中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080414

Australian Shuffle

學校名稱：澎湖縣馬公市石泉國民小學

作者：	指導老師：
小五 黃昱銘	洪進益
小五 楊文慈	王婉妮
小五 董珈妤	
小五 黃詠鈴	
小五 歐芯彤	
小五 陳玉書	

關鍵詞：數學魔術、約瑟夫數列、排列組合

摘要

本研究透過魔術「Australian Shuffle」的研究，找到的其中數字的規律和排列，透過數學歸納分析法，我們將所得的數據列成表格，進行整理和分析，接著試著導出其中一般式。針對不同張數 n，我們的研究結果如下：一、不同張數 n 所會剩下的最後一張牌 y，並推得一般式：$y=2\times(n-2^{k})$ （2^{k}小於 n 最大 2 乘方數）；二、在通關密語 b 的部份，b= 2^{k}+1 （2^{k}為大於等於 n 的最小 2 乘方數）；三、倒數第 m 張剩下的牌 xm，$xm=2\times\{[n-(m\times 2-1)\times 2^{k}]\}$ （**其中 $(m\times 2-1)\times 2^{k}$< n ，在這個情況下，$2^{k}$為最大 2 乘方數**）。最後，透過研究結果，我們自行設計數字排列的小魔術，延伸我們的研究結果。

壹、研究動機

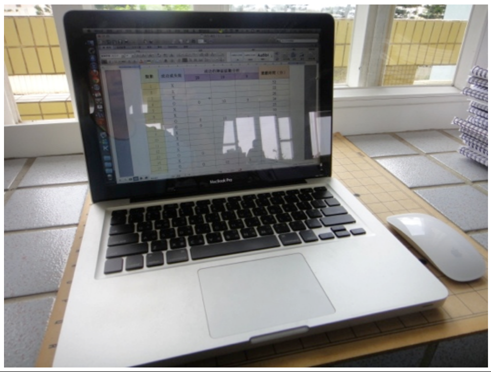
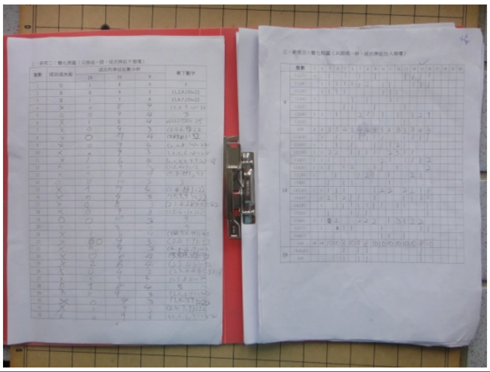
「為什麼最後會剩下來我選的那張牌呢？」本研究是因為在班級的數學推理課中，老師教我們變了一個魔術，名字叫做「Australian Shuffle」-澳大利亞洗牌術。這個魔術先經過「通關密語」的操作，再加上澳大利亞洗牌術的方式，不管試了幾次，都會剩下觀眾抽到的牌。

第一次接觸到這個魔術的時候，我們感到很神奇，百思不得其解。因此，我們決定以此為科展的題目，試著來探討其中的奧祕。

貳、研究目的

一、破解不同張數 n 和剩下最後第幾張牌 y 的關係。
二、推出目標牌 a 的移動和通關密語 b 的關聯。
三、探究不同張數 n 的通關密語為何。
四、分析不同張數 n，倒數第 m 張牌會剩下哪一張牌。
五、利用這個魔術原理，再自行設計其他相關的撲克牌魔術。

參、研究設備及器材

	
撲克牌	數據輸入電腦
	
實驗紀錄本	文書處理電腦

肆、研究過程或方法

一、　認識「Australian shuffle」撲克牌魔術的步驟：

（一）將一副撲克牌交給觀眾，請他將牌盡量的洗亂。

（二）當洗完牌之後，將牌分成四堆，盡可能讓四堆變得均勻。

（三）必要的話，可以再移動一些牌，讓四堆的數量差不多。

（四）接下來，請觀眾從中隨意挑選一堆牌，並可以再任意洗亂。

（五）請觀眾從中選擇一張牌，並把牌放到第一張。

（六）接著覆誦「Australian shuffle」這個通關密語。

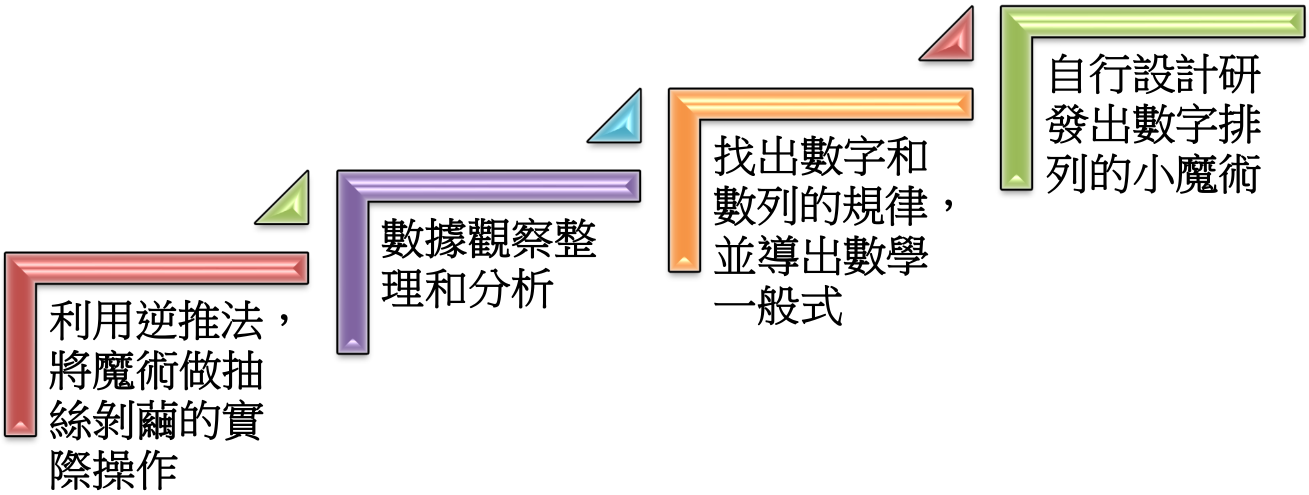
（七）每念一個字母，就將一張牌放到最底下。

（八）接著使用澳大利亞洗牌法，一張牌放桌上（南半球），一張牌放牌堆下方（下面）。

（九）重複這樣抽一留一的動作，操作到最後，手上將會剩下一張牌。

（十）而這張牌，即觀眾抽到的牌。

二、研究過程：



三、抽絲剝繭：

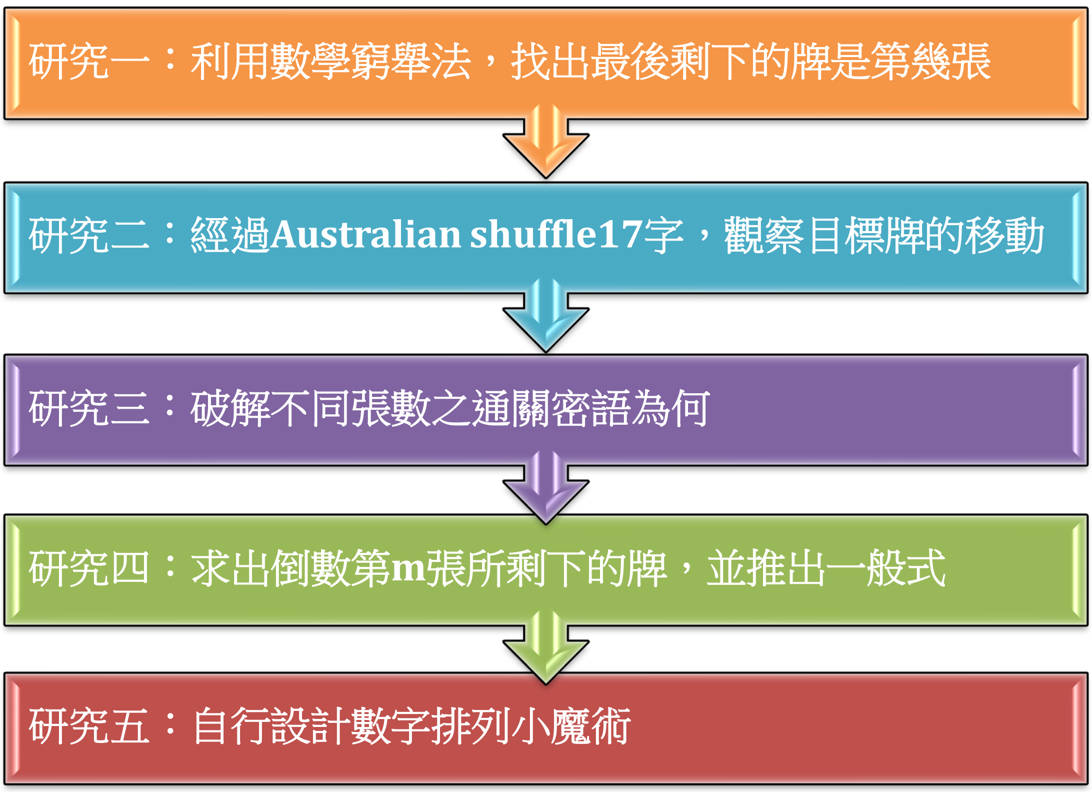
根據魔術的步驟，我們發現到全由觀眾進行操作，因此沒有魔術手法的問題，我們從中找出幾個重要的關鍵：

（一）為什麼要分成四堆牌？且四堆牌的張數要均勻？

（二）為什麼要將選到的牌放在第一張？

（三）為什麼通關密語是「Australian shuffle」？

四、研究方法：



五、撲克牌編碼：

編碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K
編碼	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♥1	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K
編碼	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♦1	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K
編碼	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣1	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K

六、名詞定義

符號	定義
n	代表牌的張數。本研究則模擬不同張數 n 的情況。
a	代表目標牌。本魔術觀眾選定目標牌後，會將所選的牌放到第一張，即首牌位置。
y	本研究的 y，代表經過「Australian shuffle」，即放一收一後，最後會留下第幾張牌。
b	B 即通關密語，也就是移動的步數，也就是將目標牌 a 向下移動幾次。本研究中的移動次數視通關密語的字數來決定，故 b 為通關密語字數，亦指移動到指定位置，所需要的次數（第一圈）。b2 為移動到指定位置，第二圈所需的次數，b3 為移動到指定位置，第三圈所需的次數，以此類推。
x	即倒數第幾張留下來的牌。本研究的 x1 代表倒數第一張留下來的牌，即最後一張留下來的牌，故 x1=y。而 x2 就是倒數第二張留下來的牌，x3 為倒數第三張留下來的牌，以此類推。xm 即倒數第 m 張留下來的牌。

伍、研究結果

一、研究一：利用數學窮舉法，找出最後剩下第幾張牌

◆ 說明：根據「Australian shuffle」這個魔術的作法-「南半球、下面」的方式，其實就是「放一張牌、收一張牌」的方式，我們決定採用**逆推操作**的方式，模擬不同張數 n（1~54 張牌），利用數學中的窮舉法，先一步步找出最後會剩下哪一張牌，再利用找出來的一般式做驗證。

牌的張數 n	經過「放一收一」剩下第幾張牌 y	n=y	基準點	利用一般式 $y=2\times(n-2^k)$ 驗證
1	1	相同	2^0	不討論
2	2	相同	2^1	y=2x（2-1）=2
3	2			y=2x（3-2）=2
4	4	相同	2^2	y=2x（4-2）=4
5	2			y=2x（5-4）=2
6	4			y=2x（6-4）=4
7	6			y=2x（7-4）=6
8	8	相同	2^3	y=2x（8-4）=8
9	2			y=2x（9-8）=2
10	4			y=2x（10-8）=4
11	6			y=2x（11-8）=6
12	8			y=2x（12-8）=8
13	10			y=2x（13-8）=10
14	12			y=2x（14-8）=12
15	14			y=2x（15-8）=14
16	16	相同	2^4	y=2x（16-8）=16
17	2			y=2x(17-16)=2
18	4			y=2x（18-16）=4
19	6			y=2x（19-16）=6
20	8			y=2x（20-16）=8
21	10			y=2x（21-16）=10
22	12			y=2x（22-16）=12
23	14			y=2x（23-16）=14
24	16			y=2x（24-16）=16

25	18			y=2x（25-16）=18
26	20			y=2x（26-16）=20
27	22			y=2x（27-16）=22
28	24			y=2x（28-16）=24
29	26			y=2x（29-16）=26
30	28			y=2x（30-16）=28
31	30			y=2x（31-16）=30
32	32	相同	2^5	y=2x（32-16）=32
33	2			y=2x（33-32）=2
34	4			y=2x（34-32）=4
35	6			y=2x（35-32）=6
36	8			y=2x（36-32）=8
37	10			y=2x（37-32）=10
38	12			y=2x（38-32）=12
39	14			y=2x（39-32）=14
40	16			y=2x（40-32）=16
41	18			y=2x（41-32）=18
42	20			y=2x（42-32）=20
43	22			y=2x（43-32）=22
44	24			y=2x（44-32）=24
45	26			y=2x（45-32）=26
46	28			y=2x（46-32）=28
47	30			y=2x（47-32）=30
48	32			y=2x（48-32）=32
49	34			y=2x（49-32）=34
50	36			y=2x（50-32）=36
51	38			y=2x（51-32）=38
52	40			y=2x（52-32）=40
53	42			y=2x（53-32）=42
54	44			y=2x（54-32）=44

◆ **觀察**

1. 首先，我們發現到「**奇數張**」的牌，會在一開始（第一圈）就被放在桌上，所以最後剩下的那張牌，一定是「**偶數張**」的牌。
2. 按照放一收一的方式，最後一張牌，我們發現**七個有趣的區塊**（詳見圖表上色區塊），每個區塊最後剩下來的最後一張牌 y，都呈現很規則的偶數數列關係，公差為 2。

3. 在數列的部份，我們發現不同的區塊，出現規則的變化（以顏色表示），都是從 2、4、6 開始，直到 n= 2^k ，y 也會等於 2^k ，新的區塊 2^k+1 又會從 2 開始，以公差 2 的間隔來增加。

例如：17~32 的區塊中（藍色區塊）：其 y 為 2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32，當 n=32=y 時，下一個數字 n=33，y=2。

4. 下方我們列出 2 的次方的結果

數字	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
值	1	2	4	8	16	32
數字	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
值	64	128	256	512	1024	2048

5. 舉例來說：n=5、n=9、n=17、n=33 時，y 皆等於 2。
   n=6、n=10、n=18、n=34 時，y 皆等於 4。
   n=7、n=11、n=19、n=35 時，y 皆等於 6。
   n==8、n=12、n=20、n=36 時，y 皆等於 8
   n==9、n=13、n=21、n=37 時，y 皆等於 10。 。

◆ 小結：

1. 觀察 n 與 y 的關係，我們試著從中去找出共通的公式（關係式）來表示這樣的結果，經過我們不斷的探究，我們發現可以用針對不同的張數 n，所留下的最後那張牌 y，我們可以用 $y=2\times(n-2^k)$ 這個公式表示，其中 2^k 小於 n 最大 2 乘方數。除了驗證 1~54 張牌的結果之外（如例 1），我們還可以做出做出預測：（如下方例 2、例 3、例 4）。

   例 1：n=51，則 y=2x（51-32），故 y=38。
   例 2：n=98，則 y=2x（98-64），故 y=68。
   例 3：n=133，則 y=2x（133-128），故 y=10。
   例 4：n=999，則 y=2x（999-512），故 y=974。

2. 透過窮舉法的操作，我們找到了 Australian shuffle，澳大利亞洗牌術的規律，接著我們打算繼續探究「通關密語」的祕密。透過操作，來找到目標牌 a 會移動到的位置，此為我們的研究二。

二、研究二：模擬經過「通關密語」後，第一張牌會移到的位置

◆ 說明：我們發現到「**通關密語**」-Australian shuffle，共有 17 個字母，當我們將選到的目標牌放到第一張，將會經過 17 次的移動（往下疊牌），移動到某個位置。因此我們決定先透過實際操作，找出不同的張數，目標牌 a 會移動到的位置，再進一步來探討。

牌的張數 n	首牌 a 經過 code 17 步的移動，移到第幾張牌	觀察	a=n-b+1		$Remainder_{code}(n) = a$
			轉換 b		
1	1	不規律的區塊	1	a=1-1+1=1	$R_{17}(1) = 1$
2	2		1	a=2-1+1=2	$R_{17}(2) = 2$
3	2		2	a=3-2+1=2	$R_{17}(3) = 2$
4	4		1	a=4-1+1=4	$R_{17}(4) = 4$
5	4		2	a=5-2+1=4	$R_{17}(5) = 4$
6	2		**5**	a=6-5+1=2	$R_{17}(6) = 2$
7	5		3	a=7-3+1=5	$R_{17}(7) = 5$
8	8		**1**	a=8-1+1=8	$R_{17}(8) = 8$
9	2	公差 2 的等差數列	8	a=9-8+1=2	$R_{17}(9) = 2$
10	4		7	a=10-7+1=4	$R_{17}(10)$ =4
11	6		6	a=11-6+1=6	$R_{17}(11)$ =6
12	8		5	a=12-5+1=8	$R_{17}(12)$ =8
13	10		4	a=13-4+1=10	$R_{17}(13)$ =10
14	12		3	a=14-3+1=12	$R_{17}(14)$ =12
15	14		2	a=15-2+1=14	$R_{17}(15)$ =14
16	16		1	a=16-1+1=16	$R_{17}(16)$ =16
17	1	數字不斷遞增 1 的區塊	a=17-17+1=1		$R_{17}(17)$ =1
18	2		a=18-17+1=2		$R_{17}(18)$ =2
19	3		a=19-17+1=3		$R_{17}(19)$ =3
20	4		a=20-17+1=4		$R_{17}(20)$ =4
21	5		a=21-17+1=5		$R_{17}(21)$ =5
22	6		a=22-17+1=6		$R_{17}(22)$ =6
23	7		a=23-17+1=7		$R_{17}(23)$ =7
24	8		a=24-17+1=8		$R_{17}(24)$ =8
25	9		a=25-17+1=9		$R_{17}(25)$ =9
26	10		a=26-17+1=10		$R_{17}(26)$ =10
27	11		a=27-17+1=11		$R_{17}(27)$ =11

28	12	數字不斷遞增1的區塊	a=28-17+1=	$R_{17}(28) = 12$
29	13		a=29-17+1=13	$R_{17}(29) = 13$
30	14		a=30-17+1=14	$R_{17}(30) = 14$
31	15		a=31-17+1=15	$R_{17}(31) = 15$
32	16		a=32-17+1=16	$R_{17}(32) = 16$
33	17		a=33-17+1=17	$R_{17}(33) = 17$
34	18		a=34-17+1=18	$R_{17}(34) = 18$
35	19		a=35-17+1=19	$R_{17}(35) = 19$
36	20		a=36-17+1=20	$R_{17}(36) = 20$
37	21		a=37-17+1=21	$R_{17}(37) = 21$
38	22		a=38-17+1=22	$R_{17}(38) = 22$
39	23		a=39-17+1=23	$R_{17}(39) = 23$
40	24		a=40-17+1=24	$R_{17}(40) = 24$
41	25		a=41-17+1=25	$R_{17}(41) = 25$
42	26		a=42-17+1=26	$R_{17}(42) = 26$
43	27		a=43-17+1=27	$R_{17}(43) = 27$
44	28		a=44-17+1=28	$R_{17}(44) = 28$
45	29		a=45-17+1=29	$R_{17}(45) = 29$
46	30		a=46-17+1=30	$R_{17}(46) = 30$
47	31		a=47-17+1=31	$R_{17}(47) = 31$
48	32		a=48-17+1=32	$R_{17}(48) = 32$
49	33		a=49-17+1=33	$R_{17}(49) = 33$
50	34		a=50-17+1=34	$R_{17}(50) = 34$
51	35		a=51-17+1=35	$R_{17}(51) = 35$
52	36		a=52-17+1=36	$R_{17}(52) = 36$
53	37		a=-53-17+1=37	$R_{17}(53) = 37$
54	38		a=54-17+1=38	$R_{17}(54) = 38$

1. 小結

1.通關密語是移動 17 步，因此我們發現當牌的張數 n，超過 17 張以後，因為通關密語（b）只有 17 個字，所以目標牌 a，從 17 張牌會移動到第 1 張，數字不斷遞增。模擬幾次後，我們發現後面的結果是可以計算出來的，我們發現了 a= n-b+1 的公式。

例 1：40 張牌時，經過通關密語的操作後，將會移動到 40-17+1＝24 的位置。

例 2：52 張牌時，經過通關密語的操作後，將會移動到 52-17+1＝36 的位置。

例 3：99 張牌時，經過通關密語的操作後，將會移動到 99-17+1＝83 的位置。

2.但當 n<17 時，a= n-b+1 的公式似乎無法使用，其實我們可以透過 Remainder 餘數關係，先將 b=17，進行轉換，一樣可以適用這個公式，找出目標牌的移動。

◆ 比較：我們將研究二，目標牌所移動到的位置 a，拿來跟研究一的 y 做比較，如下表：

n	$Remainder_{code}(n) = a$	$y = 2\times(n-2^k)$	Compare
1	1	1	
2	2	2	相同
3	2	2	相同
4	4	4	相同
5	4	2	
6	2	4	
7	5	6	
8	8	8	相同
9	2	2	相同
10	4	4	相同
11	6	6	相同
12	8	8	相同
13	10	10	相同
14	12	12	相同
15	14	14	相同
16	16	16	相同
17	1	2	
18	2	4	
19	3	6	
20	4	8	
21	5	10	
22	6	12	
23	7	14	
24	8	16	
25	9	18	

26	10	20
27	11	22
28	12	24
29	13	26
30	14	28
31	15	30
32	16	32
33	17	2
34	18	4
35	19	6
36	20	8
37	21	10
38	22	12
39	23	14
40	24	16
41	25	18
42	26	20
43	27	22
44	28	24
45	29	26
46	30	28
47	31	30
48	32	32
49	33	34
50	34	36
51	35	38
52	36	40
53	37	42
54	38	44

◆ 觀察

2. 當 a=y 時，表示通關密語的操作，可以先原本放在第一張的 a，移動到我們想要的 y 位置，因此當 a=y，表示這些張數的 n，是可以用來變這個魔術的（適用 17 字的通關密語）。
3. 從數據的比較中（a 和 y），我們可以發現三個有趣的區塊。首先，張數 n 在 1~8 張時，我們無法找出規則的變化。
4. 接著在 9~16 張牌的這個區塊，則出現 2、4、6、8、10、12、14、16 的等差數列，公差為 2。

◆ 小結

1. 根據我們的資料可以發現到，不同張數 n，所做出來的結果，總共分為三個區塊，其中，9~16 張牌是有規律的，與研究一所求出來的結果一樣。因此我們猜測，這個跟魔術一開始「限制四堆牌的張數」不能差太多有關。
2. 一副撲克牌總共有 52 張牌，平分成四堆的時候，一堆約有 13 張牌，故如果大約平分成四堆牌，每堆牌的張數也會落在 9~16 張之間。
3. 第二個發現，是從研究一中，我們破解了 1~54 張牌中，經過 Australian shuffle 的操作，最後會剩下哪一張牌。而在研究二中，我們發現經過「通關密語」的操作，只有 9~16 張牌是符合這樣的結果。
4. 因此，我們大膽假設 n=1~8 張牌，以及超過 17 張牌的時候，依舊可以用來變這個魔術，但是會有不同的通關密語（不同的步數）。以這個假設為基礎，在我們的研究三，希望能夠破解不同張數 n 的「通關密語」。

三、研究三：破解不同張數 n 之通關密語

◆ 說明：從研究二中，我們發現這個魔術，只有當牌數是 9~16 張牌時，才會成功。而「通關密語」總共 17 個字母，因此研究三，我們將試著去解出不同張數 n 的「通關密語」的字母數（即移動數），以下為我們實驗的記錄。

牌的張數 n	經過「放一收一」剩下第幾張牌 y	目標牌 a 移動到指定的位置需移動幾個字母(b1)（通關密語）
1	1	不討論
2	2	1
3	2	2
4	4	1
5	2	4
6	4	3
7	6	2
8	8	1
9	2	8
10	4	7
11	6	6
12	8	5
13	10	4
14	12	3
15	14	2
16	16	1
17	2	16
18	4	15
19	6	14
20	8	13
21	10	12
22	12	11
23	14	10
24	16	9
25	18	8
26	20	7
27	22	6
28	24	5

29	26	4
30	28	3
31	30	2
32	32	1
33	2	32
34	4	31
35	6	30
36	8	29
37	10	28
38	12	27
39	14	26
40	16	25
41	18	24
42	20	23
43	22	22
44	24	21
45	26	20
46	28	19
47	30	18
48	32	17
49	34	16
50	36	15
51	38	14
52	40	13
53	42	12
54	44	11

◆ 延伸：觀察不同區塊的數據，發現不同張數 n，並無法找到共通的「通關密語」b，呈現出來的數字，呈現<u>**降冪**</u>的情況。因此，我們決定再繼續延伸，找出下一圈的「通關密語」b2、b3、b4…看看始否能找出共通處：

牌的張數 n	y	b1	b2、b3、b4、b5、b6	數列公差	共同移動數(b)
1	1		不討論		
2	2	1	3、5、7、9、11…	2	3
3	2	2	5、8、11、14、17…	3	5
4	4	1	5、9、13、17、21…	4	5
5	2	4	9、14、19、24、29…	5	9
6	4	3	9、15、21、27、33…	6	9
7	6	2	9、16、23、30、37…	7	9
8	8	1	9、17、25、33、41…	8	9
9	2	8	17、26、35、44、53…	9	17
10	4	7	17、27、37、47、57…	10	17
11	6	6	17、28、39、50、61…	11	17
12	8	5	17、29、41、53、65…	12	17
13	10	4	17、30、43、56、69…	13	17
14	12	3	17、31、45、59、73…	14	17
15	14	2	17、32、47、62、77…	15	17
16	16	1	17、33、49、65、81…	16	17
17	2	16	33、50、67、84、101…	17	33
18	4	15	33、51、69、87、105…	18	33
19	6	14	33、52、71、90、109…	19	33
20	8	13	33、53、73、93、113…	20	33
21	10	12	33、54、75、96、117…	21	33
22	12	11	33、55、77、99、121…	22	33
23	14	10	33、56、79、102、125…	23	33
24	16	9	33、57、81、105、129…	24	33
25	18	8	33、58、83、108、133…	25	33
26	20	7	33、59、85、111、137…	26	33
27	22	6	33、60、87、114、141…	27	33
28	24	5	33、61、89、117、145…	28	33
29	26	4	33、62、91、120、149…	29	33

30	28	3	33、63、93、123、153⋯	30	33
31	30	2	33、64、95、126、157⋯	31	33
32	32	1	33、65、97、129、161⋯	32	33
33	2	32	65、88、121、154、187⋯	33	65
34	4	31	65、89、123、157、191⋯	34	65
35	6	30	65、90、125、160、195⋯	35	65
36	8	29	65、91、127、163、199⋯	36	65
37	10	28	65、92、129、166、203⋯	37	65
38	12	27	65、93、131、169、207⋯	38	65
39	14	26	65、94、133、172、211⋯	39	65
40	16	25	65、95、135、175、215⋯	40	65
41	18	24	65、96、137、178、219⋯	41	65
42	20	23	65、97、139、181、223⋯	42	65
43	22	22	65、98、141、184、227⋯	43	65
44	24	21	65、99、143、187、231⋯	44	65
45	26	20	65、100、145、190、235⋯	45	65
46	28	19	65、101、147、193、239⋯	46	65
47	30	18	65、102、149、196、243⋯	47	65
48	32	17	65、103、151、199、247⋯	48	65
49	34	16	65、104、153、202、251⋯	49	65
50	36	15	65、105、155、205、255⋯	50	65
51	38	14	65、106、157、208、259⋯	51	65
52	40	13	65、107、159、211、263⋯	52	65
53	42	12	65、108、161、214、267⋯	53	65
54	44	11	65、109、163、217、271⋯	54	65

◆ **說明**：模擬不同張數 n，挑出共同移動數 b，我們再將上列的數據結果，整理成下表。

n	2	3~4	5~8	9~16	17~32	33~64	65~128	n
b	3	5	9	17	33	65	129	2^k+1
b 轉換	2^1+1	2^2+1	2^3+1	2^4+1	2^5+1	2^6+1	2^7+1	2^k+1

備註：綠色為本魔術一開始設計的區域（控制的牌的張數），通關密語為 17 個字母。

◆ 觀察

1. 透過研究一 y（不同張數 n 會剩下第幾張牌），我們實際操作模擬通關密語 b，後來又發現可以利用研究二推出的公式 y 來計算，因 y=n-b+1，則 b=n-y+1，因此我們找出 1~54 張牌要移動到研究一位置的移動數（b1），但是還是無法找到相通點。因此我們再繼續列出第二圈（b2）、第三圈（b3）…第六圈（b6）的移動數，終於在第二圈的步數（b2）找到相通的地方，即不同區間，都會有相同的移動步數。
2. 根據最後找出的共同移動數，我們發現在第二圈時（b2），可以找到相同的步數，即通關密語。
3. 另外我們還發現一個有趣的現象，即通關密語的移動數為 2^k+1（2^k 為大於等於 n 的最小 2 乘方數）。
4. 因此我們可以預測不同張數 n 的通關密語字數為多少。

   例 1：張數 n 為 12　，則通關密語為 16+1＝17。

   例 2：張數 n 為 32，則通關密語為 32+1＝33。

   利 3：張數 n 為 100，則通關密語為 128+1＝129。

◆ 魔術堆數的變形：**既然我們已經知道不同張數 n 和通關密語 b 之間的關係，我們回到魔術本身的四堆牌。如果我們改變魔術一開始的堆數，找出在 52 張撲克牌中，堆數和張數的關係：**

堆數	平均張數	實際模擬結果	區間	通關密語 b	是否適合變魔術
1	52	52	± 0	65	V
2	26	20~31	$-6 \sim +5$	33	V
3	17	12~21	$-5 \sim +4$	17 or 33	
4	13	9~16	$-4 \sim +3$	17	V
5	10	7~13	$-3 \sim +2$	9 or 17	
6	9	7~10	$-2 \sim +1$	9 or 17	
7	7	5~8	$-2 \sim +1$	9	V

◆ 小結

1. 透過上方的圖表，我們發現不同張數 n，都有相對應的「通關密語」（移動步數），Australian shuffle 這個魔術一開始先請觀眾將牌分成四堆，基本上就已經把牌限制在 9~16 張牌，故再加上「Australian shuffle」17 字的移動，目標牌均可以順利移動到指定的位置。至於張數 n 越大，雖然也可以用來變這個魔術，但是因為移動步數太多，會浪費太多時間，也會造成觀眾算錯，故較不適宜用來變這個魔術。儘管如此，針對不同張數 n，我們依舊破解其「通關密語」，即 2^k+1（2^k 為大於等於 n 的數字）。
2. 破解了最後的那張牌 y 和通關密語 b 後。除了可以預測最後一張牌外，我們還想到另一個問題，那就是是否我們也可以找出一般式去預測倒數第二張、倒數第三張…倒數第 m 張的牌呢？為了更深入去了解這個問題，我們以此做為研究四。
3. 分兩堆、四堆和七堆，都有固定的通關密語 b，所以較示範拿來變這個魔術。

四、研究四：破解倒數第幾張會剩下來的牌 xm

◆ **說明**：我們發現不管多少張數 n 的牌，第一輪會先把所有「奇數」的牌先放在桌上，所以經過第一輪後，手上的牌都是「偶數」的牌，由於第一輪奇數牌用以很規律的方式放在桌面（1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、…），故本研究僅針對第二輪後偶數不規律的部份來進行分析。我們模擬 54 張牌，列出第二輪後，牌所剩下的順序，如下表。

n	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27
1	1																										
2	2																										
3	2																										
4	4	2																									
5	2	4																									
6	4	6	2																								
7	6	2	4																								
8	8	4	6	2																							
9	2	6	8	4																							
10	4	8	10	6	2																						
11	6	10	2	8	4																						
12	8	12	4	10	6	2																					
13	10	2	6	12	8	4																					
14	12	4	8	14	10	6	2																				
15	14	6	10	2	12	8	4																				
16	16	8	12	4	14	10	6	2																			
17	2	10	14	6	16	12	8	4																			
18	4	12	16	8	18	14	10	6	2																		
19	6	14	18	10	2	16	12	8	4																		
20	8	16	20	12	4	18	14	10	6	2																	
21	10	18	2	14	6	20	16	12	8	4																	
22	12	20	4	16	8	22	18	14	10	6	2																
23	14	22	6	18	10	2	20	16	12	8	4																
24	16	24	8	20	12	4	22	18	14	10	6	2															
25	18	2	10	22	14	6	24	20	16	12	8	4															
26	20	4	12	24	16	8	26	22	18	14	10	6	2														
27	22	6	14	26	18	10	2	24	20	16	12	8	4														
28	24	8	16	28	20	12	4	26	22	18	14	10	6	2													

29	26	10	18	2	22	14	6	28	24	20	16	12	8	4													
30	28	12	20	4	24	16	8	30	26	22	18	14	10	6	2												
31	30	14	22	6	26	18	10	2	28	24	20	16	12	8	4												
32	32	16	24	8	28	20	12	4	30	26	22	18	14	10	6	2											
33	2	18	26	10	30	22	14	6	32	28	24	20	16	12	8	4											
34	4	20	28	12	32	24	16	8	34	30	26	22	18	14	10	6	2										
35	6	22	30	14	34	26	18	10	2	32	28	24	20	16	12	8	4										
36	8	24	32	16	36	28	20	12	4	34	30	26	22	18	14	10	6	2									
37	10	26	34	18	2	30	22	14	6	36	32	28	24	20	16	12	8	4									
38	12	28	36	20	4	32	24	16	8	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2								
39	14	30	38	22	6	34	26	18	10	2	36	32	28	24	20	16	12	8	4								
40	16	32	40	24	8	36	28	20	12	4	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2							
41	18	34	2	26	10	38	30	22	14	6	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4							
42	20	36	4	28	12	40	32	24	16	8	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2						
43	22	38	6	30	14	42	34	26	18	10	2	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4						
44	24	40	8	32	16	44	36	28	20	12	4	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2					
45	26	42	10	34	18	2	38	30	22	14	6	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4					
46	28	44	12	36	20	4	40	32	24	16	8	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2				
47	30	46	14	38	22	6	42	34	26	18	10	2	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4				
48	32	48	16	40	24	8	44	36	28	20	12	4	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2			
49	34	2	18	42	26	10	46	38	30	22	14	6	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4			
50	36	4	20	44	28	12	48	40	32	24	16	8	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2		
51	38	6	22	46	30	14	50	42	34	26	18	10	2	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4		
52	40	8	24	48	32	16	52	44	36	28	20	12	4	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2	
53	42	10	26	50	34	18	2	46	38	30	22	14	6	52	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	
54	44	12	28	52	36	20	4	48	40	32	24	16	8	54	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2

◆ **說明**：整理上表，根據不同的分區，再找出 x 的基準點

區塊	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27
一	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
二	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106
三	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100														
四	8	24	40	56	72	88	104																				
五	16	48	80																								
六	32	96																									
七	64																										
基準點	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53

註：畫底線部份為模擬 54 張牌無法呈現的部份。

◆ **觀察**：根據上方圖表，我們做出以下觀察：

1. 分析 Australian Shuffle 這種洗牌法，每一輪均包括兩種情況。（1）當 n=偶數，則此輪會丟掉 $\frac{n}{2}$ 張牌，留下 $\frac{n}{2}$ 張牌，例 n=56，則此輪就會先丟掉 28 張（奇數），留下 28 張（偶數）。（2）當 n=奇數，則此輪會丟掉 $\frac{n+1}{2}$ 張牌，留下 $\frac{n-1}{2}$ 張牌，例 n=67，則此輪就會先丟掉 34 張（奇數），留下 33 張（偶數）。
2. 觀察橫向的部份，呈現出不同的**等差數列**，區塊一為公差 2 的等差數列，區塊二為 4 的等差數列，區塊三為公差 8 的等差數列，區塊四為公差 16 的等差數列，區塊五為公差 32 的等差數列，區塊六為公差 64 的等差數列。

	區塊一	區塊二	區塊三	區塊四	區塊五	區塊六	區塊七	～～～	區塊 z
公差	2	4	8	16	32	64	128	～～～	?
發現	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	～～～	2^k

3. 觀察上表縱向的部份，我們發現不同的 x，都會以找出來的**基準點**，會呈倍數增加。
   例：x3：5、10、20、40（均以 2 倍增加）
   例：x12：23、46、92（均以 2 倍增加）

◆ 小結：

1. 根據觀察 1 的結果，我們可以預測往後的區塊，會呈現何種等差數列。如下表：
2. xm 的基準點為 m×2-1 。

   例 1：x5 的基準點就是 5×2-1=9

   例 2：x26 的基準點就是 26x2-1=51
3. 從研究一破解 y=x1（最後剩下的牌 y）的公式：$y=2\times(n-2^k)$，其中（2^k小於 n 最大 2 乘方數）。我們試著也找出 x2～x27 的公式。
4. 經過不斷的觀察和分析，我們發現可以將原本的公式加入我們找到的基準點，進行修正，成為破解 x 的一般式。整理如下表：

區塊	基準點	推出一般式	舉例 n=54
x1	1	$y=x1=2\times[n-(1\times 2^k)]$	x1=2x(54-32)=44
x2	3	$x2=2\times[n-(3\times 2^k)]$	x2=2x[54-(3x16)] =12
x3	5	$x3=2\times[n-(5\times 2^k)]$	x3=2x[54-(5x8)] =28
x4	7	$x4=2\times[n-(7\times 2^k)]$	x4=2x[54-(7x4)] =52
x5	9	$x5=2\times[n-(9\times 2^k)]$	x5=2x[54-(9x4)] =36
x6	11	$x6=2\times[n-(11\times 2^k)]$	x6=2x[54-(11x4)] =20
x7	13	$x7=2\times[n-(13\times 2^k)]$	x7=2x[54-(13x4)] =4
x8	15	$x8=2\times[n-(15\times 2^k)]$	x8=2x[54-(15x2)] =48
x9	17	$x9=2\times[n-(17\times 2^k)]$	x9=2x[54-(17x2)] =40
x10	19	$x10=2\times[n-(19\times 2^k)]$	x10=2x[54-(19x2)] =32
x11	21	$x11=2\times[n-(21\times 2^k)]$	x11=2x[54-(21x2)] =24
x12	23	$x12=2\times[n-(23\times 2^k)]$	x12=2x[54-(23x2)] =16
x13	25	$x13=2\times[n-(25\times 2^k)]$	x13=2x[54-(25x2)] =8

x14	27	$x14=2\times[n-(27\times 2^{k})]$	x14=2x[54-(27×1)] =54
x15	29	$x15=2\times[n-(29\times 2^{k})]$	x15=2x[54-(29×1)] =50
x16	31	$x16=2\times[n-(31\times 2^{k})]$	x16=2x[54-(31×1)] =46
x17	33	$x17=2\times[n-(33\times 2^{k})]$	x17=2x[54-(33×1)] =42
x18	35	$x18=2\times[n-(35\times 2^{k})]$	x18=2x[54-(35×1)] =38
x19	37	$x19=2\times[n-(37\times 2^{k})]$	x19=2x[54-(37×1)] =34
x20	39	$x20=2\times[n-(39\times 2^{k})]$	x20=2x[54-(39×1)] =30
x21	41	$x21=2\times[n-(41\times 2^{k})]$	x21=2x[54-(41×1)] =26
x22	43	$x22=\{2\times[n-(43\times 2^{k})]$	x22=2x[54-(43×1)] =22
x23	45	$x23=2\times[n-(45\times 2^{k})]$	x23=2x[54-(45×1)] =18
x24	47	$x24=\{2\times[n-(47\times 2^{k})]$	x24=2x[54-(47×1)] =14
x25	49	$x25=2\times[n-(49\times 2^{k})]$	x25=2x[54-(49×1)] =10
x26	51	$x26=2\times[n-(51\times 2^{k})]$	x26=2x[54-(51×1)] =6
x27	53	$x27=2\times[n-(53\times 2^{k})]$	x27=2x[54-(53×1)] =2
↓	↓		
xm	$\boxed{\mathrm{xm}=2\times\{[n-(m\times 2-1)\times 2^{k}]\}}$		

備註：其中 $(m\times 2-1)\times 2^{k}<\mathrm{n}$ ，在這個情況下，2^{k} 為最大 2 乘方數。

5. 利用破解的 $\mathrm{xm}=2\times\{[n-(m\times 2-1)\times 2^{k}]\}$ 公式，適用於不同的張數 n，因此倒數第 x 張所剩下來的牌 xm，我們都可以進行計算和預測。

五、研究五：自行設計排列組合小魔術

◆ **說明**：按照我們所破解的結果，我們可以以事先把牌的順序排好，接下來一樣照著「Australisan Shuffle」（放一收一）的方式開牌，就會發現撲克牌很聽話的排出一條龍，四個花色共排出四條龍。作法如下：首先確定撲克牌的張數，以這個魔術所需要牌數共 52 張（不含鬼牌），因此我們利用 n=52 所破解的結果，再加上第一輪的順序，如下表：

n	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26
52	40	8	24	48	32	16	52	44	36	28	20	12	4	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2

n	x27	x28	x29	x30	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x40	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x50	x51	x52
52	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

【一條龍】魔術出現效果

出現	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K
出現	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♥1	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K
出現	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♦1	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K
出現	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣1	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K

【一條龍】魔術排列破解

排列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♦1	♠2	♣1	♠3	♦2	♠4	♣Q	♠5	♦3	♠6	♣2	♠7
排列	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♦4	♠8	♣8	♠9	♦5	♠10	♣3	♠J	♦6	♠Q	♣J	♠K	♦7
排列	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♥1	♣4	♥2	♦8	♥3	♣9	♥4	♦9	♥5	♣5	♥6	♦10	♥7
排列	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣K	♥8	♦J	♥9	♣6	♥10	♦Q	♥J	♣10	♥Q	♦K	♥K	♣7

◆ 小結：透過本研究的研究結果，我們還可以發揮創意來設計相關的數字排列小魔術，只要先掌握好魔術所要出現的順序，我們就可以利用所研究出來的公式來進行破解，而達到很棒的魔術效果，讓觀眾目瞪口呆。

陸、討論

一、研究一

（一）根據研究的結果，我們可以將數據區分成七個區塊，每個區塊均從 2、4、6 開始，出現規則的變化，當 $\boxed{n=2^k}$，y 也會等於 2^k，新的區塊 $\boxed{2^k+1}$ 又會從 2 開始，以公差 2 的間隔來增加。

（二）另外針對「不同張數 n」與「剩下第幾張牌 y」的關係，我們找到一般式，可以用 $\boxed{y=2\times(n-2^k)}$ 這個式子來表示（2^k 小於 n 最大 2 乘方數）。

二、研究二

（一）研究二是針對目標牌 a，經過「通關密語」17 次的移動後，會移動到哪個位置。本研究產生三個不同區塊，其中當 n=9~16 張牌的時候，會出現 a = y 的情況，因此我們相信，這個與此魔術一開始要大約「平分成四等分」有關。一副撲克牌總共有 52 張牌，平分成四堆的時候，一堆約有 13 張牌，故如果大約平分成四堆牌，每堆牌的張數也會落在 9~16 張之間。

（二）在第三個區塊中，我們發現移動後的目標牌 a，可以用下面的關係式表示：
$\boxed{a=n-b+1}$，（當 n >b 時）

三、研究三

（一）利用 b=n-y+1，我們計算出不同張數 n 需要移動的步數 b，但卻還是找不出共通的地方，後來我們延續研究，繼續往後推算第二圈（b2）、第三圈（b3）…，終於在第二圈（b2）的地方，找到不同張數 n 的共同通關密語 b。

（二）按照我們所推算出來的結果，我們發現通關密語的祕密，即 $\boxed{2^k+1}$（2^k 為大於等於 n 的最小 2 乘方數）。

n	2	3~4	5~8	9~16	17~32	33~64	65~128	n
b	3	5	9	17	33	65	129	2^k+1

四、研究四

（一）分析 Australian Shuffle 這種洗牌法，每一輪均包括兩種情況。(1) 當 n=偶數，則此輪會丟掉 $\frac{n}{2}$ 張牌，留下 $\frac{n}{2}$ 張牌。(2) 當 n=奇數，則此輪會丟掉 $\frac{n+1}{2}$ 張牌，留下 $\frac{n-1}{2}$ 張牌。

舉例：n=37，37→18→9→4→2→1。
舉例：n=52，52→26→13→6→3→1。
舉例：n=100，100→50→25→12→6→3→1。
舉例：n=250，250→125→62→31→15→7→3→1。

（二）觀察和分析研究四的數據，我們自創「基準點」的計算法，基準點的公式：xm = m×2-1。透過探究 x1~x54，我們找到不同張數 n 的 xm（即最後倒數第 m 張會剩下的牌）的一般式：$\boxed{\mathrm{xm} = 2\times\{[n-(m\times2-1)\times2^k]\}}$，**（其中 $(m\times2-1)\times2^k<$ n ，在這情況，2^k 為最大 2 乘方數）**。

五、研究五

（一）在了解這個魔術背後的數學原理後，我們發現數字的排列及移動，真的充滿很多的趣味，因此我們根據所破解的結果，結合「Australian Shuffle」的方式，自行設計出「一條龍」的小魔術。以下為研究結果，只要事先照著以下的順序排列，就可以成功變出這個我們設計的小魔術。

排列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♦1	♠2	♣1	♠3	♦2	♠4	♣Q	♠5	♦3	♠6	♣2	♠7
排列	14	15	16	**17**	**18**	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♦4	♠8	♣8	♠9	♦5	♠10	♣3	♠J	♦6	♠Q	♣J	♠K	♦7
排列	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♥1	♣4	♥2	♦8	♥3	♣9	♥4	♦9	♥5	♣5	♥6	♦10	♥7
排列	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣K	♥8	♦J	♥9	♣6	♥10	♦Q	♥J	♣10	♥Q	♦K	♥K	♣7

柒、結論

本研究針對「Australian Shuffle」這個魔術來進行全面性的深入研究，回想起第一次看到這個魔術，我們所產生的疑問，最後的結論，我們希望再回到魔術本身來做總結：

一、為什麼要分成四堆牌

（一）因為「Australian Shuffle」這個魔術要把牌控制在可以變魔術的 9~16 張範圍後，一旦四堆牌看起來差距太多張時，身為魔術師的我們，就必須以指導語，要求觀眾盡量分得平均一點。

（二）掌握這個絕竅，觀眾已經成功的掉入魔術師的魔法圈中。此外，這個魔術更神奇的地方，就是不管觀眾選哪一堆牌來變，因為四堆牌都限制在 9~16 張之間，所以都可以變成功。

（三）因此此魔術也可以改變成分好四堆牌後，找四個人來操作，由於四堆牌張數都不同，但透過同樣的步驟，竟然都成功了，更可增添魔術的神祕感。

二、為什麼要將選到的牌放在第一張

（一）整個魔術主要分為兩個部份：1.通關密語 2.放一收一。放在第一張，再配合通關密語的操作，就會把原本放在第一張的目標牌 a，移動到我們想要的位置，接著觀眾再依序重複「放一收一」的動作，剩下的最後一張牌，就會是觀眾所選的牌。

（二）其實，這個魔術也可以簡化成觀眾選好牌後，請他放到指定的位置，例如：知道觀眾所選的牌堆總有 15 張牌，也可以請觀眾直接將目標牌放到第 14 張（$y=2\times(15-8)=14$，接著進行「放一收一」的步驟，魔術依舊可以成功。但這樣子，就必須先知道觀眾手中有幾張牌，少了「通關密語」這個步驟，整個魔術似乎就沒那麼神奇了。這個魔術最神奇的地方，就是會讓觀眾認為不管手邊有幾張牌，都是將目標牌放到第一張，而且都可以成功，會令觀眾感到不可思議、百思不得其解。

三、為什麼通關密語是「Australian shuffle」

（一）經過我們的破解，我們發現不同張數 n，其通關密語剛好是 2^k+1（2^k為大於等於 n 的最小 2 乘方數）。9~16 張牌之通關密語為 16+1=17 個字，而「Australian shuffle」剛好是 17 個單字，除此之外，此單字還有字面上的意思，Australian 澳洲又剛好是在南半球和地球的下方，剛好用來解釋魔術中的「放一收一」這個步驟。

（二）其實通關密語只要 17 個字即可，因此我們也可以自己設計通關密語，像是「史上第一宇宙世界超級無敵霹靂大帥哥」一樣可以用來當作通關密語。

（三）透過破解，不同張數 n 雖然均有不同的通關密語可以用來變這個魔術，但因為 b 值太大，需要操作太久的時間，所以較不適合在此魔術中進行。

四、破解魔術「Australian shuffle」所推出的一般式整理

（一）$y=2\times(n-2^{k})$　（2^{k}小於 n 最大 2 乘方數）

（二）b= 2^{k}+1　（2^{k}為大於等於 n 的最小 2 乘方數）

（三）$xm=2\times\{[n-(m\times2-1)\times2^{k}]\}$

（其中$(m\times2-1)\times2^{k}$< n ，在這個情況下，2^{k}為最大 2 乘方數）

捌、參考資料及其他

一、翰林文教事業（2018）。**國小數學第十冊第六單元未知數**。

二、翰林文教事業（2018）。**國小數學第十二冊第五單元怎樣解題**。

三、中華民國第56屆中小學科學展覽會國小組數學作品。**數字牌逃不了的命運**。

四、中華民國第45屆中小學科學展覽會國小組數學作品。**再見約瑟夫**。

五、中華民國第44屆中小學科學展覽會國小組數學作品。**我要活下去**。

【評語】080414

此作品針對紙牌魔術 Australian Shuffle 來研究，進行探究並破解此魔術背後所藏的數學原理，主題有吸引力。作者先利用數學窮舉法，進行整理、分析和歸納，找出數字的規律和排列並導出牌數比較少的一般式。其實就是利用拼出來 Australian Shuffle 的同時在算牌數，再安排指定牌到達正確的位置，因為位置是依照牌數而變。參考資料列出來好多屆的約瑟夫問題得獎作品，而這個魔術採用每兩張就丟一張 (原始約瑟夫問題是每數三殺一人)，所以作品的內涵就是這個名題；也所以建議：應該避免重覆前人的結果或類似的內涵，卻無法超越前人。

作品海報

壹 研究動機

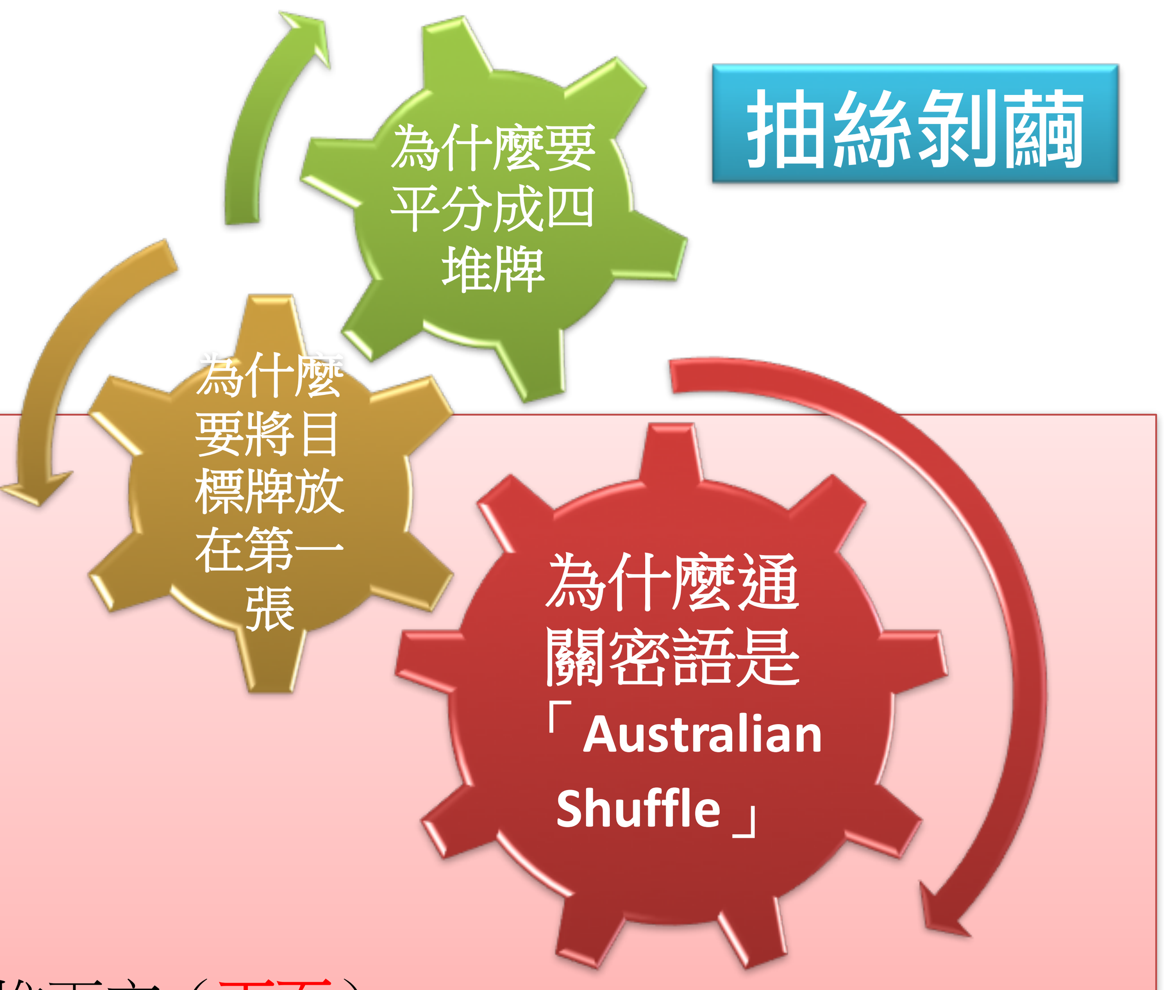
「為什麼最後會剩下來我選的那張牌呢？」本研究是因為在班級的數學推理課中，老師教我們變了一個魔術，名字叫做「Australian Shuffle」-澳大利亞洗牌術。這個魔術先經過「通關密語」的操作，再加上澳大利亞洗牌術的方式，不管試了幾次，都會剩下觀眾抽到的牌。
第一次接觸到這個魔術的時候，我們感到很神奇，百思不得其解。因此，我們決定以此為科展的題目，試著來探討其中的奧祕。

貳 研究目的

一、破解不同張數n和剩下最後第幾張牌y的關係。
二、推出目標牌a的移動和通關密語b的關聯。
三、探究不同張數n的通關密語為何。
四、分析不同張數n，倒數第m張牌會剩下哪一張牌。
五、利用這個魔術原理，再自行設計其他相關的撲克牌魔術。

參 研究設備及器材

記錄本、撲克牌、電腦



肆 研究過程或方法

認識「Australian shuffle」撲克牌魔術

1. 將一副撲克牌交給觀眾，請他將牌盡量的洗亂。
2. 當洗完牌之後，將牌分成四堆，盡可能能讓四堆變得均勻。
3. 必要的話，可以再移動一些牌，讓四堆的數量差不多。
4. 接下來，請觀眾從中隨意挑選一堆牌，並可以再任意洗亂。
5. 請觀眾從中選擇一張牌，並把牌放到第一張。
6. 接著覆誦「Australian shuffle」這個通關密語。
7. 每念一個字母，就將一張牌放到最底下。
8. 接著使用澳大利亞洗牌法，一張牌放桌上（南半球），一張牌放牌堆下方（下面）。
9. 重複這樣的動作，操作到最後，手上將會剩下一張牌。
10. 即觀眾抽到的牌。

研究過程

利用逆推法，將魔術做抽絲剝繭的實際操作

數據觀察整理和分析

找出數字和數列的規律，並導出數學一般式

自行設計研發出數字排列的小魔術

研究方法

研究一：利用數學窮舉法，找出最後剩下的牌是第幾張（y）

研究二：經過Australian shuffle17字，觀察目標牌的移動（a）

研究三：破解不同張數之通關密語為何（b）

研究四：求出倒數第m張所剩下的牌，並推出一般式（xm）

研究五：自行設計數字排列小魔術（magic）

撲克牌編碼

編碼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K
編碼	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♥1	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K
編碼	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♦1	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K
編碼	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣1	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K

名詞定義

符號	定義
n	代表牌的張數。本研究則模擬不同張數 n 的情況。
a	代表目標牌。本魔術觀眾選定目標牌後，會將所選的牌放到第一張，即首牌位置。
y	經過「Australian shuffle」，即放一收一後，最後會留下第幾張牌。
b	通關密語，即先將目標牌 a 向下移動幾次。本研究中的移動次數視通關密語的字數來決定，故 b 為通關密語字數，亦指移動到指定位置，所需要的次數(第一圈)。b2 為移動到指定位置，第二圈所需的次數，以此類推。
x	即倒數第幾張留下來的牌。本研究的 x1 代表倒數第一張留下來的牌，即最後一張留下來的牌，故 x1=y。而 x2 就是倒數第二張留下來的牌，x3 為倒數第三張留下來的牌，以此類推。xm 即倒數第 m 張留下來的牌。

伍 研究結果

研究一：破解不同張數n和剩下最後第幾張牌y的關係

牌的張數 n	經過「放一收一」剩下第幾張牌 y	n=y	基準點	利用一般式 $y=2\times(n-2^k)$ 驗證
1	1	相同	2^0	不討論
2	2	相同	2^1	y=2x（2-1）=2
3	2			y=2x（3-2）=2
4	4	相同	2^2	y=2x（4-2）=4
5	2			y=2x（5-4）=2
6	4			y=2x（6-4）=4
7	6			y=2x（7-4）=6
8	8	相同	2^3	y=2x（8-4）=8
9	2			y=2x（9-8）=2
10	4			y=2x（10-8）=4
11	6			y=2x（11-8）=6
12	8			y=2x（12-8）=8
13	10			y=2x（13-8）=10
14	12			y=2x（14-8）=12
15	14			y=2x（15-8）=14
16	16	相同	2^4	y=2x（16-8）=16
17	2			y=2x(17-16)=2
18	4			y=2x（18-16）=4
19	6			y=2x（19-16）=6
20	8			y=2x（20-16）=8
21	10			y=2x（21-16）=10
22	12			y=2x（22-16）=12
23	14			y=2x（23-16）=14
24	16			y=2x（24-16）=16
25	18			y=2x（25-16）=18
26	20			y=2x（26-16）=20
27	22			y=2x（27-16）=22
28	24			y=2x（28-16）=24
29	26			y=2x（29-16）=26
30	28			y=2x（30-16）=28
31	30			y=2x（31-16）=30
32	32	相同	2^5	y=2x（32-16）=32
33	2			y=2x（33-32）=2
34	4			y=2x（34-32）=4
35	6			y=2x（35-32）=6
36	8			y=2x（36-32）=8
37	10			y=2x（37-32）=10
38	12			y=2x（38-32）=12
39	14			y=2x（39-32）=14
40	16			y=2x（40-32）=16
41	18			y=2x（41-32）=18
42	20			y=2x（42-32）=20
43	22			y=2x（43-32）=22
44	24			y=2x（44-32）=24
45	26			y=2x（45-32）=26
46	28			y=2x（46-32）=28
47	30			y=2x（47-32）=30
48	32			y=2x（48-32）=32
49	34			y=2x（49-32）=34
50	36			y=2x（50-32）=36
51	38			y=2x（51-32）=38
52	40			y=2x（52-32）=40
53	42			y=2x（53-32）=42
54	44			y=2x（54-32）=44

數字	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
值	1	2	4	8	16	32
數字	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
值	64	128	256	512	1024	2048

在數列的部份，我們發現不同的區塊，出現規則的變化（以顏色表示），都是從 2、4、6 開始，直到 n=2^k，y 也會等於 2^k，新的區塊 2^k+1 又會從 2 開始，以公差 2 的間隔來增加。

例如：17~32 的區塊中（藍色區塊）：其 y 為 2、4、6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30、32，當 n=32=y 時，下一個數字 n=33，y=2。

小結

1. 按照放一收一的方式，最後一張牌，我們發現七個有趣的區塊（詳見圖表上色區塊），每個區塊最後剩下來的最後一張牌y，都呈現很規則的偶數等差數列關係，公差為**2**。

例1：n=51，
則y=2x(51-32)，故y=38。
例2：n=98，
則y=2x(98-64)，故y=68。
例3：n=133，
則y=2x(133-128)，故y=10。
例4：n=999，
則y=2x(999-512)，故y=974。

我們可以用 $y=2\times(n-2^k)$ 這個公式表示，其中 2^k 小於 n 最大 2 乘方數

研究二：推出目標牌a的移動和通關密語b的關聯

牌的張數 n	首牌 a 經過 code 17 步的移動，移到第幾張牌	觀察	a=n-b+1 轉換 b		$Remainder_{code}(n)=a$
1	1	不規律的區塊	1	a=1-1+1=1	$R_{17}(1)=1$
2	2		1	a=2-1+1=2	$R_{17}(2)=2$
3	2		2	a=3-2+1=2	$R_{17}(3)=2$
4	4		1	a=4-1+1=4	$R_{17}(4)=4$
5	4		2	a=5-2+1=4	$R_{17}(5)=4$
6	2		5	a=6-5+1=2	$R_{17}(6)=2$
7	5		3	a=7-3+1=5	$R_{17}(7)=5$
8	8		1	a=8-1+1=8	$R_{17}(8)=8$
9	2	公差2的等差數列	8	a=9-8+1=2	$R_{17}(9)=2$
10	4		7	a=10-7+1=4	$R_{17}(10)=4$
11	6		6	a=11-6+1=6	$R_{17}(11)=6$
12	8		5	a=12-5+1=8	$R_{17}(12)=8$
13	10		4	a=13-4+1=10	$R_{17}(13)=10$
14	12		3	a=14-3+1=12	$R_{17}(14)=12$
15	14		2	a=15-2+1=14	$R_{17}(15)=14$
16	16		1	a=16-1+1=16	$R_{17}(16)=16$
17	1	數字不斷遞增1的區塊		a=17-17+1=1	$R_{17}(17)=1$
18	2			a=18-17+1=2	$R_{17}(18)=2$
19	3			a=19-17+1=3	$R_{17}(19)=3$
20	4			a=20-17+1=4	$R_{17}(20)=4$
21	5			a=21-17+1=5	$R_{17}(21)=5$
22	6			a=22-17+1=6	$R_{17}(22)=6$
23	7			a=23-17+1=7	$R_{17}(23)=7$
24	8			a=24-17+1=8	$R_{17}(24)=8$
25	9			a=25-17+1=9	$R_{17}(25)=9$
26	10			a=26-17+1=10	$R_{17}(26)=10$
27	11			a=27-17+1=11	$R_{17}(27)=11$
28	12	數字不斷遞增1的區塊		a=28-17+1=	$R_{17}(28)=12$
29	13			a=29-17+1=13	$R_{17}(29)=13$
30	14			a=30-17+1=14	$R_{17}(30)=14$
31	15			a=31-17+1=15	$R_{17}(31)=15$
32	16			a=32-17+1=16	$R_{17}(32)=16$
33	17			a=33-17+1=17	$R_{17}(33)=17$
34	18			a=34-17+1=18	$R_{17}(34)=18$
35	19			a=35-17+1=19	$R_{17}(35)=19$
36	20			a=36-17+1=20	$R_{17}(36)=20$
37	21			a=37-17+1=21	$R_{17}(37)=21$
38	22			a=38-17+1=22	$R_{17}(38)=22$
39	23			a=39-17+1=23	$R_{17}(39)=23$
40	24			a=40-17+1=24	$R_{17}(40)=24$
41	25			a=41-17+1=25	$R_{17}(41)=25$
42	26			a=42-17+1=26	$R_{17}(42)=26$
43	27			a=43-17+1=27	$R_{17}(43)=27$
44	28			a=44-17+1=28	$R_{17}(44)=28$
45	29			a=45-17+1=29	$R_{17}(45)=29$
46	30			a=46-17+1=30	$R_{17}(46)=30$
47	31			a=47-17+1=31	$R_{17}(47)=31$
48	32			a=48-17+1=32	$R_{17}(48)=32$
49	33			a=49-17+1=33	$R_{17}(49)=33$
50	34			a=50-17+1=34	$R_{17}(50)=34$
51	35			a=51-17+1=35	$R_{17}(51)=35$
52	36			a=52-17+1=36	$R_{17}(52)=36$
53	37			a=-53-17+1=37	$R_{17}(53)=37$
54	38			a=54-17+1=38	$R_{17}(54)=38$

a=n-b+1

◆ 比較：我們將研究二，目標牌所移動到的位置 a，拿來跟研究一的 y 做比較，如下表：

n	$Remainder_{code}(n)=a$	$y=2\times(n-2^k)$	Compare
1	1	1	
2	2	2	相同
3	2	2	相同
4	4	4	相同
5	4	2	
6	2	4	
7	5	6	
8	8	8	相同
9	2	2	相同
10	4	4	相同
11	6	6	相同
12	8	8	相同
13	10	10	相同
14	12	12	相同
15	14	14	相同
16	16	16	相同
17	1	2	
18	2	4	
19	3	6	
20	4	8	
21	5	10	
22	6	12	
23	7	14	
24	8	16	
25	9	18	

研究三：探究不同張數n的通關密語b為何

$$b=2^k+1$$

牌的張數 n	經過「放一收一」剩下第幾張牌 y	目標牌 a 移動到指定的位置需移動幾個字母(b1)（通關密語）
1	1	不討論
2	2	1
3	2	2
4	4	1
5	2	4
6	4	3
7	6	2
8	8	1
9	2	8
10	4	7
11	6	6
12	8	5
13	10	4
14	12	3
15	14	2
16	16	1
17	2	16
18	4	15
19	6	14
20	8	13
21	10	12
22	12	11
23	14	10
24	16	9
25	18	8
26	20	7
27	22	6
28	24	5
29	26	4
30	28	3
31	30	2
32	32	1
33	2	32
34	4	31
35	6	30
36	8	29
37	10	28
38	12	27
39	14	26
40	16	25
41	18	24
42	20	23
43	22	22

牌的張數 n	y	b1	b2、b3、b4、b5、b6	數列公差	共同移動數(b)
1	1		不討論		
2	2	1	3、5、7、9、11…	2	3
3	2	2	5、8、11、14、17…	3	5
4	4	1	5、9、13、17、21…	4	5
5	2	4	9、14、19、24、29…	5	9
6	4	3	9、15、21、27、33…	6	9
7	6	2	9、16、23、30、37…	7	9
8	8	1	9、17、25、33、41…	8	9
9	2	8	17、26、35、44、53…	9	17
10	4	7	17、27、37、47、57…	10	17
11	6	6	17、28、39、50、61…	11	17
12	8	5	17、29、41、53、65…	12	17
13	10	4	17、30、43、56、69…	13	17
14	12	3	17、31、45、59、73…	14	17
15	14	2	17、32、47、62、77…	15	17
16	16	1	17、33、49、65、81…	16	17
17	2	16	33、50、67、84、101…	17	33
18	4	15	33、51、69、87、105…	18	33
19	6	14	33、52、71、90、109…	19	33
20	8	13	33、53、73、93、113…	20	33
21	10	12	33、54、75、96、117…	21	33
22	12	11	33、55、77、99、121…	22	33
23	14	10	33、56、79、102、125…	23	33
24	16	9	33、57、81、105、129…	24	33
25	18	8	33、58、83、108、133…	25	33
26	20	7	33、59、85、111、137…	26	33
27	22	6	33、60、87、114、141…	27	33
28	24	5	33、61、89、117、145…	28	33
29	26	4	33、62、91、120、149…	29	33
30	28	3	33、63、93、123、153…	30	33
31	30	2	33、64、95、126、157…	31	33
32	32	1	33、65、97、129、161…	32	33
33	2	32	65、88、121、154、187…	33	65
34	4	31	65、89、123、157、191…	34	65
35	6	30	65、90、125、160、195…	35	65
36	8	29	65、91、127、163、199…	36	65
37	10	28	65、92、129、166、203…	37	65
38	12	27	65、93、131、169、207…	38	65
39	14	26	65、94、133、172、211…	39	65
40	16	25	65、95、135、175、215…	40	65
41	18	24	65、96、137、178、219…	41	65
42	20	23	65、97、139、181、223…	42	65
43	22	22	65、98、141、184、227…	43	65
44	24	21	65、99、143、187、231…	44	65

n	2	3~4	5~8	9~16	17~32	33~64	65~128	n
b	3	5	9	17	33	65	129	2^k+1
b 轉換	2^1+1	2^2+1	2^3+1	2^4+1	2^5+1	2^6+1	2^7+1	2^k+1

魔數堆數的改變

堆數	平均張數	實際模擬結果	區間	通關密語 b	是否適合變魔術
1	52	52	± 0	65	V
2	26	20~31	$-6\sim+5$	33	V
3	17	12~21	$-5\sim+4$	17 or 33	
4	13	9~16	$-4\sim+3$	17	V
5	10	7~13	$-3\sim+2$	9 or 17	
6	9	7~10	$-2\sim+1$	9 or 17	
7	7	5~8	$-2\sim+1$	9	V

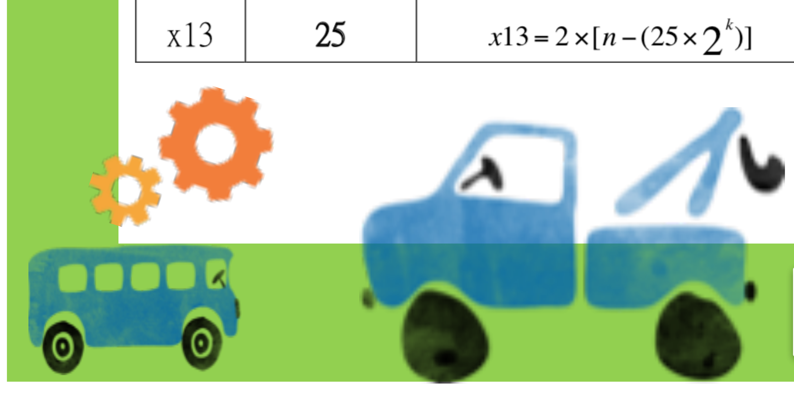
n	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27
1	1
2	2
3	2
4	4	2
5	2	4
6	4	6	2
7	6	2	4
8	8	4	6	2
9	2	6	8	4
10	4	8	10	6	2
11	6	10	2	8	4
12	8	12	4	10	6	2
13	10	2	6	12	8	4
14	12	4	8	14	10	6	2
15	14	6	10	2	12	8	4
16	16	8	12	4	14	10	6	2
17	2	10	14	6	16	12	8	4
18	4	12	16	8	18	14	10	6	2
19	6	14	18	10	2	16	12	8	4
20	8	16	20	12	4	18	14	10	6	2
21	10	18	2	14	6	20	16	12	8	4
22	12	20	4	16	8	22	18	14	10	6	2
23	14	22	6	18	10	2	20	16	12	8	4
24	16	24	8	20	12	4	22	18	14	10	6	2
25	18	2	10	22	14	6	24	20	16	12	8	4
26	20	4	12	24	16	8	26	22	18	14	10	6	2
27	22	6	14	26	18	10	2	24	20	16	12	8	4
28	24	8	16	28	20	12	4	26	22	18	14	10	6	2
29	26	10	18	2	22	14	6	28	24	20	16	12	8	4
30	28	12	20	4	24	16	8	30	26	22	18	14	10	6	2
31	30	14	22	6	26	18	10	2	28	24	20	16	12	8	4
32	32	16	24	8	28	20	12	4	30	26	22	18	14	10	6	2
33	2	18	26	10	30	22	14	6	32	28	24	20	16	12	8	4
34	4	20	28	12	32	24	16	8	34	30	26	22	18	14	10	6	2
35	6	22	30	14	34	26	18	10	2	32	28	24	20	16	12	8	4
36	8	24	32	16	36	28	20	12	4	34	30	26	22	18	14	10	6	2
37	10	26	34	18	2	30	22	14	6	36	32	28	24	20	16	12	8	4
38	12	28	36	20	4	32	24	16	8	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
39	14	30	38	22	6	34	26	18	10	2	36	32	28	24	20	16	12	8	4
40	16	32	40	24	8	36	28	20	12	4	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
41	18	34	2	26	10	38	30	22	14	6	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
42	20	36	4	28	12	40	32	24	16	8	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
43	22	38	6	30	14	42	34	26	18	10	2	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
44	24	40	8	32	16	44	36	28	20	12	4	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
45	26	42	10	34	18	2	38	30	22	14	6	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
46	28	44	12	36	20	4	40	32	24	16	8	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
47	30	46	14	38	22	6	42	34	26	18	10	2	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
48	32	48	16	40	24	8	44	36	28	20	12	4	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
49	34	2	18	42	26	10	46	38	30	22	14	6	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
50	36	4	20	44	28	12	48	40	32	24	16	8	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
51	38	6	22	46	30	14	50	42	34	26	18	10	2	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
52	40	8	24	48	32	16	52	44	36	28	20	12	4	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2
53	42	10	26	50	34	18	2	46	38	30	22	14	6	52	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
54	44	12	28	52	36	20	4	48	40	32	24	16	8	54	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2

區塊	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26	x27
一	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
二	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106
三	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100
四	8	24	40	56	72	88	104
五	16	48	80
六	32	96
七	64
基準點	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53

	區塊一	區塊二	區塊三	區塊四	區塊五	區塊六	區塊七	～～～	區塊 z
公差	2	4	8	16	32	64	128	～～～	?
發現	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	～～～	2^k

研究四：分析不同張數n，倒數第m張牌會剩下哪一張牌

區塊	基準點	推出一般式	舉例 n=54
x1	1	$y=x1=2\times[n-(1\times2^k)]$	x1=2x(54-32)=44
x2	3	$x2=2\times[n-(3\times2^k)]$	x2=2x[54-(3x16)] =12
x3	5	$x3=2\times[n-(5\times2^k)]$	x3=2x[54-(5x8)] =28
x4	7	$x4=2\times[n-(7\times2^k)]$	x4=2x[54-(7x4)] =52
x5	9	$x5=2\times[n-(9\times2^k)]$	x5=2x[54-(9x4)] =36
x6	11	$x6=2\times[n-(11\times2^k)]$	x6=2x[54-(11x4)] =20
x7	13	$x7=2\times[n-(13\times2^k)]$	x7=2x[54-(13x4)] =4
x8	15	$x8=2\times[n-(15\times2^k)]$	x8=2x[54-(15x2)] =48
x9	17	$x9=2\times[n-(17\times2^k)]$	x9=2x[54-(17x2)] =40
x10	19	$x10=2\times[n-(19\times2^k)]$	x10=2x[54-(19x2)] =32
x11	21	$x11=2\times[n-(21\times2^k)]$	x11=2x[54-(21x2)] =24
x12	23	$x12=2\times[n-(23\times2^k)]$	x12=2x[54-(23x2)] =16
x13	25	$x13=2\times[n-(25\times2^k)]$	x13=2x[54-(25x2)] =8
x14	27	$x14=2\times[n-(27\times2^k)]$	x14=2x[54-(27x1)] =54
x15	29	$x15=2\times[n-(29\times2^k)]$	x15=2x[54-(29x1)] =50
x16	31	$x16=2\times[n-(31\times2^k)]$	x16=2x[54-(31x1)] =46
x17	33	$x17=2\times[n-(33\times2^k)]$	x17=2x[54-(33x1)] =42
x18	35	$x18=2\times[n-(35\times2^k)]$	x18=2x[54-(35x1)] =38
x19	37	$x19=2\times[n-(37\times2^k)]$	x19=2x[54-(37x1)] =34
x20	39	$x20=2\times[n-(39\times2^k)]$	x20=2x[54-(39x1)] =30
x21	41	$x21=2\times[n-(41\times2^k)]$	x21=2x[54-(41x1)] =26
x22	43	$x22=\{2\times[n-(43\times2^k)]$	x22=2x[54-(43x1)] =22
x23	45	$x23=2\times[n-(45\times2^k)]$	x23=2x[54-(45x1)] =18
x24	47	$x24=\{2\times[n-(47\times2^k)]$	x24=2x[54-(47x1)] =14
x25	49	$x25=2\times[n-(49\times2^k)]$	x25=2x[54-(49x1)] =10
x26	51	$x26=2\times[n-(51\times2^k)]$	x26=2x[54-(51x1)] =6
x27	53	$x27=2\times[n-(53\times2^k)]$	x27=2x[54-(53x1)] =2
↓		↓	
xm		$xm=2\times\{[n-(m\times2-1)\times2^k]\}$	



自創「基準點」解法

$$xm=2\times\{[n-(m\times2-1)\times2^k]\}$$

備註：其中 $(m\times2-1)\times2^k<n$，在這個情況下，2^k 為最大 2 乘方數。

研究五：利用這個魔術原理，再自行設計其他相關的撲克牌魔術-一條龍

n	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24	x25	x26
52	40	8	24	48	32	16	52	44	36	28	20	12	4	50	46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2

n	x27	x28	x29	x30	x31	x32	x33	x34	x35	x36	x37	x38	x39	x40	x41	x42	x43	x44	x45	x46	x47	x48	x49	x50	x51	x52
52	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

【一條龍】魔術出現效果

出現	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K
出現	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♥1	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K
出現	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♦1	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K
出現	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣1	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K

【一條龍】魔術排列破解

排列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♦1	♠2	♣1	♠3	♦2	♠4	♣Q	♠5	♦3	♠6	♣2	♠7
排列	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♦4	♠8	♣8	♠9	♦5	♠10	♣3	♠J	♦6	♠Q	♣J	♠K	♦7
排列	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♥1	♣4	♥2	♦8	♥3	♣9	♥4	♦9	♥5	♣5	♥6	♦10	♥7
排列	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣K	♥8	♦J	♥9	♣6	♥10	♦Q	♥J	♣10	♥Q	♦K	♥K	♣7

陸 討論

一、研究一

（一）根據研究的結果，我們可以將數據區分成七個區塊，每個區塊均從 2、4、6 開始，出現規則的變化，當 $\boxed{n=2^k}$，y 也會等於 2^k，新的區塊 $\boxed{2^k+1}$ 又會從 2 開始，以公差 2 的間隔來增加。

（二）另外針對「不同張數 n」與「剩下第幾張牌 y」的關係，我們找到一般式，可以用 $\boxed{y=2\times(n-2^k)}$ 這個式子來表示（2^k 小於 n 最大 2 乘方數）。

二、研究二

（一）研究二是針對目標牌 a，經過「通關密語」17 次的移動後，會移動到哪個位置。本研究產生三個不同區塊，其中當 n=9~16 張牌的時候，會出現 a = y 的情況，因此我們相信，這個與此魔術一開始要大約「平分成四等分」有關。一副撲克牌總共有 52 張牌，平分成四堆的時候，一堆約有 13 張牌，故如果大約平分成四堆牌，每堆牌的張數也會落在 9~16 張之間。

（二）在第三個區塊中，我們發現移動後的目標牌 a，可以用下面的關係式表示：$\boxed{a=n-b+1}$，（當 n >b 時）

三、研究三

（一）利用 b=n-y+1，我們計算出不同張數 n 需要移動的步數 b，但卻還是找不出共通的地方，後來我們延續研究，繼續往後推算第二圈（b2）、第三圈（b3）…，終於在第二圈（b2）的地方，找到不同張數 n 的共同通關密語 b。

（二）按照我們所推算出來的結果，我們發現通關密語的祕密，即 $\boxed{2^k+1}$（2^k 為大於等於 n 的最小 2 乘方數）。

n	2	3~4	5~8	9~16	17~32	33~64	65~128	n
b	3	5	9	17	33	65	129	2^k+1

四、研究四

（一）分析 Australian Shuffle 這種洗牌法，每一輪均包括兩種情況。（1）當 n=偶數，則此輪會丟掉 $\frac{n}{2}$ 張牌，留下 $\frac{n}{2}$ 張牌。（2）當 n=奇數，則此輪會丟掉 $\frac{n+1}{2}$ 張牌，留下 $\frac{n-1}{2}$ 張牌。

舉例：n=37，37→18→9→4→2→1。
舉例：n=52，52→26→13→6→3→1。
舉例：n=100，100→50→25→12→6→3→1。
舉例：n=250，250→125→62→31→15→7→3→1。

（二）觀察和分析研究四的數據，我們自創「基準點」的計算法，基準點的公式：xm = m ×2-1。透過探究 x1~x54，我們找到不同張數 n 的 xm（即最後倒數第 m 張會剩下的牌）的一般式：$\boxed{xm=2\times\{[n-(m\times2-1)\times2^k]\}}$，**（其中 $(m\times2-1)\times2^k<n$ ，在這情況，2^k 為最大 2 乘方數）**。

五、研究五

（一）在了解這個魔術背後的數學原理後，我們發現數字的排列及移動，真的充滿很多的趣味，因此我們根據所破解的結果，結合「Australian Shuffle」的方式，自行設計出「一條龍」的小魔術。以下為研究結果，只要事先照著以下的順序排列，就可以成功變出這個我們設計的小魔術。

排列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
牌	♠1	♦1	♠2	♣1	♠3	♦2	♠4	♣Q	♠5	♦3	♠6	♣2	♠7
排列	14	15	16	**17**	**18**	19	20	21	22	23	24	25	26
牌	♦4	♠8	♣8	♠9	♦5	♠10	♣3	♠J	♦6	♠Q	♣J	♠K	♦7
排列	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
牌	♥1	♣4	♥2	♦8	♥3	♣9	♥4	♦9	♥5	♣5	♥6	♦10	♥7
排列	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
牌	♣K	♥8	♦J	♥9	♣6	♥10	♦Q	♥J	♣10	♥Q	♦K	♥K	♣7

柒 結論

一、為什麼將牌分成四堆：1.控制2.圈套3.神祕感

二、為什麼目標牌先放第一張：1.移動2.省略通關密語3.神奇

三、為什麼通關密語是Australian Shuffle：1.字意2.自設密碼

四、破解魔術「Australian shuffle」，並推算出一般式

破解魔術「Australian shuffle」所推出的一般式整理

（一）$y=2\times(n-2^k)$　（2^k 小於 n 最大 2 乘方數）

（二）$b=2^k+1$　（2^k 為大於等於 n 的最小 2 乘方數）

（三）$xm=2\times\{[n-(m\times2-1)\times2^k]\}$

（其中 $(m\times2-1)\times2^k<n$ ，在這個情況下，2^k 為最大 2 乘方數）

捌 參考資料

一、翰林文教事業（2018）。**國小數學第十冊第六單元未知數**。

二、翰林文教事業（2018）。**國小數學第十二冊第五單元怎樣解題**。

三、中華民國第56屆中小學科學展覽會國小組數學作品。**數字牌逃不了的命運**。

四、中華民國第45屆中小學科學展覽會國小組數學作品。**再見約瑟夫**。

五、中華民國第44屆中小學科學展覽會國小組數學作品。**我要活下去**。