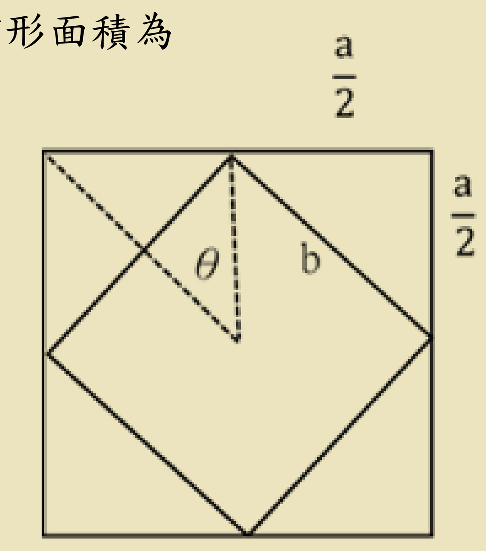
(三)邊長為a的正方形A，要使得另一個邊長為b的正方形B內接於正方形A，則$b<a$如圖三。

(四)當b的長度縮短，則B往順時針方向的旋轉角度θ愈大，當θ等於45°時，如圖四，
正方形B為最小能內接於正方形A的正方形，由畢氏定理可知$b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$。

(五)邊長為b的正方形B內接於邊長為a的正方形A，其邊長關係為 $\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqq b<a$。



圖三

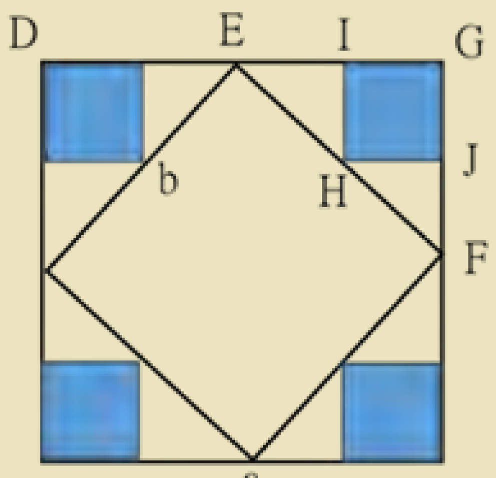


圖四

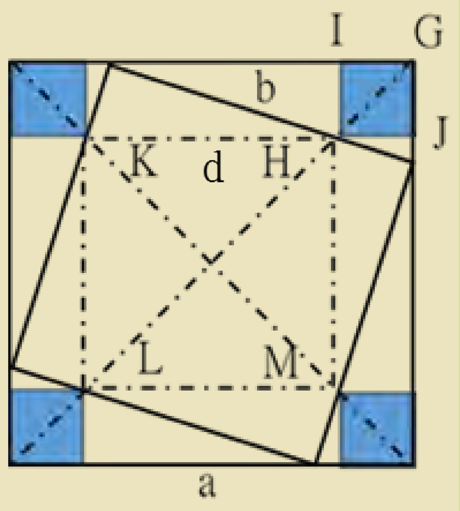
三、找出內接正方形與原正方形四個角落可切除的正方形大小的關係。

(一)當正方形B邊長$b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$時，內接的正方形B最小，原正方形的四個角落可切除的正方形最大，如圖五。取$\overline{EF}$的中點H，由點H分別做鉛直線及水平線分別交正方形A於點I及點J，因為內接正方形B順時針旋轉45°，所以∠HEI=∠HFJ=45°，△HEI及△HFJ為全等的等腰直角三角形，四邊形IHJG的四個角為直角，且$\overline{IH}=\overline{JH}$，所以IHJG為正方形，且$\overline{IG}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{1}{4}\overline{DG}$，當內接正方形B的邊長為$\frac{a\sqrt{2}}{2}$時，其中a為外圍的大正方形的邊長，大正方形其中一個角落可切除的最大正方形邊長為$\frac{1}{4}a$，面積為$\frac{1}{16}a^2$。

(二)當$\frac{a\sqrt{2}}{2}<b<a$，如圖六，畫出原正方形A的對角線，分別與內接的正方形B相交於點KLMH，由點H分別做鉛直線及水平線分別交正方形A於點I及點J，其中IHJG為原正方形A其中一個角落可切除的最大正方形，另外正方形B內部也內接了正方形KLMH，
假設正方形KLMH的邊長為d，
正方形B的面積$=b^2=d^2+\frac{1}{2}d\times\frac{(a-d)}{2}\times4$，
$b^2=d^2+ad-d^2$，
$b^2=ad$，
$d=b^2/a$
可以得出正方形IHJG邊長為$\frac{a-d}{2}=〔a-(b^2/a)〕/2=(a^2-b^2)/2a$，面積為$(a^2-b^2)^2/4a^2$



圖五

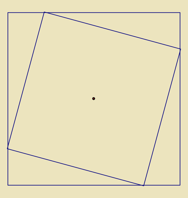
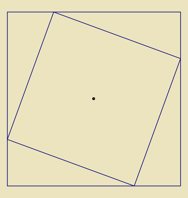
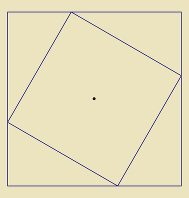
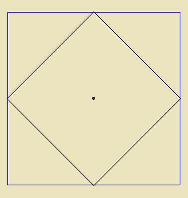


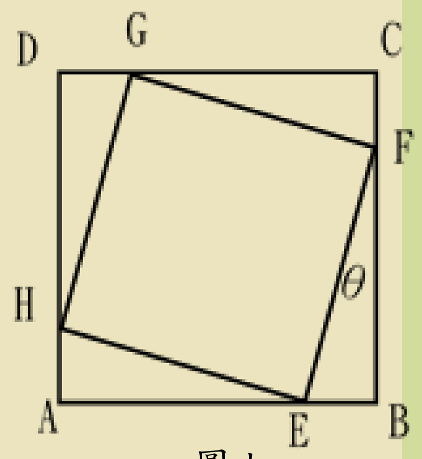
圖六

四、內接正方形旋轉角度與原正方形的邊長關係。

我們發現當內接正方形旋轉了45°時邊長最短，那麼其它旋轉角度的內接正方形與原正方形的邊長關係又是如何？

(一)原正方形ABCD內部有一旋轉θ角的內接正方形EFGH，如圖七，我們假設內接正方形EFGH的邊長為1，則$\overline{BE}=\sin\theta$，$\overline{BF}=\cos\theta$，$\overline{AE}=\overline{BF}$，所以$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=\overline{BF}+\overline{BE}=\sin\theta+\cos\theta$，故內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，我們利用動態幾何軟體畫出部分旋轉角度的內接正方形如下表：

旋轉角度	15度	20度	30度	45度
圖形				
內接正方形與原正方形邊長比值($\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$)	約0.82	約0.78	約0.73	約0.71



圖七

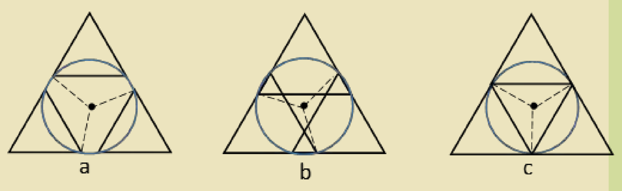
五、正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的情形。

上述的研究中，原正方形內部的內接正方形旋轉角度介於0~45度，旋轉角度愈大，內接正方形的面積愈小。如果讓正多邊形繞著外部的一點旋轉，產生頂點相接的圖形，那麼每次旋轉的角度為何？與旋轉中心距離多少？

(一)正三角形

1. 旋轉一圈後成封閉圖形

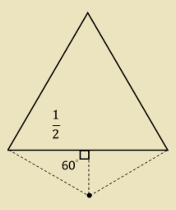
使正三角形繞著底邊中點下方一點旋轉，如圖八，若底邊距離旋轉中心過大，則頂點無法相接，如圖八-a；若底邊距離旋轉中心過小，則正三角形的邊會相連，頂點無法相接，如圖八-b；要使其旋轉後產生的新正三角形和原正三角形頂點相接，底邊和旋轉中心必須有一定的距離，如圖八-c。



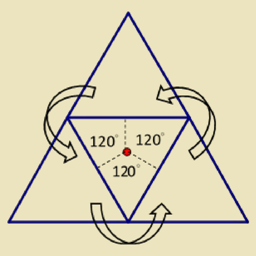
圖八

要形成封閉圖形，必須旋轉一周且最後一個正三角形與第一個正三角形頂點相接，旋轉一周為360度，且正三角形的個數為整數個，我們讓旋轉角度也為整數，$360=2^3\times3^2\times5$，正因數的個數為質因數指數加1相乘，共有$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$個，360的正因數中1無法形成封閉圖形，所以共有24-1=23種的正三角形旋轉所產生的圖形。

以三個正三角形為例，360÷3=120，每次旋轉120°，正三角形及其旋轉中心如圖九，為了方便計算，我們令正三角形的邊長為1，其底邊與旋轉中心距離為$\frac{1}{2}\cot60^\circ\fallingdotseq0.29$，旋轉後產生的圖形如圖十。



圖九



圖十

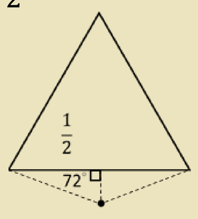
正三角形旋轉後底邊會形成一個正n邊形，其中n為正三角形的數量，每次正三角形旋轉的角度為$\frac{360^\circ}{n}$，底邊與旋轉中心的距離為$\frac{1}{2}\cot\frac{360^\circ}{2n}=\frac{1}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}$

我們整理出所有23種正三角形旋轉一圈產生的圖形如作品說明書第7~8頁。

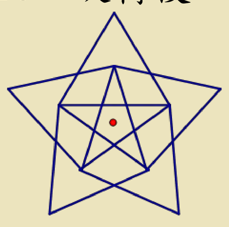
2. 旋轉兩圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉2圈，且最後能夠頂點相接，則須符合$360\times2\div n=m$，其中n為正三角形的數量，$n=2k+1$，$k\in N$（亦即n為奇數個，可使正三角形繞1圈時多$\frac{1}{2}$個，繞兩圈時剛好可以頂點相接），m為每次正三角形旋轉的角度，$720=2^4\times3^2\times5$，且$720=(2k+1)\times m$，$(2k+1)$的個數為奇質因數的指數加1相乘，共有$(2+1)\times(1+1)=6$個，為1、3、5、9、15、45，其中1個正三角形無法產生封閉圖形，3個正三角形的圖形和旋轉一圈的重覆(註：請參考討論一)，故會產生旋轉2圈的正三角形數量共有5、9、15、45等四種。

由5個正三角形組成旋轉兩圈的圖形，共旋轉了720°，720÷5=144，每次旋轉了144°，如圖十一，其底邊與旋轉中心距離為$\frac{1}{2}\cot72^\circ\fallingdotseq0.16$，旋轉後產生的圖形如圖十二。

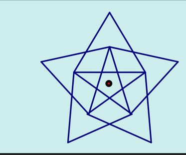
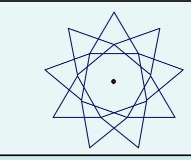
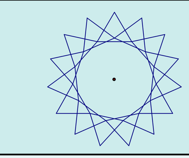
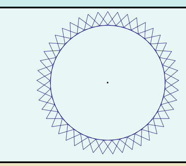


圖十一


圖十二

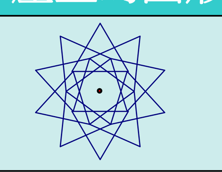
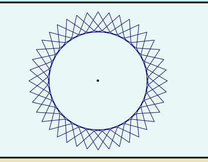
正三角形旋轉兩圈後頂點要相接，每次正三角形旋轉的角度為$\frac{720^\circ}{n}$，底邊與旋轉中心的距離為$\frac{1}{2}\cot\frac{720^\circ}{2n}=\frac{1}{2}\cot\frac{360^\circ}{n}$

我們整理出所有4種正三角形旋轉兩圈產生的圖形如右上表：

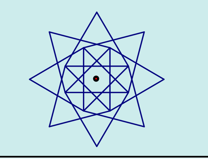
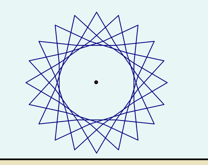
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
5	144°	$\frac{1}{2}\cot72^\circ\fallingdotseq0.16$	
9	80°	$\frac{1}{2}\cot40^\circ\fallingdotseq0.6$	
15	48°	$\frac{1}{2}\cot24^\circ\fallingdotseq1.12$	
45	16°	$\frac{1}{2}\cot8^\circ\fallingdotseq3.56$	

3. 旋轉三圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉3圈，且最後能夠頂點相接，則符合$360\times3\div n=m$，其中n為正三角形的數量且$n=3k+1$，$k\in N$或$n=3k+2$，$k\in N$（註：n不可為3的倍數，若為3的倍數，在轉第1圈時就會產生頂點相接的情形），m為每次正三角形旋轉的角度，$1080=2^3\times3^3\times5$，，當$1080=(3k+1)\times m$時，求出3k+1共有4、10、40三種，其中4個正三角形的圖形和旋轉一圈的重覆(註：請參考討論一)，故會產生旋轉3圈且頂點相接的正三角形數量有10個和40個兩種，n=3k+1旋轉三圈的圖形如下表：

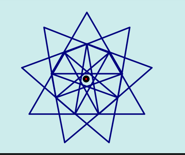
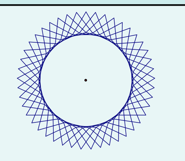
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
10	1080°÷10=108°	$\frac{1}{2}\cot54^\circ\fallingdotseq0.36$	
40	1080°÷40=27°	$\frac{1}{2}\cot13.5^\circ\fallingdotseq2.08$	

當n=3k+2時，求出3k+2共有5、8、20三種，其中5個正三角形的圖形和旋轉兩圈的重覆(註：請參考討論一)，故只有8和20個兩種，n=3k+2旋轉三圈的圖形如下表：

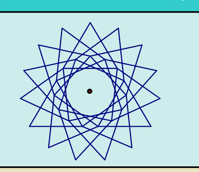
正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
8	1080°÷8=135°	$\frac{1}{2}\cot67.5^\circ\fallingdotseq0.21$	
20	1080°÷20=54°	$\frac{1}{2}\cot27^\circ\fallingdotseq0.98$	

4. 旋轉四圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉4圈，且最後能夠頂點相接，則符合$360\times4\div n=m$，其中n為正三角形的數量且$n=4k+1$，$k\in N$或$n=4k+3$，$k\in N$(註：n=4k時會在轉第1圈時就會產生頂點相接的情形，n=4k+2時會在轉第2圈時就會產生頂點相接的情形)，m為每次正三角形旋轉的角度，$1440=2^5\times3^2\times5$，且$1440=(4k+1)\times m$，求出4k+1共有5、9、45三種，其中5個正三角形的圖形和旋轉一圈的重覆(註：請參考討論一)，故會產生旋轉4圈的正三角形數量只有9個和45個兩種，n=4k+1旋轉四圈的圖形如下表：

正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
9	1440°÷9=160°	$\frac{1}{2}\cot80^\circ\fallingdotseq0.09$	
45	1440°÷45=32°	$\frac{1}{2}\cot16^\circ\fallingdotseq1.74$	

當n=4k+3時，求出4k+3只有15一種，圖形如下表：

正三角形數量	旋轉角度	底邊與旋轉中心距離	產生的圖形
15	1440°÷15=96°	$\frac{1}{2}\cot48^\circ\fallingdotseq0.45$	

5. 旋轉任意圈後成封閉圖形

若讓正三角形繞著旋轉中心旋轉r圈，r為正整數，且最後能夠頂點相接，則符合$360\times r\div n=m$，其中n為正三角形的數量，且$n=rk+w$，其中k、$w\in N$，$w<r$，且w不可為r的因數，m為每次正三角形旋轉的角度，其底邊與旋轉中心距離為$\frac{1}{2}\cot\frac{m}{2}$。

(二)正方形、正五邊形、正六邊形

我們依上述的研究整理出正方形、正五邊形、正六邊形繞旋轉中心旋轉的圖形如作品說明書第12~15頁。

六、將三宅一生132-5摺紙結合正多邊形的旋轉。

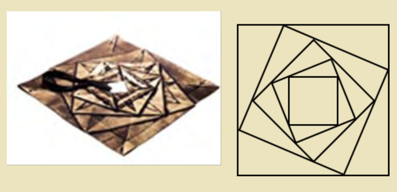
日本知名時尚設計師三宅一生於2010年推出132-5系列服飾，如圖十三，這系列創造出摺紙般被摺疊的布，當它的邊角被拉伸，便會顯現出一件3D立體效果的衣服，132-5的每個數字都有其隱含的意義，數字1表示使用一整塊布料，3代表三維立體，2則表示可摺疊成二維平面，最後的5則代表由此設計帶來的全新立體體驗(雖然網站沒提到，但我們覺得5也可能代表平面圖形由5個正方形組成)。我們發現當這件衣服摺疊成平面時，竟然和我們研究的內接正方形一樣，但卻可用摺疊的方式進行平面與立體的轉換，我們試著找出它的摺疊原理，並加以運用在我們的研究中。

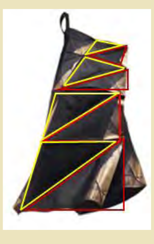
(一)解開132-5摺疊之謎

觀察圖十三-a可知，摺疊後共有5個正方形，彼此間為內接的關係，而圖十三-b則為拉開後的立體圖，可以明顯看出其摺疊痕跡，只要把這兩個圖形的相對位置找出來就可以解開摺疊之謎了。我們試著將這兩個圖形繪製出來。首先是圖十三-a，這個圖較簡單，為五個內接正方形，繪製出如圖十四，圖十三-b雖然左右兩側的圖形無法判斷，但中間由下到上可以明顯看出有四對的三角形摺痕，如圖十五，


a　圖十三　b

摘自：http://www.tokyofashiondiaries.com/132-5/

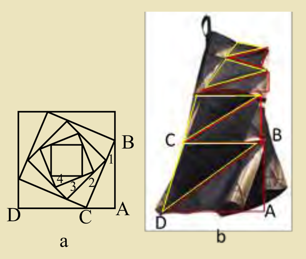

圖十四


圖十五

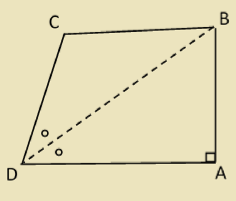
我們將圖十四和圖十五進行比較分析，並將相對位置標出，如圖十六，將圖十六-b中的△BCD沿著$\overline{BD}$對摺，讓C落在$\overline{AD}$上，就會形成圖十六-a的右下角，由圖十六中可以得知四邊形ABCD有幾項性質，1. ∠A為正方形的其中一角，所以∠A=90°。2. 因為圖十六-a中第一個內接正方形旋轉了∠1，所以$\overline{AB}=\overline{CD}$。3. △BCD沿著$\overline{BD}$對摺，C落在$\overline{AD}$上。所以∠ADB=∠CDB。4. 圖十六-a中，每個正方形皆由外側的正方形旋轉縮小而成，最內側的正方形由最外側的正方形旋轉了90°，平均分給4次的旋轉可得∠1=∠2=∠3=∠4=22.5°，$\overline{AC}:\overline{AB}=\tan22.5^\circ\fallingdotseq0.41$，則$\overline{AD}:\overline{AB}\fallingdotseq1.41$。這樣我們就能製作一個摺疊的元件，這個元件繪製方式為：

1. 畫一條1單位長的鉛直線$\overline{AB}$。
2. 從A點畫出一條1.41單位長的$\overline{AD}$，並使得$\overline{AD}$垂直$\overline{AB}$。
3. 連接$\overline{BD}$。
4. 從D點畫一條1單位長的$\overline{CD}$，並使∠CDB =∠ADB。
5. 連接$\overline{BC}$，如圖十七，我們完成了摺疊元件的繪製。

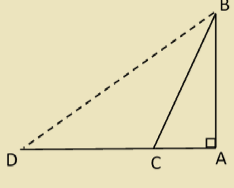
而這個元件組成了摺疊正方形的一角。



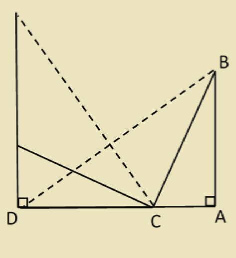
圖十六



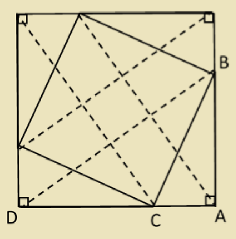
圖十七



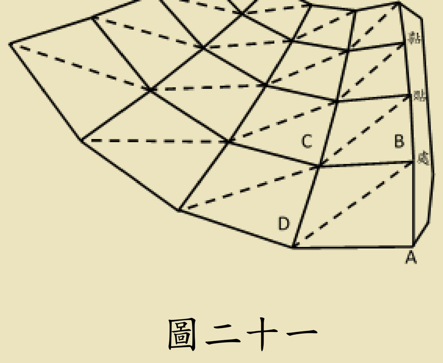
圖十八



圖十九



圖二十



圖二十一


圖二十二

將圖十七中△BCD沿著$\overline{BD}$摺下可形成圖十八，為正方形的一角，再將另一個元件的$\overline{AB}$結合原元件的$\overline{CD}$，則可完成圖十九，以此類推重覆使用四個元件則可摺疊出圖二十，形成一個正方形；由圖十六b中衣服的摺痕可發現四邊形的元件往上縮小重覆了三次，如此我們就完成了圖二十一即為圖十六的展開圖，為了讓展開圖形成完整封閉形體，我們在右邊增加了黏貼處，和左側進行黏合，利用這個展開圖，我們順利的做出摺疊的衣服如圖二十二。

(二)運用132-5摺疊方式摺出正多邊形旋轉圖形

在上述的研究中我們利用動態幾何軟體畫出正多邊形繞著外面一點旋轉產生頂點相接的圖形，我們試著運用132-5摺疊方式摺出上述的圖形。

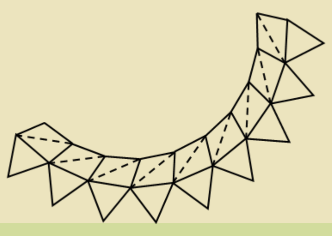
1. 正三角形旋轉一圈的圖形：

正三角形繞底邊下方一點旋轉，產生頂點相接的情形，我們將上面圖十七中，改變∠A的角度，讓∠A=(180°-每次旋轉的角度θ)(註：詳如討論二)，並以$\overline{AD}$為邊往外畫出一個正三角形，即為正三角形旋轉一圈的圖形展開圖的一個元件，為了方便區分，我們自訂了編號規則如：4-1-90，第一個數字4表示使用了4個正三角形，第二個數字1表示旋轉了1圈，第三個數字90表示每個元件右下角為90°，亦即∠A=90°。各種旋轉角度、元件、編號及摺紙的成品如下表：

原始圖形	編號（正多邊形數-圈數-∠A）	摺紙元件	旋轉角度（θ）	180°-θ（∠A）	摺紙成品
	4-1-90		90°	90°	
	5-1-108		72°	108°	
	6-1-120		60°	120°	
	8-1-135		45°	135°	
	9-1-140		40°	140°	
	10-1-144		36°	144°	
	12-1-150		30°	150°	

2. 正三角形旋轉二圈的圖形：

因為旋轉二圈以上的圖形，摺疊後已經會往上方堆疊，故不需如圖二十一往上方再重覆延伸三層，只需將元件往左方重覆延伸至所需的個數，如圖二十三，我們將旋轉二圈的各種旋轉角度、元件、編號及摺紙的成品如右上表：



圖二十三

原始圖形	編號（正多邊形數-圈數-∠A）	摺紙元件	旋轉角度（θ）	180°-θ（∠A）	摺紙成品
	5-2-36		144°	36°	
	9-2-100		80°	100°	
	15-2-132		48°	132°	
	45-2-164		16°	164°	

3. 正三角形旋轉三圈的圖形：

原始圖形	編號（正多邊形數-圈數-∠A）	摺紙元件	旋轉角度（θ）	180°-θ（∠A）	摺紙成品
	10-3-72		108°	72°	
	40-3-153		27°	153°	
	8-3-45		135°	45°	
	20-3-126		54°	126°	

4. 正三角形旋轉四圈的圖形：

原始圖形	編號（正多邊形數-圈數-∠A）	摺紙元件	旋轉角度（θ）	180°-θ（∠A）	摺紙成品
	9-4-20		160°	20°	
	45-4-148		32°	148°	
	15-4-84		96°	84°	

伍、研究結果

一、證明在邊長為a正方形的四個角落各減去一個邊長為c的正方形，則內部剩下的空間可以放置最大的正方形面積為a^2-2ac。

二、另外證明若在邊長為a正方形放入一個邊長為b的內接正方形，則原正方形內部的其中一個角落可以切去的最大正方形面積為$(a^2-b^2)^2/4a^2$。

三、原正方形內部有一旋轉θ角的內接正方形，證明內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$。

四、利用動態幾何軟體將正多邊形經過旋轉後頂點相接的圖形畫出來。

五、找出了三宅一生132-5系列服飾摺紙的展開圖，並應用在正多邊形旋轉後頂點相接的圖形。

陸、討論

一、正三角形旋轉產生頂點相接圖形，若正三角形的個數過少會產生圖形重覆的情形。

我們發現正三角形繞著底邊下方一點旋轉，若正三角形的個數較少，每次旋轉的角度超過180°時，就有可能產生圖形重覆的情形，若圖形重覆我們就不重覆列入較多旋轉圈數中。整理如下表：

旋轉圈數	正三角形個數	旋轉角度	產生圖形	重覆情形
2	3	720°÷3=240°		與旋轉一圈，每次轉120°圖形相同
3	4	1080°÷4=270°		與旋轉一圈，每次轉90°圖形相同
3	5	1080°÷5=216°		與旋轉兩圈，每次轉144°圖形相同
4	5	1440°÷5=288°		與旋轉一圈，每次轉72°圖形相同

二、正多邊形旋轉角度θ與三宅一生132-5摺紙正多邊角度∠A之間的關係。

我們讓一個正多邊形(此處以正三角形表示)繞著點O，每次逆時針旋轉θ度，產生頂點相接的圖形，∠A為正多邊形旋轉後兩個正多邊形所夾的角度，如圖二十四-a，而圖二十四-b為其摺紙展開圖，我們探討θ和∠A的關係如下：

因為正多邊形繞著點O旋轉，所以$\overline{OB}=\overline{OC}$，

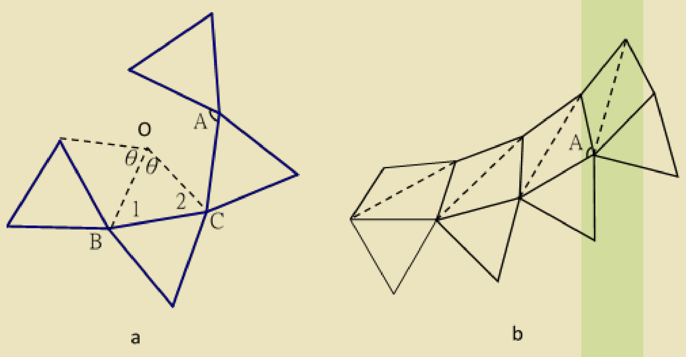
△OBC為等腰三角形，∠1=∠2，

∠A=2×∠1=2×∠2，

∠1=(180°-θ)÷2，

∠A=2×∠1=2×(180°-θ)÷2=180°-θ

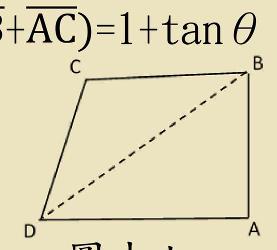
故∠A=180°-θ



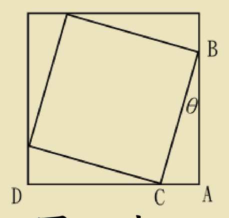
圖二十四

三、三宅一生132-5系列服飾摺紙不同的旋轉角度

在之前的研究中，三宅一生132-5系列服飾摺紙為了讓最內側的正方形與最外側的正方形平行，所以每個內接正方形旋轉了22.5°，因此也讓元件中的$\overline{AD}$：$\overline{AB}$≒1.41，如圖十七，只要改變元件中$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的比值，就可以改變內接正方形旋轉的角度，在前面研究過程中第四項，我們已經得知內接正方形旋轉角度與原正方形的邊長關係，內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，下圖二十五中，令AB=1，則$\overline{AD}$：$\overline{AB}$=$\overline{AD}$：1=($\overline{CD}$+$\overline{AC}$)：1=($\overline{AB}$+$\overline{AC}$)=1+tanθ



圖十七



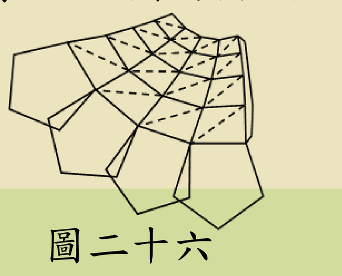
圖二十五

我們利用$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的比值為1+tanθ的結果，將內接正方形旋轉固定角度的摺紙摺出如下表：

旋轉角度	15度	20度	30度	45度
圖形				
內接正方形與原正方形邊長比值($\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$)	約0.82	約0.78	約0.73	約0.71
$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的比值	約1.27	約1.36	約1.58	2
摺紙元件				
摺紙成品				

四、用摺紙摺出其他正多邊形旋轉頂點相接的圖形

我們只要將原展開圖元件的$\overline{AD}$上增加的正三角形改成其他正多邊形即可做出其他正多邊形旋轉頂點相接圖形的展開圖，但若旋轉的角度過小且正多邊形的內角角度過大則會產生正多邊形重疊的情形，如圖二十六，這種圖形不適合用摺紙摺出，我們將部分旋轉一~四圈的摺紙做出如作品說明書第25~27頁。



圖二十六

柒、結論

一、數學起源於解決生活中的問題，數學之美在與生活息息相關，並能找出令人感動的規律，我們從一個數學測驗中的題目開始著手，最後結合日本著名服裝設計師三宅一生的設計，測驗的題目與現實生活中的服飾工藝竟產生了密不可分的連結，讓我們在研究的過程中感受到數學帶來的震撼與喜悅。

二、研究的過程雖然辛苦，但每次找到新的成果都令我們覺得很開心，我們能從一個小問題開始，進而完成整個研究，覺得好有成就感。

三、我們在研究中找出內接正方形與原正方形邊長的比值為$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，其他的正多邊形與其內接圖形應該也有類似的公式，我們在研究過程中有試著去找出來，不過其他正多邊形的邊長、面積等計算超出我們所能處理，故後來沒有繼續往這個方向研究，若將來具備更多數學能力後可以再研究正多邊形的內接問題。另外我們在參考三宅一生服裝設計網站時，除了我們研究的服裝外，還有許多的摺疊服飾，如圖二十七，可以試著找出這些服飾的展開圖，創造出更多漂亮摺紙藝術。

圖二十七

捌、參考資料

一、國民小學數學領域翰林版教課書・五年級上學期（106年版）・翰林出版事業股份有限公司。

二、陳榮輝(2011)・美國AMC8數學測驗歷屆試題暨詳解(II)・台北市：博凱出版社有限公司，187。

三、林筱倩、鮑泓逸、張子芸(2007)・翻天轉地多角星・中華民國第47屆中小學科學展覽會作品說明書。

四、林姿吟、張芸蓁、林威成(2011)・正多邊形的圓舞曲・中華民國第51屆中小學科學展覽會作品說明書。

五、MATH IS FUN(2017)・取自https://www.mathsisfun.com/geometry/rotation.html。

六、時尚變革成為現實(2017)・取自http://www.tokyofashiondiaries.com/132-5/。

七、常文武、王儷娟、呂安雲(2017)・三宅一生的服裝設計與扭棱摺疊・數學傳播，69-73。