中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080413

步步為「贏」—鋸木塊遊戲之探討

學校名稱：彰化縣彰化市中山國民小學

作者：	指導老師：
小六　陳睿甫	陳瑩柔
小六　陳力誠	林富苓
小六　陳宥叡	
小六　林暐捷	

關鍵詞：鋸木塊、漢米爾頓路徑、逆向思考法

摘 要

本研究探討在$n \times n$的方格表中，如何進行鋸木塊遊戲才能獲勝的方法。我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，發現在鋸木塊遊戲進行過程中，由鏈碼的樣式可提供定向的作用，使玩家快速找到角落封閉點、邊封閉點、內封閉點及必勝路徑。此外，我們也發現在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式為$(n-1) \times (n-1)$，並找到在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數的遊戲路徑及必勝切法。最後，我們也提出在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

壹、 研究動機

有一天，我們在網路上發現一個有趣的數學遊戲叫「鋸木塊遊戲」。遊戲規則是：在一塊畫有5×5方格的木塊上，兩位玩家接續著前手所切的位置，沿著方格表內的格線且不重複切的輪流切一到三個單位的長度，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。我們想知道怎麼鋸才能贏？為甚麼有時候全部鋸完才能結束遊戲，有時候卻可以在中盤就結束遊戲?我們想知道最多可鋸幾單位？怎麼樣才能在中盤快速結束遊戲並獲勝？這個數學遊戲引發了熱烈討論，於是，我們決定深入探討，以了解其奧秘。

貳、 名詞釋義

一、節點：

在$n \times n$的方格表中，除了邊上的點外，其餘的交點，都是節點。例如，在5x5方格表中，總共有16個節點。

二、鋸木塊遊戲規則說明：

根據研究動機我們依據不同的遊戲類型，將遊戲規則分為以下兩種，如圖2-2-1：

<u>鋸木塊遊戲類型一：漢米爾頓路徑型</u>

在$n \times n$的方格表中，兩位玩家接續著前手所切的位置，方格表內的格線且不重複切的輪流切一到三個單位的長度，需切完所有節點才能結束遊戲，所鋸的路徑須形成能通過方格表中所有的

圖 2-2-1 遊戲類型

節點且不重複節點的路徑，也就是漢米爾頓路徑，若是玩家於中盤就結束遊戲或先將木塊鋸成兩塊者就輸了。

<u>鋸木塊遊戲類型二：隨機型</u>

在$n \times n$的方格表中，兩位玩家接續著前手所切的位置，依方格表內的格線且不重複切的輪流切割一到三個單位的長度，可隨時於中盤結束遊戲，亦可拜訪完所有節點且不重複經過節點才結束遊戲，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。

三、漢米爾頓路徑：

在圖形上給定任意兩節點A、B，從A節點出發要經過所有的節點且不重複節點而到達B節點，這樣的問題稱作漢米爾頓路徑（Hamilton path）。在本研究中，我們運用漢米爾頓路徑找出$n \times n$木塊中可鋸出最多單位數的必勝路徑。

四、逆向思考法：

逆向思考法，又稱倒推法，指利用已知條件，由欲達到的目標一步一步向前倒推，直到題目中問題得到解答。

五、鏈碼(Chain code)：

鏈碼是一種用一維數字來表示二維圖形的方法，只要先定義表示移動方向的數字符號，就可以用鏈碼來標示特定圖形。本研究所定義的鏈碼及對應的移動方向如圖2-5-1所示，依據上述的鏈碼定義，以圖2-5-2為例，其圖形鏈碼為323232110。

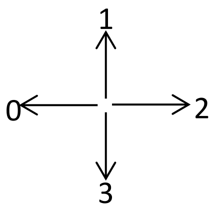


圖2-5-1 本研究中之鏈碼所對應的方向

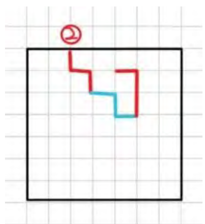


圖2-5-2 鏈碼圖例

六、塗色法：

將$n \times n$方格表內的節點透過塗色的樣式來進行論證的方法，如圖2-6-1所示。

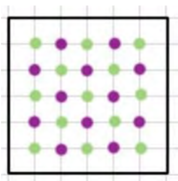


圖2-6-1 塗色法

參、 研究目的

一、探討在3×3、4×4、5×5、6×6… $n \times n$ 的鋸木塊遊戲的最多可切單位數。

二、探討在3×3、4×4、5×5、6×6… $n \times n$ 的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝路徑。

三、探討在3×3、4×4、5×5、6×6… $n \times n$ 的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

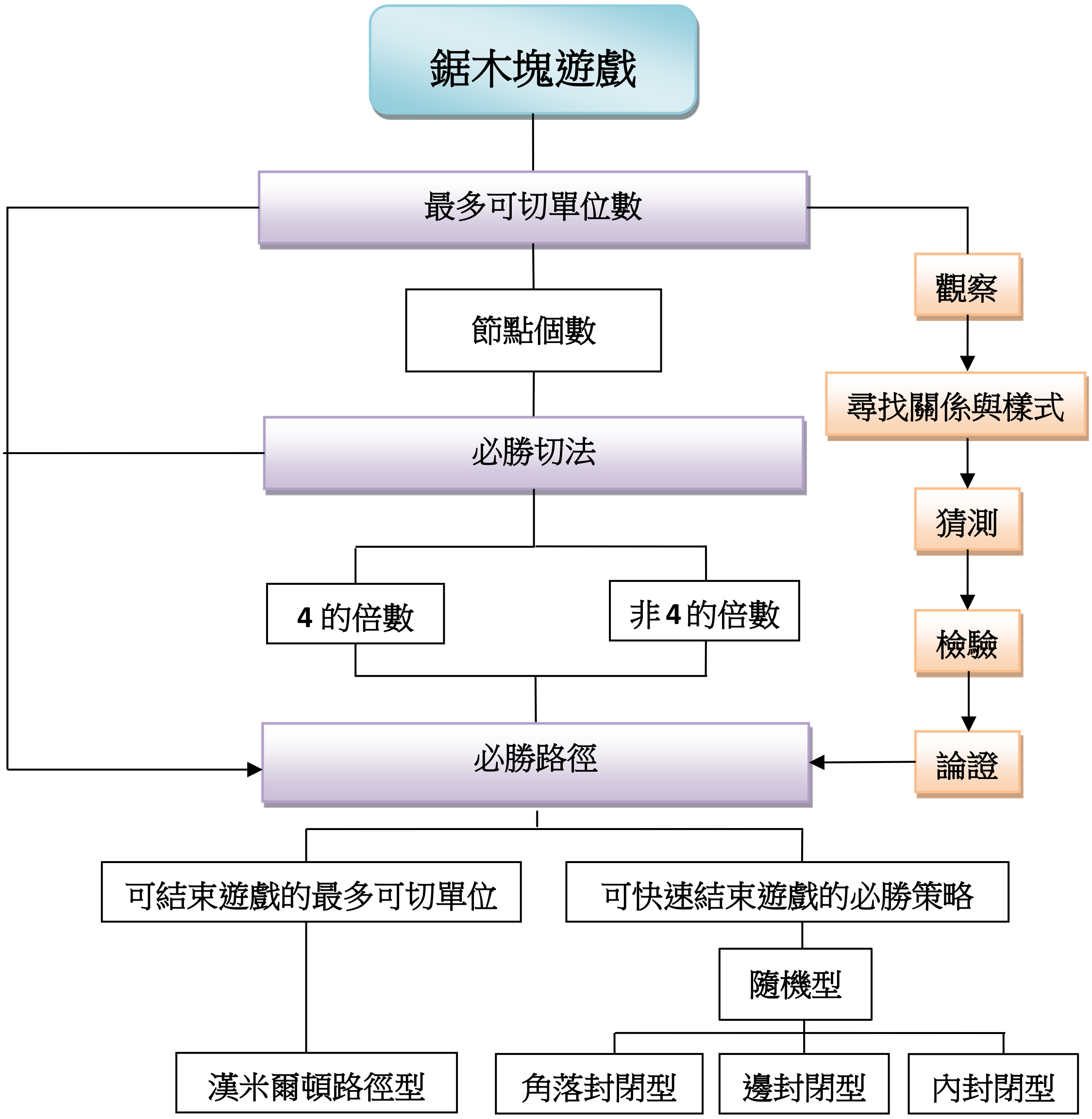
四、探討在3×3、4×4、5×5、6×6… $n \times n$ 的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

肆、研究設備及器材

繪圖軟體Doceri、筆、電腦、平板電腦、方格紙。

伍、研究過程及方法

一、研究架構與流程圖



二、研究過程

(一) 探討在3×3、4×4、5×5、6×6…$n\times n$的鋸木塊遊戲的最多可切單位數。

1.觀察：

首先，我們嘗試在3×3方格表中進行鋸木塊遊戲，我們觀察到在3x3的鋸木塊遊戲中，結束遊戲的路徑類型只有兩種類型，且結束遊戲時所切的單位數是4單位，也就是最多可切的單位數，遊戲規則是先手或後手可輪流接續切1到3單位，因此，後手很容易獲勝，如圖5-2-1所示。

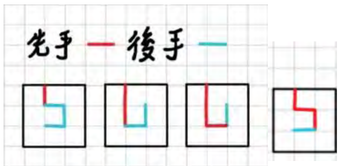


圖5-2-1　3×3鋸木塊遊戲的嘗試過程

接著，我們又嘗試在4×4方格表中進行鋸木塊遊戲，我們觀察到可結束遊戲的路徑類型有很多種形態，且結束遊戲時所切的單位數也從最少4單位到最多9單位不等，如圖5-2-2所示，因此先手或後手都有可能獲勝。

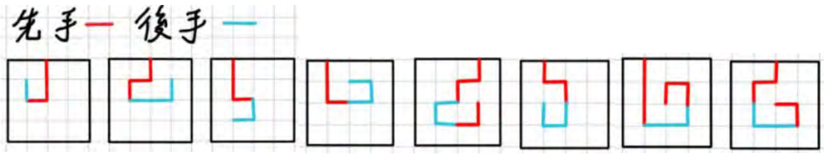


圖5-2-2　4×4鋸木塊遊戲的嘗試過程

由於遊戲規則是先手或後手可輪流切接續1到3單位，在3×3方格表中進行鋸木塊遊戲勢必是後手贏，但進行4×4的鋸木塊遊戲時，有時候是先手獲勝，有時候是後手獲勝，我們發現4×4方格表的鋸木塊遊戲複雜度遠比3×3方格表的鋸木塊遊戲高許多，我們猜測可能與最多可切的單位數及所切的路徑有關，也開啟了後續的研究歷程。

為了先探討最多可切單位數及形成最多可切單位數之遊戲路徑的秘密，我們將鋸木塊遊戲分成兩種玩法，第一種為漢米爾頓路徑型，玩法為兩位玩家接續著前手所切的位置，沿著方格表內的格線輪流切割一到三個單位的長度，所鋸的路徑須形成能通過方格表中所有的節點且不重複節點的漢米爾頓路徑，若是玩家於中盤就結束遊戲或先將木塊鋸成兩塊者就輸了。第二種為隨機型，不限定所鋸的路徑須形成

能通過方格表中所有節點的漢米爾頓路徑，玩家可於中盤就結束遊戲。在此研究目的中，我們先依漢米爾頓路徑型，就鋸木塊遊戲中的最多可切單位數進行探討。

2.尋找關係與樣式：

我們在尋找關係的過程中發現：結束遊戲前最多可切的單位數會隨著方格表內節點數量增加而變多，而最多可切的單位數似乎則與邊長數有關聯，在3×3、4×4、5×5、6×6…20×20方格中，可切的最多單位數都是(邊長-1) ×(邊長-1)，例如：3×3的最多可切單位數是2×2，也就是最多可切4單位；4×4的最多可切單位數是3×3，也就是最多可切9單位；5×5的最多可切單位數是4×4，也就是最多可切16單位，依此類推，如表5-2-1所示。

表5-2-1 3×3~20×20結束遊戲前最多可切單位數統計表

規格	最多可切單位數		規格	最多可切單位數	
3×3	（3-1）x（3-1）	4單位	12×12	（12-1）x（12-1）	121單位
4×4	（4-1）x（4-1）	9單位	13×13	（31-1）x（13-1）	144單位
5×5	（5-1）x（5-1）	16單位	14×14	（14-1）x（14-1）	169單位
6×6	（6-1）x（6-1）	25單位	15×15	（15-1）x（15-1）	196單位
7×7	（7-1）x（7-1）	36單位	16×16	（16-1）x（16-1）	225單位
8×8	（8-1）x（8-1）	49單位	17×17	（17-1）x（17-1）	256單位
9×9	（9-1）x（9-1）	64單位	18×18	（18-1）x（18-1）	289單位
10×10	（10-1）x（10-1）	81單位	19×19	（19-1）x（19-1）	324單位
11×11	（11-1）x（11-1）	100單位	20×20	（20-1）x（20-1）	361單位

3.猜測與檢驗：

透過觀察及尋找關係，我們猜測最多可切的單位數與3×3、4×4、5×5、6×6……$n \times n$方格表中的節點個數有關，由表5-2-1中，從6x6至20x20的檢驗，發現可切的最多單位數都是(邊長-1) ×(邊長-1)，而節點個數皆為$(n-1)\times(n-1)$，兩者相符合，即檢驗的結果與猜測相符合。

4.論證：

接著，我們對上述猜測與檢驗的發現進行論證。以4×4的鋸木塊遊戲為例，觀察被孤立的節點數量與所鋸單位數的關聯，如圖5-2-3。我們發現，在尚未開始遊戲前，被孤立的節點數量為9個，亦為藍色的9個點；從起點A開始切1單位後，被孤立的節點數量剩下8個；切2單位後，被孤立的節點數量剩下7個；切3單位後，被孤立的節點數量剩下6個，接著持續的切第4單位、第5單位，逐步把孤立的節點減少，最後當所有節點都被切到，沒有被孤立的節點時，總共切了9單位，節點個數會等於最多可切的單位數，如表5-2-2所示。接著我們持續嘗試在5×5、6×6方格進行鋸木塊遊戲，如圖5-2-5及圖5-2-6所示，亦發現最多可切的單位數會等於節點個數，也就是(邊長-1) ×(邊長-1)，因此我們可得證鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式即為$(n\text{-}1)\times(n\text{-}1)$。

表 5-2-2 4×4 鋸木塊遊戲所鋸單位數與被孤立的節點對照表

鋸木塊遊戲 所鋸的單位數	被孤立的 節點個數
0	**9**
1	**8**
2	**7**
3	**6**
4	**5**
5	**4**
6	**3**
7	**2**
8	**1**
9	**0**

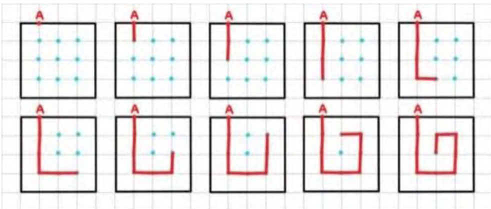


圖5-2-3 4×4鋸木塊遊戲鋸最多單位數的過程

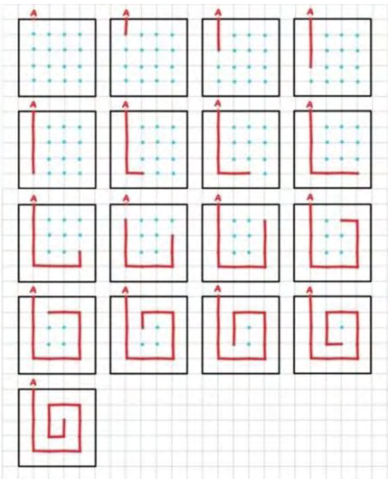


圖 5-2-4 5×5 鋸木塊遊戲鋸最多單位數的過程

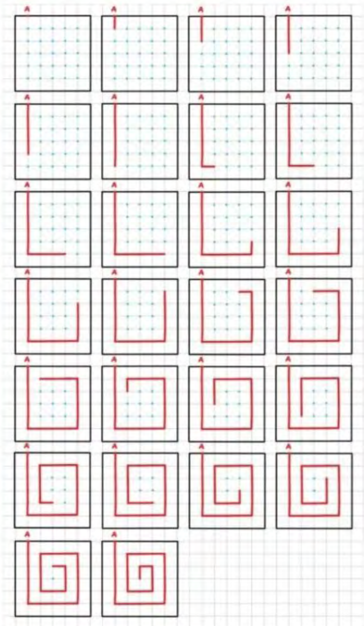


圖 5-2-5 6×6 鋸木塊遊戲鋸最多單位數的過程

(二)探討在3×3、4×4、5×5、6×6… $n \times n$ 的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的遊戲路徑。

1.觀察：

我們在進行鋸木塊遊戲的過程中，發現從不同起點進行4×4鋸木塊遊戲，會有不同的最多可切單位數及不同的路徑類型，像是從起點1出發可以切到所有節點，因此最多可切9單位，也就是4×4可切的最多單位數，如圖5-2-6所示，但我們也發現，如果從起點2出發則不能切完全部節點，無論如何嘗試，都會剩1個節點沒有被切到，也就是最多只能切8單位，如圖5-2-7所示。

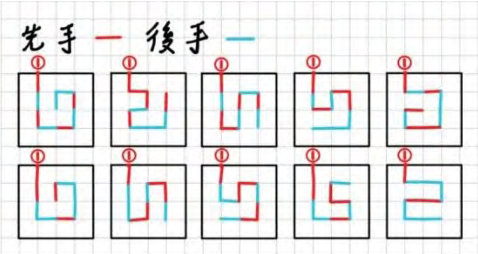


圖5-2-6 從起點1進行4×4鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

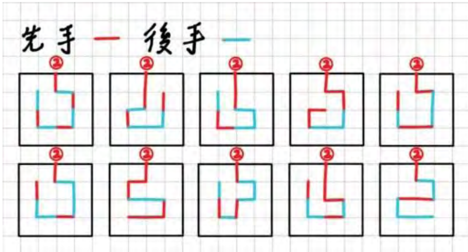


圖5-2-7 從起點2進行4×4鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

而當我們在5×5方格表中進行鋸木塊遊戲，我們發現從任一行列的起點進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑，無論從起點1或是起點2出發，最多可切單位數皆為16單位，也就是5×5可切的最多單位數，如圖5-2-8及圖5-2-9所示。

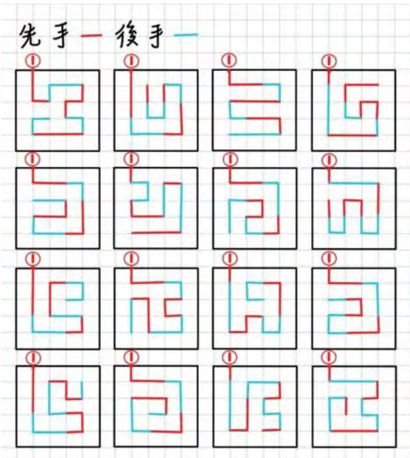


圖 5-2-8 從起點 1 進行 5×5 鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

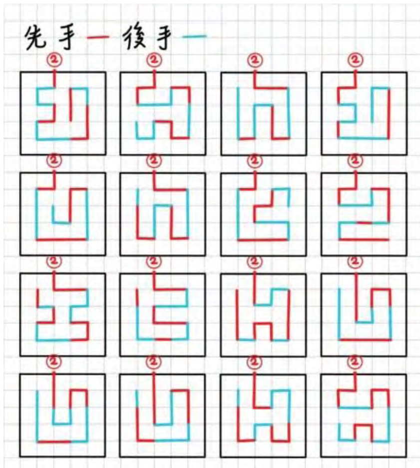


圖 5-2-9 從起點 2 進行 5×5 鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

2.尋找關係與樣式：

此外，我們也發現在6x6的鋸木塊遊戲中，最多可切的單位數跟4x4的鋸木塊遊戲一樣，也會隨著邊界的起點位置而有所改變，從起點1、起點3出發都可以切到所有節點，最多可切25單位，但從起點2出發無論如何嘗試，都會剩1個節點沒有被切到，最多可切24單位，如圖5-2-10、5-2-11及5-2-12所示。

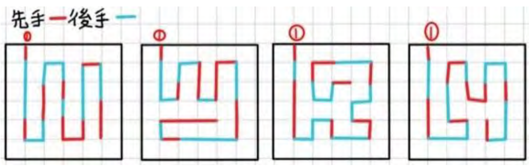


圖5-2-10 從起點1進行6×6的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

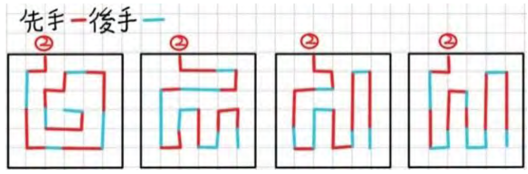


圖5-2-11 從起點2進行6×6的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

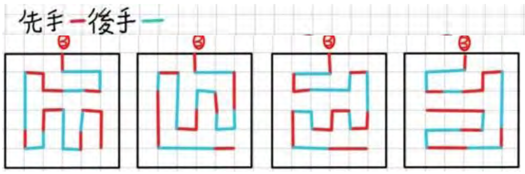


圖5-2-12 從起點3進行6×6的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

而在7x7的鋸木塊遊戲中，最多可切的單位數跟5x5的鋸木塊遊戲一樣，從任一行列的起點進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑，無論從起點1、起點2或起點3出發，最多可切單位數皆為36單位，也就是7x7可切的最多單位數，如圖5-2-13、5-2-14及5-2-15所示。

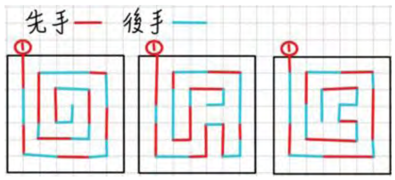


圖 5-2-13 從起點 1 進行 7×7 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

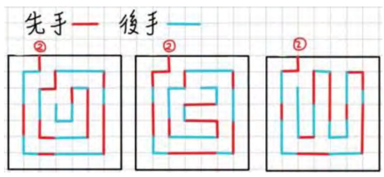


圖 5-2-14 從起點 2 進行 7×7 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

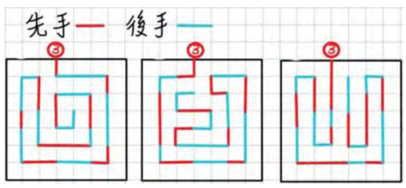


圖 5-2-15 從起點 3 進行 7×7 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

3.猜測與檢驗：

根據觀察及尋找關係兩個部份，透過探討4×4與6x6以及5×5與7x7的鋸木塊遊戲從不同起點開始切的最多可切單位數，我們猜測：偶數方格表的最多可切的單位數都會隨著起點位置而有所改變，只要從偶數行或列的起點出發，無論如何嘗試，方格表內都會剩1個節點沒有被切到，但是從奇數行或列的起點出發則可切到所有節點，也就是切出最多單位數；而在奇數方格表，其最多可切的單位數則不會隨著邊界起點位置而有所改變，不論從任一行或列的起點出發進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑。我們持續在8x8、9x9方格表中進行探討也都發現同樣的現象，如圖5-2-16~圖5-2-23所示，也就是：

偶數方格表可切的最多單位數會因為邊界起點的位置而改變，奇數方格表則不會。

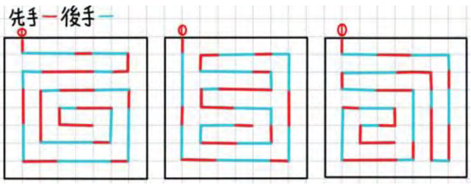


圖 5-2-16 從起點 1 進行 8×8 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

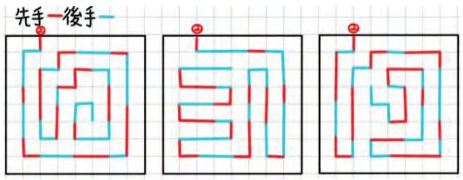


圖 5-2-17 從起點 2 進行 8×8 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

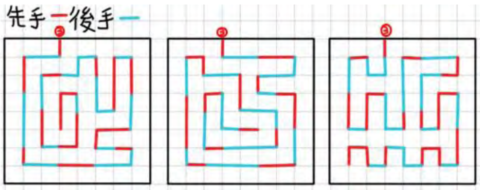


圖 5-2-18 從起點 3 進行 8×8 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

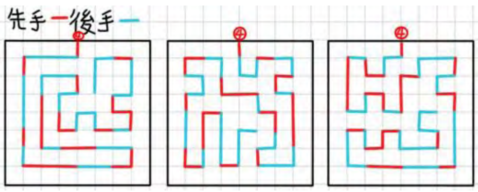


圖 5-2-19 從起點 4 進行 8×8 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

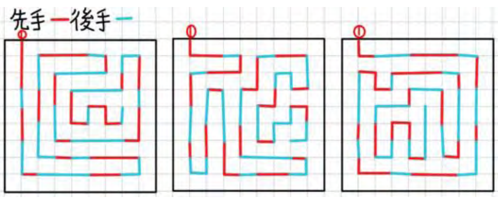


圖 5-2-20 從起點 1 進行 9×9 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

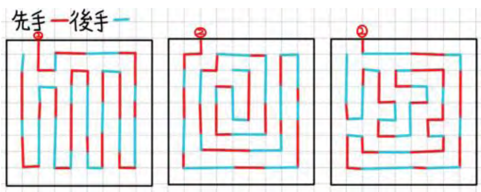


圖 5-2-21 從起點 1 進行 9×9 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

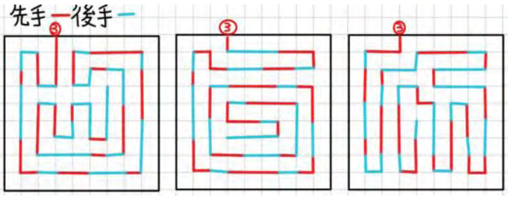


圖 5-2-22 從起點 3 進行 9×9 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

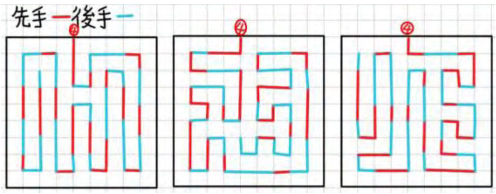


圖 5-2-23 從起點 4 進行 9×9 的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

4.論證：

為了論證我們在猜測與檢驗中的發現，我們本來以編號法來找尋不同起點的最多可切單位數，但一直無法找到規律，後來老師建議我們透過塗色法來尋找規律。下列就是我們使用塗色法所進行的論證：經由塗色法我們發現在偶數方格表中，因為節點數共有奇數個，且綠點個數比紫點個數多一個，如果是由紫點為起點出發，則在紫點、綠點輪流切的情況下，因為綠點個數比紫點個數多一個，所以最後必會剩下一個綠點無法切到，也就無法形成通過所有節點的漢米爾頓路徑。但如果由綠點為起點出發，則在綠點、紫點輪流切的情況下，便能切完所有的綠點與紫點，也就是切完所有的節點，而形成通過所有節點的漢米爾頓路徑。同時我們也發現，在奇數方格表中，因為節點數共有偶數個，而且綠點與紫點的個數相同，所以不論是由紫點為起點出發，或是由綠點為起點出發，都能切完所有節點而不會有剩餘的節點，也就能形成通過所有節點的漢米爾頓路徑，如圖5-2-24、5-2-25所示。

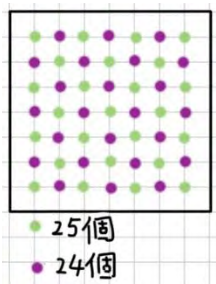


圖 5-2-24 8×8 方格表塗色法

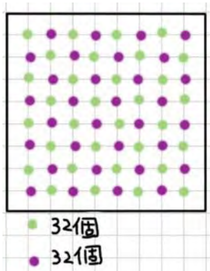


圖 5-2-25 9×9 方格表塗色法

由此論證的結果，為了要使鋸木塊遊戲能具有漢米爾頓路徑型，因此，對於偶數方格表，我們增加遊戲規定即先手玩家要從奇數行或列的節點出發開始遊戲。

(三)探討在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

1.觀察：

從前述的研究中，我們發現了在方格表中可形成最多可切單位數的遊戲路徑，而在遊戲規則中，兩位玩家可接續前手輪流切割一到三個單位的長度，我們想知道在不同的偶數及奇數方格表中，若想切出最多可切單位數的遊戲路徑，先手或後手各要怎麼切才能獲勝？有沒有容易獲勝的一方？最多可切的單位數與必勝切法有沒有關連？

2.尋找關係與樣式：

這些問題困擾我們許久，於是我們去請教老師，老師建議我們可以運用逆向思考法來處理這個問題。我們先從4×4的鋸木塊遊戲作探討，由於4x4是偶數方格表，從前述的研究中我們知道，偶數方格表必須從奇數點出發開始切，才能切到最多可切單位數，也就是切到所有節點。以4×4的鋸木塊遊戲為例，最多可切到9個節點，老師建議我們將這9個節點從方格表中取出,先排成一直線作思考,如圖5-2-26所示。我們發現若是要在遊戲中獲勝，必須要搶先鋸到第9個點，由於在遊戲規則中，兩位玩家可輪流接續前手切割一到三個單位，透過逆向思考法，我們發現，為了搶先鋸到第9個點，就必須搶先鋸到第5個點，為了搶先鋸到第5個點，就必須搶先鋸到第1個點。因此，總是可以鋸到第1個點的先手，若能從起點1出發，且第一回合先只鋸1單位，就能在之後進行遊戲時，接續後手鋸(4-後手所切的單位數)單位，即可順利鋸到第5個點及第9個點並獲勝。

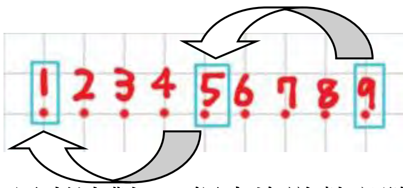


圖5-2-26 運用逆向思考法對4×4鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程(起點1)

接著，我們又對5x5鋸木塊遊戲進行探討，由於5x5是奇數方格表，從前述的研究中我們可得知，奇數方格表最多可切的單位數不會隨著邊界起點位置而有所改變，不論從任一行或列的起點出發進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有

節點的漢米爾頓路徑。所以5x5鋸木塊遊戲不論從哪一個起點出發最多都可切16單位，也就是每個節點都會被切到。我們一樣將這16個節點從方格表中取出，先排成一直線作思考，如圖5-2-27所示。我們發現若是要在遊戲中獲勝，必須要搶先鋸到第16個點，由於在遊戲規則中，兩位玩家可接續前手輪流切割一到三個單位，透過逆向思考法，我們發現，為了搶先鋸到第16個點，就必須搶先鋸到第12個點，為了搶先鋸到第12個點，就必須搶先鋸到第8個點，為了搶先鋸到第8個點，就必須搶先鋸到第4個點，為了搶先鋸到第4個點，一開始就不能鋸到第1個點。所以，總是可以不鋸到第1個點的後手，若是能在進行遊戲時，鋸(4-先手所切的單位數)單位，就能鋸到第4個點、第8個點、第12個點及第16個點並獲勝。

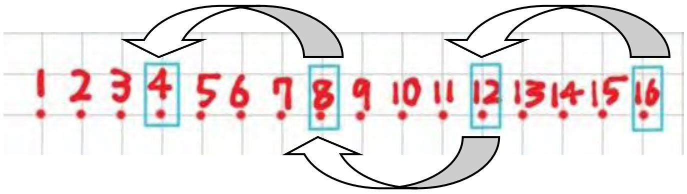


圖5-2-27　運用逆向思考法對5×5鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程

3.猜測與檢驗：

根據觀察及尋找關係兩個部份，透過探討4×4及5×5的鋸木塊遊戲的最多可切單位數與必勝切法，我們猜測：如果方格表中可切的最多單位數是4的倍數，則後手會有必勝切法，後手只要切(4 -先手所切的單位數)單位就能獲勝；如果方格表中最多可切單位數不是4的倍數，則先手會有必勝切法，先手只要先切(總單位數÷4後的餘數)單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。

根據以上推論，我們持續探討在6×6的鋸木塊遊戲及7×7的鋸木塊遊戲中的必勝切法，亦發現方格表中最多可切的單位數與必勝切法確實有關連，而且不同的最多可切單位數也會讓先手或後手有必勝切法，如果方格表中可切的最多單位數是4的倍數，後手會有必勝切法；如果方格表中最多可切單位數不是4的倍數，先手會有必勝切法。而且我們也發現先手永遠只要先切1單位，之後再接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。

4.論證：

我們對於方格表中可切的最多單位數不是4的倍數時，為甚麼先手永遠只要先切1單位而不是切2單位或3單位，之後再接續後手切(4-後手所切的單位數)單位就能獲勝這個問題感到非常好奇，於是在數學課時我們請問了老師這個問題，老師建議我們可以經由乘法分配律來解決這個問題。以下就是我們的論證：因為偶數方格表內部的節點個數是$(2k+1)x(2k+1)$，如果我們把節點個數$(2k+1)x(2k+1)$看成面積的話，就會變成如圖5-2-28所示，在圖中左上方的面積$(2k)^2$會是4的倍數，旁邊兩個長方形面積總和為4k也會是4的倍數，因此就只有右下方粉紅色區域的1不能被4整除，所以先手在偶數方格表只要先切1單位，再切4減先手切的單位數，先手就可以獲勝。

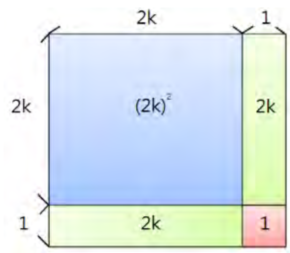


圖 5-2-28　以面積表示乘法分配律

(四) 探討在3×3、4×4、5×5、6×6…$n\times n$的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

在進行鋸木塊遊戲時，我們觀察到有時可以切最多單位數，直到切到所有節點才結束遊戲，但也可以切很少單位數就很快結束遊戲，這讓我們想進一步探討如何在隨機進行鋸木塊遊戲，不限定一定要切完所有節點的遊戲類型下，能快速結束遊戲的必勝策略，有了必勝策略之後，除了可以讓玩家快速獲勝，也可以避免落入讓自己提早結束遊戲的陷阱裡。

1.觀察：

為了觀察快速結束遊戲的樣式，我們將4×4、5×5、6×6、7×7方格的鋸木塊遊戲中在第1回合(先手和後手各走一次)的後手必勝路徑及第1.5回合(先手走兩次，後手走一次)的先手必勝路徑，依據不同的遊戲起點、所需切的單位數與方格表的大小來歸納。然而，我們在觀察遊戲路徑時遇到了一個難題：我們畫出了許多路徑，如表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中的這些圖形，卻不知如何定義路徑圖形，因此，

我們就向老師求救，老師教我們試著用鏈碼來表示圖形，於是我們自訂了鏈碼及四個對應方向如圖5-2-29，並將鏈碼標示於圖形路徑下方，以進行圖形的觀察與歸納。

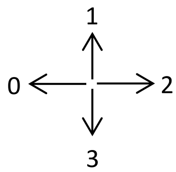
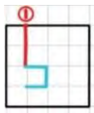
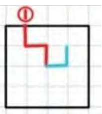
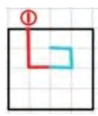
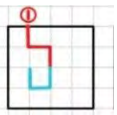
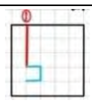
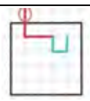
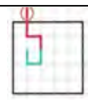
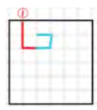
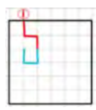
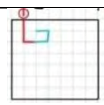
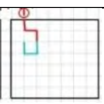
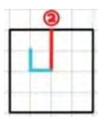
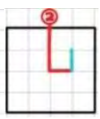
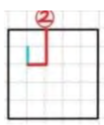
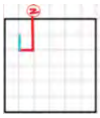
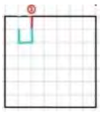
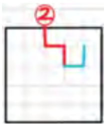
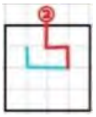
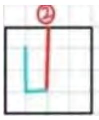
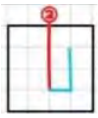
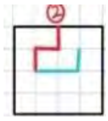
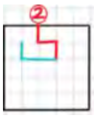
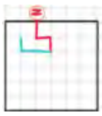
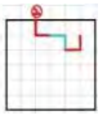
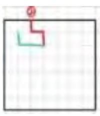
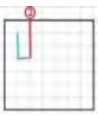
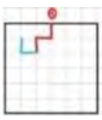
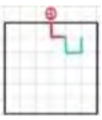
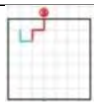
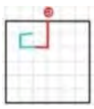
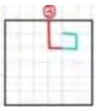


圖 5-2-29 本研究之鏈碼所對應方向

表5-2-3 4×4、5×5、6×6、7×7之鋸木塊遊戲可於第1回合結束遊戲的必勝路徑

起點	單位數	方格表	角落封閉點	邊封閉點	內封閉點
一	5	4x4	  33230 32321		
	6	4x4		  332210 323301	
		5x5	  333230 322321	  332210 323301	
		6x6		  332210 323301	
		7x7		  332210 323301	
二	4	4x4	  3301 3321		
		5x5	 3301		

		6x6	 3301		
		7x7	 3301		
	5	5x5	 32321		
	6	4x4	    323001 333011 333211 303221		
		5x5	  323001 333011		
		6x6	   323001 333011 322321		
		7x7	  323001 333011		
三	5	6x6	  30301 32321		
		7x7	 30301		
	6	6x6		  330012 332210	

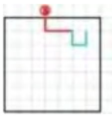
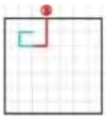
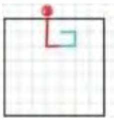
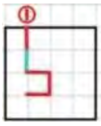
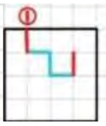
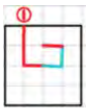
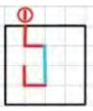
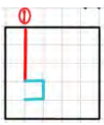
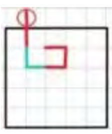
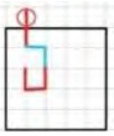
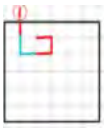
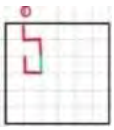
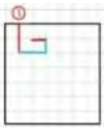
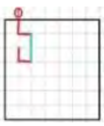
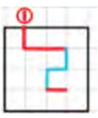
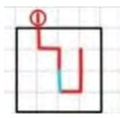
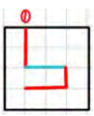
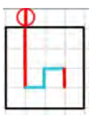
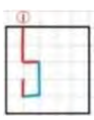
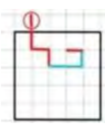
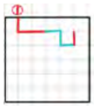
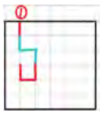
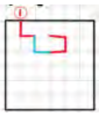
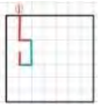
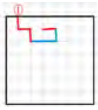
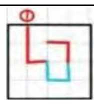
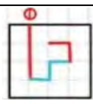
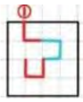
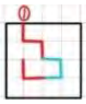
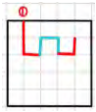
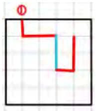
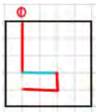
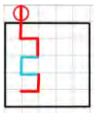
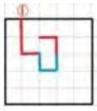
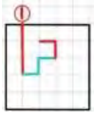
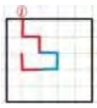
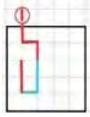
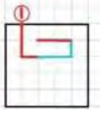
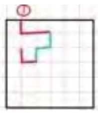
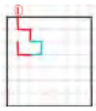
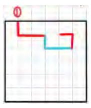
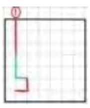
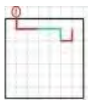
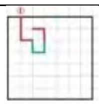
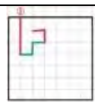
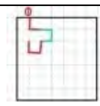
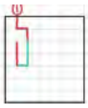
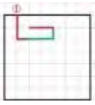
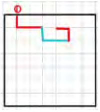
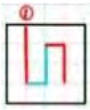
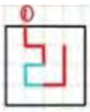
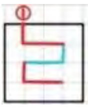
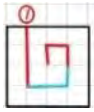
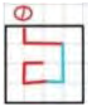
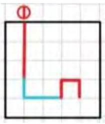
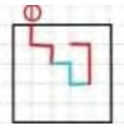
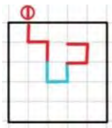
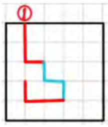
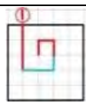
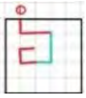
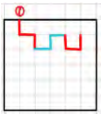
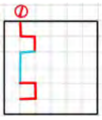
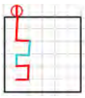
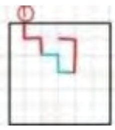
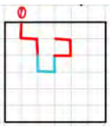
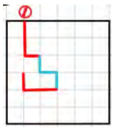
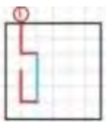
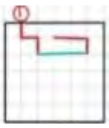
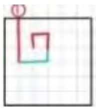
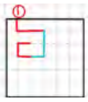
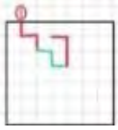
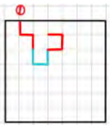
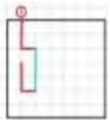
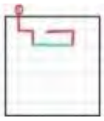
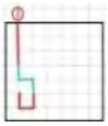
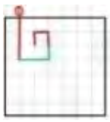
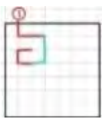
		7x7	 322321	  330012 332210	

表 5-2-4　4×4、5×5、6×6、7×7 之鋸木塊遊戲於第 1.5 回合結束遊戲的先手必勝路徑(起點一)

起點	單位數	方格表	角落封閉點	邊封閉點	內封閉點
一	5	4x4	  33230 32321		
	6	4x4		  332210 323301	
		5x5	  333230 322321	  332210 323301	
		6x6		  332210 323301	
		7x7		  332210 323301	
	7	4x4	  3223032 3233211   3322300 3332133		
		5x5		  3323301 3232210	

		6x6	 3222321  3333230	 3323301  3232210	
		7x7		 3323301  3232210	
	8	4x4		 33232110  33321210  32230301  32323001	
		5x5	 33212321  32233211  33322300  32303230	 33232110  33321210  32230301  32323001  32333011  33222100	
		6x6		 33232110  33321210  32230301  32323001  32333011  33222100  32232210	
		7x7	 33333230  32222321	 33232110  33321210  32230301	

				 32323001  32333011  33222100  32232210	
	9	4x4	 322330103  333211233  323032211  322300322		 333221103  322330012
		5x5	 333322123	 323232110  332323001  323321210	 333221103  322330012
		6x6	 323212321  323033230  332303230	 323232110  332323001  323321210  332333011  323222100	 333221103  322330012
		7x7		 323232110  323321210  332323001  332333011  323222100  333323301	 333221103  322330012

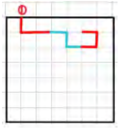
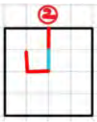
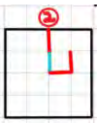
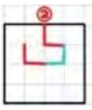
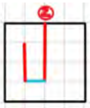
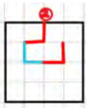
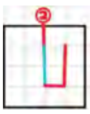
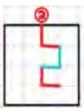
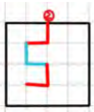
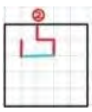
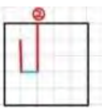
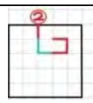
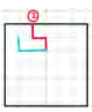
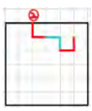
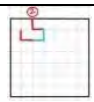
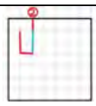
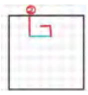
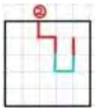
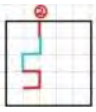
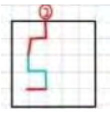
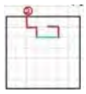
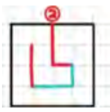
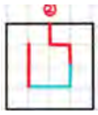
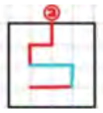
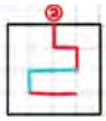
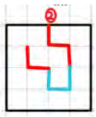
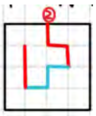
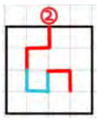
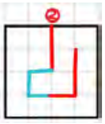
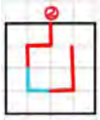
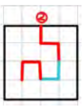
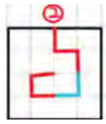
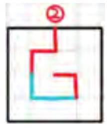
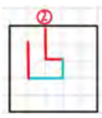
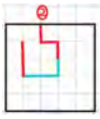
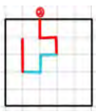
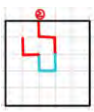
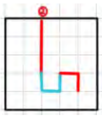
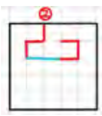
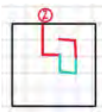
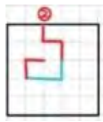
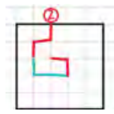
				 322232210	

表 5-2-5　4×4、5×5、6×6、7×7 之鋸木塊遊戲於第 1.5 回合結束遊戲的先手必勝路徑(起點二)

起點	單位數	方格表	角落封閉點	邊封閉點	內封閉點
二	4	4x4	  3301　3321		
		5x5	 3301		
		6x6	 3301		
		7x7	 3301		
	5	5x5	 32321		
	6	4x4	   323001　333011　303221    333211　323032　303230		
		5x5	  323001　333011	 332210	
		6x6	   323001　333011　322321	 332210	

		7x7	  323001 333011	 332210	
	7	5x5	   3233211 3303230 3033230		
		6x6		 3232210	
		7x7		 3232210	
	8	4x4	   33230011 32330011 30322300    32300322 32330101 32303011    30332123 33032211 30332211  32330103		 32330012  30332210
		5x5	   33230011 32330011 33330111    32303011 32330101 33330123	   30322210 33232110 33321210  30323301	 32330012  30332210

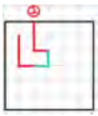
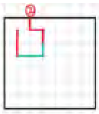
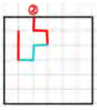
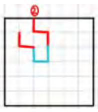
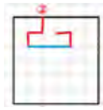
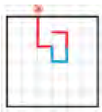
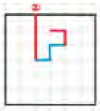
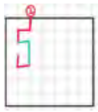
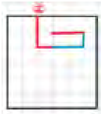
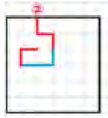
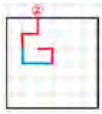
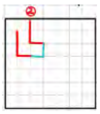
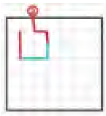
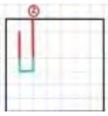
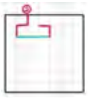
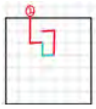
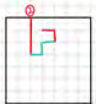
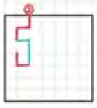
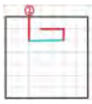
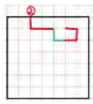
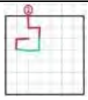
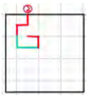
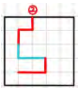
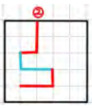
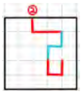
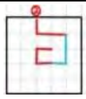
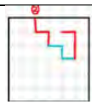
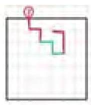
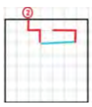
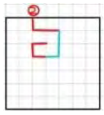
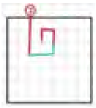
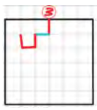
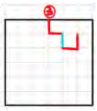
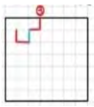
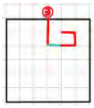
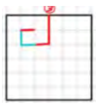
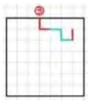
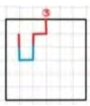
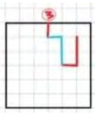
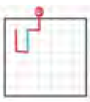
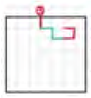
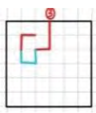
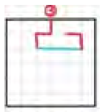
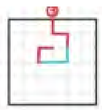
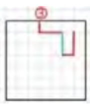
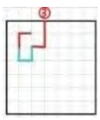
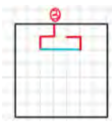
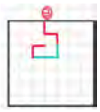
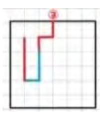
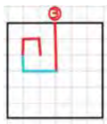
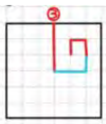
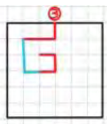
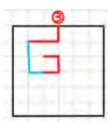
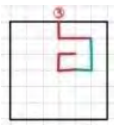
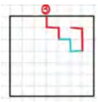
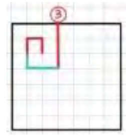
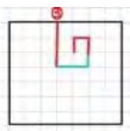
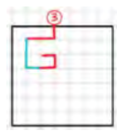
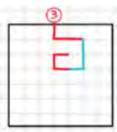
		6x6	   33230011 32330011 33330111   32303011 32330101	   30322210 33232110 33321210   30323301 33222100	 32330012  30332210
		7x7	   33230011 32330011 33330111	   30322210 33232110 33321210    30323301 33222100 32232210	 32330012  30332210
	9	5x5	  323332111 303322300  330322300	 322303321	 322330012  333221103
		6x6		 323232110	 322330012  333221103
		7x7		  323232110 323222100	 322330012  333221103

表 5-2-6　4×4、5×5、6×6、7×7 之鋸木塊遊戲於第 1.5 回合結束遊戲的先手必勝路徑(起點三)

起點	單位數	方格表	角落封閉點	邊封閉點	內封閉點
三	5	6x6	  30301　32321		
		7x7	 30301		
	6	6x6		  332210　330012	
		7x7	 322321		
	7	6x6	  3033011 3233211		
		7x7	 3033011	 3232210	
	8	6x6		  33030112 30322210	 32330012
		7x7	 32233211	  33030112　30322210	 32330012
	9	6x6	 303330111		   333001123　333221103

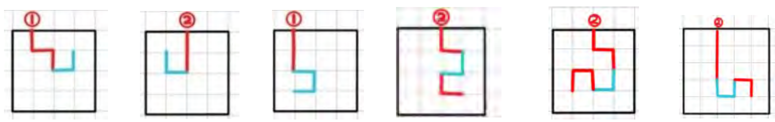
					300332210   300332210 322330012
		7x7	 303330111	 323232110	  333001123 333221103   300332210 322330012

2.尋找關係與樣式：

透過觀察表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6，我們發現在不同大小的方格表中，只要是切相同單位數，就可能出現相同或類似的必勝路徑，而這些必勝路徑的樣式似乎就像是神奇的海螺，都有向內彎以找到封閉點結束遊戲的特性，因此我們依據不同位置但皆可結束遊戲的封閉點，將圖形分成角落封閉點、邊封閉點及內封閉點三大類，藉以進一步探討這些圖形的關係。

(1) 角落封閉點

我們在整理角落封閉點的圖形樣式後，發現這些圖形即使方格表大小不同，或者從不同邊界起點出發，甚至是所切的單位數不同，但他們最後切的三個單位其圖形鏈碼可能為321、301、230、032、103、123，如圖5-2-30鏈碼紅字所示，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，如圖5-2-31所示。此外，再進一步探討，我們也發現圖形鏈碼為321的勾勹狀圖形經過翻轉、鏡射、旋轉後，就可以形成其他301、230、032、103、123五種圖形。



32321　3301　33230　323032　32330103　33332123

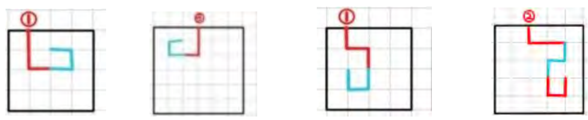
圖5-2-30 角落封閉點結束遊戲前最後三單位的鏈碼

32321　303221　3301　333011

圖5-2-31 角落封閉點圖形樣式延伸範例

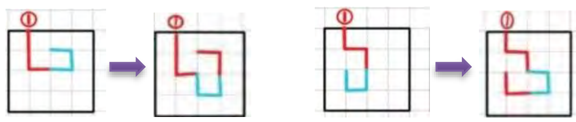
(2) 邊封閉點

我們在整理邊封閉點的圖形樣式後，發現這些圖形即使方格表大小不同，或者從不同邊界起點出發，甚至是所切的單位數不同，但他們最後切的三個單位其圖形鏈碼可能為210、012、301、321，如圖5-2-32鏈碼紅字所示，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，如圖5-2-33所示。此外，再進一步探討，我們也發現圖形鏈碼為210的勾勺狀圖形經過翻轉、鏡射、旋轉後，就可以形成其他012、301、321三種圖形。



332210　330012　323301　322303321

圖5-2-32 邊封閉點結束遊戲前最後三單位的鏈碼



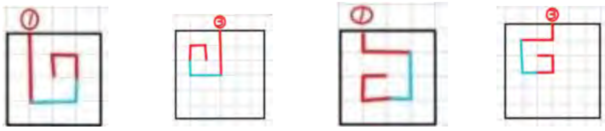
332210　33232110　323301　32323001

圖5-2-33 邊封閉點圖形樣式延伸範例

(3) 內封閉點

我們在整理內封閉點的圖形樣式後，發現內封閉點的遊戲路徑僅出現在1.5回合的鋸木塊遊戲中，也發現要構成內封閉點遊戲路徑須至少切八個單位，不過，我們依然有找出內封閉點的圖形樣式，這些圖形即使方格表大小不同，或者從不同邊界起點出發，甚至是所切的單位數不同，但他們最後切的三個單位其圖形鏈碼可能為103、123、012、210，如圖5-2-34鏈碼紅字所示，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，如圖5-2-33所示。此外，再進一步

探討，我們也發現圖形鏈碼為103的勾勹狀圖形經過翻轉、鏡射、旋轉後，就可以形成其他123、012、210三種圖形。



333221103　333001123　322330012　300332210

圖5-2-34 內封閉點結束遊戲前最後三單位的鏈碼

3.猜測：

透過觀察及尋找關係與樣式，我們猜測在進行遊戲時，若能運用逆向思考法，依據不同封閉點的圖形樣式，在遊戲中觀察前一手所鋸的路徑，若其出現不同封閉點的關鍵點及關鍵路徑，就能找出必勝策略，取得致勝先機，使玩家能不用走完所有節點就在中盤快速結束遊戲。

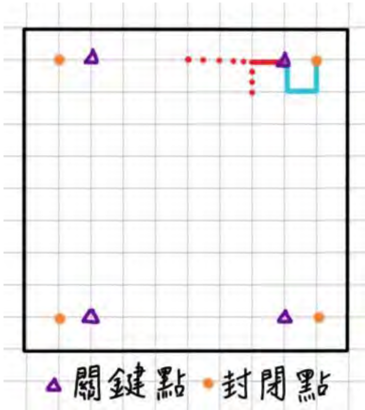
4.驗證：

為了驗證我們的猜測，我們依據結束遊戲時的角落封閉點、邊封閉點及內封閉點分別進行必勝策略的探討。

(1) 角落封閉點

我們在歸納角落封閉點的圖形樣式及尋找關係與樣式後，初步發現當前一手的遊戲路徑進入方格表中距離邊界第二行或第二列的紫色關鍵點時，由於遊戲規則中玩家可接續前一手切一到三個單位，則下一手即可將遊戲路徑切到角落封閉點以結束遊戲，如圖5-2-35所示。

此外，我們也發現除了掌握紫色關鍵點以外，若前一手的所切的路徑落到在方格表任一角落的1x2或2x1網格，就可留意紫色關鍵點與其他顏色關鍵點所組成的關鍵路徑，如圖5-2-36所示，只要玩家留意到前一手走到方格表中的紫色關鍵點、紫+綠連線、紫+綠+紅連線、紫+綠+黃連線或紫+綠+黃+粉紅連線，則下一手也可將遊戲路徑切到角落封閉點以結束遊戲，而對照表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中所出現的角落封閉點圖形，也可驗證了我們策略是可行的。



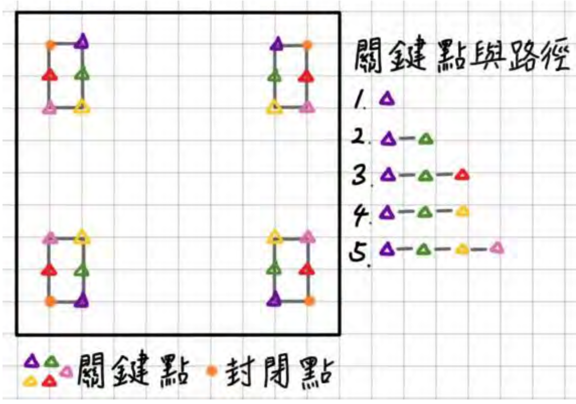


圖5-2-35 角落封閉點與關鍵點　　**圖5-2-36** 角落封閉點、關鍵點與關鍵路徑

(2) 邊封閉點

我們在歸納邊封閉點的圖形樣式及尋找關係與樣式後，發現玩家在進行鋸木塊遊戲時，若是能搶先占得方格表內邊界上1x3或3x1網格上短邊上的兩點，而對手接著占了1x3或3x1網格上長邊的紫色關鍵點上的任一到三點，則玩家即可將遊戲路徑切到邊封閉點以結束遊戲，如圖5-2-37所示。而對照表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中所出現的邊封閉點圖形，也可驗證了我們策略是可行的。

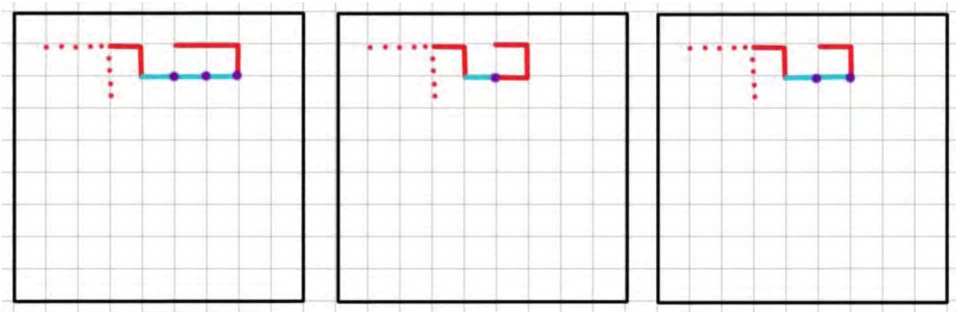


圖5-2-37 邊封閉點、紫色關鍵點與結束遊戲的路徑

(3) 內封閉點

我們在歸納內封閉點的圖形樣式及尋找關係與樣式後，發現玩家可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，若對手也佔了2x2網格上的兩到三個點讓路徑呈現勺子型，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，則玩家可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲。

此外，由於玩家佔據2x2網格上的三個點有三種方式，分別為直線型、L型、閃電型，因此圖形樣式可歸類為三種類型。其中，若玩家選擇以直線型、L型為

目標結束遊戲，玩家可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，若對手也佔了2x2網格上三個點讓路徑呈現勺子型，則玩家可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲。惟在閃電型中，玩家可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，接著無論對手佔據二或三個點都可讓玩家將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲，如圖5-2-38所示。而對照表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中所出現的內封閉點圖形，也可驗證了我們策略是可行的。

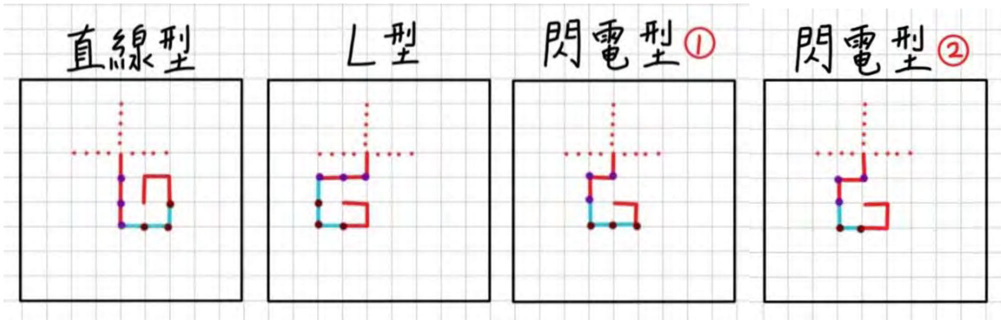


圖5-2-38 形成內封閉點的三種遊戲路徑樣式

陸、研究結果

經過研究與探討，我們發現：

一、在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數。

在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數與3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$方格表中的節點個數有關，可切的最多單位數都是(邊長-1)×(邊長-1)，而節點個數皆為(n-1)×(n-1)，兩者相符合。

二、在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數的遊戲路徑。

在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中只要所切的路徑經過所有的節點，則所切單位數即為最多單位也就是所有節點數，而當我們嘗試在3×3、4×4、5×5等方格表中進行嘗試畫出經過所有節點的路徑時發現，這些最多可切單位數可結束遊戲的路徑的走法雖然有很多種，但全都是從起點經過所有的節點且不重複節點而結束遊戲的漢米爾頓路徑（Hamilton path）。

而且在偶數方格表的鋸木塊遊戲中，最多可切的單位數會隨著起點位置而有所

改變，只要從偶數行或列的起點出發，無論如何嘗試，方格表內都會剩1個節點沒有被切到，但是從奇數行或列的起點出發則可切到所有節點，也就是切出最多單位數經過所有節點的漢米爾頓路徑，因此，對於偶數方格表，必須增加遊戲規定，即規定先手玩家要從奇數行或列的起點出發開始遊戲；而在奇數方格表的鋸木塊遊戲中，其最多可切的單位數則不會隨著邊界起點位置而有所改變，不論從任一行或列的起點出發進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑。

三、在3×3、4×4、5×5、6×6… $n\times n$ 的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

在3×3、4×4、5×5、6×6… $n\times n$ 的鋸木塊遊戲中的必勝切法是：如果方格表中可切的最多單位數是4的倍數，後手會有必勝切法，後手要切(4-先手所切的單位數)單位就能獲勝；如果方格表中最多可切單位數不是4的倍數，先手會有必勝切法，先手要先切1單位，之後接續後手切(4-後手所切的單位數)單位就能獲勝。

四、在3x3、4x4、5x5、6x6⋯ $n\times n$ 的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

我們分別針對**角落封閉點、邊封閉點**及**內封閉點**三大快速結束遊戲的路徑，提出可快速結束遊戲的必勝策略，可供玩家在進行鋸木塊遊戲時進行隨機運用，以快速結束遊戲。

(1) 角落封閉點的必勝策略：

當玩家觀察到對手的所切的路徑落到在方格表任一角落的1x2或2x1網格，就可根據對手所切到網格中的節點或這些節點之間所連成的關鍵路徑，接著切一到三刀，將遊戲路徑切到角落封閉點以結束遊戲。

(2) 邊封閉點的必勝策略：

玩家在進行鋸木塊遊戲時，若是能搶先占得方格表內邊界上1x3或3x1網格上短邊上的兩點，而對手接著占了1x3或3x1網格上長邊關鍵點上的任一到三點，則玩家即可將遊戲路徑切到邊封閉點以結束遊戲。

(3) 內封閉點的必勝策略：

玩家可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，若對手也佔了2x2網格上的兩到三個點讓路徑呈現勺子型，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，

則玩家可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲。

柒、結論

本研究探討在$n \times n$的方格表中，如何進行鋸木塊遊戲才能獲勝的方法。我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、在鋸木塊遊戲進行過程中，由鏈碼的樣式可提供定向的作用，使玩家快速找到角落封閉點、邊封閉點、內封閉點及必勝路徑。

二、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式為：

$(n\text{-}1) \times (n\text{-}1)$。

三、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數的遊戲路徑。

四、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

五、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

捌、參考資料

一、國民小學課本南一版第6冊。

二、許志農（2012）。戲說數學。取自http://tblog.pcsh.ntpc.edu.tw/lifetype/gallery/59/戲說數學.pdf

【評語】080413

此作品探討在 nxn 方格的鋸木塊遊戲，兩人對局鋸方格的邊緣，直到有人把原本一片的大木片鋸斷掉，視為輸家。玩法又分為一般型與研究者新發明的進階型“路徑必須是漢米爾頓路徑”(每個內點都要被鋸到)。作者運由鏈碼來標示移動的方向，以表徵路徑圖形，由此提供的定向可協助對局者快速找到角落封閉點、邊封閉點、內封閉點以及必勝路徑，研究方法適切。研究的子題目還有最多可切單位數的必勝路徑、必勝切法以及必勝策略，主題有趣。

作品海報

壹、 研究動機

有一天，我們在網路上發現一個有趣的數學遊戲叫「鋸木塊遊戲」。遊戲規則是：在一塊畫有5×5方格的木塊上，兩位玩家接續著前手所切的位置，沿著方格表內的格線且不重複切地輪流切一到三個單位的長度，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。我們想知道怎麼鋸才能贏？為甚麼有時候全部鋸完才能結束遊戲，有時候卻可以在中盤就結束遊戲?我們想知道最多可鋸幾單位？怎麼樣才能在中盤快速結束遊戲並獲勝？這個數學遊戲引發了熱烈討論，於是，我們決定深入探討，以了解其奧秘。

貳、 名詞釋義

一、節點：

在nxn的方格表中，除了邊上的點外，其餘的交點，都是節點。例如，在5x5方格表中，總共有16個節點。

二、鋸木塊遊戲規則說明：

我們依據不同的遊戲類型，將遊戲規則分為兩種，如圖2-2-1：

鋸木塊遊戲類型一：漢米爾頓路徑型

在nxn的方格表中，兩位玩家接續著前手所切的位置，依方格表內的格線且不重複切地輪流切一到三個單位的長度，需切完所有節點才能結束遊戲，所鋸的路徑須形成能通過方格表中所有節點且不重複節點的路徑，也就是漢米爾頓路徑，若是玩家於中盤就結束遊戲或先將木塊鋸成兩塊者就輸了。

鋸木塊遊戲類型二：隨機型

在nxn的方格表中，兩位玩家接續著前手所切的位置，依方格表內的格線且不重複切地輪流切一到三個單位的長度，可隨時於中盤結束遊戲，亦可拜訪完所有節點且不重複經過節點才結束遊戲，先將木塊鋸成兩塊者就輸了。

圖2-2-1 遊戲類型

三、漢米爾頓路徑：

在圖形上給定任意兩節點A、B，從A節點出發要經過所有的節點且不重複節點而到達B節點，這樣的問題稱作漢米爾頓路徑（Hamilton path）。在本研究中，我們運用漢米爾頓路徑找出nxn木塊中可鋸出最多單位數的必勝路徑。

四、逆向思考法：

逆向思考法，又稱倒推法，指利用已知條件，由欲達到的目標一步一步向前倒推，直到題目中問題得到解答。

五、鏈碼(Chain code)：

鏈碼是一種用一維數字來表示二維圖形的方法，只要先定義表示移動方向的數字符號，就可以用鏈碼來標示特定圖形。本研究所定義的鏈碼及對應的移動方向如圖2-5-1所示，依據上述的鏈碼定義，以圖2-5-2為例，其圖形鏈碼為323232110。

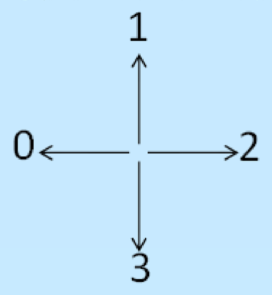
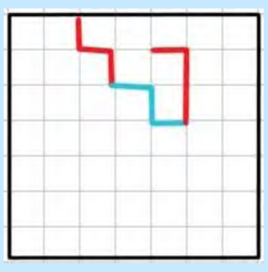


圖2-5-1 本研究中之鏈碼所對應的方向



323232110

圖2-5-2 鏈碼圖例

六、塗色法：

將nxn方格表內的節點透過塗色的樣式來進行論證的方法，如圖2-6-1所示。

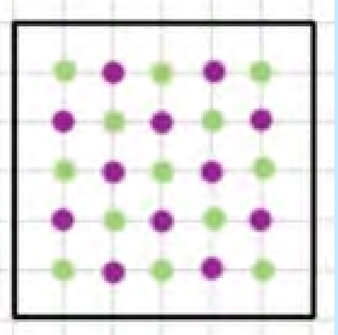


圖2-6-1 塗色法

參、 研究目的

一、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…nxn的鋸木塊遊戲的最多可切單位數。

二、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…nxn的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝路徑。

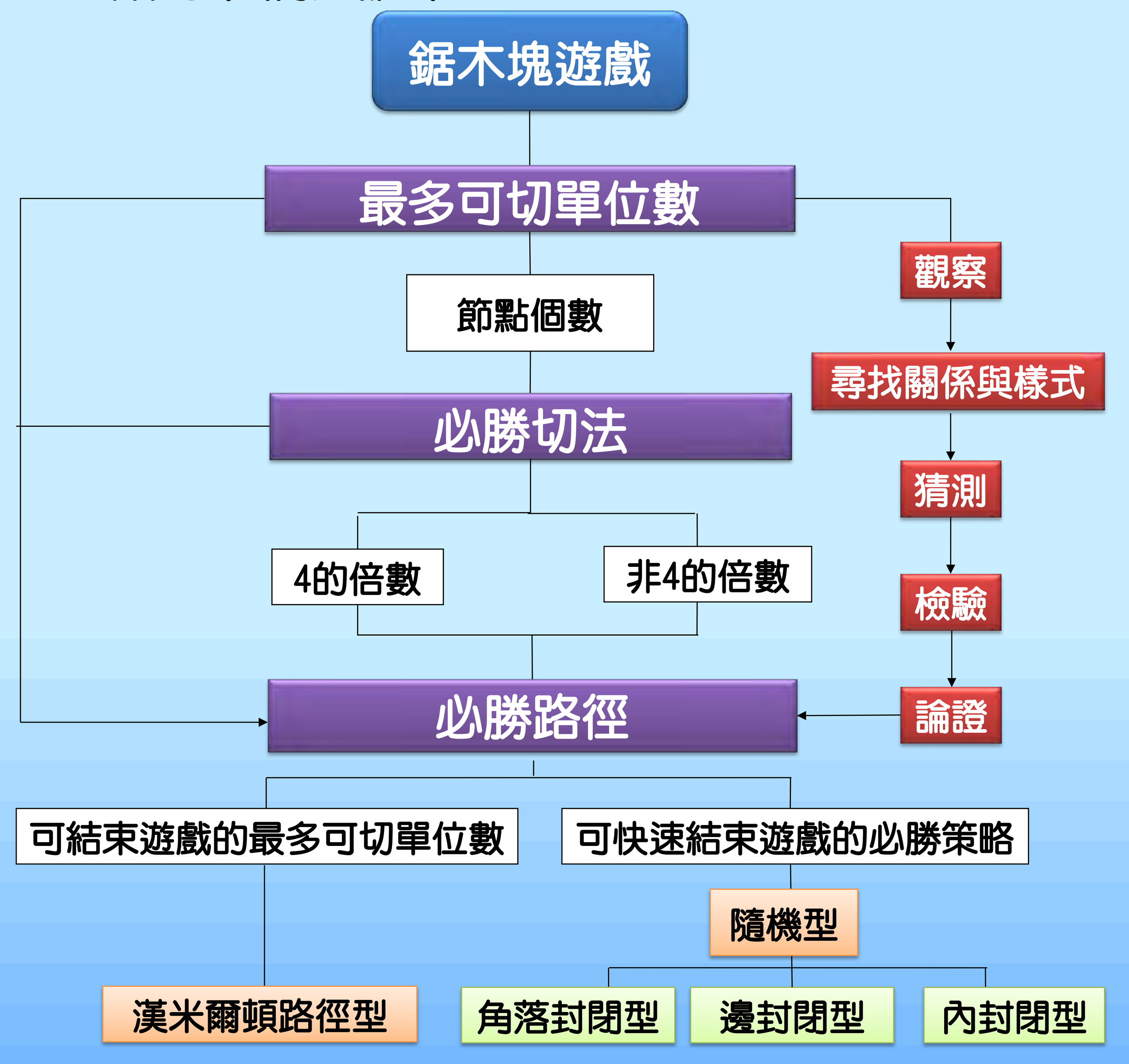
三、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…nxn的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

四、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…nxn的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

肆、研究設備及器材

繪圖軟體Doceri、觸控筆、電腦、平板電腦、方格紙

伍、研究架構與流程圖



陸、研究過程

一、 探討在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲的最多可切單位數。

1.觀察：

首先，我們嘗試在3×3方格表中進行遊戲，我們觀察到在3×3的鋸木塊遊戲中，結束遊戲的路徑類型只有兩種，且結束遊戲時所切的單位數是4單位，也就是最多可切的單位數，遊戲規則是先手或後手可輪流接續切1到3單位，因此，後手很容易獲勝，如圖6-1-1所示。

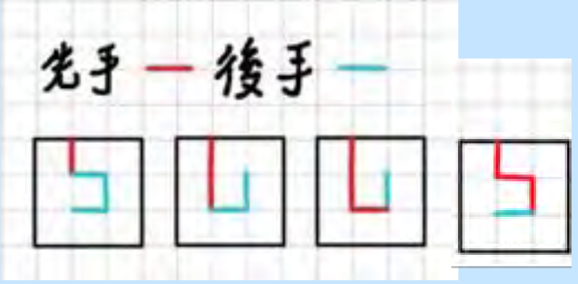


圖6-1-1 3×3鋸木塊遊戲的嘗試過程

接著我們又嘗試在4×4方格表中進行遊戲，我們觀察到可結束遊戲的路徑類型有很多種，且結束遊戲時所切的單位數也從最少4單位到最多9單位不等，如圖6-1-2所示，因此先手或後手都有可能獲勝。

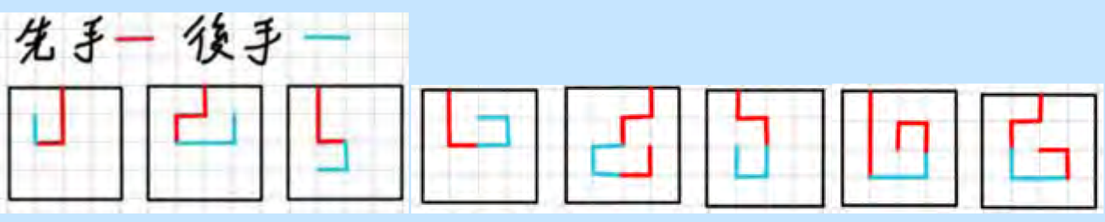


圖6-1-2 4×4鋸木塊遊戲的嘗試過程

由於遊戲規則是先手或後手可輪流接續切1到3單位，在3×3方格表中進行鋸木塊遊戲勢必是後手贏，但進行4×4的鋸木塊遊戲時，有時候是先手獲勝，有時候是後手獲勝，**我們發現4×4方格表的鋸木塊遊戲複雜度遠比3×3方格表的鋸木塊遊戲高許多，我們猜測可能與最多可切的單位數及所切的路徑有關。為了先探討最多可切單位數及形成最多可切單位數之遊戲路徑的秘密，我們將鋸木塊遊戲分成兩種玩法，第一種為漢米爾頓路徑型，第二種為隨機型。在此研究目的中，我們先依漢米爾頓路徑型，就鋸木塊遊戲中的最多可切單位數進行探討。**

2.尋找關係與樣式：

我們在尋找關係的過程中發現：結束遊戲前最多可切的單位數會隨著方格表內節點數量增加而變多，而**最多可切的單位數似乎則與邊長數有關聯，在3×3、4×4、5×5、6×6…20×20方格中，可切的最多單位數都是(邊長-1) ×(邊長-1)**，例如：3×3的最多可切單位數是2×2，也就是最多可切4單位；4×4的最多可切單位數是3×3，也就是最多可切9單位；5×5的最多可切單位數是4×4，也就是最多可切16單位，依此類推，如表6-1-1所示。

表6-1-1 3×3~20×20結束遊戲前最多可切單位數統計表

規格	最多可切單位數		規格	最多可切單位數	
3×3	(3-1)x(3-1)	4單位	12×12	(12-1)x(12-1)	121單位
4×4	(4-1)x(4-1)	9單位	13×13	(13-1)x(13-1)	144單位
5×5	(5-1)x(5-1)	16單位	14×14	(14-1)x(14-1)	169單位
6×6	(6-1)x(6-1)	25單位	15×15	(15-1)x(15-1)	196單位
7×7	(7-1)x(7-1)	36單位	16×16	(16-1)x(16-1)	225單位
8×8	(8-1)x(8-1)	49單位	17×17	(17-1)x(17-1)	256單位
9×9	(9-1)x(9-1)	64單位	18×18	(18-1)x(18-1)	289單位
10×10	(10-1)x(10-1)	81單位	19×19	(19-1)x(19-1)	324單位
11×11	(11-1)x(11-1)	100單位	20×20	(20-1)x(20-1)	361單位

3.猜測與檢驗：

透過觀察及尋找關係，我們猜測最多可切的單位數與3×3、4×4、5×5、6×6……n×n方格表中的節點個數有關，由表6-1-1中，從6x6至20x20的檢驗，**發現可切的最多單位數都是(邊長-1)×(邊長-1)，而節點個數皆為(n-1)×(n-1)，即檢驗的結果與猜測相符合。**

4.論證：

我們對上述猜測與檢驗的發現進行論證，以4×4鋸木塊遊戲為例，觀察被孤立的節點數量與所鋸單位數的關聯，如圖6-1-3。我們發現，在尚未開始遊戲前，被孤立的節點數量為9個，亦為藍色的9個點；從起點A開始切1單位後，被孤立的節點數量剩下8個；切2單位後，被孤立的節點數量剩下7個；切3單位後，被孤立的節點數量剩下6個，接著持續的切第4單位、第5單位，逐步把孤立的節點減少，最後當所有節點都被切到，沒有被孤立的節點時，總共切了9單位，節點個數會等於最多可切的單位數，如表6-1-2所示。接著我們持續嘗試在5X5、6X6方格進行鋸木塊遊戲，如圖6-1-4及圖6-1-5所示，亦發現最多可切的單位數會等於節點個數，也就是(邊長-1)×(邊長-1)，因此我們**可得證鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式即為(n-1)×(n-1)。**

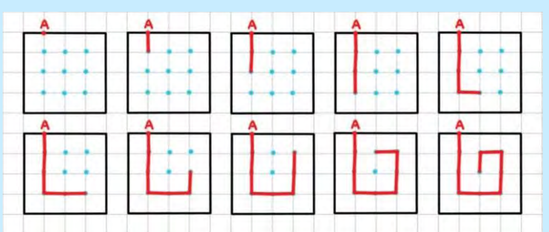


圖6-1-3 4×4鋸木塊遊戲鋸最多單位數的過程

表6-1-2 4×4鋸木塊遊戲所鋸單位數與被孤立的節點對照表

鋸木塊遊戲所鋸的刀數	被孤立的內交點個數
0	9
1	8
2	7
3	6
4	5
5	4
6	3
7	2
8	1
9	0

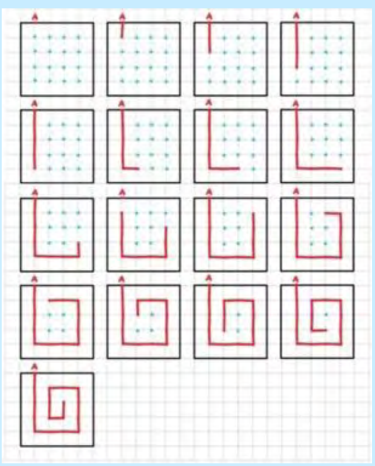


圖6-1-4 5×5鋸木塊遊戲鋸最多單位數的過程

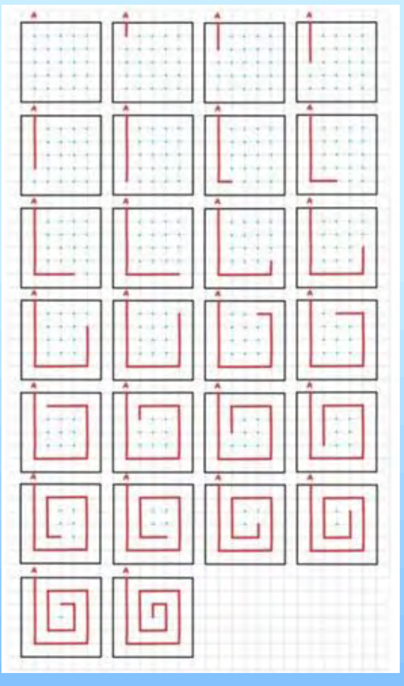


圖6-1-5 6×6鋸木塊遊戲鋸最多單位數的過程

二、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝路徑。

1. 觀察：

我們在進行鋸木塊遊戲的過程中，發現從不同起點進行4×4鋸木塊遊戲，會有不同的最多可切單位數及不同的路徑類型，像是從起點1出發可以切到所有節點，因此最多可切9單位，也就是4×4可切的最多單位數，如圖6-2-1所示，但我們也發現，如果從起點2出發則不能切完全部節點，無論如何嘗試，都會剩1個節點沒有被切到，也就是最多只能切8單位，如圖6-2-2所示。

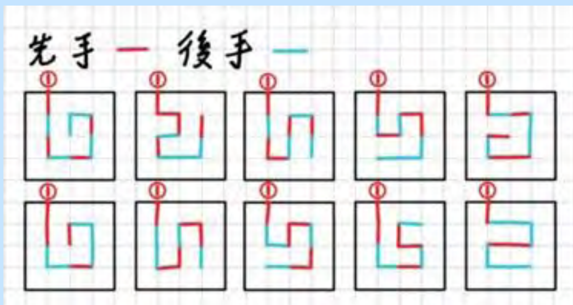


圖6-2-1 從起點1進行4×4鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

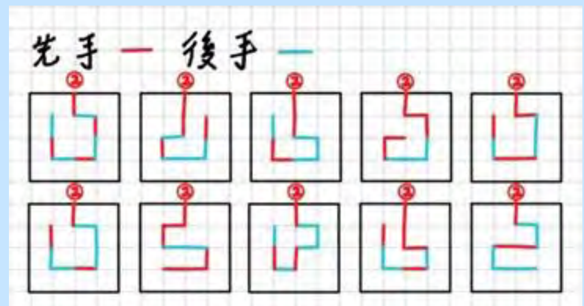


圖6-2-2 從起點2進行4×4鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

但是，當我們在5×5方格表中進行鋸木塊遊戲，我們發現從任一行列的起點進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑，無論從起點1或是起點2出發，最多可切單位數皆為16單位，也就是5×5可切的最多單位數，如圖6-2-3及圖6-2-4所示。

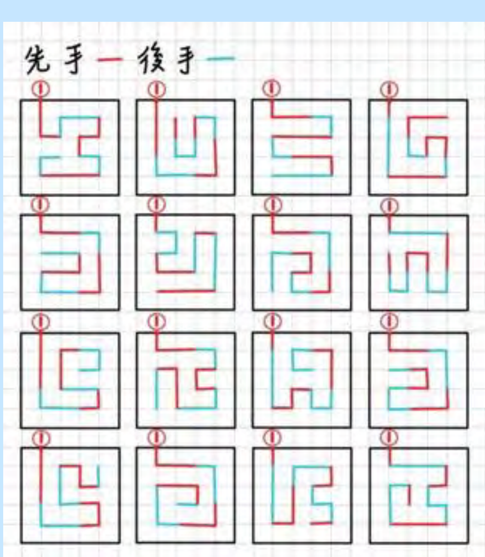


圖6-2-3 從起點1進行5×5鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

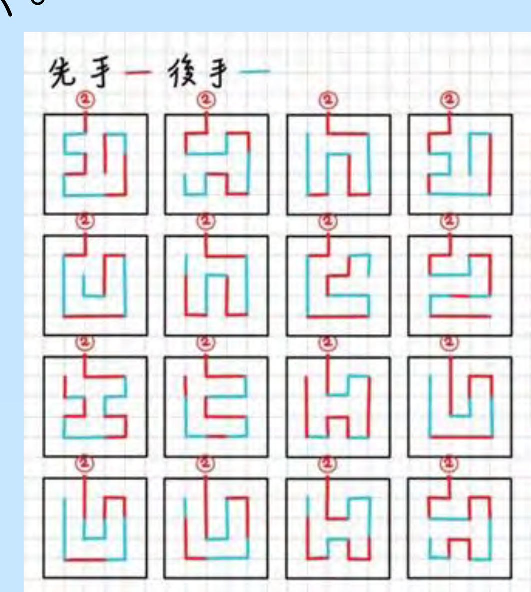


圖6-2-4 從起點2進行5×5鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

2. 尋找關係與樣式：

我們也發現在6×6的鋸木塊遊戲中，最多可切的單位數跟4×4的鋸木塊遊戲一樣，也會隨著邊界的起點位置而有所改變，從起點1、起點3出發都可以切到所有節點，最多可切25單位，但從起點2出發無論如何嘗試，都會剩1個節點沒有被切到，最多可切24單位，如圖6-2-5、6-2-6及6-2-7所示。

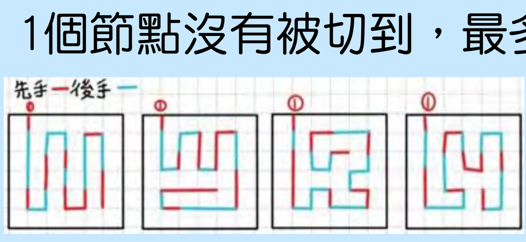


圖6-2-5 從起點1進行6×6的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

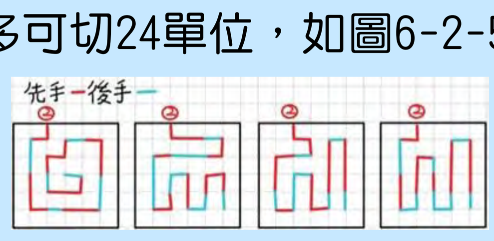


圖6-2-6 從起點2進行6×6的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

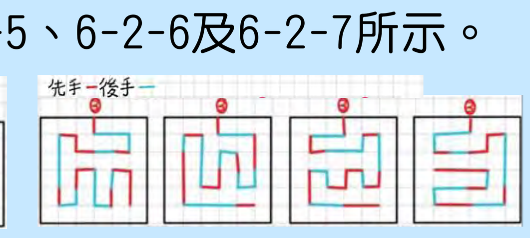


圖6-2-7 從起點3進行6×6的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

7x7的鋸木塊遊戲中，最多可切的單位數跟5×5的鋸木塊遊戲一樣，從任一行列的起點進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑，無論從起點1、起點2或起點3出發，最多可切單位數皆為36單位，也就是7×7可切的最多單位數，如圖6-2-8、6-2-9及6-2-10所示。

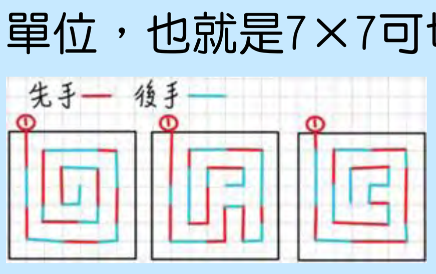


圖6-2-8 從起點1進行7×7的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

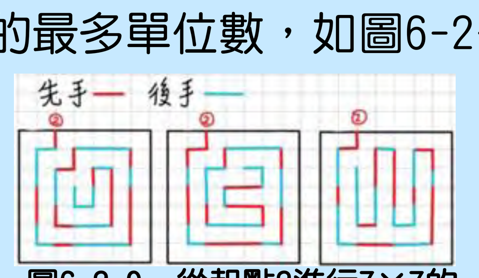


圖6-2-9 從起點2進行7×7的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

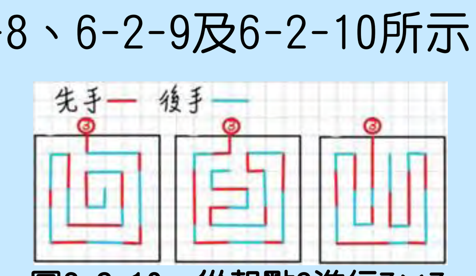


圖6-2-10 從起點3進行7×7的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

3. 猜測與檢驗：

透過探討4×4與6x6以及5×5與7x7的鋸木塊遊戲從不同起點開始切的最多可切單位數，我們**猜測：偶數方格表的最多可切的單位數都會隨著起點位置而改變，只要從偶數行或列的起點出發，無論如何嘗試，方格表內都會剩1個節點沒有被切到，但是從奇數行或列的起點出發則可切到所有節點，也就是切出最多單位數；而奇數方格表，其最多可切的單位數則不會隨著邊界起點位置而改變，不論從任一行或列的起點出發進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑。**我們持續在8×8、9×9方格表中進行探討也都發現同樣的現象，如圖6-2-11~圖6-2-18所示，也就是：

偶數方格表可切的最多單位數會因為邊界起點的位置而改變，奇數方格表則不會。

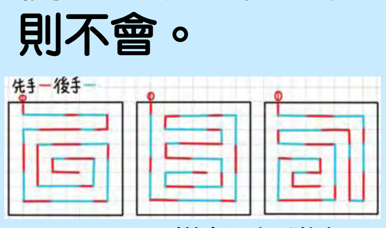


圖6-2-11 從起點1進行8×8的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

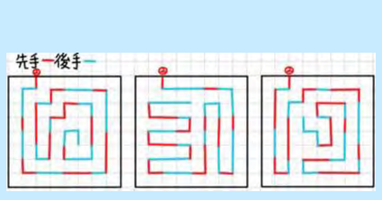


圖6-2-12 從起點2進行8×8的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

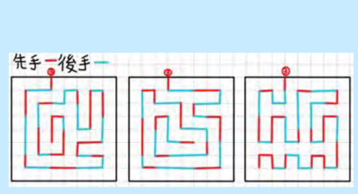


圖6-2-13 從起點3進行8×8的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

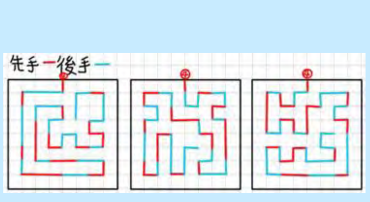


圖6-2-14 從起點4進行8×8的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

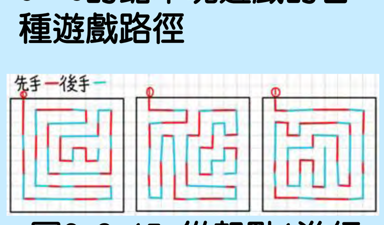


圖6-2-15 從起點1進行9×9的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

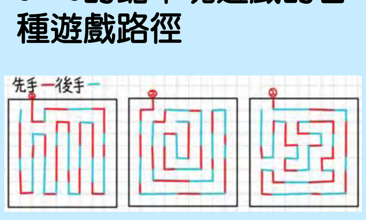


圖6-2-16 從起點2進行9×9的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

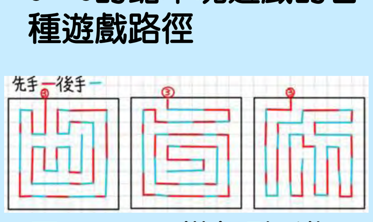


圖6-2-17 從起點3進行9×9的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

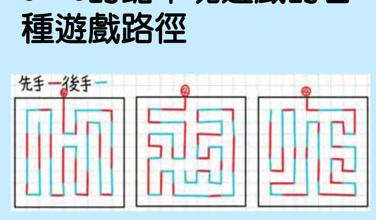


圖6-2-18 從起點4進行9×9的鋸木塊遊戲的各種遊戲路徑

4. 論證：

我們本來以編號法來找尋不同起點的最多可切單位數，但一直無法找到規律，後來老師建議我們透過塗色法來尋找規律。**經由塗色法我們發現在偶數方格表中，因為節點數共有奇數個，且綠點個數比紫點個數多一個，如果是由紫點為起點出發，則在紫點、綠點輪流切的情況下，最後必會剩下一個綠點無法切到，也就無法形成通過所有節點的漢米爾頓路徑。但如果由綠點為起點出發，則在綠點、紫點輪流切的情況下，便能切完所有的綠點與紫點，也就是切完所有的節點，而形成通過所有節點的漢米爾頓路徑。**同時我們也發現，在奇數方格表中，因為節點數共有偶數個，而且綠點與紫點的個數相同，所以不論是由紫點為起點出發，或是由綠點為起點出發，都能切完所有節點形成通過所有節點的漢米爾頓路徑，如圖6-2-19、6-2-20所示。

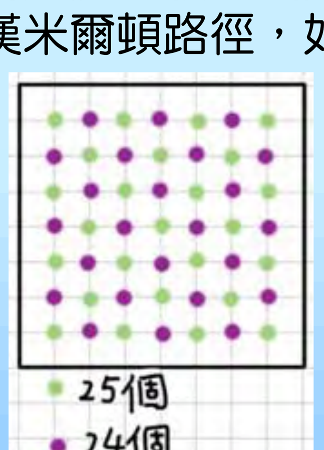


圖6-2-19 8×8 方格表塗色法

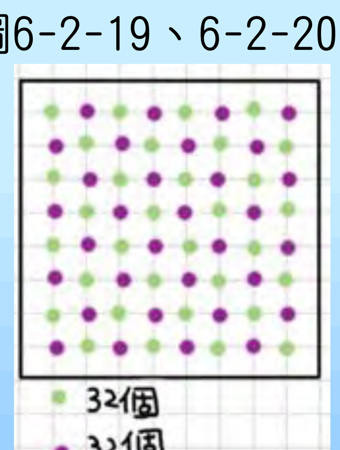


圖6-2-20 9×9 方格表塗色法

由此論證的結果，為了要使鋸木塊遊戲能具有漢米爾頓路徑型，因此，對於偶數方格表，我們增加遊戲規定：先手玩家要從奇數行或列的節點出發開始遊戲。

三、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

1. 觀察：

從前述的研究中，我們發現了在方格表中可形成最多可切單位數的遊戲路徑，而在遊戲規則中，兩位玩家可接續前手輪流切一到三個單位的長度，**我們想知道在不同的偶數及奇數方格表中，若想切出最多可切單位數的遊戲路徑，先手或後手各要怎麼切才能獲勝？有沒有容易獲勝的一方？最多可切的單位數與必勝切法有沒有關連？**

2. 尋找關係與樣式：

這些問題困擾我們許久，老師建議我們可以運用**逆向思考法**。我們先從4×4的鋸木塊遊戲探討，由於4x4是偶數方格表，從前述的研究中得知偶數方格表必須從奇數點出發開始切，才能切到最多可切單位數，也就是切到所有節點。以4×4的鋸木塊遊戲為例，最多可切到9個節點，我們將這9個節點從方格表中取出，先排成一直線作思考，如圖6-3-1所示。發現若是要在遊戲中獲勝，必須要搶先鋸到第9個點，由於在遊戲規則中，兩位玩家可輪流接續前手切一到三個單位，**透過逆向思考法，我們發現為了搶先鋸到第9個點，就必須搶先鋸到第5個點，為了搶先鋸到第5個點，就必須搶先鋸到第1個點。因此，總是可以鋸到第1個點的先手，若能從起點1出發，且第一回合先只鋸1單位，就能在之後進行遊戲時，接續後手鋸(4-後手所切的單位數)單位，即可順利鋸到第5個點及第9個點並獲勝。**

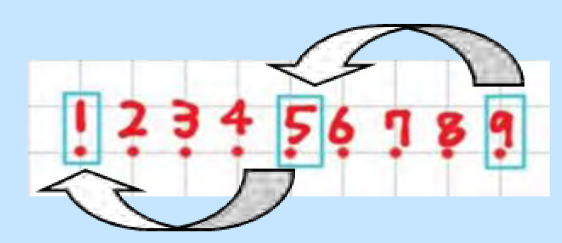


圖6-3-1 運用逆向思考法對4×4鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程(起點1)

我們又對5×5鋸木塊遊戲進行探討，由於5x5是奇數方格表，從前述的研究中得知，奇數方格表最多可切的單位數不會隨著邊界起點位置而改變。所以5x5鋸木塊遊戲不論從哪一個起點出發最多都可切16單位，也就是每個節點都會被切到。我們一樣將這16個節點從方格表中取出，先排成一直線作思考，如圖6-3-2所示。我們發現若是要在遊戲中獲勝，必須要搶先鋸到第16個點，由於在遊戲規則中，兩位玩家可接續前手輪流切一到三個單位，**透過逆向思考法，我們發現為了搶先鋸到第16個點，就必須搶先鋸到第12個點，為了搶先鋸到第12個點，必須搶先鋸到第8個點，為了搶先鋸到第8個點，必須搶先鋸到第4個點，為了搶先鋸到第4個點，一開始就不能鋸到第1個點。所以，總是可以不鋸到第1個點的後手，若是能在進行遊戲時，鋸(4-先手所切的單位數)單位，就能鋸到第4個點、第8個點、第12個點及第16個點並獲勝。**

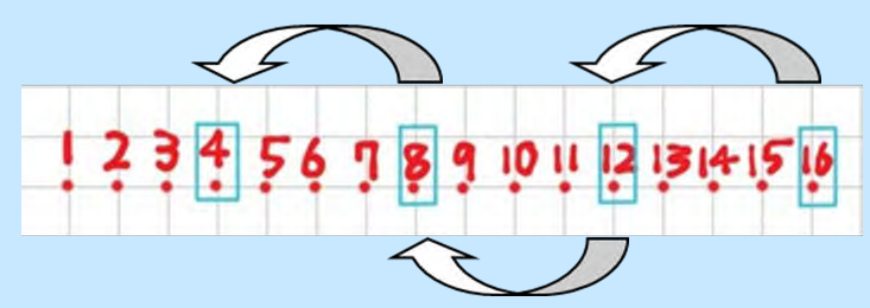


圖6-3-2 運用逆向思考法對5×5鋸木塊遊戲必勝切法的推演過程

3. 猜測與檢驗：

透過探討4×4及5×5鋸木塊遊戲的最多可切單位數與必勝切法，我們猜測：如果方格表中可切的最多單位數是4的倍數，則後手會有必勝切法，後手只要切(4-先手所切的單位數)單位就能獲勝；如果方格表中最多可切單位數不是4的倍數，則先手會有必勝切法，先手只要先切(總單位數÷4後的餘數)單位，之後接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。根據以上推論，我們持續探討在6×6及7×7的鋸木塊遊戲中的必勝切法，亦發現方格表中**最多可切的單位數與必勝切法確實有關連，而且不同的最多可切單位數也會讓先手或後手有必勝切法，如果方格表中可切的最多單位數是4的倍數，後手會有必勝切法；如果方格表中最多可切單位數不是4的倍數，先手會有必勝切法。而且我們也發現先手永遠只要先切1單位，之後再接續後手切(4 -後手所切的單位數)單位就能獲勝。**

4. 論證：

我們對於方格表中可切的最多單位數不是4的倍數時，為甚麼先手永遠只要先切1單位而不是切2單位或3單位，之後再接續後手切(4-後手所切的單位數)單位就能獲勝這個問題感到非常好奇，於是在數學課時我們請問了老師這個問題，老師建議我們可以經由**乘法分配律**來解決這個問題。以下就是我們的論證：**因為偶數方格表內部的節點個數是$(2k+1)x(2k+1)$，如果我們把節點個數$(2k+1)x(2k+1)$看成面積的話**，就會變成如圖6-3-3所示，在圖中左上方的面積$(2k)^2$會是4的倍數，旁邊兩個長方形面積都為4k也會是4的倍數，因此就只有右下方粉紅色區域的1不能被4整除，所以先手在偶數方格表只要先切1單位，再切(4 - 後手所切的單位數)，先手就可以獲勝。

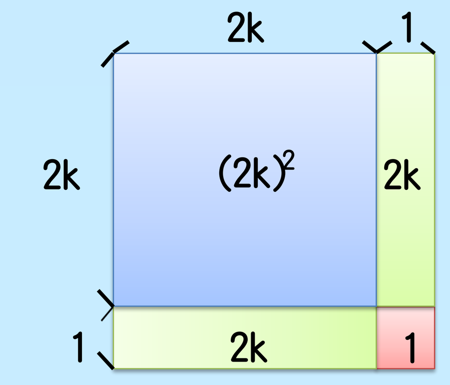


圖6-3-3 以面積表示乘法分配律

四、探討在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略

在進行鋸木塊遊戲時，我們觀察到有時可以切最多單位數，直到切到所有節點才結束遊戲，但也可以切很少單位數就很快結束遊戲，這讓我們想進一步探討**如何在隨機進行鋸木塊遊戲，不限定一定要切完所有節點的遊戲類型下，能快速結束遊戲的必勝策略，有了必勝策略之後，除了可以讓玩家快速獲勝，也可以避免讓自己落入提早結束遊戲的陷阱裡。**

1. 觀察：

我們將4×4、5×5、6×6、7×7方格的鋸木塊遊戲中在第1回合(先手和後手各走一次)的後手必勝路徑及第1.5回合(先手走兩次，後手走一次)的先手必勝路徑，依據不同的遊戲起點、所需切的單位數及方格表的大小來歸納。但在觀察遊戲路徑時遇到了一個難題：我們畫出了許多路徑，如表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中的這些圖形(如說明書p. 14~p. 23所示)，卻不知如何定義路徑圖形，因此，我們就向老師求救，老師教我們試著用鏈碼來表示圖形，於是**我們自訂了鏈碼及四個對應方向如圖6-4-1，並將鏈碼標示於圖形路徑下方，以進行圖形的觀察與歸納。**

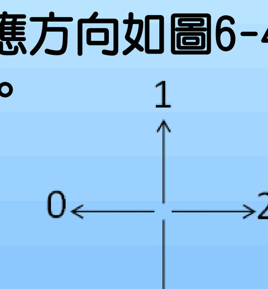


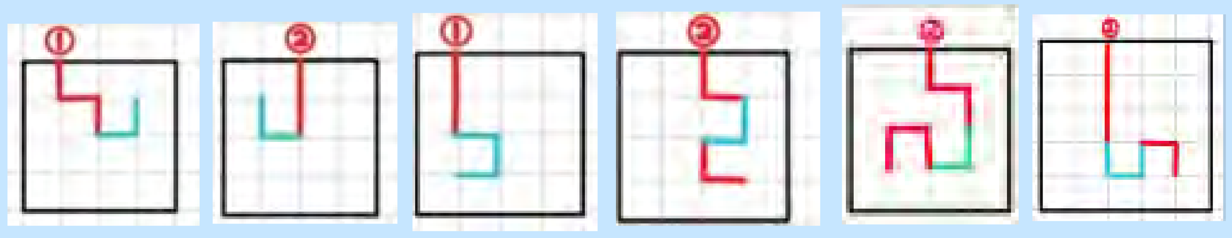
圖6-4-1 本研究之鏈碼所對應方向

2. 尋找關係與樣式：

透過觀察表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6，我們發現在不同大小的方格表中，只要是切相同單位數，就可能出現相同或類似的必勝路徑，**而這些必勝路徑的樣式似乎就像是神奇的海螺，都有向內彎以找到封閉點結束遊戲的特性，因此我們依據不同位置但皆可結束遊戲的封閉點，將圖形分成角落封閉點、邊封閉點及內封閉點三大類，藉以進一步探討這些圖形的關係。**

（1）角落封閉點

在整理角落封閉點的圖形樣式後，發現這些圖形即使方格表大小不同，或者從不同邊界起點出發，甚至是所切的單位數不同，但他們最後切的三個單位其圖形鏈碼可能為321、301、230、032、103、123，如圖6-4-2鏈碼紅字所示，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，如圖6-4-3所示。此外我們也發現圖形鏈碼為321的勾勹狀圖形經過翻轉、鏡射、旋轉後，就可以形成其他301、230、032、103、123五種圖形。



32321 3301 33230 323032 32330103 33332123

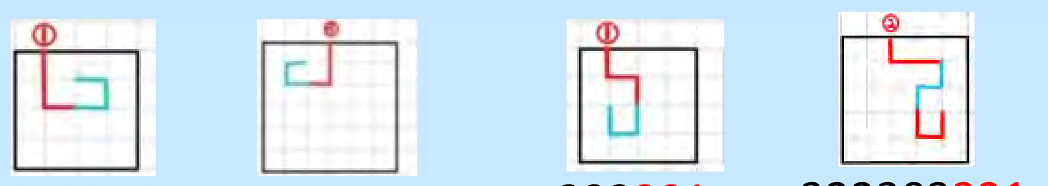
圖6-4-2 角落封閉點結束遊戲前最後三單位的鏈碼

32321 303221 3301 333011

圖6-4-3 角落封閉點圖形樣式延伸範例

（2）邊封閉點

在整理邊封閉點的圖形樣式後，發現這些圖形即使方格表大小不同，或者從不同邊界起點出發，甚至是所切的單位數不同，但最後切的三個單位其圖形鏈碼可能為210、012、301、321，如圖6-4-4鏈碼紅字所示，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，如圖6-4-5所示。此外我們也發現圖形鏈碼為210的勾勹狀圖形經過翻轉、鏡射、旋轉後，就可以形成其他012、301、321三種圖形。



332210 330012 323301 322303321

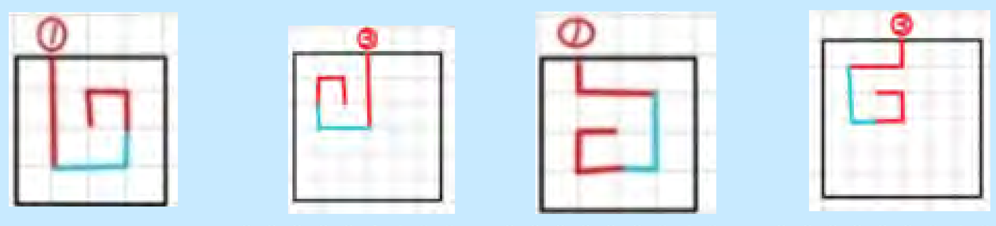
圖6-4-4 邊封閉點結束遊戲前最後三單位的鏈碼

332210 33232110 323301 32323001

圖6-4-5 邊封閉點圖形樣式延伸範例

（3）內封閉點

在整理內封閉點的圖形樣式後，發現內封閉點的遊戲路徑僅出現在1.5回合的鋸木塊遊戲中，也發現要構成內封閉點遊戲路徑須至少切八個單位，不過，我們依然有找出內封閉點的圖形樣式，這些圖形即使方格表大小不同，或者從不同邊界起點出發，甚至是所切的單位數不同，但他們最後切的三個單位其圖形鏈碼可能為103、123、012、210，如圖6-4-6鏈碼紅字所示。此外，再進一步探討，我們也發現圖形鏈碼為103的勾勹狀圖形經過翻轉、鏡射、旋轉後，就可以形成其他123、012、210三種圖形。



333221103 333001123 322330012 300332210

圖6-4-6 內封閉點結束遊戲前最後三單位的鏈碼

3. 猜測：

我們猜測在進行遊戲時，**若能運用逆向思考法，依據不同封閉點的圖形樣式，在遊戲中觀察前一手所鋸的路徑，若其出現不同封閉點的關鍵點及關鍵路徑，就能找出必勝策略**，取得致勝先機，使玩家能不用走完所有節點就在中盤快速結束遊戲。

4. 驗證：

為了驗證我們的猜測，我們依據結束遊戲時的角落封閉點、邊封閉點及內封閉點分別進行必勝策略的探討。

（1）角落封閉點

在歸納角落封閉點的圖形樣式及尋找關係與樣式後，發現當前一手的遊戲路徑進入方格表中距離邊界第二行或第二列的紫色關鍵點時，由於遊戲規則中玩家可接續前一手切一到三個單位，則下一手即可將遊戲路徑切到角落封閉點以結束遊戲，如圖6-4-7所示。我們也發現除了掌握紫色關鍵點以外，若前一手所切的路徑落到方格表任一角落的1x2或2x1網格，就可留意紫色關鍵點與其他顏色關鍵點所組成的關鍵路徑，如圖6-4-8所示，**只要留意到前一手走到方格表中的紫色關鍵點、紫+綠連線、紫+綠+紅連線、紫+綠+黃連線或紫+綠+黃+粉紅連線，則下一手也可將遊戲路徑切到角落封閉點以結束遊戲**，而對照表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中所出現的角落封閉點圖形，也可驗證了我們策略是可行的。

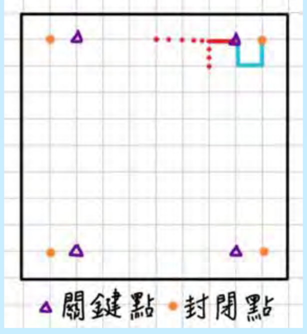


圖6-4-7 角落封閉點與關鍵點

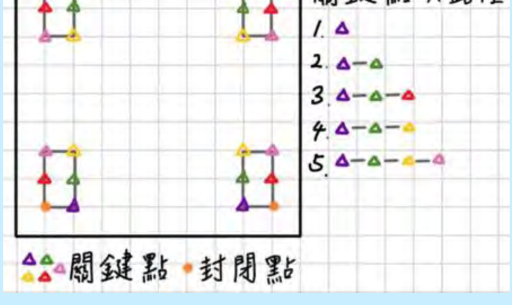


圖6-4-8 角落封閉點、關鍵點與關鍵路徑

（2）邊封閉點

在歸納邊封閉點的圖形樣式及尋找關係與樣式後，發現在進行鋸木塊遊戲時，**若是能搶先占得方格表內邊界上1x3或3x1網格短邊上的兩點，而對手接著占了1x3或3x1網格上長邊的紫色關鍵點上的任一到三點，即可將遊戲路徑切到邊封閉點以結束遊戲**，如圖6-4-9所示。而對照表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中所出現的邊封閉點圖形，也可驗證了我們策略是可行的。

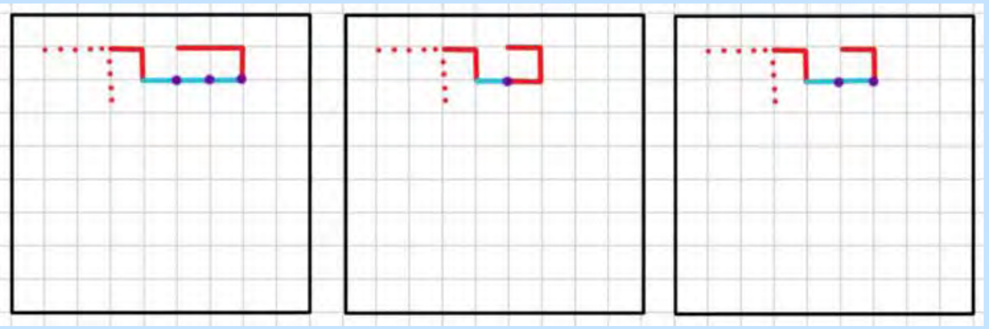


圖6-4-9 邊封閉點、紫色關鍵點與結束遊戲的路徑

（3）內封閉點

我們在歸納內封閉點的圖形樣式及尋找關係與樣式後，**發現玩家可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，若對手也佔了2x2網格上的兩到三個點讓路徑呈現勹子型，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，則玩家可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲。**此外，由於玩家佔據2x2網格上的三個點有三種方式，分別為直線型、L型、閃電型，因此圖形樣式可歸類為三種類型。若玩家選擇以直線型、L型為目標結束遊戲，可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，若對手也佔了2x2網格上三個點讓路徑呈現勹子型，則玩家可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲。惟在閃電型中，玩家可於鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，接著無論對手佔據二或三個點都可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲，如圖6-4-10所示。而對照表5-2-3、表5-2-4、表5-2-5、表5-2-6中所出現的內封閉點圖形，也可驗證了我們策略是可行的。

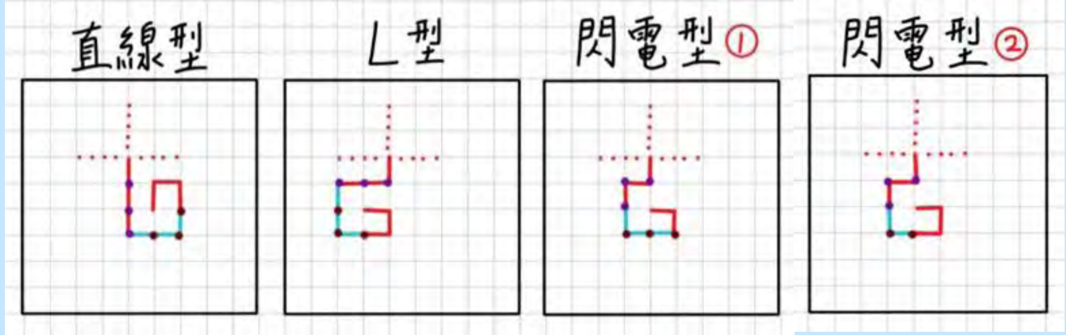


圖6-4-10 形成內封閉點的三種遊戲路徑樣式

柒、研究結果

一、在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數。

在3×3、4×4、5×5、6×6… n×n的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數與3×3、4×4、5×5、6×6…n×n方格表中的節點個數有關，可切的最多單位數都是(邊長-1)×(邊長-1)，而節點個數皆為(n-1)×(n-1)，兩者相符合。

二、在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數的必勝路徑。

在3×3、4×4、5×5、6×6… n×n的鋸木塊遊戲中只要所切的路徑經過所有的節點，則所切單位數即為最多單位也就是所有節點數，而當我們嘗試在3×3、4×4、5×5等方格表中畫出經過所有節點的路徑時發現，這些最多可切單位數可結束遊戲路徑的走法雖然有很多種，**但全都是從起點經過所有的節點且不重複節點而結束遊戲的漢米爾頓路徑（Hamilton path）。在偶數方格表的鋸木塊遊戲中，最多可切的單位數會隨著起點位置而改變**，只要從偶數行或列的起點出發，無論如何嘗試，方格表內都會剩1個節點沒有被切到，但是從奇數行或列的起點出發則可切到所有節點，也就是切出最多單位數經過所有節點的漢米爾頓路徑，因此，**對於偶數方格表，必須增加遊戲規定，即規定先手玩家要從奇數行或列的起點出發開始遊戲；而在奇數方格表的鋸木塊遊戲中，其最多可切的單位數則不會隨著邊界起點位置而改變，不論從任一行或列的起點出發進行遊戲，皆可切出最多可切單位數，也就是通過所有節點的漢米爾頓路徑。**

三、在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中的必勝切法是：**如果方格表中可切的最多單位數是4的倍數，後手會有必勝切法，後手要切(4-先手所切的單位數)單位就能獲勝；如果方格表中最多可切單位數不是4的倍數，先手會有必勝切法，先手要先切1單位，之後接續後手切(4-後手所切的單位數)單位就能獲勝。**

四、在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

我們分別針對**角落封閉點、邊封閉點及內封閉點**三大快速結束遊戲的路徑，提出必勝策略，可供玩家在進行鋸木塊遊戲時隨機運用，以快速結束遊戲。

（1）角落封閉點的必勝策略：

當觀察到對手所切的路徑落到在方格表任一角落的1x2或2x1網格，就可根據對手所切到網格中的節點或這些節點之間所連成的關鍵路徑，接著切一到三單位，將遊戲路徑切到角落封閉點以結束遊戲。

（2）邊封閉點的必勝策略：

在進行鋸木塊遊戲時，若是能搶先占得方格表內邊界上1x3或3x1網格短邊上的兩點，而對手接著占了1x3或3x1網格上長邊關鍵點上的任一到三點，則玩家即可將遊戲路徑切到邊封閉點以結束遊戲。

（3）內封閉點的必勝策略：

在鋸木塊遊戲時，先佔2x2網格的三個點，若對手也佔了2x2網格上的兩到三個點讓路徑呈現勹子型，或者為上述圖形的延伸、翻轉、旋轉所形成的樣式，則玩家可將遊戲路徑切到內封閉點以結束遊戲。

捌、結論

本研究探討在n×n的方格表中，如何進行鋸木塊遊戲才能獲勝的方法。我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、在鋸木塊遊戲進行過程中，由鏈碼的樣式可提供定向的作用，使玩家快速找到角落封閉點、邊封閉點、內封閉點及必勝路徑。

二、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式為：(n-1)×(n-1)。

三、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝路徑。

四、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中最多可切單位數的必勝切法。

五、找到在3×3、4×4、5×5、6×6…n×n的鋸木塊遊戲中可快速結束遊戲的必勝策略。

玖、參考資料

一、國民小學課本南一版第6冊。
二、許志農（2012）。戲說數學。取自 http://tblog.pcsh.ntpc.edu.tw/lifetype/gallery/59/戲說數學.pdf