中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080412

璀璨幾何~多面體之規律探究

學校名稱：雲林縣莿桐鄉大美國民小學

作者：	指導老師：
小六 林霈璇	林昭君
小六 王亭予	紀宗霖
小六 廖俊傑	
小六 孫鋐晟	
小六 馮聖元	
小六 張哲丞	

關鍵詞：正多邊形、立體角、多面體

摘要

本研究從圓內接正多邊形開始，延伸多面體之規律探討，分為三部分：

一、探索：名詞解釋。

二、分析與統整：

(一)圓內接正多邊形有無限多個。

(二)正多邊形組成立體角的個數為 3、4、5 個正三角形、3 個正方形、3 個正五邊形。

(三)截面後之多面體稜線、點、面有其相關規律可推導。

三、延伸

(一)依 1:1 邊長比例截面，5 種柏拉圖立體可截出半正多面體；在 3 等分截面時，正四面體、正八面體、正二十面體可依 1:1:1 邊長比例截面，截出半正多面體，正六面體須以 $1:\sqrt{2}:1$ 邊長比例、正十二面體須以 1:1.6:1 邊長比例，才能截出半正多面體。

(二)共找出 7 個阿基米德立體、4 個類似阿基米德立體及 12 個均勻多面體、3 組對偶多面體。

壹、 研究動機

學校的學長、姐去年做過的科展裡提到了圓內接正多邊形，引起我們的好奇，圓內接多邊形的規律。我們上網查了如何畫圓內接正多邊形，意外看到正多面體只有5個，是柏拉圖立體。我們很想知道什麼是正多面體？與正多邊形有何關聯？除了柏拉圖立體外，還有沒有其他的正多面體？後來我們在老師桌上看到了「數學也可以這樣學-結合數學概念與自然觀察的華德福式學習法」這本書，裡面介紹了大自然裡也有類似的情況，於是我們決定進行研究。

貳、 研究目的

一、 探討圓內接正多邊形之關係。

二、 探討平面圖形與多面體之頂角關係。

三、 認識並探討正多面體的點、線、面之規律。

四、 將柏拉圖立體依特定邊長比例截角，探查截角後多面體點、線、面之規律。

五、 尤拉公式、阿基米德立體、對偶多面體、均勻多面體與多面體之關係探討。

六、 從正多面體截角結果歸納並建構出截角多面體的模組。

參、 文獻探討

一、名詞定義：我們依據課本所提到之多邊形、正多邊形、柱體及正多面體等上網查詢其數學定義，在維京百科上查到相關定義。

(一)正多邊形：正多邊形是各邊都等長，各內角都相等的多邊形，可分為兩種：凸正多邊形與凹正多邊形。談及「正多邊形」時一般指前者。

(二)多面體：是指三維空間中由平面和直邊組成的幾何形體。

(三)正多面體：或稱柏拉圖立體，指各面都是全等的正多邊形且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體。

(四) 尤拉定理：有名的數學家尤拉，在1752年發現各種正多面體間的關係：面數＋頂角數＝邊數＋2。

(五) 對偶多面體：在幾何學，若一種多面體的每個頂點均能對應到另一種多面體上的每個面的中心，它就是對方的對偶多面體。

(六)阿基米德立體：阿基米德立體是一種高度對稱的半正多面體，且使用兩種或以上的正多邊形為面的凸多面體，並且都是可以從正多面體經過截角、截半、截邊等操作構造，共有13種。

(七)均勻多面體：在幾何學中，均勻多面體是一種具有正多邊形且所有的頂點是同一規律的，所以該多面體具有具有高度反射和旋轉對稱。

肆、 研究設備及器材

一、 圓規、尺。

二、 各式色鉛筆、色紙、完稿紙、彩色投影片。

三、 剪刀、切割墊、雙面膠。

四、 數位相機、電腦、印表機。

伍、 研究過程或方法

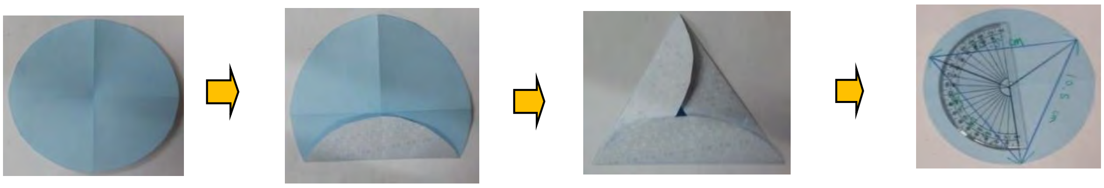
一、 上網查出相關之名詞定義。

二、 研究一：利用摺紙探討圓內接接正多邊形之關係。

(一) 我們利用色紙剪下半徑 6.4 公分的圓，分別依 4、8、16、3、6、12、5、7、9 等分摺出扇形，再畫出其圓內接正多邊形，量出各扇形圓心角。

圖一：利用摺紙摺出各式正多邊形(以正三角形為例)

3 等分



將圓對摺兩次，使兩條垂直的直徑將圓分成四等分。

取出圓心，並將其中之一條半徑對摺成一半(半徑 1/2)。

取出此弓形弦的兩端，即與弓形垂直的直徑與圓周相交的點，往圓心摺起，即完成。

量出圓內接正三角形之邊長及各扇形圓心角。

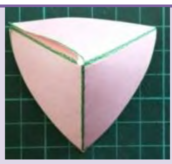
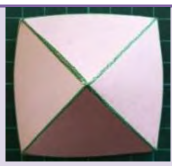
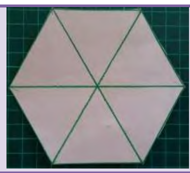
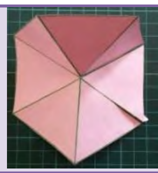
(二)再將分別依 4、8、16、3、6、12、10、7、9 等分摺出圓內接正多邊形，整理成數據。

三、研究二：探討平面圖型與立體圖形之關係。

將正三角形、正方形、正五邊形及進行拼貼。

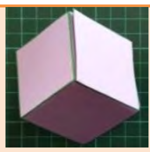
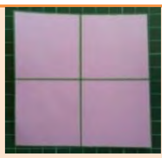
(一)分別用 3—7 個正三角形湊成立體角，如表一。

表一

個數	3 個正三角形	4 個正三角形	5 個正三角形	6 個正三角形	7 個正三角形
圖形					

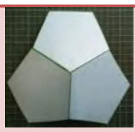
(二)分別用 2-4 個正方形湊成立體角，如表二。

表二

個數	2 個正方形	3 個正方形	4 個正方形
圖形			

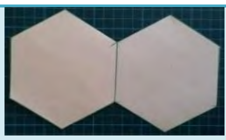
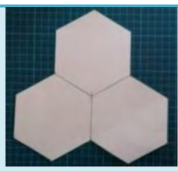
(三) 分別用 2-4 個正五邊形湊成立體角，如表三。

表三

個數	2 個正五邊形	3 個正五邊形
圖形		

(四) 分別用 2-3 個正六邊形湊成立體角，如表四。

表四

個數	2 個正六邊形	3 個正六邊形
圖形		

四、研究三：認識並探討正多面體的組成結構。

(一) 我們利用完稿紙以圓半徑 5 公分為基底，畫出正四面體、正八面體、正二十面體 3 個柏拉圖立體之展開圖及邊長 3.6 公分之正十二面體展開圖和邊長 5 公分之正六面體展開圖。

(二) 將 5 個柏拉圖展開圖分別組合成「正四面體」、「正六面體」、「正八面體」、「正十二面體」及「正二十面體」。

(三) 分別計算其頂點數、邊數及面數，並進行規律探討。

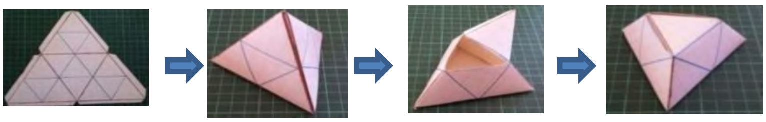
圖二：製作柏拉圖立體流程(以正面體為例)

五、研究四：探討柏拉圖透過有規律的切割，所形成新多面體的點、線、面之關係。

(一) 第一次截角研究：

1. 將研究三所製作之 5 個柏拉圖立體，分別依邊長 1:1 及 1:1:1 進行第一次截角，步驟如圖三(以正四面體邊長 1:1 截角為例)。

圖三



在完稿紙中畫出展開圖　組合成正四面體　分別在 4 個頂點處截角　分別在 4 個截角處補上面(第 1 個截角)

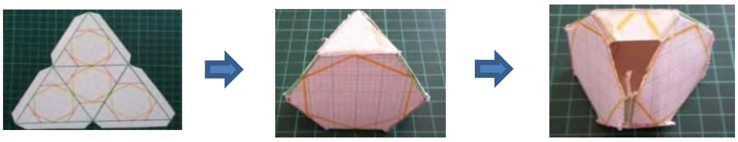
分別在 4 個截角處補上面(第 2 個截角)　分別在 4 個截角處補上面(第 3 個截角)　分別在 4 個截角處補上面(第 4 個截角)

2.觀察其截角切面、計算其頂點數、線數及面數，並尋找其規律。

(二)第二次截角研究：

1. 將研究四(一)所製作之 7 個新截角立體，分別依邊長 1:1 及邊長 1:1:1 進行第二次截角，步驟如下(以正四面體邊長 1:1:1 截角之八面體進行第二次邊長 1:1 截角為例)。

圖四



在完稿紙上畫出正四面體展開圖

依實驗四(一)先裁去 1/3 截角，產生新型態八面體。

在新形式八面體上，分別於新頂點截出 1/2 大截角。

2. 觀察其截角切面、計算其頂點數、線數及面數，並尋找其規律。

六、研究五：截角與多面體之關係探究

(一)五-(一)1:1 邊長比例及 1:1:1 邊長比例截角頂點與臨邊規律之探討

1. 我們在研究三、四中發現依不同比例截角，會產生不同的截面形狀，1:1 邊長比例截角會產生四邊形之截面、1:1:1 邊長比例截角則會產生三角形之截面。

2. 我們找出各個多面體之截角與頂點，試圖找出其規律。

圖五

(二)五-(二)最適合正六面體及正十二面體之邊長截角比例

1. 我們在研究三、四中發現正四面體、正八面體和正二十面體等 3 個由正三角形組成的柏拉圖立體，以邊長 1:1:1 進行截角，皆可以對應阿基米德立體，正六面體及正十二面體之原面截完後卻不是正多邊形，因此比例更換，再次進行截角實驗。

2. 找出最適合正六面體及正十二面體之邊長截角比例。

(1) 先分別在正六面體及正十二面體上畫出邊長 1:1 及 1:1:1 之截角圖，並量出其截完之原面及截面邊長進行大、小差異比對。

(2) 探究其原面正多邊形之角度與截角長度比例之關係。

圖六

(二)五-(三)頂點相鄰原面形狀之差異影響截面形狀之探究

1. 在研究三、四中發現，第一次截角完之多面體，頂點相鄰之面已不是同一形狀，在進行第二次截面後，發現第二次截面，無論是邊長 1:1 或邊長 1:1:1 截角，皆無法截出正多邊形之截面。

2. 我們將第一次截角之截面與第二次截角之截面，進行角度大小與邊長大小之比較。

圖七

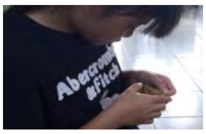
七、研究六：對偶對面體之規律探究。

(一)我們在研究三時，找到一個特別的多面體規律為「對偶多面體」。

(二)利用投影片及透明塑膠板，作出柏拉圖立體之對偶多面體。

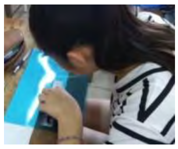
(三)探討其規律及關係。

圖八



製作正十二面

利用線量出面中心點之間的距離



製作內層二十面體中

完成內層二十面體

完成第一層二十 VS 十二對偶多面體

完成第二層二十 VS 十二對偶多面體

七、研究八：從正多面體截角結果歸納並建構出截角多面體的模組。

我們依上述所有研究結果，將 26 個多面體分類，並對比阿基米德立體、均勻多面體及對偶多面體規律，建構出截角多面體之模組。

伍、結果

二、研究一：利用摺紙探討圓內接接正多邊形之關係

我們利用色紙剪出半徑為 6.4 公分之圓，再將分別依 4、8、16、3、6、12、10、7、9 等分摺出圓內接正多邊形，整理成表一。

表一

圓之等分	每一扇形佔圓之比例	每一扇形圓心角角度	扇形總角度	圓心角正確角度	圓內接正多邊形
4	1/4	90°	360°	90°	正方形
8	1/8	45°	360°	45°	正八邊形
16	1/16	22.5°	360°	22.5°	正十六邊形
3	1/3	120°	360°	120°	正三角形
6	1/6	60°	360°	60°	正六邊形
12	1/12	30°	360°	30°	正十二邊形
10	1/10	36°	360°	36°	正十邊形
7	1/7	約 52°	360°	$(360/7)^{\circ}$	正七邊形
9	1/9	40°	360°	40°	正九邊形

(一)發現

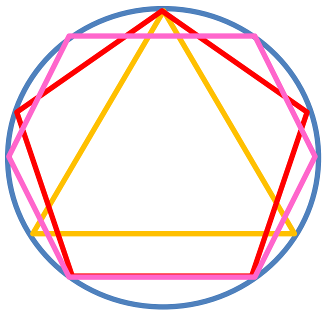
1.我們發現只要是 360 的因數進行等分，每一扇形的角度皆可以是整數，如 4、8、16、3、6、12、10、5、9 等分，且都能順利摺出多圓內接多邊形。

2.在 7 等分中，因為 360 無法被 7 整除，所以每一扇形角度無法一致，有誤差。

3.圓內接正多邊形有無限多個。

(二)分析

當圓內接正多邊形越多邊，越接近圓。



依正多邊形內角計算公式

「內角=(頂點數-2)×180°÷頂點數」

正三角形內角=(3-2) ×180°÷3=60°

正方形內角=(4-2) ×180°÷4=90°

正五邊形內角=(5-2) ×180°÷5=108°

正六邊形內角=(6-2) ×180°÷6=120°……

正九十邊形內角=(90-2) ×180°÷90=176°

推論：正多邊形的邊數越多，越趨近於圓。

三、研究二：平面圖型與立體圖形之關係探討

我們將研究二之結果整理成表二，並進行相關數據分析。

表二

正多邊形個數	2	3	4	5	6	7
正三角形	X	✓	✓	✓	X	X
正方形	X	✓	✓			
正五邊形	X	✓				
正六邊形	X	X				

註：「X」無法組成立體角；「✓」可以組成立體角。

(一)發現

1. 在立體圖中，要構成「立體角」至少需要三面多邊形，至多五面多邊形，少於三面者只能形成平面圖形，超過七面，會形成凹凸面體(如 7 個正三角形)。

2 用相同的正多邊形組成的立體角有 5 種，分別如下：

正多邊形名稱	正三角形			正方形	正五邊形
正多邊形個數	3	4	5	3	3
正多面體名稱	正四面體	正八面體	正二十面體	正六面體	正十二面體

(二)分析

我們依據上面之研究結果，我們歸納出以下 3 點說明：

1. 多面體的每個頂點至少在 3 個面上。
2. 這些相交的面處的角（也就是頂點發出的角）的和必須小於 360°。
3. 正多面體的頂點發出的角是相等的，所以這個角必須小於 360°/3 = 120°。

我們利用以上 3 個說明，檢視各正多邊形：

正多邊形之頂角計算為：180°×(頂點數-2)÷頂點數

依據說明 3 ⇨ 180°×(頂點數-2)÷頂點數<120°

正三角形

正三角形頂角：180°×(3-2)÷3=60°(<120°，符合 3)

360°÷60°=6

可形成多面體之三角形個數為 n，依據說明 1、2、3

∵3≦n<6，n 為正整數

∴n=3,4,5

正方形

正方形頂角：180°×(4-2)÷4=90°(<120°，符合 3)

360°÷90°=4

可形成多面體之正方形個數為 n，依據說明 1、2、3

∵3≦n<4，n 為正整數

∴n=3

正五邊形

正五邊形頂角：180°×(5-2)÷5=108°(<120°，符合 3)

360°÷108°≒3.3

可形成多面體之正五邊形個數為 n，依據說明 1、2、3

∵3≦n<3.3，n 為正整數

∴n=3

正六邊形

正六邊形頂角：180°×(6-2)÷6=120°(=120°，不符合 3)

360°÷120°=3

∵正六邊形頂角=120°，已不符合 3，

∴無法成為多面體

推論：只有 3 個、4 個、5 個正三角形及 3 個正方形、3 個正五邊形可以組合成立體角，與研究二之研究結果相符。

四、研究三：認識並探討正多面體的組成結構

我們將組合好之 5 個柏拉圖立體統計頂點數、稜線數及邊長數，並找出其相關規律。

表三

名稱	立體圖	頂點數	稜線數	面				共點面數	頂點數+面數
				邊長(公分)	邊長數	面數	形狀		
正四面體		4	6	6	3	4	正三角形	3	8
正六面體		8	12	6	4	6	正方形	3	14
正八面體		6	12	6	3	8	正三角形	4	14
正十二面體		20	30	3.6	5	12	正五邊形	3	32
正二十面體		12	30	6	3	20	正三角形	5	32

(一) 發現

1. 正多面體的頂點數、稜線數和面數之關係如下：

(1)稜線數=面的邊長數×面數÷2，例如：正四面體，6=3×4÷2。

(2)頂點數=面的邊長數×面數÷面共點數，例如：正四面體，4=3×4÷3。

2.將點、稜線、面的數據整理後，發現一個規律「頂點數+面數=稜線數+2」。

規律＼正多面體	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
頂點數+面數	8	14	14	32	32
稜線數	6	12	12	30	30

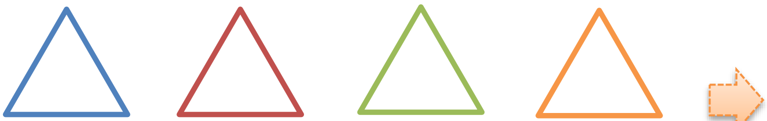
3. 我們發現另一規律，正四面體的稜線數與面數相同，正六面體和正八面體、正十二面體和正二十面體稜線數相同，頂點數和面數互為相反，如下表。

規律＼正多面體	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
稜線數	6	12	12	30	30
頂點數	4	8	6	20	12
面數	4	6	8	12	20

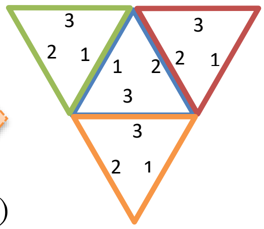
(二)分析

1. 稜線數=面的邊長數×面數÷2

以正四面體為例



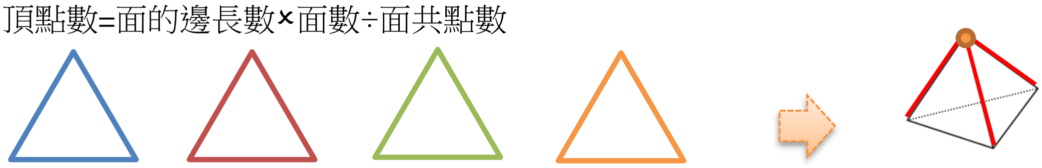
3 個邊　3 個邊　3 個邊　3 個邊



3×4=12(正四面體有 4 個正三角形的面，共有 12 個邊)

12÷2=6(面與面之間的邊重疊 1 次，所以 2 個面的邊，只能計算 1 次)

2. 頂點數=面的邊長數×面數÷面共點數



3 個邊　3 個邊　3 個邊　3 個邊　3 面產生 1 頂點

3×4=12(正四面體有 4 個正三角形的面，共有 12 個邊)

12÷2=6(每個邊會重複 1 次)

6×2÷3=4(每個邊有 2 點頂點，3 條邊共 1 個頂點)

3. 我們只能就數據歸納，發現所有正多面體皆符合頂點數+面數=稜線數+2，查資料後發現是尤拉定理，但無法推證。
4. 稜線數相同，頂點數和面數互為相反之 2 個正多面體關係，查資料後，是對偶多面體，我們留在研究六進行多面體對偶多面體關係研討。

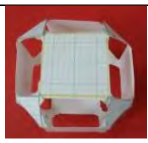
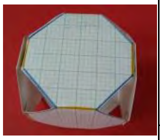
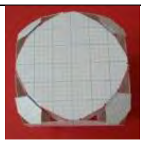
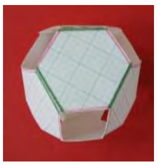
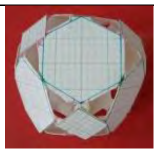
五、研究四：探討柏拉圖透過有規律的切割，所形成新多面體的點、線、面之關係

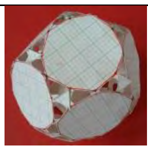
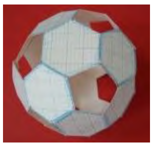
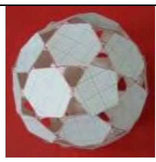
我們將柏拉圖立體依 1:1 及 1:1:1 邊長比例進行第一次截角研究，截角後之原面、截面頂點、稜線及面之結果如下表四-(一)，另再將截角後所產生之 14 個新截面多面體依 1:1 及 1:1:1 邊長比例進行第二次截角研究，結果如下表四-(二)。

表四-(一)：第一次截角

原立體	編號(原立體-截角)	新立體圖形		面數及面圖形							稜線數	頂點數	備註
		圖片	面體名稱	原面			截面			總面數			
				個數	形狀	邊長(公分)	個數	形狀狀	邊長(公分)				
正四面體	四-1/2		正八面體	4	正三角形	3	4	正三角形	2.8	8	12	6	同柏拉圖正八面體
	四-1/3		八面體	4	正六邊形	2	4	正三角形	2	8	18	12	
正六面體	六-1/2		十四面體	6	正方形	4.6	8	正三角形	3.8	14	24	12	同八-1/2
	六-1/3		十四面體	6	八邊形	2.9(斜邊) 2(直邊)	8	正三角形	3	14	36	24	
正八面體	八-1/2		十四面體	8	正三角形	3	6	正方形	2.7	14	24	12	同六-1/2
	八-1/3		十四面體	8	正六邊形	2	6	正方形	1.9	14	36	24	
正十二面體	十二-1/2		三十二面體	12	正五邊形	2.8	20	正三角形	2.5	32	60	30	同二十-1
	十二-1/3		三十二面體	12	十邊形	2.1(斜邊) 1.1(直邊)	20	正三角形	2	32	90	60	
正二十面體	二十-1/2		三十二面體	20	正三角形	3	12	正五邊形	2.8	32	60	30	同十二-1
	二十-1/3		三十二面體	20	正六邊形	2	12	正五邊形	2.1	32	90	60	符合足球巴克球體

表四-(二)：第二次截角

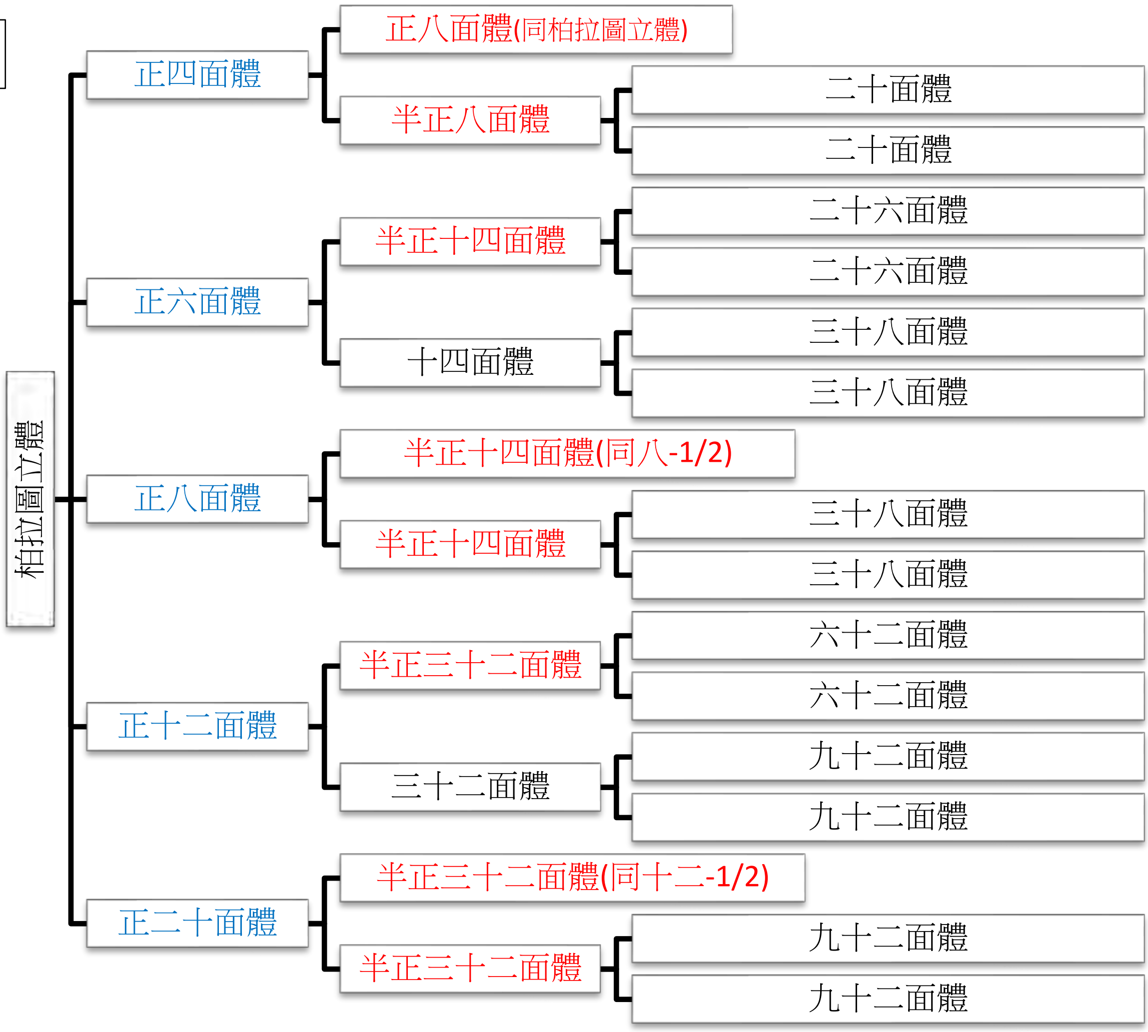
第一次截角之立體編號	編號(原立體-第一次截角-第二次截角)	新立體：圖片	新立體：面體名稱	原面：個數	原面：形狀	原面：邊長(公分)	截面：個數	截面：形狀	截面：邊長(公分)	總面數	稜線數	頂點數
四-1/3 	四-1/3-1/2		二十面體	4	正三角形	0.9	12	三角形	1.6 (斜邊) 0.9 (直邊)	20	36	18
				4	正六邊形	1.6						
	四-1/3-1/3		二十面體	4	正六邊形	0.7	12	三角形	1.2 (斜邊) 0.7 (直邊)	20	54	36
				4	十二邊形	1.2 (斜邊) 0.9 (直邊)						
六-1/2 	六-1/2-1/2		二十六面體	8	正三角形	1.9	12	四邊形	2.9 (斜邊) 1.9 (直邊)	26	48	24
				6	正四邊形	2.9						
	六-1/2-1/3		二十六面體	8	正六邊形	1.5	12	四邊形	2 (斜邊) 1.5 (直邊)	26	72	48
				6	八邊形	2 (斜邊) 1.1 (直邊)						
六-1/3 	六-1/3-1/2		三十八面體	8	正三角形	1.4	24	三角形	2.5 (斜邊) 1.4 (直邊)	38	72	36
				6	正八邊形	2.5						
	六-1/3-1/3		三十八面體	8	正六邊形	1	24	三角形	1.5 (斜邊) 1 (直邊)	38	108	72
				6	十六邊形	1.4 (斜邊) 1 (直邊)						
八-1/3 	八-1/3-1/2		三十八面體	6	正方形	1.4	24	三角形	1.7 (斜邊) 1.4 (直邊)	38	72	36
				8	正六邊形	1.7						
	八-1/3-1/3		三十八面體	6	正八邊形	1	24	三角形	1.3 (斜邊) 1 (直邊)	38	108	72
				8	十二邊形	1.2 (斜邊) 0.6 (直邊)						

十二-1/2 	十二-1/2-1/2		六十二面體	20	正三角形	1.4	30	四邊形	2.4 (斜邊) 1.4 (直邊)	62	120	60
				12	正五邊形	2.4						
	十二-1/2-1/3		六十二面體	20	正六邊形	0.9	30	四邊形	1.7 (斜邊) 0.9 (直邊)	62	180	120
				12	十邊形	1.8 (斜邊) 1 (直邊)						
十二 1/3 	十二-1/3-1/2		九十二面體	20	正三角形	1	60	三角形	1.5 (斜邊) 1 (直邊)	92	180	90
				12	正十邊形	1.4						
	十二-1/3-1/3		九十二面體	20	正六邊形	0.7	60	三角形	1.1 (斜邊) 0.7 (直邊)	92	270	180
				12	二十邊形	1 (斜邊) 0.4 (直邊)						
二十-1/3 	二十-1/3-1/2		九十二面體	12	正五邊形	1.8	60	三角形	1.8 (斜邊) 1.7 (直邊)	92	180	90
				20	正六邊形	1.7						
	二十-1/3-1/3		九十二面體	12	正十邊形	0.8	60	三角形	1.1 (斜邊) 1 (直邊)	92	270	180
				20	十二邊形	1 (斜邊) 0.8 (直邊)						

(一) 發現

1. 五個柏拉圖立體經過 1:1、1:1:1 邊長比例進行第一次、第二次截角後，產生了 1 個正八面體、1 個半正八面體、3 個不同型式的半正十四面體、1 個十四面體、3 個半正三十二面體、1 個三十二面體、2 個不同的二十面體、2 個不同的二十六面體、4 個不同的三十八面體、2 個不同的六十二面體及 4 個不同的九十二面體。
2. 正六面體與正八面體、正十二面體與正二十面體經 1:1 邊長比例截角，產生了同樣的半正十四面體及半正三十二面體，結果如下表四-(三)。
3. 其中，正六面體及正十二面體經 1:1 邊長比例截角後，並無產生半正多面體，將進行延伸研究，結果如研究五-(二)。

表四-(三)



4. 所有第一次新截角多面體之新截面皆為正多邊形，且正多邊形之邊數=原立體圖之面共點數；但第二次新截角之截面皆非正多邊形，且新截面多邊形之邊數=原多面體之面共點數，如下表四-(四)，我們就此狀況進行延伸研究，結果如研究五-(二)。

表四-(四)

編號	四-1/2	四-1/3	六-1/2	六-1/3	八-1/2	八-1/3	十二-1/2	十二-1/3	二十-1/2	二十-1/3
原立體共點面數	3	3	3	3	4	4	3	3	5	5
新截面形狀	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形	正方形	正方形	正三角形	正三角形	正五邊形	正五邊形

<table>
<tr><th>第一次截角立體編號</th><th colspan="2">四-1/2
(同正八面體)</th><th colspan="2">四-1/3</th><th colspan="2">六-1/2</th><th colspan="2">六-1/3</th><th colspan="2">八-1/2
(同六-1/2)</th><th colspan="2">八-1/3</th><th colspan="2">十二-1/2</th><th colspan="2">十二-1/3</th><th colspan="2">二十-1/2
(同十二-1/2)</th><th colspan="2">二十-1/3</th></tr>
<tr><td>原立體共點面數</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td>第二次截角</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td><td>1:1</td><td>1:1:1</td></tr>
<tr><td>新截面形狀</td><td colspan="2">正方形</td><td colspan="2">三角形</td><td colspan="2">長方形</td><td colspan="2">三角形</td><td colspan="2">長方形</td><td colspan="2">三角形</td><td colspan="2">長方形</td><td colspan="2">三角形</td><td colspan="2">長方形</td><td colspan="2">三角形</td></tr>
</table>

5. 所有新截面多面體之頂點、稜線數及面數關係，符合研究三之規律，如下表四-(四)。

(1)稜線數=(截完原面的邊長數×截完原面數+截面的邊長數×截面數)÷2；同一正多面體經 1:1:1 邊長比例截角之稜線數=1:1 邊長比例截角之稜線數×1.5。

(2)頂點數=(截完原面的邊長數×截完原面數+截面的邊長數×截面數)÷面共點數；1:1 邊長比例截角之新截面立體之頂點數=截面邊數×截面數÷2，1:1:1 邊長比例截角之新截面立體頂點數=截面邊數×截面數。

(3)頂點數+面數=稜線數+2。

(4)共點面數：1:1 邊長比例截角的截面立體皆為 4 面共點，1:1:1 邊長比例截角的截面立體皆為 3 點共面。

表四-(四)

編號	四-1/2	四-1/3	六-1/2	六-1/3	八-1/2	八-1/3	十二-1/2	十二-1/3	二十-1/2	二十-1/3
截完原面邊長數×截完原面數(A)	3×4	6×4	4×6	8×6	3×8	6×8	5×12	10×12	3×20	6×20
	12	24	24	48	24	48	60	120	60	120
截面邊長數×截面數(B)	3×4	3×4	3×8	3×8	4×6	4×6	3×20	3×20	5×12	5×12
	12	12	24	24	24	24	60	60	60	60
共點面數(C)	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
稜線數(A+B)÷2	(12+12)÷2=12	(24+12)÷2=18	(24+24)÷2=24	(48+24)÷2=36	(24+24)÷2=24	(48+24)÷2=36	(60+60)÷2=60	(120+60)÷2=90	(60+60)÷2=60	(120+60)÷2=90
頂點數(A+B) ÷C	(12+12)÷4=6	(24+12)÷3=12	(24+24)÷4=12	(48+24)÷3=24	(24+24)÷4=12	(48+24)÷3=24	(60+60)÷4=30	(120+60)÷3=60	(60+60)÷4=30	(120+60)÷3=60

編號	四-1/3-1/2	四-1/3-1/3	六-1/2-1/2	六-1/2-1/3	六-1/3-1/2	六-1/3-1/3	八-1/3-1/2	八-1/3-1/3
截完原面邊長數×截完原面數(A)	6×4	12×4	4×6	8×6	8×6	16×6	6×8	12×8
	24	48	24	48	48	96	48	96
第一次截完面之邊長數×第一次截完面數(B)	3×4	6×4	3×8	6×8	3×8	6×8	4×6	8×6
	12	24	24	48	24	48	24	48
截面邊長數×截面數(C)	3×12	3×12	4×12	4×12	3×24	3×24	3×24	3×24
	36	36	48	48	72	72	72	72
共點面數(D)	4	3	4	3	4	3	4	3
稜線數(A+B+C)÷2	36	54	48	72	72	108	72	108
頂點數(A+B+C) ÷D	18	36	24	48	36	72	36	72

編號	十二-1/2-1/2	十二-1/2-1/3	十二-1/3-1/2	十二-1/3-1/3	二十-1/3-1/2	二十-1/3-1/3
截完原面邊長數×截完原面數(A)	5×12	10×12	10×12	20×12	6×20	12×20
	60	120	120	240	120	240
第一次截完面之邊長數×第一次截完面數(B)	3×20	6×20	3×20	6×20	5×12	12×20
	60	120	60	120	60	120
截面邊長數×截面數(C)	4×30	4×30	3×60	3×60	3×60	3×60
	120	120	180	180	180	180
共點面數(D)	4	3	4	3	4	3
稜線數 (A+B+C)÷2	120	180	180	270	180	270
頂點數(A+B+C) ÷D	60	120	90	180	90	180

6. 第二次截角之多面體之原面及第一次截面之關係如下表四-(六)：

(1)1:1 截角後，截角後原面多邊形之邊數=原面多邊形之邊數，且都為正多邊形。

(2)1:1:1 截角後，截角後原面多邊形之邊數=原面多邊形之邊數×2，正四面體、正八面體及正二十面體的截後原面為正多面體，正六面體、正十二面體的截後原面非正多邊形。

(3)同一多面體經 1:1:1 邊長比例截角之原面多邊形邊數=1:1 邊長比例截角截面之原面多邊形邊數×2。

表四-(六)

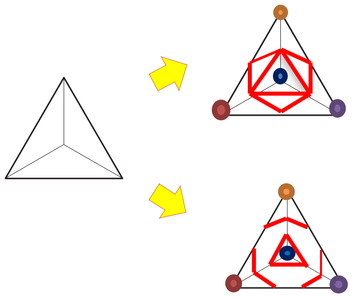
截角前後 \ 編號		四-1/3-1/2	四-1/3-1/3	六-1/2-1/2	六-1/2-1/3	六-1/3-1/2	六-1/3-1/3	八-1/3-1/2
原面	未截前	正三角形	正三角形	正方形	正方形	正方形	正方形	正三角形
	第一次截角後	正六邊形	正六邊形	正方形	正方形	正八邊形	正八邊形	正六邊形
	第二次截角後	正六邊形	十二邊形	正方形	八邊形	正八邊形	十六邊形	正六邊形
第一次截面	未截前	頂點	頂點	頂點	頂點	頂點	頂點	頂點
	第一次截角後	正三角形	正六邊形	正三角形	正六邊形	正三角形	正六邊形	正方形
	第二次截角後	正三角形	十二邊形	正三角形	十二邊形	正三角形	十二邊形	正方形

截角前後 \ 編號		八-1/3-1/3	十二-1/2-1/2	十二-1/2-1/3	十二-1/3-1/2	十二-1/3-1/3	二十-1/3-1/2	二十-1/3-1/3
原面	未截前	正三角形	正五邊形	正五邊形	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形
	第一次截角後	正六邊形	正十邊形	十邊形	正六邊形	正六邊形	正六邊形	正六邊形
	第二次截角後	十二邊形	正十邊形	二十邊形	正六邊形	十二邊形	正六邊形	十二邊形
第一次截面	未截前	頂點	頂點	頂點	頂點	頂點	頂點	頂點
	第一次截角後	正八邊形	正三角形	正六邊形	正三角形	正六邊形	正五邊形	正十邊形
	第二次截角後	十六邊形	正三角形	十二邊形	正三角形	十二邊形	正五邊形	二十邊形

(二)分析

1.多面體面數與原多面體頂點關係分析

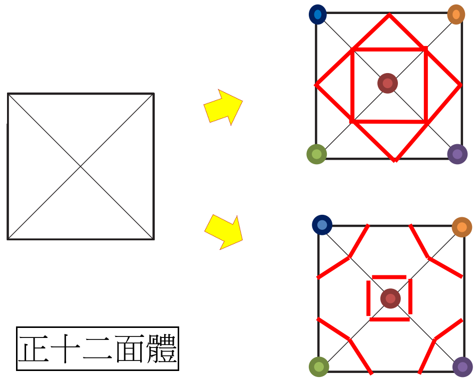
正四面體



頂點數：
4×3÷2=6

頂點數：
4×3=12

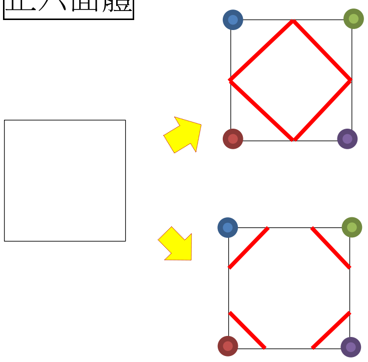
正八面體



頂點數：
6×4÷2=12

頂點數：
6×4=24

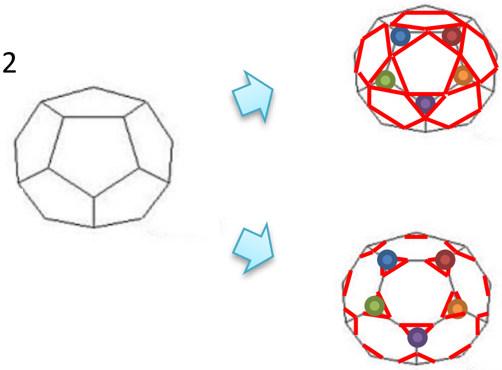
正六面體



頂點數：
8×3÷2=12

頂點數：
8×3=24

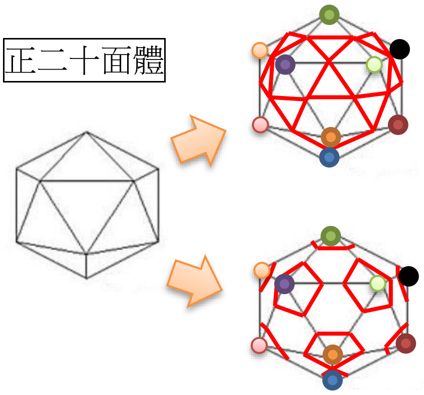
正十二面體



頂點數：
20×3÷2=30

頂點數：
20×3=60

正二十面體



頂點數：
12×5÷2=60

頂點數：
12×5=60

設新截角多面體面數 N，原正多面體面數 X、頂點數為 Y，其關係式：
∵每 1 頂點產生 1 新截面
∴新截面數=Y
➔N=X+Y
➔第一次截角　　　　　　　　　第二次截角

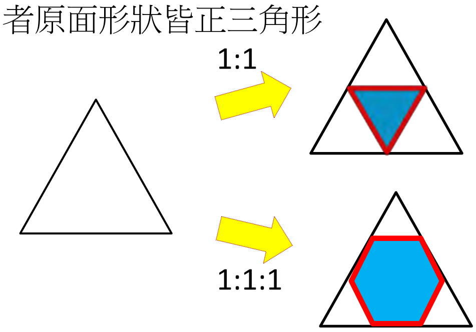
1:1 、1:1:1

第一次截角	第二次截角
$N_{(4)}=4+4=8$	$N_{(4.1/3.8)}=8+12=20$
$N_{(6)}=6+8=14$	$N_{(6.1/2.14)}=14+12=26$
$N_{(8)}=8+6=14$	$N_{(6.1/3.14)}=14+12=26$
$N_{(12)}=12+20=32$	$N_{(8.1/3.14)}=14+24=38$
$N_{(20)}=20+12=32$	$N_{(12.1/2.32)}=32+30=62$
	$N_{(12.1/3.32)}=32+60=92$
	$N_{(20.1/3.32)}=32+60=92$

2.截角比例與原面截後形狀之關係

正四面體、正八面體、正二十面體

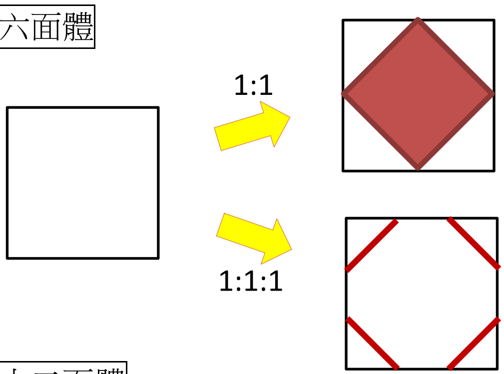
3 者原面形狀皆正三角形



截後仍與原面形狀一樣，為正三角形。

截後不與原面形狀一樣，邊數為原面之 2 倍為正六角形。

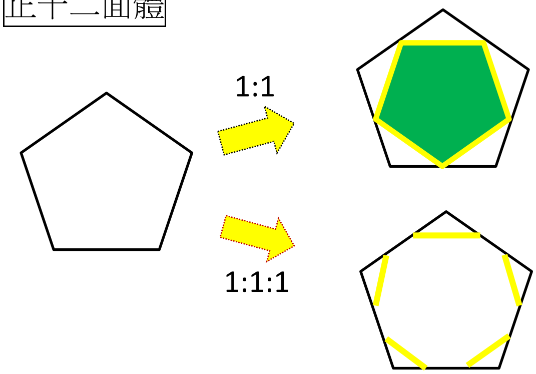
正六面體



截後仍與原面形狀一樣，為正方形。

截後不與原面形狀一樣，邊數為原面之 2 倍為八邊形。

正十二面體



截後仍與原面形狀一樣，為正五邊形。

截後不與原面形狀一樣，邊數為原面之 2 倍為十邊形。

設正多面體之原面邊數為 X，經截角後之原面邊數為 Y，1:1 邊長比例者為 $Y_{(1/2)}$；1:1:1 邊長比例者為 $Y_{(1/3)}$，其關係推導如下：

1:1 邊長比例截角

∵取每邊之中心為新頂點，所以每邊對應 1 個新頂點，所以產生 X 個頂點

∴$Y_{(1/2)}=X$ 維持原正立方體原面形狀

1:1 邊長比例截角

∵取每邊之中心為新頂點，所以每邊對應 2 個新頂點，所以產生 2×X 個頂點

∴$Y_{(1/2)}=X\times2$ 截後原面形狀邊數為原來邊數 2 倍

只要是 1:1 邊長比例截角，無論截多少次，截後原面都會與原面形狀相同。

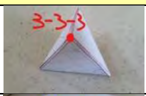
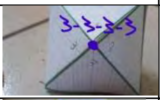
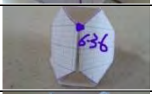
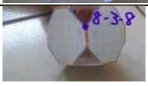
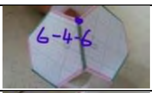
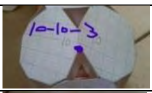
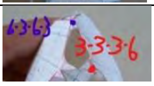
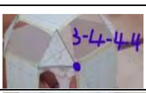
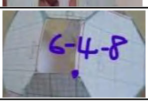
只要是 1:1 邊長比例截角，每多截 1 次，截後原面都會是原面之 2 倍。

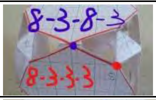
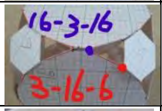
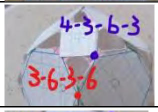
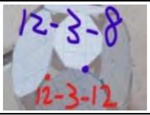
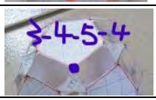
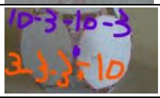
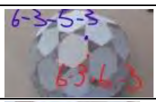
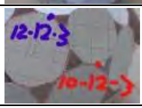
六、研究五：截角比例影響頂點臨面之規律、原面形狀及截面形狀之探究

（一）研究五-(一)：1:1 邊長比例及 1:1:1 邊長比例截角頂點與臨邊規律之探討

我們找出 26 個多面體之頂點，並找出其臨面規律，結果如表五-(一)-1。

表五-(一)-1

編號	頂點及相鄰面圖	截角後			頂角相鄰面之規律	均勻多面體	說明
		原面形狀	第一次截面形狀	第二次截面形狀			
正四面體		正三角形			3-3-3	●	
正六面體		正方形			4-4-4	●	
正八面體		正三角形			3-3-3-3	●	
正十二面體		正五邊形			5-5-5	●	
正二十面體		正三角形			3-3-3-3-3	●	
四-1/3		正六邊形	正三角形		6-3-6	●	
六-1/2		正三角形	正方形		4-3-4-3	●	
六-1/3		八邊形	正三角形		8-3-8		八邊形非正多邊形。
八-1/3		正六邊形	正方形		6-4-6	●	
十二-1/2		正五邊形	正三角形		3-5-3	●	
十二-1/3		十邊形	正三角形		10-10-3		十邊形非正多邊形。
二十-1/3		正六邊形	正五邊形		6-5-6	●	
四-1/3-1/2		正六邊形	正三角形	三角形	6-3-3-6 3-3-3-6		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
四-1/3-1/3		十二邊形	正六邊形	三角形	3-6-12 3-12-12		1.三角形、十二邊形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
六-1/2-1/2		正方形	正三角形	四邊形	3-4-4-4		四邊形非正多邊形。
六-1/2-1/3		八邊形	正六邊形	四邊形	4-6-8		四邊形非正多邊形。

六 -1/3-1/2		正八 邊形	正三 角形	三角 形	3-3-3-8 3-8-3-8		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
六 -1/3-1/3		十六 邊形	六邊 形	三角 形	3-6-16 3-16-16		1.三角形、六邊形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
八 -1/3-1/2		正六 邊形	正方 形	三角 形	4-3-6-3 6-3-6-3		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
八 -1/3-1/3		十二 邊形	八邊 形	三角 形	3-8-12 12-3-12		1.三邊皆非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
十二 -1/2-1/2		正五 邊形	正三 角形	四邊 形	3-4-5-4		四邊形非正多邊形。
十二 -1/2-1/3		十邊 形	正六 邊形	四邊 形	4-6-10		四邊形、十邊形非正多邊形。
十二 -1/3-1/2		十邊 形	正三 角形	三角 形	10-3-10-3 3-3-3-10		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
十二 -1/3-1/3		二十 邊形	正六 邊形	三角 形	3-20-6 3-20-20		1.三角形、二十邊形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
二十 -1/3-1/2		正六 邊形	正五 邊形	三角 形	5-3-6-3 6-3-6-3		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
二十 -1/3-1/3		十二 邊形	十邊 形	三角 形	3-10-12 3-12-12		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。

1. 發現

(1) 我們整理以上數據，整理如下表五-(二)-2，發現頂點臨邊有 2 種規律的，皆是進行過第二次截角的第一次截角依 1:1:1 邊長比例截面之多面體。

(2) 另外，正六面體及正十二面體經過 1:1:1 邊長比例截面後，原面就非正多邊形。

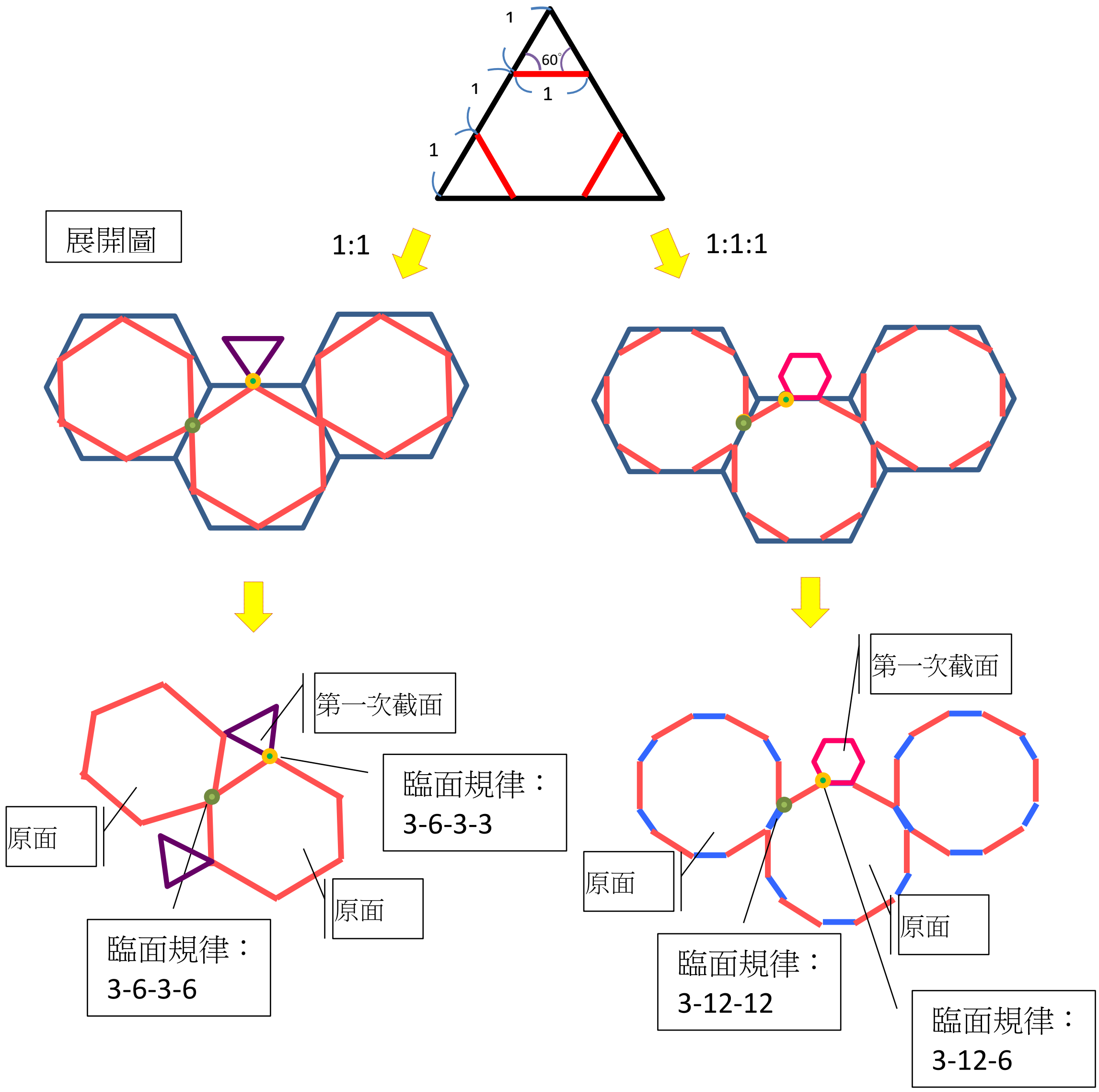
表五-(一)-2

頂點臨面規律種類	編號
1	正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體、四-1/2、四-1/3、六-1/2、六-1/3、八-1/3、十二-1/2、十二-1/3、二十-1/3、六-1/2-1/2、六-1/2-1/3、十二-1/2-1/2、十二-1/2-1/3
2	四-1/3-1/2、六-1/3-1/2、六-1/3-1/3、八-1/3、1/2、八-1/3-1/3、十二-1/3-1/2、十二-1/3-1/3、二十-1/3-1/2、二十-1/3-1/3

2. 分析

(1)頂點臨面規律與截角比例關係：經歷 1:1:1 邊長比例截角後之多面體，經歷 1:1 邊長比例或 1:1:1 邊長比例截角都會出現 2 種之頂點臨面規律。

以正四面體為例



1. 在 1:1:1 邊長比例截角中，原面與臨面間仍各有 1/3 長相連，再次截角中，這個相連的邊，在 1:1 邊長比例截角中，會變成相連之頂點；在 1:1:1 邊長比例截角中，仍有原邊長的 1/9 相連接。
2. 另外在第 1 次截角中，會產生 1 個新截邊與新截面相連，這個截邊在第二次截角中，在 1:1 邊長比例截角中，會變成與第一次截面相連之頂點；在 1:1:1 邊長比例截角中，仍有原邊長的 1/9 與第一次截面相連接。

推論：只要經歷過 1:1:1 邊長比例截角的多面體，都會出現 2 個以上之頂點臨面規律。

(二)研究五-(二)：最適合正六面體及正十二面體之邊長截角比例

我們在研究四中，發現正六面體和正十二面體，依 1:1:1 邊長比例截角，無法截出由正多邊形所組成的半正多面體，因此進行延伸研究，結果如下表五-(二)：

表五-(二)

正六面體:原立方體邊長 6.9 公分

截角邊長比例	截完原面形狀	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6	邊長 7	邊長 8
1:1	正方形	3.4	3.4	3.4	3.4				
1:1:1	八邊形	3.3	2.3	3.3	2.3	3.3	2.3	3.3	2.3
1:2:1	八邊形	2.5	3.5	2.5	3.5	2.5	3.5	2.5	3.5
1:1.5:1	八邊形	3.0	2.8	3.0	2.8	3.0	2.8	3.0	2.9
1:1.4:1	**八邊形**	**3.0**	**2.9**	**3.0**	**2.9**	**3.0**	**2.9**	**3.0**	**2.9**
1:1.3:1	八邊形	2.7	3	2.7	3	2.7	3	2.7	3

註：邊長取到小數後 2 位進行四捨五入。

正十二面體：原立方體邊長 3.6 公分

截角邊長比例	截完原面形狀	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6	邊長 7	邊長 8	邊長 9	邊長 10
1:1	正五邊形	3	3	3	3	3					
1:1:1	十邊形	1.2	2	1.2	2	1.2	2	1.2	2	1.2	2
1:2:1	十邊形	1.8	1.4	1.8	1.4	1.8	1.4	1.8	1.4	1.8	1.4
1:1.5:1	十邊形	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.6
1:1.7:1	十邊形	1.7	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6
1:1.6:1	**正十邊形**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**

註：邊長取到小數後 2 位進行四捨五入。

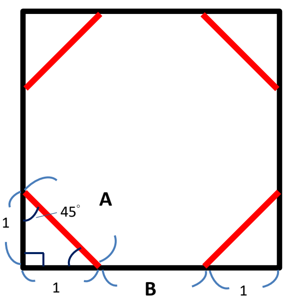
1. 發現

(1) 正六面體依 1:1.4:1 邊長比例截角，可得到最接近正八邊形之圖形。

(2) 正十二面體依 1:1.6:1 邊長比例截角，可得到正十邊形之圖形。

2. 分析

(1)正方形邊長比例與截角斜邊之關係大約為 1:1.4:1。



設正方形之依 1:X:1 邊長比例截角，可形成正八邊形

∵正八邊形每邊一樣長

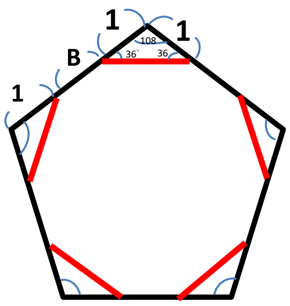
∴A=B

另外，截角為等腰直角三角形，依畢氏定理，等腰直角三角形之邊長比為 1:$\sqrt{2}$:1，大約是 1:1.432:1

A≒1.4　　A=B=1.4

X=1.4，比例為 1:1.4:1

(1)正五邊形邊長比例與截角斜邊之關係大約為 1:1.6:1。

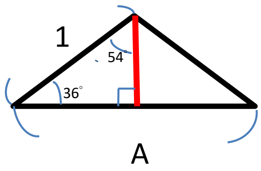


設正五邊形之依 1:X:1 邊長比例截角，可形成正十邊形

∵正十邊形每邊一樣長

∴A=B

另外，截角為 2 個角度分別為 36°、54°、90°的直角三角形，依畢氏定理，此等腰直角三角形之邊長比大約為 3:4:5。



∵A/2:1=4:5

∴A=4÷5×2

=1.6

A=B=1.6　X=1.6

比例為 1:1.6:1

(三)研究五-(三)頂點相鄰原面形狀之差異影響截面形狀之探究

我們將研究四關於截面形狀的相關數據整理如下表五-(三)：

表五-(三)

編號	四-1/2	四-1/3	六-1/2	六-1/3	八-1/2	八-1/3	十二-1/2	十二-1/3	二十-1/2	二十-1/3
原立體共點面數	3	3	3	3	4	4	3	3	5	5
臨面形狀	正三角形	正三角形	正方形	正方形	正三角形	正三角形	正五邊形	正五邊形	正三角形	正三角形
臨面角度	60°	60°	90°	90°	60°	60°	108°	108°	60°	60°
截面頂角角度	60°	60°	60°	60°	90°	90°	60°	60°	108°	108°
截面邊長(公分)	2.8	2	3.8	3	2.7	1.9	2.5	2	2.8	2.1
新截面形狀	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形	正方形	正方形	正三角形	正三角形	正五邊形	正五邊形

原立體編號	四-1/3		六-1/2		六-1/3.4		八-1/3		十二-1/2		十二-1/3.6		二十-1/3	
共點面數	3		4		3		3		4		3		3	
原頂點臨面角度	60°		90°		90°		90°		60°		60°		108°	
	120°		60°		135°		120°		108°		144°		120°	
	120°		90°		135°		120°		60°		144°		120°	
			60°						108°					
第二次截角	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1
截面頂角角度	30°	50°	90°	90°	40°	40°	50°	50°	90°	90°	40°	40°	50°	50°
	75°	65°	90°	90°	70°	70°	65°	65°	90°	90°	70°	70°	65°	65°
	75°	65°			70°	70°	65°	65°			70°	70°	65°	65°
邊長(公分)	1.6	1.2	2.9	2	2.5	1.5	1.7	1.3	2.4	1.7	1.5	1.1	1.8	1.1
	0.9	0.7	1.9	1.5	1.4	1	1.4	0.9	1.4	0.9	1	0.7	1.7	1
新截面形狀	三角形		長方形		三角形		三角形		長方形		三角形		三角形	

1. 發現

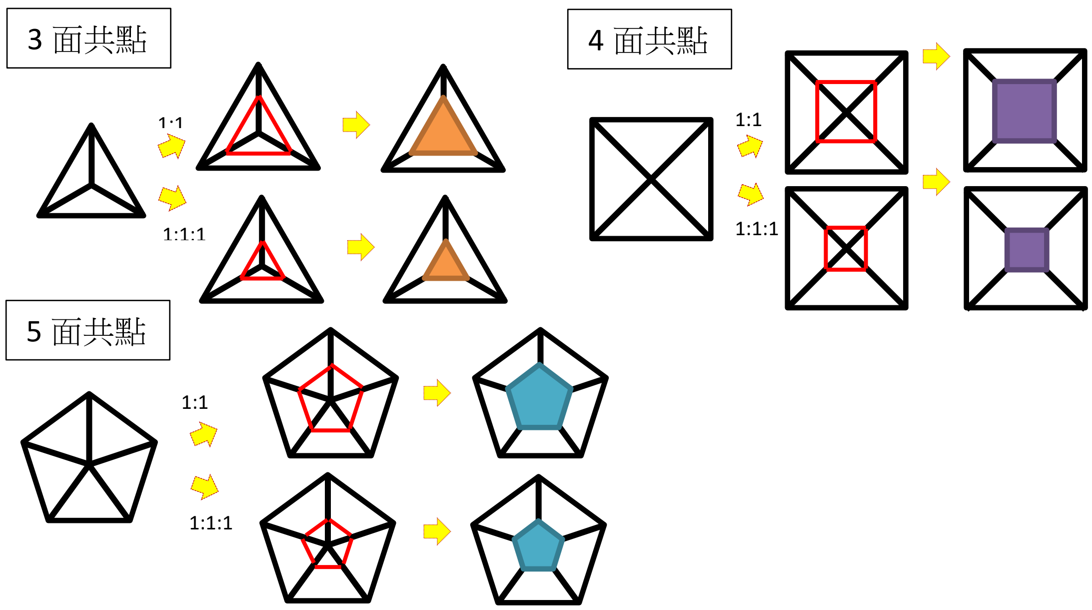
(1) 截面形狀邊數=頂點共點數，另外第二次截面出現四邊形的多面體都是第一次截角以 1:1 邊長比例截角之多面體，有六-1/2-1/2、六-1/2-1/3、十二-1/2-1/2、十二-1/2-1/3。

(2) 第二次截面無法截出正多邊形。

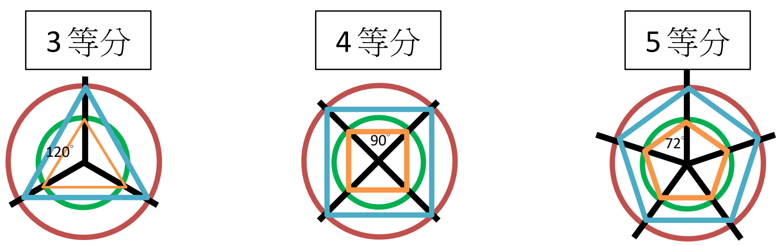
2. 分析

(1) 第一次截角都是正多邊形：5 個柏拉圖立體依共點面分類，可分為 3 面共點、4 面共點及 5 面共點，依頂點鏡射，可得以下圖形，因為組成之多邊形角度一樣，所以截角出來的截面與原鏡射形狀一樣。

<u>第一次截角</u>



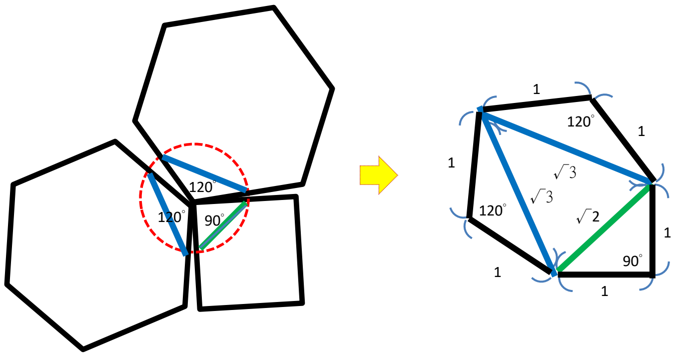
推證：頂點每面夾角皆 120°，在研究一中，證明在等分圓中，內角為 120°可將圓等分為 3 等分，可以畫出正三角形；內角為 90°可將圓等分為 4 等分，可以畫出正方形；內角為 72°可將圓等分為 5 等分，可以畫出正五邊形。
所以依不同半徑可畫出同心圓，半徑不同，但仍為正多邊形。



(2)第二次截角都非正多邊形：7 個第一次截角完之半正多邊形依共點面分類，可分為 3 面共點、4 面共點，依頂點鏡射，可得以下圖形，因為組成之多邊形角度不一樣，所以截角出來的截面為等腰三角形及長方形。

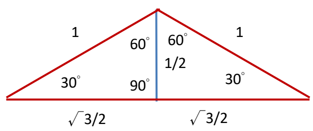
<u>第二次截角</u>

以八-1/3-1/2 之展開圖做說明



原頂點臨邊為 2 個正六邊形、1 個正方形，分別以 1:1 邊長比例截角，其截出來之形狀為等腰三角形，其邊長推論如下：

2 個斜邊，頂角為 120°等腰三角形之底邊

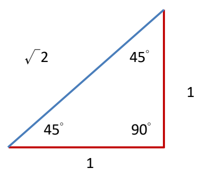


設底邊長為 X

∵原頂角 120°平分為 2，1 直角三角形之頂角為 60°，底角為 30°，依據畢氏定理，對應之邊長比例為 $1:\sqrt{3}:2$，以斜邊為 1，其底邊為 $\sqrt{3}/2$。

∴$X=\sqrt{3}/2\times 2=\sqrt{3}$

1 個底邊，等腰直角三角形之斜邊



設底邊長為 Y

∵等邀直角三角形之 1 角為 90°，另 2 角為 45°，依據畢氏定理，對應之邊長比例為 $\sqrt{2}:1:1$。

∴$Y=\sqrt{2}$

推論：以上述結論，只要頂點臨面非同一正多邊形，截出來的截面就非正多邊形，我們可以由此推導，即便進行第三次截角，也無法產生正多邊形，無法做出阿基米德其他半正多面體。

七、研究六：對偶對面體之規律探究

我們在前面的研究中，發現了在柏拉圖立體中，5 個正立方體的面數、稜線數和頂點數有特殊的規律，這樣的規律在其他 21 個截角多面體中無發現，如表六。

正多面體名稱	稜線數	頂點數	面　數	對偶多面體	發現
正四面體	6	4	4		1.正四面體 4 個面有 4 個中心點，連接後產生的仍是正四面體。 2.中正四面體的邊長是小正四面體邊長的 3 倍，而大正四面體的邊長是中正四面體的 3 倍。
正六面體	12	8	6		正六面體 6 個面有 6 個中心點，連接後產生正八面體；正八面體 8 個面有 6 個中心點，連接後產生正六面體。
正八面體	12	6	8		
正十二面體	30	20	12		正二十面體 20 個面有 20 個中心點，連接後產生正十二面體；正十二面體 12 個面有 12 個中心點，連接後產生正二十面體。
正二十面體	30	12	20		

(一) 發現

1. 正六面體與正八面體、正十二面體與正二十面體 2 個稜線數一樣，頂點數與面數互為交換的多面體稱為對偶多面體。
2. 另外正四面體的頂點數和面數相同，亦可互換，是唯一特殊對偶多面體是自己的多面體。
3. 邊數越少的正多面體，其對偶多面體的邊長越短，其中正四面體的對偶多面體邊長是自己的 1/3 倍，其餘的無此規則，至於原因，我們無法推知。

(二)分析

探討：對偶多面體，稜線數不變，面數與頂點數互換，指的是多面體，那圓柱呢？有無此特性？

假設：圓柱的稜線數 2、面數 3、頂點 0，如果有其對偶多面體，其立體稜線數應不變為 3、面數 0、頂點為 3。

實際研究：我們以底面半徑 5 公分、高 10 公分之圓柱為底，試圖找出其對偶多面體。

1. 我們找出側面中心線，將其跟 2 圓底面之中心點連接，做出了 2 個圓椎組成的立體，再從這立體的 2 個圓椎取其中心點，連結後，又發現了圓柱體。
2. 但問題來了，2 個圓椎所組成的頂點 2 個、稜線 1 條、面 2 個，與假設不符。

推論：圓柱、圓錐非屬於多面體，因而無法以對偶多面體規律檢視之。

八、研究七：驗證尤拉定理、對應阿基米德立體及均勻多面體，並進行分類

我們將 26 個多面體驗證尤拉定理，並找出與阿基米德立體、均勻多面體、對偶多面體之多面體進行規律分類。

(一)將研究三、四中之柏拉圖立體及截角後之立體，計算之點、線、面數量，驗證尤拉定理，發現全部的多面體符合尤拉定理：點數+面數-稜線數=2，如下表。

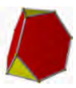
表七-(一)

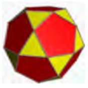
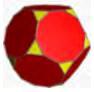
編號	點數(V)	面數(E)	稜線數(F)	V+F-E	編號	點數(V)	面數(E)	稜線數(F)	V+F-E
正四面體	4	6	4	2	四-1/3-1/2	18	36	20	2
正六面體	8	12	16	2	四-1/3-1/3	36	54	20	2
正八面體	6	12	18	2	六-1/2-1/2	36	72	38	2
正十二面體	20	30	12	2	六-1/2-1/3	72	108	38	2
正二十面體	12	30	20	2	六-1/3-1/2	24	48	26	2
四-1/2	6	12	8	2	六-1/3-1/3	48	78	26	2
四-1/3	12	18	8	2	八-1/3-1/2	36	72	38	2
六-1/2	24	36	14	2	八-1/3-1/3	72	108	38	2
六-1/3	12	24	14	2	十二-1/2-1/2	60	120	62	2
八-1/2	24	36	14	2	十二-1/2-1/3	120	180	62	2
十二-1/2	30	60	32	2	十二-1/3-1/2	90	180	92	2
十二-1/3	60	90	32	2	十二-1/3-1/3	180	270	92	2
二十-1/2	30	60	32	2	二十-1/3-1/2	90	180	92	2
二十-1/3	60	90	32	2	二十-1/3-1/3	180	270	92	2

(二) 將研究四、五柏拉圖立體兩次截角後的 21 個新截點多面體進行比對，我們找到了 4 個阿基米德立體及 4 個相似阿基米德立體，如下表七-(二)。

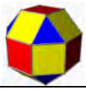
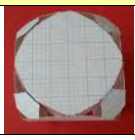
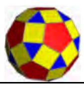
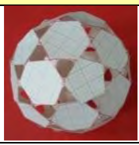
表七-(二)

第一次截角

編號	四-1/3	六-1/2	六-1/3.4	八-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	截角四面體 	截半立方體 	截角立方體 	截角八面體 
均勻多面體	✓	✓	✓	✓

編號	十二-1/2	十二-1/3.6	二十-1/3	
截角多面體				
相對應阿基米德立體	截半二十面體 	截角十二面體 	截角二十面體 	
均勻多面體	✓	✓	✓	

第二次截角

編號	四-1/3-1/2	四-1/3-1/3	六-1/2-1/2	六-1/2-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	✖	✖	類似小斜方截半立方體 	類似大斜方截半立方體 
均勻多面體	✖	✖	✖	✖
編號	六-1/3-1/2	六-1/3-1/3	八-1/3/1/2	八-1/3-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	✖	✖	✖	✖
均勻多面體	✖	✖	✖	✖
編號	十二-1/2-1/2	十二-1/2-1/3	十二-1/3-1/2	十二-1/3-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	類似小斜方截半二十面體 	類似大斜方結伴二十面體 	✖	✖
均勻多面體	✖	✖	✖	✖
編號	二十-1/3-1/2	二十-1/3-1/3		
截角多面體				
相對應阿基米德立體	✖	✖		
均勻多面體	✖	✖		

註：阿基米德圖片來源 https://zh.wikipedia.org/wiki/阿基米德立體

陸、討論

一、製作多面體模型不容易，困難重重：

一開始我們先利用完稿紙做好 5 個柏拉圖立體，然後再依 1:1 邊長比例和 1:1:1 邊長比例畫出截切線進行截切，但在 1:1 邊長比例中會遇到只剩下「點」連接，無法成為多面體，再貼回截面時，也不容易，再者進行第二次截面時，要畫出截邊長時，因為是空心立體，非常難畫，要剪下截面更是不易。所以我們嘗試了第二種方法，在一開始的展開圖時即畫好所有的截線，並進行裁切，再貼回第一次截面，容易多了，但對於整體結構如何改變，並不如第一種方法容易理解。

二、越截越不單純：

我們在這次研究中發現在大自然中的 5 個柏拉圖立體皆由一種正多邊形組成，是一種純粹的美麗，在經歷 1 次截角後，除了四-1/2 跟正八面體一樣外，其餘的多面體都已變成有 2 種正多邊形之半正多面體，其中六-1/3 和十二-1/3 還需要計算特殊比例才能截出半正多面體。而第二次截角，所有的多面體都有一種以上的非正多邊形組成，沒有出現其他半正多面體。

三、截面後，多面體雖變複雜，但仍會符合簡單規律：

(一)頂點共面數是因截角比例而不同，但不是 3 點共面，就是 4 點共面，跟一開始探討的立體角組成一致。

(二)原面的變化，只要經歷 1:1 邊長比例截面，原面形狀並不會改變，仍維持和原來異樣的正多邊形；經歷 1:1 邊長比例截面，截後原面的邊數會是原面邊數的 2 倍。

(二)所有的多面體都符合尤拉定理：頂點數+面數=稜線數+2。

四、對偶多面體的奧秘，我們尚無法推論：

在這次研究中，我們發現了對偶多面體，也實際製作模型進行觀察，我們只能利用簡單的方式，先做出一個正多面體，然後去測量它面中心點間的距離，做出它的對偶多面體，然後重複再做出下一層對偶多面體。投影片很適合製作，我們可以從外觀就觀察到它的美麗，但對於邊長數據的相關性，我們並無法完全推論出，等待以後學習到相關內涵時，我們再進一步探討。

五、要了解多面體的規律，需要學習更多數學內涵：

我們在這次研究分析、推論中，利用了國中才學的畢氏定理，雖然是用了，但對於畢氏定理，我們是還不知道如何推導而來，只是先應用。數學真的不容易，看似單純的多面體，卻蘊含許多我們前所未聞的規則，我們需要再學習。

柒、結論

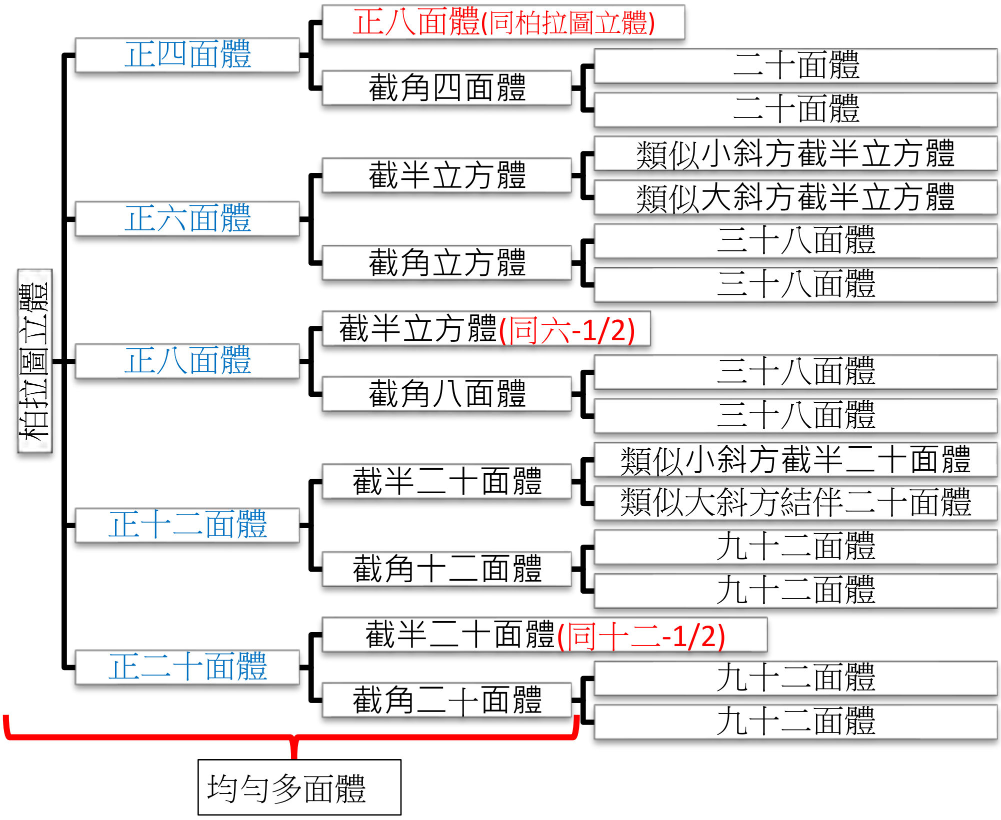
一、圓內接正多邊形有無限多個。

二、正多邊形的面要組成立體角需要 3 個到 5 個，3 個正三角形可組成正四面體、4 個正三角形組成正八面體、5 個正三角形組成正二十面體、3 個正方形組成正六面體、3 個正五邊形組成正十二面體。

三、每種正多邊形經截角後，其稜線數、面數和頂點數都有規律可循，並可進行推算。

四、第一次截角後之多面體，正四面體、正八面體及正二十面體 3 個由正三角形組成的正多面體，經 1:1:1 邊長比例截角，皆能對應阿基米德立體之半正多面體，而正六面體則需依 1:√2:1 邊長比例截角；正十二面體則須依 1:1.6:1 邊長比例截角，才能對應阿基米德立體之半正多面體。

五、我們找出 5 個柏拉圖立體、7 個阿基米德立體、4 個類似阿基米德立體及 12 個均勻多面體，模組如下：



捌、參考資料及其他

數學也可以這樣學-結合數學概念與自然觀察的華德福式學習法 商周出版

3D 立體變變變(The Variety of Polyhedra) 彭君智

正多面體 維基百科-自由的百科

(https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94)

【評語】080412

此主題在過去科展研究中已經做了不少，很難再有新意之處或新的結果，本作品也難突破。選題時忽略了參考過去前人的作品，稍嫌大意。製作第二次截頂角，算蠻有趣的，重點之一是證明“所得出來的截面絕非正三角形”(實為等腰三角形，然而第一次截頂角都是正多邊形)，依照所繪圖形來看，幾乎證明完畢，但解釋卻過於冗長而沒有利用圖形的直覺。另外建議：參展之前各個組員對於同隊友的結果也要充分了解，而不是只負責自己的部分。最後，正多面體的教材很多，應該先做好參考資料的研讀，以避免重覆前人的結果，卻無法超越前人。

作品海報

摘要

本研究從圓內接正多邊形開始，延伸至多面體之規律探討，分為以下部分：

一、探索：名詞解釋。

二、分析與統整：

(一)圓內接正多邊形有無限多個。

(二)正多邊形組成立體角的個數為3、4、5個正三角形、3個正方形、3個正五邊形。

(三)經截面後之多面體稜線、點、面有其相關規律可推導。

三、延伸

(一)依1:1邊長比例截面，5種柏拉圖立體皆可截出半正多面體；然而在3等分截面時，正四面體、正八面體、正二十面體仍可依1:1:1邊長比例截面，截出半正面體，正六面體須以1:√2:1邊長比例、正十二面體須以1:1.6:1邊長比例，才能截出半正多面體。

(二) 經截面研究，找出了7個阿基米德立體、4個類似阿基米德立體及12個均勻多面體、3組對偶多面體。

壹、研究動機

學校的學長、姐去年做過的科展裡提到了圓內接正多邊形，引起我們的好奇，圓內接多邊形的規律。我們上網查了如何畫圓內接正多邊形，意外看到正多面體只有5個，是柏拉圖立體。我們很想知道什麼是正多面體？與正多邊形有何關聯？除了柏拉圖立體外，還有沒有其他的正多面體？後來我們在老師桌上看到了「數學也可以這樣學-結合數學概念與自然觀察的華德福式學習法」這本書，裡面介紹了大自然裡也有類似的情況，於是我們決定進行研究。

貳、研究目的

一、探討圓內接正多邊形之關係。

二、探討平面圖形與多面體之頂角關係。

三、認識並探討正多面體的點、線、面之規律。

四、將柏拉圖立體依特定邊長比例截角，探查截角後多面體點、線、面之規律。

五、尤拉公式、阿基米德立體、對偶多面體、均勻多面體與多面體之關係探討。

六、從正多面體截角結果歸納並建構出截角多面體的模組。

參、文獻探討

我們依據課本所提到之多邊形、正多邊形、柱體及正多面體等上網查詢其數學定義，在維京百科上查到相關定義，詳如報告。

肆、研究設備及器材

一、　圓規、尺。

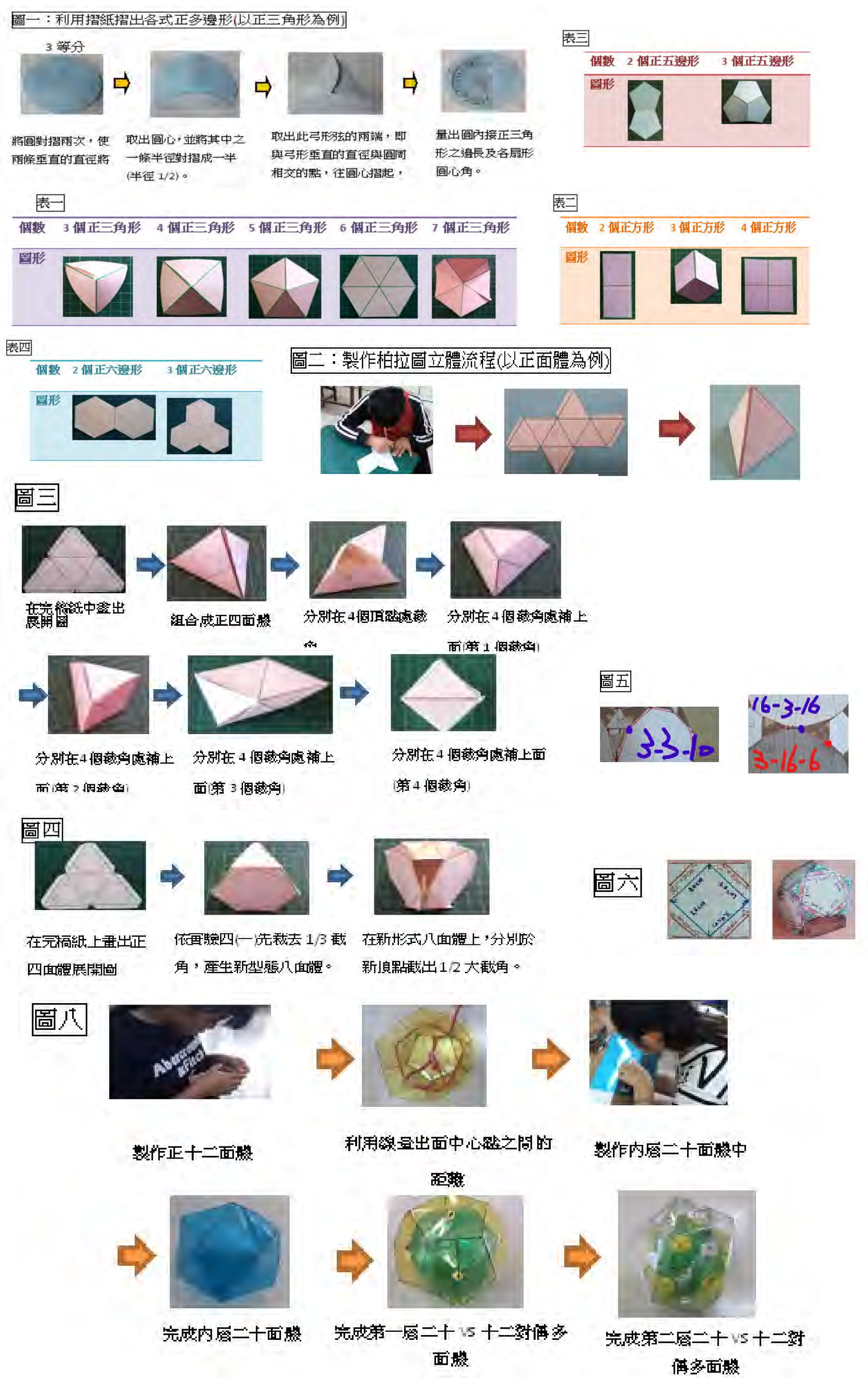
二、　各式色鉛筆、色紙、完稿紙、彩色投影片。

三、　剪刀、切割墊、雙面膠。

四、　數位相機、電腦、印表機。

伍、研究方法及步驟

	研究目的	研究方法		研究步驟
探索	探討圓內接正多邊形之關係	研究一：利用摺紙探討圓內接正多邊形之關係		利用色紙剪下半徑 6.4 公分的圓，分別依 4、8、16、3、6、12、5、7、9 等分摺出扇形，再畫出及摺出圓內接正多邊形，量出各扇形圓心角，步驟如圖一，並整理相關數據。
探索	探討平面圖形與多面體之頂角關係	研究二：探討正三角形等正多邊形與立體角之關係		將正三角形、正方形、正五邊形及進行拼貼，如表一、二、三、四，並探討及規律。
分析與統整	認識並探討正多面體的點、線、面之規律	研究三：認識並探討正多面體的組成結構		利用完稿紙以圓半徑 5 公分為基底，畫出正四面體、正八面體、正二十面體之展開圖及邊長 3.6 公分之正十二面體展開圖和邊長 5 公分之正六面體展開圖，分別組合成正多面體， 計算其頂點數、邊數及面數，並進行規律探討，如圖二。
分析與統整	將柏拉圖立體依特定邊長比例截角，探查截角後多面體點、線、面之規律	研究四：探討柏拉圖透過有規律的切割，所形成新多面體的點、線、面之關係	第一次截角	將研究三所製作之 5 個柏拉圖立體，分別依邊長 1:1 及 1:1:1 進行第一次截角，步驟如圖三(以正四面體邊長 1:1 截角為例)，觀察其截角切面、計算其頂點數、線數及面數，並尋找其規律。
分析與統整		研究四	第二次截角	將研究四(一)所製作之 7 個新截角立體，分別依邊長 1:1 及邊長 1:1:1 進行第二次截角，步驟如下(以正四面體邊長 1:1:1 截角之八面體進行第二次邊長 1:1 截角為例)，觀察其截角切面、計算其頂點數、線數及面數，並尋找其規律，如圖四。
延伸		研究五：截角與多面體之關係探究	五-(一)截角頂點與臨邊規律之探討	我們在研究三、四中發現依不同比例截角，會產生不同的截面形狀，1:1 邊長比例截角會產生四邊形之截面、1:1:1 邊長比例截角則會產生三角形之截面，我們找出各個多面體之截角與頂點，試圖找出其規律，如圖五。
延伸		研究五	五-(二)最適合正六面體及正十二面體之邊長截角比例	先分別在正六面體及正十二面體上畫出邊長 1:1 及 1:1:1 之截角圖，並量出其截完之原面及截面邊長進行大、小差異比對，探究其原面正多邊形之角度與截角長度比例之關係，找出最適合之截面邊長比例，如圖六。
延伸		研究五	五-(三)頂點相鄰原面形狀之差異影響截面形狀之探究	在研究三、四中發現，第一次截角完之多面體，頂點相鄰之面已不是同一形狀，在進行第二次截面後，發現第二次截面，無論是邊長 1:1 或邊長 1:1:1 截角，皆無法截出正多邊形之截面，我們將第一次截角之截面與第二次截角之截面，進行角度大小與邊長大小之比較，如圖七。
延伸	尤拉公式、阿基米德立體、對偶多面體、均勻多面體與多面體之關係探討	研究六：對偶對面體之規律探究		我們在研究三時，找到一個特別的多面體規律為「對偶多面體」，利用投影片及透明塑膠板，做出柏拉圖立體之對偶多面體。探討其規律及關係。
延伸		研究七：驗證尤拉定理、對應阿基米德立體及均勻多面體，並進行分類		我們依上述所有研究結果，將 26 個多面體分類，並對比阿基米德立體、均勻多面體及對偶多面體規律，建構出截角多面體之模組。
結論	從正多面體截角結果歸納並建構出截角多面體的模組			



陸、結果

一、研究一：利用摺紙探討圓內接接正多邊形之關係

表一

圓之等分	每一扇形佔圓之比例	每一扇形圓心角角度	扇形總角度	圓心角正確角度	圓內接正多邊形
4	1/4	90°	360°	90°	正方形
8	1/8	45°	360°	45°	正八邊形
16	1/16	22.5°	360°	22.5°	正十六邊形
3	1/3	120°	360°	120°	正三角形
6	1/6	60°	360°	60°	正六邊形
12	1/12	30°	360°	30°	正十二邊形
10	1/10	36°	360°	36°	正十邊形
7	1/7	約 52°	360°	(360/7)°	正七邊形
9	1/9	40°	360°	40°	正九邊形

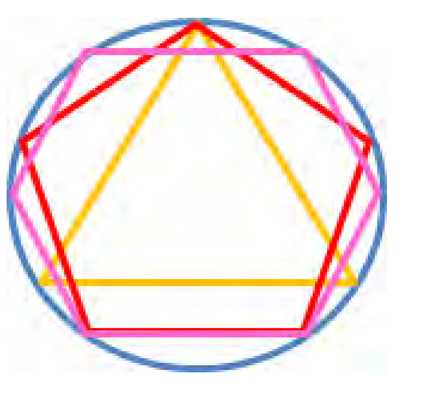
(一)發現

1.我們發現只要是360的因數進行等分，每一扇形的角度皆可以是整數，都能順利摺出多圓內接正多邊形。

2.在 7等分中，因為360無法被7整除，每一扇形角度無法一致，有誤差。

3.圓內接正多邊形有無限多個。

(二)分析



依正多邊形內角計算公式

內角=(頂點數-2)X180° ÷頂點數

正三角形內角=(3-2) X180° ÷3=60°

正方形內角=(4-2) X180° ÷4=90°

正五邊形內角=(5-2) X180° ÷5=108°

正六邊形內角=(6-2) X180° ÷6=120°

正九十邊形內角=(90-2) X180° ÷90=176°

推論：正多邊形的邊數越多，越趨近於圓。

二、研究二：平面圖形與立體圖形之關係探討

我們將研究二之結果整理成表二，並進行相關數據分析。

表二

正多邊形個數	2	3	4	5	6	7
正三角形	X	√	√	√	X	X
正方形	X	√	√			
正五邊形	X	√				
正六邊形	X	X				

註：「X」無法組成立體角；「√」可以組成立體角。

(一)發現

1. 在立體圖中，要構成「立體角」， 至少需要三面多邊形，至多五面多邊形，少於三面者只能形成平面圖形，超過七面，會形成 凹凸面體(如7個正三角形)。

2 用相同的正多邊形組成的立體角有5種，分別如右圖。

正多邊形名稱	正三角形			正方形	正五邊形
正多邊形個數	3	4	5	3	3
正多面體名稱	正四面體	正八面體	正二十面體	正六面體	正十二面體

(二)分析

我們依據上面之研究結果，我們歸納出以下3點說明：

1.多面體的每個頂點至少在3個面上。

2.這些相交的面處的角（也就是頂點發出的角）的和必須小於 360°

3.正多面體的頂點的角是相等的，這個角必須小於 360°/3 = 120°

我們利用以上3個說明，檢視各正多邊形

正多邊形之頂角計算為：180° x(頂點數-2)÷頂點數

依據說明3 180° x(頂點數-2)÷頂點數<120°

推論：只有3個、4個、5個正三角形及3個正方形、3個正五邊形可以組合成立體角，與研究二之研究結果相符。

正三角形

正三角形頂角：

180° x(3-2)÷3=60°

360° ÷60° =6

∵3≦n<6，n為正整數

∴n=3,4,5

正方形

正方形頂角：

80° x(4-2)÷4=90°

360° ÷90° =4

∵3≦n<4，n為正整數

∴n=3

正五邊形

正五邊形頂角：

180° x(5-2)÷5=108°

360° ÷108° ≒3.3

∵3≦n<3.3，n為正整數

∴n=3

正六邊形

正六邊形頂角：

180° x(6-2)÷6=120°

(=120° ，不符合3)

360° ÷120° =3

∵正六邊形頂角=120° ，已不符合3

∴無法成為多面體

三、研究三：認識並探討正多面體的組成結構

我們將組合好之5個柏拉圖立體統計頂點數、稜線數及邊長數，並找出其相關規律。

表三

名稱	立體圖	頂點數	稜線數	面				共點面數	頂點數+面數
				邊長(公分)	邊長數	面數	形狀		
正四面體		4	6	6	3	4	正三角形	3	8
正六面體		8	12	6	4	6	正方形	3	14
正八面體		6	12	6	3	8	正三角形	4	14
正十二面體		20	30	3.6	5	12	正五邊形	3	32
正二十面體		12	30	6	3	20	正三角形	5	32

(一)發現

1. 正多面體的頂點數、稜線數和面數之關係如下：

(1)稜線數=面的邊長數x面數÷2，例如：正四面體，6=3x4÷2。

(2)頂點數=面的邊長數X面數÷面共點數，例如：正四面體，4=3x4÷3。

2.頂點數+面數=稜線數+2。

3.正四面體的稜線數和面數相同，正六面體和正八面體、正十二面體和正二十面體稜線數相同，頂點數和面數互為相反，如右表。

正多面體 / 屬性	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
頂點數+面數	8	14	14	32	32
稜線數	6	12	12	30	30

正多面體 / 屬性	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
稜線數	6	12	12	30	30
頂點數	4	8	6	20	12
面數	4	6	8	12	20

(二)分析

1. 稜線數=面的邊長數x面數÷2

以正四面體為例

3個邊　3個邊　3個邊　3個邊

3x4=12(正四面體有4個正三角形的面，共有12個邊)

12÷2=6(每個邊會重複1次)

2. 頂點數=面的邊長數x面數÷面共點數

3個邊　3個邊　3個邊　3個邊　3面產生1頂點

3x4=12(正四面體有4個正三角形的面，共有12個邊)

12÷2=6(每個邊會重複1次)　6x2÷3=4(每個邊有2點頂點，3條邊共1個頂點)

四、研究四：探討柏拉圖透過有規律的切割，所形成新多面體的點、線、面之關係

我們將柏拉圖立體依1:1及1:1:1邊長比例進行第一次截角研究，另再將截角後所產生之14個新截面多面體依1:1及1:1:1邊長比例進行第二次截角研究，結果如下表四-(一)。

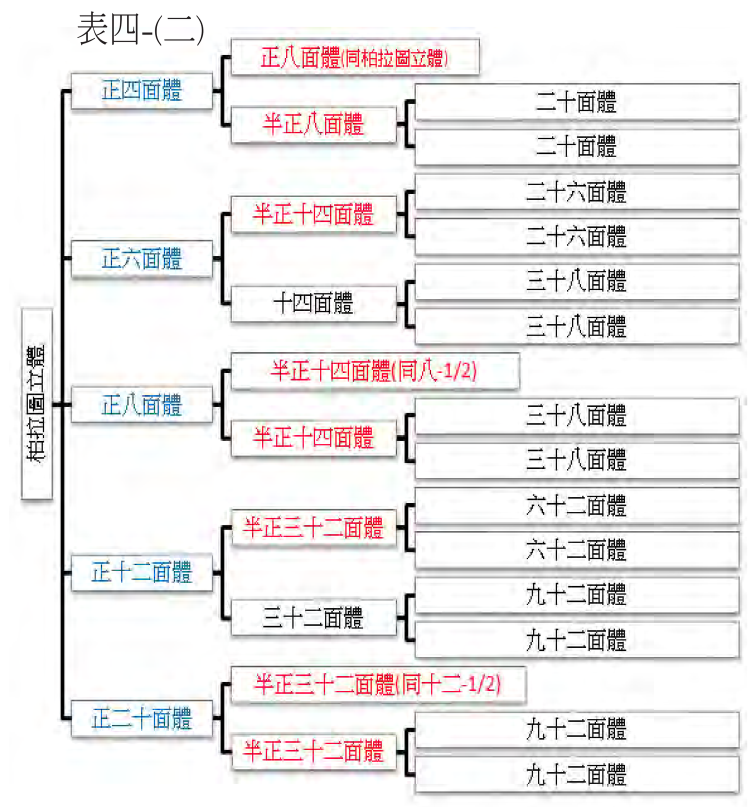
表四-(一)

[illegible]

(一) 發現

1. 5個柏拉圖立體進行第一次、第二次截角後，產生了1個正八面體、1個半正八面體、3個不同型式的半正十四面體、1個十四面體、3個半正三十二面體、1個三十二面體、2個不同的二十面體、2個不同的二十六面體、4個不同的三十八面體、2個不同的六十二面體及4個不同的九十二面體，如表四-(二)。
2. 正六面體與正八面體、正十二面體與正二十面體經1:1邊長比例截角，產生了同樣的半正十四面體及半正三十二面體。
3. 正六面體及正十二面體經1:1:1邊長比例截角後，並無產生半正多面體，如下表四-(三)。
4. 所有第一次新截角多面體之新截面皆為正多邊形，且正多邊形之邊數=原立體圖之面共點數；但第二次新截角之截面皆非正多邊形，且新截面多邊形之邊數=原多面體之面共點數，如下表四-(四)。
5. 所有新截面多面體之頂點、稜線數及面數關係，符合研究三之規律。
   (1)稜線數=(截完原面的邊長數x截完原面數+截面的邊長數x截面數)÷2；
   同一正多面體經1:1:1邊長比例截角之稜線數=1:1邊長比例截角之稜線數x1.5。
   (2)頂點數=(截完原面的邊長數x截完原面數+截面的邊長數X截面數)÷面共點數；
   1:1邊長比例截角之新截面立體之頂點數=截面邊數x截面數÷2，
   1:1:1邊長比例截角之新截面立體頂點數=截面邊數x截面數。
   (3)頂點數+面數=稜線數+2。
   (4)共點面數：1:1邊長比例截角的截面立體皆為4面共點，1:1:1邊長比例截角的截面立體皆為3點共面。
6. 第二次截角之多面體之原面及第一次截面之關係，如表四-(五)：
   (1) 1:1截角後，截角後原面多邊形之邊數=原面多邊形之邊數，且都為正多邊形。
   (2) 1:1:1截角後，截角後原面多邊形之邊數=原多邊形之邊數x2，正四面體、正八面體及正二十面體的截後原面為正多面體，正六面體、正十二面體的截後原面非正多邊形。

表四-(二)

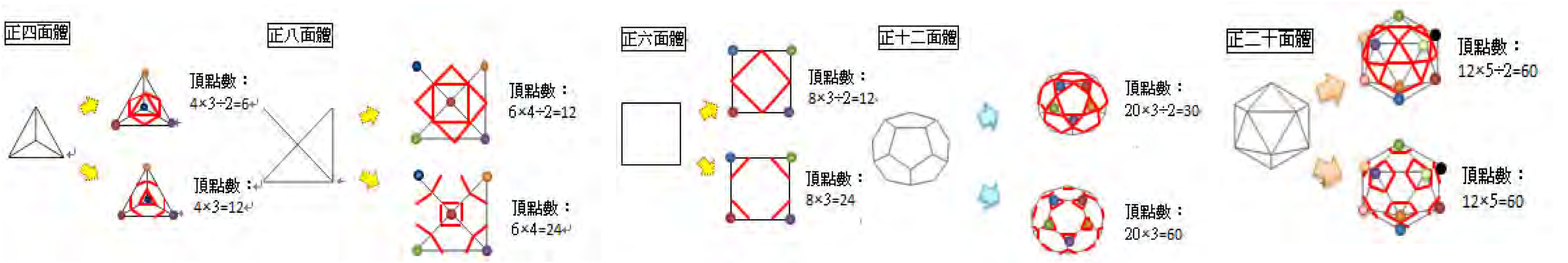


表四-(三)、表四-(四)、表四-(五)

[illegible]

(二)分析

1.多面體面數與原多面體頂點關係分析



設新截角多面體面數N，原正多面體面數X、頂點數為Y，則關係式：
∵每1頂點產生1新截面
∴新截面數=Y
　N=X+Y

第一次截角	第二次截角
1:1、1:1:1	1:1、1:1:1
N(4)=4+4=8	N(4.1/3.8)=8+12=20
N(6)=6+8=14	N(6.1/2.14)=14+12=26
N(8)=8+6=14	N(6.1/3.14)=14+12=26
N(12)=12+20=32	N(8.1/3.14)=14+24=38
N(20)=20+12=32	N(12.1/2.32)=32+30=62
	N(12.1/3.32)=32+60=92
	N(20.1/3.32)=32+60=92

2.截角比例與原面截後形狀之關係

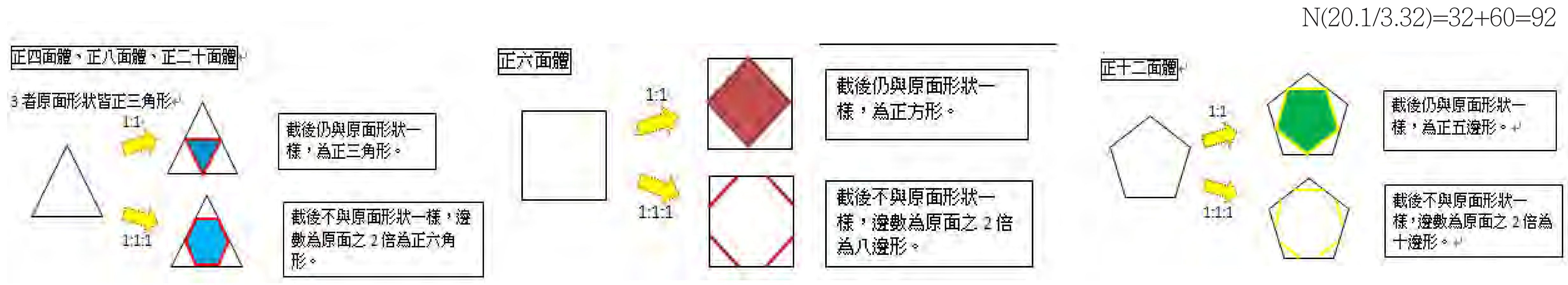
設正多面體之原面邊數為X，經截角後之原面邊數為Y，1:1邊長比例者為Y(1/2)；1:1:1邊長比例者為Y(1/3)，其關係推導如下：

1:1邊長比例截角

∵取每邊之中心為新頂點，所以每邊對應1個新頂點，
　所以產生X個頂點
∴Y(1/2)=X 維持原正立方體原面形狀

1:1:1邊長比例截角

∵取每邊之中心為新頂點，所以每邊對應2個新頂點，
　所以產生2xX個頂點
∴Y(1/2)=Xx2 截後原面形狀邊數為原來邊數2倍



推論：1.1邊長比例截角，無論截多少次，截後原面都會與原面形狀相同；.1:1:1邊長比例截角，每多截1次，截後原面都會是原面之2倍。

五、研究五：截角比例影響頂點臨面之規律、原面形狀及截面形狀之探究

(一) 研究五-(一)：1:1邊長比例及1:1:1邊長比例截角頂點與臨邊規律之探討

我們找出26個多面體之頂點，並找出其臨面規律，結果如表五-(一)-1。

表五-(一)-1

編號	頂點及相鄰面圖	截角後 原面形狀	第一次截面形狀	第二次截面形狀	頂角相鄰面之規律	均勻多面體	說明
正四面體		正三角形			3-3-3	●	
正六面體		正方形			4-4-4	●	
正八面體		正三角形			3-3-3-3	●	
正十二面體		正五邊形			5-5-5	●	
正二十面體		正三角形			3-3-3-3-3	●	
四-1/3		正六邊形	正三角形		6-3-6	●	
六-1/2		正三角形	正方形		4-3-4-3	●	
六-1/3		八邊形	正三角形		8-3-8		八邊形非正多邊形。
八-1/3		正六邊形	正方形		6-4-6	●	
十二-1/2		正五邊形	正三角形		3-5-3	●	
十二-1/3		十邊形	正三角形		10-10-3		十邊形非正多邊形。
二十-1/3		正六邊形	正五邊形		6-5-6	●	
四-1/3-1/2		正六邊形	正三角形	三角形	6-3-3-6 3-3-3-6		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
四-1/3-1/3		十二邊形	正六邊形	三角形	3-6-12 3-12-12		1.三角形、十二邊形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
六-1/2-1/2		正方形	正三角形	四邊形	3-4-4-4		四邊形非正多邊形。
六-1/2-1/3		八邊形	正六邊形	四邊形	4-6-8		四邊形非正多邊形。
六-1/3-1/2		正八邊形	正三角形	三角形	3-3-3-8 3-8-3-8		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
六-1/3-1/3		十六邊形	六邊形	三角形	3-6-16 3-16-16		1.三角形、六邊形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
八-1/3-1/2		正六邊形	正方形	三角形	4-3-6-3 6-3-6-3		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
八-1/3-1/3		十二邊形	八邊形	三角形	3-8-12 12-3-12		1.三邊皆非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
十二-1/2-1/2		正五邊形	正三角形	四邊形	3-4-5-4		四邊形非正多邊形。
十二-1/2-1/3		十邊形	正六邊形	四邊形	4-6-10		四邊形、十邊形非正多邊形。
十二-1/3-1/2		十邊形	正三角形	三角形	10-3-10-3 3-3-3-10		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
十二-1/3-1/3		二十邊形	正六邊形	三角形	3-20-6 3-20-20		1.三角形、二十邊形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
二十-1/3-1/2		正六邊形	正五邊形	三角形	5-3-6-3 6-3-6-3		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。
二十-1/3-1/3		十二邊形	十邊形	三角形	3-10-12 3-12-12		1.三角形非正多邊形。 2.頂點鄰面非單一規律。

1.發現

(1) 我們整理以上數據，整理如表五-(二)-2，發現頂點臨邊有2種規律多面體。，皆是進行過第二次截角的第一次截角依1:1:1邊長比例截面之多面體。
(2) 正六面體及正十二面體經過1:1:1邊長比例截面後，原面就非正多邊形。

表五-(一)-2

頂點臨面規律種類	編號
1	正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體、四-1/2、四-1/3、六-1/2、六-1/3、八-1/3、十二-1/2、十二-1/3、二十-1/3、六-1/2-1/2、六-1/2-1/3、十二-1/2-1/2、十二-1/2-1/3
2	四-1/3-1/2、六-1/3-1/2、六-1/3-1/3、八-1/3、1/2、八-1/3-1/3、十二-1/3-1/2、十二-1/3-1/3、二十-1/3-1/2、二十-1/3-1/3

2.分析

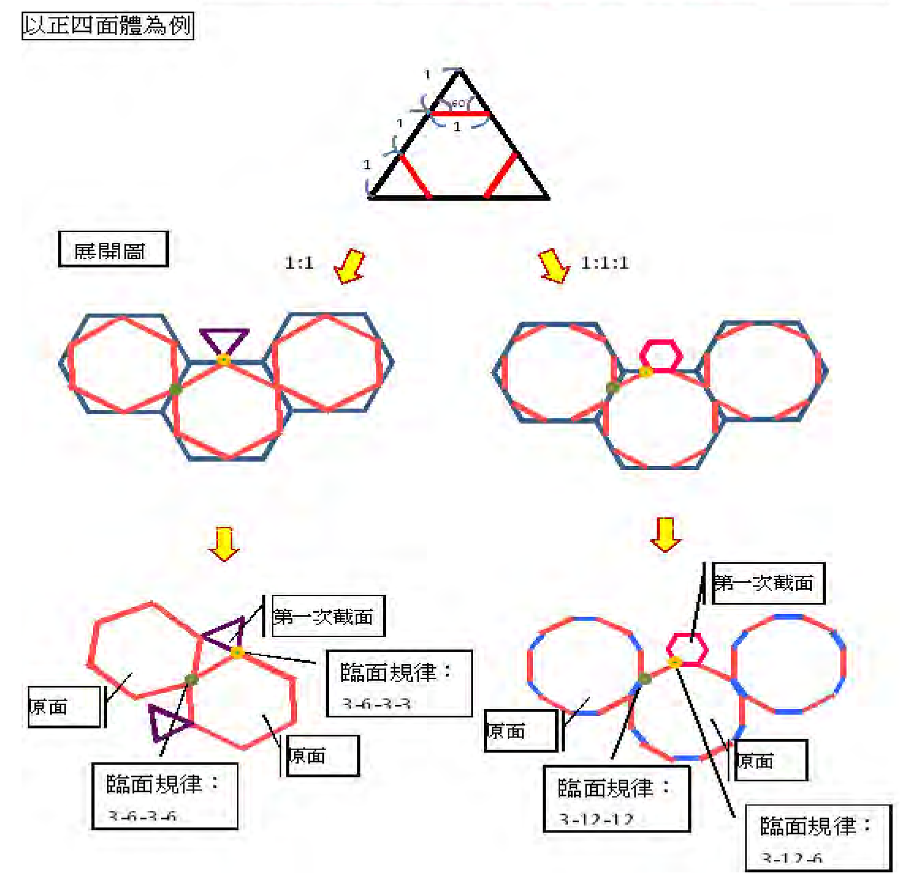
頂點臨面規律與截角比例關係：經歷1:1:1邊長比例截角後之多面體，經歷1:1邊長比例或1:1:1邊長比例截角都會出現2種之頂點臨面規律。

(1) 在1:1:1邊長比例截角中，原面與臨面間仍各有1/3長相連，再次截角中，這個相連的邊，在1:1邊長比例截角中，會變成相連之頂點：在1:1:1邊長比例截角中，仍有原邊長的1/9相連接。

2. 另外在第1次截角中，會產生1個新截邊與新截面相連，這個截邊在第二次截角中，在1:1邊長比例截角中，會變成與第一次截面相連之頂點；在1:1:1邊長比例截角中，仍有原邊長的1/9與第一次截面相連接。

推論：只要經歷過1:1:1邊長比例截角的多面體，都會出現2個以上之頂點臨面規律。

以正四面體為例



(二)研究五-(二)：最適合正六面體及正十二面體之邊長截角比例

我們在研究四中，發現正六面體和正十二面體，依1:1:1邊長比例截角，無法截出由正多邊形所組成的半正多面體，因此進行延伸研究，結果如下表五-(二)：

1.發現

(1)正六面體依1:1.4:1邊長比例截角，可得到最接近正八邊形之圖形。

(2)正十二面體依1:1.6:1邊長比例截角，可得到正十邊形之圖形。

表五-(二)

正六面體:原立方體邊長 6.9公分

截角邊長比例	截完原面形狀	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6	邊長 7	邊長 8
1:1	正方形	3.4	3.4	3.4	3.4				
1:1:1	八邊形	3.3	2.3	3.3	2.3	3.3	2.3	3.3	2.3
1:2:1	八邊形	2.5	3.5	2.5	3.5	2.5	3.5	2.5	3.5
1:1.5:1	八邊形	3.0	2.8	3.0	2.8	3.0	2.8	3.0	2.9
1:1.4:1	**八邊形**	**3.0**	**2.9**	**3.0**	**2.9**	**3.0**	**2.9**	**3.0**	**2.9**
1:1.3:1	八邊形	2.7	3	2.7	3	2.7	3	2.7	3

註：邊長取到小數後2位進行四捨五入。

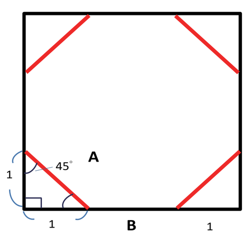
正十二面體：原立方體邊長 3.6公分

截角邊長比例	截完原面形狀	邊長 1	邊長 2	邊長 3	邊長 4	邊長 5	邊長 6	邊長 7	邊長 8	邊長 9	邊長 10
1:1	正五邊形	3	3	3	3	3					
1:1:1	十邊形	1.2	2	1.2	2	1.2	2	1.2	2	1.2	2
1:2:1	十邊形	1.8	1.4	1.8	1.4	1.8	1.4	1.8	1.4	1.8	1.4
1:1.5:1	十邊形	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.6	1.5	1.6
1:1.7:1	十邊形	1.7	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6
1:1.6:1	**正十邊形**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**	**1.6**

註：邊長取到小數後2位進行四捨五入。

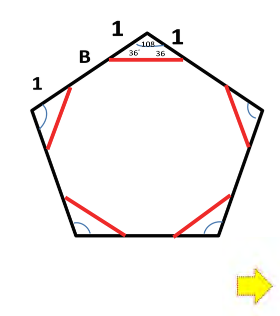
2.分析

(1)正方形邊長比例與截角斜邊之關係大約為1:1.4:1。

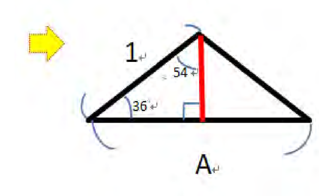


設正方形之依1:X:1邊長比例截角，可形成正八邊形
∵正八邊形每邊一樣長　∴A=B
另外，截角為等腰直角三角形，依畢氏定理，等腰直角三角形之邊長比為1:√2:1，大約是1:1.432:1
A≒1.4　A=B=1.4　X=1.4，比例為1:1.4:1

(2)正五邊形邊長比例與截角斜邊之關係大約為1:1.6:1。



設正五邊形之依1:X:1邊長比例截角，可形成正十邊形
∵正十邊形每邊一樣長　∴A=B
另外，截角為2個角度分別為36°、54°、90°的直角三角形，依畢氏定理，此等腰直角三角形之邊長比大約為3:4:5。
∵A/2:1=4:5　∴A=4÷5x2=1.6
A=B=1.6 X=1.6
比例為1:1.6:1



(三)研究五-(三)頂點相鄰原面形狀之差異影響截面形狀之探究

我們將研究四關於截面形狀的相關數據整理如下表五-(三)：

1.發現

(1)截面形狀邊數=頂點共點數，另外第二次截面出現四邊形的多面體都是第一次截角以1:1邊長比例截角之多面體，有六1/2-1/2、六-1/2-1/3、十二-1/2-1/2、二-1/2-1/3。

(2)第二次截面無法截出正多邊形。

表五-(三)

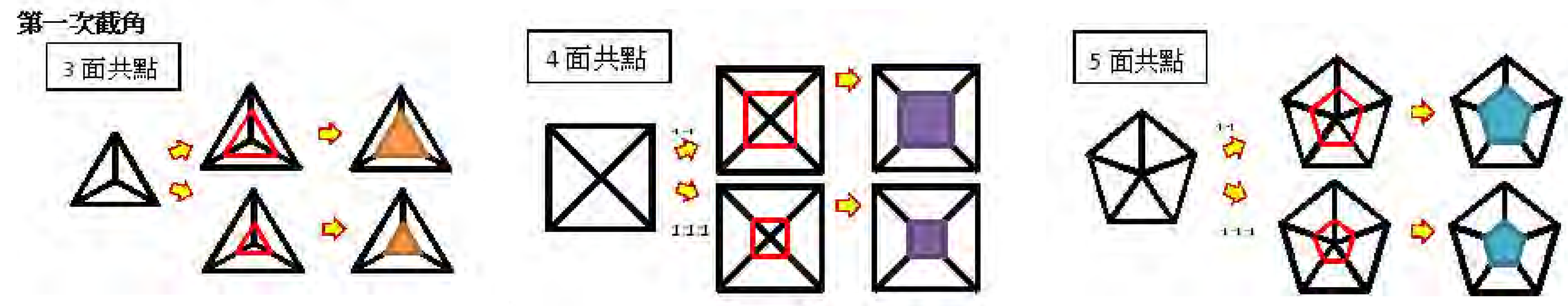
編號	四-1/2	四-1/3	六-1/2	六-1/3	八-1/2	八-1/3	十二-1/2	十二-1/3	二十-1/2	二十-1/3
原立體共點面數	3	3	3	3	4	4	3	3	5	5
臨面形狀	正三角形	正三角形	正方形	正方形	正三角形	正三角形	正五邊形	正五邊形	正三角形	正三角形
臨面角度	60°	60°	90°	90°	60°	60°	108°	108°	60°	60°
截面頂角角度	60°	60°	60°	60°	90°	90°	60°	60°	108°	108°
截面邊長(公分)	2.8	2	3.8	3	2.7	1.9	2.5	2	2.8	2.1
新截面形狀	正三角形	正三角形	正三角形	正三角形	正方形	正方形	正三角形	正三角形	正五邊形	正五邊形

原立體編號	四-1/3		六-1/2		六-1/3.4		八-1/3		十二-1/2		十二-1/3.6		二十-1/3	
共點面數	3		4		3		3		4		3		3	
原頂點臨面角度	60°		90°		90°		90°		60°		60°		108°	
	120°		60°		135°		120°		108°		144°		120°	
	120°		90°		135°		120°		60°		144°		120°	
			60°						108°					
第二次截角	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1	1:1	1:1:1
截面頂角角度	30°	50°	90°	90°	40°	40°	50°	50°	90°	90°	40°	40°	50°	50°
	75°	65°	90°	90°	70°	70°	65°	65°	90°	90°	70°	70°	65°	65°
	75°	65°			70°	70°	65°	65°			70°	70°	65°	65°
邊長(公分)	1.6	1.2	2.9	2	2.5	1.5	1.7	1.3	2.4	1.7	1.5	1.1	1.8	1.1
	0.9	0.7	1.9	1.5	1.4	1	1.4	0.9	1.4	0.9	1	0.7	1.7	1
新截面形狀	三角形		長方形		三角形		三角形		長方形		三角形		三角形	

2.分析

(1) 第一次截角都是正多邊形：5個柏拉圖立體依共點面分類，可分為3面共點、4面共點及5面共點，依頂點鏡射，可得以下圖形，因為組成之多邊形角度一樣，所以截角出來的截面與原鏡射形狀一樣。

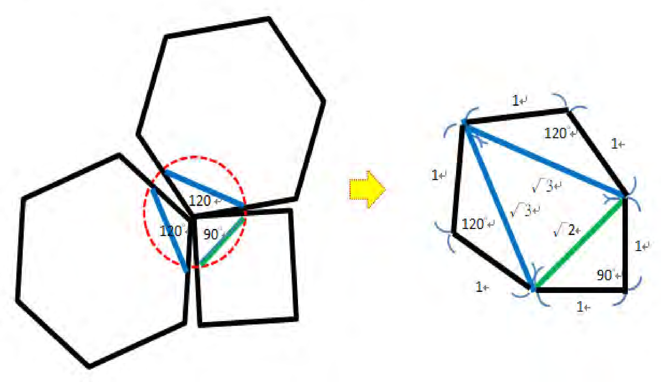
推證：依不同半徑可畫出同心圓，半徑不同，但仍為正多邊形。



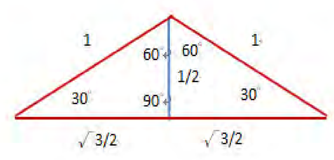
(2)第二次截角都非正多邊形：7個第一次截角完之半正多邊形依共點面分類，可分為 3面共點、4面共點，依頂點鏡射，可得以下圖形，因為組成之多邊形角度不一樣，所以截角出來的截面為等腰三角形及長方形。

第二次截角

以八-1/3-1/2 之展開圖做說明



2 個斜邊，頂角為 120°等腰三角形之底邊

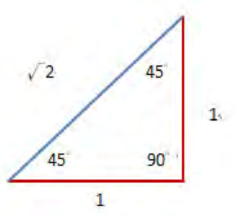


設底邊長為 X

∵原頂角 120°平分為 2，1 直角三角形之頂底角為 30°，依據畢氏定理，對應之邊 $1:\sqrt{3}:2$，以斜邊為 1，其底邊為$\sqrt{3}/2$。

$\therefore X=\sqrt{3}/2\times 2=\sqrt{3}$

1 個底邊，等腰直角三角形之斜邊



設底邊長為 Y

∵等邈直角三角形之 1 角為 90°，另 2 角為 45°，依據畢氏定理，對應之邊長比例為$\sqrt{2}:1:1$。

$\therefore Y=\sqrt{2}$

推論：只要頂點臨面非同一正多邊形，截出來的截面就非正多邊形，我們可以由此推導，即便進行第三次截角，也無法產生正多邊形，無法做出阿基米德其他半正多面體。

六、研究六：對偶多面體之規律探究

我們在前面的研究中，發現了在柏拉圖立體中，5個正立方體的面數、稜線數和頂點數有特殊的規律，這樣的規律在其他21個截角多面體中無發現，如表六。

表六

正多面體名稱	稜線數	頂點數	面 數	對偶多面體	發現
正四面體	6	4	4		1.正四面體 4 個面有 4 個中心點，連接後產生的仍是正四面體。 2.中正四面體的邊長是小正四面體邊長的 3 倍，而大正四面體的邊長是中正四面體的 3 倍。
正六面體	12	8	6		正六面體 6 個面有 6 個中心點，連接後產生正八面體；正八面體 8 個面有 6 個中心點，連接後產生正六面體。
正八面體	12	6	8		
正十二面體	30	20	12		正二十面體 20 個面有 20 個中心點，連接後產生正十二面體；正十二面體 12 個面有 12 個中心點，連接後產生正二十面體。

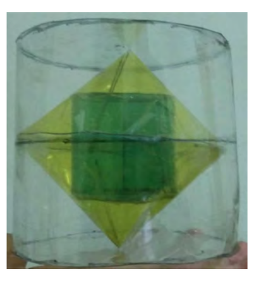
(一)發現

1. 正六面體與正八面體、正十二面體與正二十面體2個稜線數一樣，頂點數與面數互為交換的多面體稱為對偶多面體。
2. 正四面體的頂點數和面數相同，亦可互換，是唯一特殊對偶多面體是自己的正多面體。
3. 邊數越少的正多面體，其對偶多面體的邊長越短，其中正四面體的對偶多面體邊長是自己的1/3倍，其餘的無此規則，至於原因，我們無法推知。

(二)分析

探討：對偶多面體，稜線數不變，面數與頂點數互換，指的是多面體，那圓柱呢？有無此特性？

假設：圓柱的稜線數2、面數3、頂點0，如果有其對偶多面體，其立體稜線數應不變為3、面數0、頂點為3。



實際研究：我們以底面半徑5公分、高10公分之圓柱為底，試圖找出其對偶多面體。

1. 我們找出側面中心線，將其跟2圓底面之中心點連接，做出了2個圓錐組成的立體，再從這立體的2個圓錐取其中心點，連結後，又發現了圓柱體。
2. 但問題來了，2個圓錐所組成的頂點2個、稜線1條、面2個，與假設不符。

推論：圓柱、圓錐非屬於多面體，因而無法以對偶多面體規律檢視。

七、研究七：驗證尤拉定理、對應阿基米德立體及均勻多面體，並進行分類

我們將26個多面體驗證尤拉定理，並找出與阿基米德立體、均勻多面體、對偶多面體之多面體進行規律分類。

(一)將研究三、四中之柏拉圖立體及截角後之立體，計算之點、線、面數量，驗證尤拉定理，發現全部的多面體符合尤拉定理：點數+面數-稜線數=2，如下表七-(一)。

(二) 將研究四、五柏拉圖立體兩次截角後的21個新截點多面體進行比對，我們找到了7個阿基米德立體及4個相似阿基米德立體如下表七-(二)。

表七-(一)

編號	點數(V)	稜線數(E)	面數(F)	V+F-E	編號	點數(V)	稜線數(E)	面數(F)	V+F-E
正四面體	4	6	4	2	四-1/3-1/2	18	36	20	2
正六面體	8	12	16	2	四-1/3-1/3	36	54	20	2
正八面體	6	12	18	2	六-1/2-1/2	36	72	38	2
正十二面體	20	30	12	2	六-1/2-1/3	72	108	38	2
正二十面體	12	30	20	2	六-1/3-1/2	24	48	26	2
四-1/2	6	12	8	2	六-1/3-1/3	48	78	26	2
四-1/3	12	18	8	2	八-1/3-1/2	36	72	38	2
六-1/2	24	36	14	2	八-1/3-1/3	72	108	38	2
六-1/3	12	24	14	2	十二-1/2-1/2	60	120	62	2
八-1/2	24	36	14	2	十二-1/2-1/3	120	180	62	2
十二-1/2	30	60	32	2	十二-1/3-1/2	90	180	92	2
十二-1/3	60	90	32	2	十二-1/3-1/3	180	270	92	2
二十-1/2	30	60	32	2	二十-1/3-1/2	90	180	92	2
二十-1/3	60	90	32	2	二十-1/3-1/3	180	270	92	2

表七-(二)

第一次截角

編號	四-1/3	六-1/2	六-1/3.4	八-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	截角四面體	截半立方體	截角立方體	截角八面體
均勻多面體	✓	✓	✓	✓

編號	十二-1/2	十二-1/3.6	二十-1/3
截角多面體			
相對應阿基米德立體	截半二十面體	截角十二面體	截角二十面體
均勻多面體	✓	✓	✓

第二次截角

編號	四-1/3-1/2	四-1/3-1/3	六-1/2-1/2	六-1/2-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	✖	✖	類似小斜方截半立方體	類似大斜方截半立方體
均勻多面體	✖	✖	✖	✖

編號	六-1/3-1/2	六-1/3-1/3	八-1/3/1/2	八-1/3-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	✖	✖	✖	✖
均勻多面體	✖	✖	✖	✖

編號	十二-1/2-1/2	十二-1/2-1/3	十二-1/3-1/2	十二-1/3-1/3
截角多面體				
相對應阿基米德立體	類似小斜方截半二十面體	類似大斜方結伴二十面體	✖	✖
均勻多面體	✖	✖	✖	✖

編號	二十-1/3-1/2	二十-1/3-1/3
截角多面體		
相對應阿基米德立體	✖	✖
均勻多面體	✖	✖

註：阿基米德圖片來源 https://zh.wikipedia.org/wiki/阿基米德立體

柒、討論

一、製作多面體模型不容易，困難重重

一開始我們做好5個柏拉圖立體，然後再依1:1邊長比例和1:1:1邊長比例畫出截切線進行截切，但在1:1邊長比例中會遇到只剩下「點」連接，無法成為多面體，再貼回截面時，也不容易，進行第二次截面時，要畫出截邊長時，因為是空心立體，非常難畫，要剪下截面更是不易。

二、越截越不單純

我們在這次研究中發現5個柏拉圖立體皆由一種正多邊形組成，是一種純粹的美麗，經歷1次截角後，除了四-1/2跟正八面體一樣外，其餘的多面體都已變成有2種正多邊形之半正多面體，其中六-1/3和十二-1/3還需要計算特殊比例才能截出半正多面體。而第二次截角，所有的多面體都有一種以上的非正多邊形，沒有出現其他半正多面體。

三、截面後，多面體雖變複雜，但仍會符合簡單規律

(一)頂點共面數是因截角比例而不同，但不是3點共面，就是4點共面，跟一開始探討的立體角組成一致。

(二)經歷1:1邊長比例截面，原面形狀並不會改變，仍維持和原來那樣的正多邊形；經歷1:1:1邊長比例截面，截後原面的邊數會是原面邊數的2倍。

(三)所有的多面體都符合尤拉定理：頂點數+面數=稜線數+2。

四、對偶多面體的奧秘，我們尚無法推論

投影片很適合製作，我們可以從外觀就觀察到它的美麗，但對於邊長數據的相關性，我們並無法完全推論出，等待以後學習到相關內涵時，我們再進一步探討。

五、要了解多面體的規律，需要學習更多數學內涵

我們在這次研究分析、推論中，利用了國中才學的畢氏定理，雖然是用了，但對於畢氏定理，我們是還不知道如何推導而來，只是先應用。數學真的不容易，看似單純的多面體，卻蘊含許多我們前所未聞的規則，我們需要再學習。

捌、結論

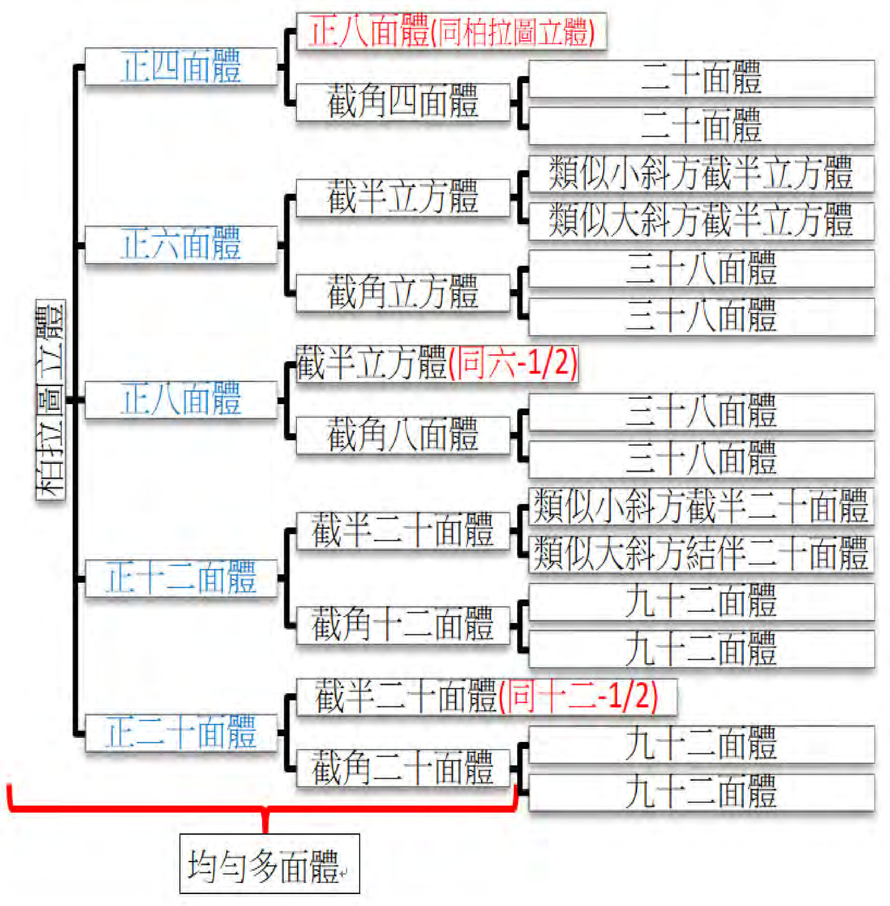
一、圓內接正多邊形有無限多個。

二、正多邊形的面要組成立體角需要3個到5個， 3個正三角形可組成正四面體、4個正三角形組成正八面體、5個正三角形組成正二十 面體、3個正方形組成正六面體、3個正五邊形組成正十二面體。

三、每種正多邊形經截角後，其稜線數、面數和頂點數都有規律可循，並可進行推算。

四、第一次截角後之多面體，正四面體、正八面體及正二十面體3個由正三角形組成的正多面體，經1:1:1邊長比例截角，皆能對應阿基米德立體之半正多面體，而正六面體則需依 $1:\sqrt{2}:1$邊長比例截角；正十二面體則須依1 :1.6:1邊長比例截角，才能對應阿基米德立體之半正多面體。

五、我們找出5個柏拉圖立體、7個阿基米德立體、4個類似阿基米德立體及12個均勻多面體，模組如右。



玖、參考資料及其他

數學也可以這樣學-結合數學概念與自然觀察的華德福式學習法 商周出版

3D立體變變變(The Variety of Polyhedra) 彭君智

正多面體 維基百科-自由的百科

(https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94)