中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080411

公平分配遊戲

學校名稱：桃園市大園區潮音國民小學

作者：	指導老師：
小五 徐筠悉 小五 林佳妤 小五 卓品瑜 小五 陳楷翔	黃正山 蕭正偉

關鍵詞：公平分配、數對、移動次數

摘要

兩堆數目不一樣的糖果公平分配，每次移動時，都從數量多的那一堆拿出當下少數量那堆的個數，將其放到數量少的那堆，反覆進行此動作，最後兩堆糖果數目會相等嗎？移動了幾次才會相等？研究結果發現：

一、成功情行

(一) A+B=4n 是成功的先決條件。

(二)當 A+B≠2k，A+B=n×4(n 為奇數)時，必定只有一組數對(3n，n)能成功。

(n 為偶數)時，(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能成功。

二、移動次數

(一)A+B=2k

A、B 同為奇數，數對(2k -p，p)次數為 k-1 次。

A、B 同為偶數

1、數對(2k -2m，2m)次數為 k-1-m 次。

2、數對(2k -2p，2p)次數為 k-2 次。

3、數對(2k -2p，2p)次數為 k-3 次。

(二)A+B≠2k，A+B=n×4 (n 為奇數)時，次數為 1 次。

(n 為偶數)時，(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)，次數與(a，b)相同。

壹、　研究動機

一、楔子—數學課時，老師說：狗年到了，先跟我們分享一個關於狗的寓言故事：「兩隻狗找到一塊肉，不知要給誰吃，於是他們就爭了起來。一隻猴子經過說：『我來幫你們分。』於是將食物分成兩半，明顯看得出左邊大，右邊小。猴子說『已經分好了，一人一半。』但兩隻狗覺得不公平，都想選左邊大的那一半。於是猴子就把左邊的咬掉一小塊兒說：『這樣公平了吧！』但兩隻狗又覺得不公平，因為現在變成左邊小，右邊大。接著猴子又咬了一口右邊的食物，這樣右邊又太小了，於是再咬一口左邊的......兩隻狗眼睜睜看到肉越分越小，猴子說：『不如就讓我吃了吧。』結果猴子把肉吃得一乾二淨，跑走了。

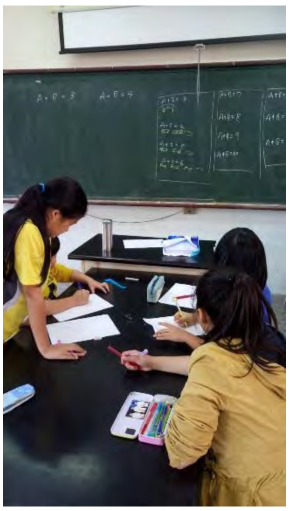
二、老師說了這個故事引起我們的興趣後，就問了一個數學遊戲問題：現在我有很多糖果要分給兩位小朋友，首先我任意分成左右兩堆，但是兩堆的數量不一樣小朋友覺得不公平，於是我們訂定這個「公平分配遊戲」的規則：**兩堆數目不一樣時進行移動，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，最後兩堆糖果數目會相等嗎？**我們對這個遊戲產生了好奇，於是我們把它延深，探討它們之中的規律。

貳、　研究目的

兩堆數目不一樣的糖果 A+B=n 公平分配，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作：

一、n 是多少，(A，B)是什麼情形，移動後才能公平分配成功？

二、公平分配成功時，移動次數多少次？



參、　研究設備及器材

紙、筆。

肆、 研究過程或方法

一、定義符號

兩堆數目不一樣的糖果公平分配，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，最後兩堆糖果數目會相等嗎？又移動了幾次才會相等？例如：糖果共有 16 個，分成 A、B 兩堆糖果後為 A 堆 11 個，B 堆 5 個，我們以 A+B=16，(A，B)=(11，5)表示。移動結果如下所示：

次數	A	B
原本	11	5
	↓-5	↓+5
1	6	10
	↓+6	↓-6
2	12	4
	↓-4	↓+4
3	8	8

第 1 次移動時，A> B，所以從 A 移動 5 個(B 的個數)至 B，移動後分別為 A=6，B=10。

第 2 次移動時，A<B，所以從 B 移動 6 個(A 的個數)至 A，移動後分別為 A=12，B=4。

第 3 次移動時，A> B，所以從 A 移動 4 個(B 的個數)至 B，移動後分別為 A=8，B=8。

此時 A=B=8，即可得知當(A，B)=(11，5)時，於第 3 次移動後會公平分配成功(兩堆糖果數量相等)，可以表示為(11，5)→(6，10)→(12，4)→(8，8)。

但並不是所有情形都會公平分配成功，例如：A+B=14，(A，B)=(10，4)。移動結果如下所示：

次數	A	B
原本	10	4
	↓-4	↓+4

1	6	8
	↓+6	↓-6
2	12	2
	↓-2	↓+2
3	10	4

由上得知，第 3 次移動後，(A，B)=(10，4)，與原本的(A，B)=(10，4)重複出現，此時會有(10，4)→(6，8)→(12，2)→(10，4)→(6，8)→(12，2)……形成循環情形，表示當(A，B)=(10，4)時，必定無法公平分配。即**當某次移動後的 A，B 兩數，和前面次數 A，B 兩數重複出現時，不需再進行移動下去，因為必定無法公平分配**。

二、公平分配成功情行探討

(一)初次探討

兩堆糖果的數量關係有三種：A>B，A=B，A<B。其中，若 A=B，例如：(1，1)、(2，2)、(3、3)、(4，4)……則表示兩堆數已經形成公平分配，不需再討論。另外，A>B 及 A<B 兩種情形之間具有對稱的關係，例如(11，5)和(5，11)的情形如下：

次數	A	B
原本	11	5
	↓-5	↓+5
1	6	10
	↓+6	↓-6
2	12	4
	↓-4	↓+4
3	8	8

(11，5)→(6，10)→(12，4)→(8，8)

次數	A	B
原本	5	11
	↓+5	↓-5
1	10	6
	↓-6	↓+6
2	4	12
	↓+4	↓-4
3	8	8

(5，11)→(10，6)→(4，12)→(8，8)

所以我們**只討論 A>B 的情形**。

另外，因為一開始不知道會產生什麼情況，所以我們兩兩一組，打算先從 A+B=3，

A+B=4……，A+B=8 將所有情形列出來，兩組對照所列的情形正確後，再做分析歸納。得到結果簡化如下：

A+B=3

次數	A	B
原本	2	1
1	1	2
	失敗	

A+B=4

次數	A	B
原本	3	1
1	2	2
	成功	

A+B=5

次數	A	B
原本	4	1
1	3	2
2	1	4
	失敗	

次數	A	B
原本	3	2
1	1	4
2	2	3
	失敗	

A+B=6

次數	A	B
原本	5	1
1	4	2

2	2	4
	失敗	

次數	A	B
原本	4	2

1	2	4
	失敗	

A+B=7

次數	A	B
原本	6	1
1	5	2
2	3	4
3	6	1
	失敗	

次數	A	B
原本	5	2
1	3	4
2	6	1
3	5	2
	失敗	

次數	A	B
原本	4	3
1	1	6
2	2	5
3	4	3
	失敗	

A+B=8

次數	A	B
原本	7	1
1	6	2
2	4	4
	成功	

次數	A	B
原本	6	2
1	4	4
	成功	

次數	A	B
原本	5	3
1	2	6
2	4	4
	成功	

原本我們認為：

1、糖果數目為奇數時**(A+B=奇數)，公平分配遊戲結果一定失敗**，因為奇數÷2 無法整除，由上發現，當 A+B=3，A+B=5，A+B=7 都失敗，表示此推論成立。

2、只要糖果數目為偶數，即 A+B=2n(n 為自然數)，因為偶數÷2 可以整除，所以公平分配遊戲結果一定成功？但由上發現，A+B=4，A+B=8 成功，但 A+B=6 失敗。為了探討原因，我們就不操作 A+B=奇數(因為必定失敗)，而繼續操作 A+B=10，A+B=12，A+B=14，A+B=16，再做分析歸納。

(二)第二次探討

得到結果簡化如下：

A+B=10

次數	A	B
原本	9	1
1	8	2
2	7	3
3	6	4
	失敗	

次數	A	B
原本	8	2
1	6	4
2	2	8
	失敗	

次數	A	B
原本	7	3
1	4	6
2	8	2
3	6	4
	失敗	

次數	A	B
原本	6	4
1	2	8
2	4	6
	失敗	

A+B=12

次數	A	B
原本	11	1
1	10	2
2	8	4
3	4	8
	失敗	

次數	A	B
原本	10	2
1	8	4
2	4	8
	失敗	

次數	A	B
原本	9	3
1	6	6
	成功	

次數	A	B
原本	8	4
1	4	8
	失敗	

次數	A	B
原本	7	5
1	2	10
2	4	8
3	8	4
	失敗	

A+B=14

次數	A	B
原本	13	1
1	12	2
2	10	4
3	6	8
4	12	2
	失敗	

次數	A	B
原本	12	2
1	10	4
2	6	8
3	12	2
	失敗	

次數	A	B
原本	11	3
1	8	6
2	2	12
3	4	10
4	8	6
	失敗	

次數	A	B
原本	10	4
1	6	8
2	12	2
3	10	4
	失敗	

次數	A	B
原本	9	5
1	4	10
2	8	6
3	2	12
4	4	10
	失敗	

次數	A	B
原本	8	6
1	2	12
2	4	10
3	8	6
	失敗	

A+B=16

次數	A	B
原本	15	1
1	14	2
2	12	4
3	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	14	2
1	12	4
2	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	13	3
1	10	6
2	4	12
3	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	12	4
1	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	11	5
1	6	10
2	12	4
3	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	10	6
1	4	12
2	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	9	7
1	2	14
2	4	12
3	8	8
	成功	

經討論後得到結果如下：

1、糖果數目為偶數，即 A+B=2n(n 為自然數)不一定公平分配成功，由上可知：A+B=6，A+B=10，A+B=14 皆沒有任何一種情形成功，A+B=4，A+B=8，A+B=12，A+B=16，才有成功情形，故我們推論：**當 A≠B 時，若 A+B≠4n(n 為自然數)，則公平分配遊戲結果一定失敗**。我們探討原因發現，任何成功的情形，其**倒數第 2 次移動後必定出現(3n，n)的狀況，這樣在最後 1 次移動後，(3n-n，n+n)便會成為公平分配成功的結果(2n，2n)**。由此可知，**A+B=4n(n 為自然數)是成功的先決條件**。

用一般式證明如下：

設 A+B=4n+2：

次數	A	B	
原本	4n+2-k	k	
1	4n+2-2k	2k	第 1 次移動後(A，B)必為(偶數，偶數)
2	4n+2-4k	4k	(偶數，偶數)
3	4n+2-8k	8k	(偶數，偶數)
	……		……
成功結果	2n+1(奇數)	2n+1(奇數)	
	必定失敗		**與成功結果(奇數，奇數)不合，故必定失敗**

2、但是 A+B 為 4 的倍數，任何情形(A，B)一定能公平分配成功嗎？由上可知：A+B=4，A+B=8，A+B=16 時，任何情形(A，B)都成功，但 A+B=12 時，只有(9，3)成功，(11，1)、(10，2)、(8，4)、(7，5)這 4 種情形都失敗了。為了探討原因，我們決定繼續操作 A+B=20，A+B=24，A+B=28，A+B=32，再做分析歸納。

(三)第三次探討

得到結果簡化如下：

A+B=20

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	19	1	18	2	17	3	16	4	15	5	14	6	13	7	12	8	11	9
1	18	2	16	4	14	6	12	8	10	10	8	12	6	14	4	16	2	18
2	16	4	12	8	8	12	4	16			16	4	12	8	8	12	4	16
3	12	8	4	16	16	4					12	8	4	16			8	12
4	4	16			12	8							8	12			16	4
	失敗		失敗		失敗		失敗		成功		失敗		失敗		失敗		失敗	

A+B=24

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	23	1	22	2	21	3	20	4	19	5	18	6	17	7	16	8	15	9
1	22	2	20	4	18	6	16	8	14	10	12	12	10	14	8	16	6	18
2	20	4	16	8	12	12	8	16	4	20			20	4			12	12
3	16	8	8	16					8	16			16	8				
4	8	16							16	8			8	16				
	失敗		失敗		成功		失敗		失敗		成功		失敗		失敗		成功	

次數	A	B	A	B
原本	14	10	13	11
1	4	20	2	22
2	8	16	4	20
3	16	8	8	16
4			16	8
	失敗		失敗	

A+B=28

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	27	1	26	2	25	3	24	4	23	5	22	6	21	7	20	8	19	9
1	26	2	24	4	22	6	20	8	18	10	16	12	14	14	12	16	10	18
2	24	4	20	8	16	12	12	16	8	20	4	24			24	4	20	8
3	20	8	12	16	4	24	24	4	16	12	8	20			20	8	12	16
4	12	16	24	4	8	20			4	24	16	12					24	4
5	24	4			16	12			8	20							20	8
	失敗		失敗		失敗		失敗		失敗		失敗		成功		失敗		失敗	

次數	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	18	10	17	11	16	12	15	13
1	8	20	6	22	4	24	2	26
2	16	12	12	16	8	20	4	24
3	4	24	24	4	16	12	8	20
4	8	20	20	8			16	12
5			12	16			4	24
	失敗		失敗		失敗		失敗	

A+B=32

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	31	1	30	2	29	3	28	4	27	5	26	6	25	7	24	8	23	9
1	30	2	28	4	26	6	24	8	22	10	20	12	18	14	16	16	14	18
2	28	4	24	8	20	12	16	16	12	20	8	24	4	28			28	4
3	24	8	16	16	8	24			24	8	16	16	8	24			24	8
4	16	16			16	16			16	16			16	16			16	16
	成功		成功		成功		成功		成功		成功		成功		成功		成功	

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	22	10	21	11	20	12	19	13	18	14	17	15
1	12	20	10	22	8	24	6	26	4	28	2	30
2	24	8	20	12	16	16	12	20	8	24	4	28
3	16	16	8	24			24	8	16	16	8	24
4			16	16			16	16			16	16
	成功		成功		成功		成功		成功		成功	

經討論後得到結果如下：

1、由上可知，A+B=4，A+B=8，A+B=16，A+B=32 時，每一種情形皆成功，我們**推測：A+B=2^k，任意數對(A，B)公平分配遊戲結果一定成功**。

2、由上可知，A+B=4，A+B=12，A+B=20，A+B=28，即**當 A+B≠2^k，A+B=n×4 (n 為奇數)時，必定只有一組數對(3n，n)能公平分配成功**。例如：A+B=4 只有一組(3，1)成功(它全部只有一組，所以也符合 2^k 情形)，A+B=12 只有一組(9，3)成功，A+B=20 只有一組(15，5)成功，A+B=28 只有一組(21，7)成功。探討原因我們發現，**在 A=B=4n 的情形下，不論 A、B 一開始是奇數或偶數，在經過第一次移動後，不管再移動幾次，A、B 必定都是偶數**。

再根據第二次探討 1、所發現的結論：倒數第 2 次移動後必定出現(3n，n)的狀況，此時 n 又為奇數，表示只有倒數第 2 次(3n，n)是原本情形才會成功。例如：A+B=28，表示成功時為(14，14)，倒推回去的倒數第 2 次必為(21，7)，21、7 是奇數，又經過第一次移動後，不管再移動幾次，A、B 必定都是偶數，表示(21，7)只能出現在還沒移動時的原本情形，固 A+B=28 成功情形只有(21，7)一組。

3、由上可知，A+B=24，$24=\boxed{3}\times2^{3}$，我們發現公平分配成功數對接可以提出公因數 $\boxed{3}$，即(21，3)→$\boxed{3}$(7，1)，(18，6)→$\boxed{3}$(6，2)，(15，9)→$\boxed{3}$(5，3)，若數對無法提出公因數 $\boxed{3}$ 則失敗，固我們**推測：當 $A+B\neq2^{k}$，$A+B=n\times4$ (n 為偶數)時，可將 $A+B=q\times2^{k}$，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能公平分配成功**。

三、公平分配成功時移動次數探討

(一)$A+B=2^{k}$時移動次數探討

A+B=4

(3，1)　(2，2)

A+B=8

(7，1)　(6，2)　(5，3)　(4，4)

A+B=16

(15，1)　(14，2)　(13，3)　(12，4)　(11，5)　(10，6)　(9，7)　(8，8)

由路徑探討可找出成功時移動次數的規律性，我們可以分做四個部分探討：

(1)A、B 同為奇數，(2) A、B 同為偶數，$B=2^{m}$時，(3) A、B 同為偶數，B=2p(p 為奇數)

(4) A、B 同為偶數，B=2p(p 為偶數)

A+B	A	B	成功時移動次數
4	3	1	1

A+B	A	B	成功時移動次數
	29	3	4

8	7	1	2
	6	2	1
	5	3	2
16	15	1	3
	14	2	2
	13	3	3
	12	4	1
	11	5	3
	10	6	2
	9	7	3
32	31	1	4
	30	2	3

32	28	4	2
	27	5	4
	26	6	3
	25	7	4
	24	8	1
	23	9	4
	22	10	3
	21	11	4
	20	12	2
	19	13	4
	18	14	3
	17	15	4

1、A、B 同為奇數時，

當 A+B=4=2^2時，(3，1)成功時移動次數為 1。

當 A+B=8=2^3時，(7，1)、(5，3)成功時移動次數皆為 2。

當 A+B=16=2^4時，(15，1)、(13，3)、(11，5)、(9，7)成功時移動次數皆為 3。

當 A+B=32=2^5時，(31，1)、(29，3)、(27，5)、(25，7)……成功時移動次數皆為 4。

固我們**推測：若 p 為奇數，則數對(2^k -p，p)公平分配成功時移動次數為 k-1 次**。

2、A、B 同為偶數，B=2^m時，

當 B=2 時：

A+B(=2^k)	k	A	B	成功時移動次數
8	3	6	2	1
16	4	14	2	2
32	5	30	2	3

當 B=4 時：

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
16	4	12	4	1
32	5	28	4	2

當 B=8 時：

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
32	5	24	8	1

我們**推測：數對(2^k-2^m，2^m) 公平分配成功時移動次數為 k-1-m 次**。

3、A、B 同為偶數，B=2p(p 為奇數)

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
16	4	10	6	2
32	5	26	6	3
32	5	22	10	3
32	5	18	14	3

我們**推測：數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-2 次**。

4、A、B 同為偶數，B=2p(p 為偶數)

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
32	5	20	12	2

我們**推測：數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-3 次**。

(二)$A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為奇數)時移動次數探討

1、由第三次探討 2、所得到結果：當 $A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為奇數)時，例如：

A+B=12，A+B=20，A+B=28……必定只有一組數對(3n，n)能公平分配成功，且此數對(3n，n)經過 1 次移動便會行成公平分配成功數對(2n，2n)。

2、固我們確定**當 $A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為奇數)時，此時公平分配成功時移動次數為 1 次**。

(三)$A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為偶數)時移動次數探討

1、$A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為偶數)時，例如：A+B=24，A+B=40……

$A+B=24=3\times 2^3$：

$A+B=24=\boxed{3}\times 2^3$	$A+B=8=2^3$	成功時移動次數
(21，3)=$\boxed{3}$×(7，1)	(7，1)	2
(18，6) =$\boxed{3}$×(6，2)	(6，2)	1
(15，9) =$\boxed{3}$×(5，3)	(5，3)	2

2、由第三次探討 3、推論得知，當 $A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為偶數)時，可將**$A+B=q\times 2^k$，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能公平分配成功，而此時公平分配成功移動次數與(a，b)相同**。

3、探討 $A+B=q\times 2^k$ 的數對(qa，qb)和 $A+B=2^k$ 的數對(a，b)的移動過程可以發現，其中(qa，qb)→(qa-qb，qb+qb)，若提出 q，則與 $A+B=2^k$ 的數對(a，b)→(a-b，b+b)移動過程一模一樣(假設 a>b)。

伍、 研究結果與結論

兩堆數目不一樣的糖果公平分配，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，最後兩堆糖果數目會相等嗎？又移動了幾次才會相等？研究結果發現：

一、公平分配成功情行探討結果

(一) 當 $A\neq B$ 時，若 $A+B\neq 4n$(n 為自然數)，則公平分配遊戲結果一定失敗，也就是 A+B=4n(n 為自然數)是成功的先決條件。

(二) $A+B=4n$(n 為自然數)時：

1、$A+B=2^k$，任意數對(A，B)公平分配遊戲結果一定成功。

2、當 $A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$(n 為奇數)時，必定只有一組數對(3n，n)能公平分配成功。

3、當 $A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為偶數)時，可將 $A+B=q\times 2^k$，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能公平分配成功。

二、公平分配成功時移動次數探討結果

(一)$A+B=2^k$時

1、A、B 同為奇數：

若 B=p 為奇數時，則數對(2^k -p，p)公平分配成功時移動次數為 k-1 次。

2、A、B 同為偶數：

(1)$B=2^m$時，數對(2^k -2^m，2^m) 公平分配成功時移動次數為 k-1-m 次。

(2)B=2p(p 為奇數)時，數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-2 次。

(3)B=2p(p 為偶數)時，數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-3 次。

(二)$A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為奇數)時

此時公平分配成功時移動次數為 1 次。

(三)$A+B\neq 2^k$，$A+B=n\times 4$ (n 為偶數)時

$A+B=q\times 2^k$，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能公平分配成功，而此時公平分配成功移動次數與(a，b)相同，且 $a+b=2^k$。

陸、 討論與未來展望

一、有同學提問說：公平分配很簡單啊！A+B=n，把總數 n÷2，數量多的 A 方直接給少的 B 方(A 的數量)-(n÷2)個，這樣剛好一邊一半 1 次解決，何必要這麼多步驟呢？老師跟我們分享這個公平分配遊戲有趣的地方是：它的遊戲規則其實比較接近社會現象，當糖果少的一方抗議自己比別人少時，有權力做分配的人不會將自己的糖果從口袋掏出來，而是會從現有糖果多的一方說為了公平，你要將多的拿出來給少的，

而且為了怕多的一方反彈，分配者不可能 1 次解決，一定會分很多次慢慢的給，直到兩邊都沒意見就停止。更厲害的分配者，就像一開始老師說的故事一樣，分肉的猴子一步步在兩隻狗不知不覺中就把肉吃光了。聽了老師的分享，我們都覺得很有意思，學數學還可以學到社會現象，算是**數學社會學吧**！

二、藉由此 A+B=n 的實驗，未來希望可以推論出 A+B+C=n，A+B+C+D=n……等等糖果分成更多堆能平均分配成功的情形。

三、本實驗探討 A+B=n 能平均分配成功的情形，也許未來討論平均分配失敗的情形，也有另一番發現，例如 A+B=5，A+B=7 時：

(一)A+B=5

次數	A	B	A	B
原本	4	1	3	2
1	3	2	1	4
2	1	4	2	3
	失敗		失敗	

(二)A+B=7

次數	A	B	A	B	A	B
原本	6	1	5	2	4	3
1	5	2	3	4	1	6
2	3	4	6	1	2	5
3	6	1	5	2	4	3
	失敗		失敗		失敗	

雖然無法公平分配，但在移動的過程中，會出現每一種情況都出現且只出現一

次，最後又回到原來情況的情形，例如：(4，1)→(3，2)→(1，4)，(6，1)→(5，2)→(3，4)→(6，1)，還蠻有趣的。

柒、 參考資料及其他

一、有趣的數學遊戲。作者：團康輔導社/主編。出版社：文國書局。

二、從平分問題到動態穩定。作者：苗栗縣立興華高級中學(附設國中)。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會國中組數學科。

【評語】080411

由一個饒富深意的寓言故事出發，將之轉化為「公平分配」的數學問題，主題有趣。進行分析、探討與歸納，方法運用合理；但是題目模型本身的設定決定了：它的難度並不算高。對於“A+B=4n 至少有一組成功解” 的觀察結果是正確的，但是缺少證明或是降階的推導 (作品中確實提到了除以公因數，但沒有講明這就是降階的處理)。更重要的結果“A+B=2^n一律成功”，這是本作品的最關鍵之處，觀察正確，但缺少了一般化的證明。數學涉及到當今最紅的社會議題“公平正義”，值得鼓勵；不過社會議題的複雜度往往難以想像，這裡所討論的極簡易達到「公平分配」的模型，離現實問題還有些不少距離。

作品海報

壹、研究動機

一、楔子—數學課時，老師說：狗年到了，先跟我們分享一個關於狗的寓言故事：「兩隻狗找到一塊肉，不知要給誰吃，於是他們就爭了起來。一隻猴子經過說：『我來幫你們分。』於是將食物分成兩半，明顯看得出左邊大，右邊小。猴子說『已經分好了，一人一半。』但兩隻狗覺得不公平，都想選左邊大的那一半。於是猴子就把左邊的咬掉一小塊兒說：『這樣公平了吧！』但兩隻狗又覺得不公平，因為現在變成左邊小，右邊大。接著猴子又咬了一口右邊的食物，這樣右邊又太小了，於是再咬一口左邊的......兩隻狗眼睜睜看到肉越分越小，猴子說：『不如就讓我吃了吧。』結果猴子把肉吃得一乾二淨，跑走了。

二、老師說了這個故事引起我們的興趣後，就問了一個數學遊戲問題：現在我有很多糖果要分給兩位小朋友，首先我任意分成左右兩堆，但是兩堆的數量不一樣小朋友覺得不公平，於是我們訂定這個「公平分配遊戲」的規則：兩堆數目不一樣時進行移動，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，最後兩堆糖果數目會相等嗎？我們對這個遊戲產生了好奇，於是我們把它延深，探討它們之中的規律。

貳、研究目的

兩堆數目不一樣的糖果A+B=n公平分配，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作：

一、n是多少，(A，B)是什麼情形，移動後才能公平分配成功？

二、公平分配成功時，移動次數多少次？

參、研究設備及器材

紙、筆。

肆、研究過程及方法

一、定義符號

兩堆數目不一樣的糖果公平分配，每次進行移動時，都從數量較多的那一堆拿出當下較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，最後兩堆糖果數目會相等嗎？又移動了幾次才會相等？例如：糖果共有 16 個，分成 A、B兩堆糖果後為A堆 11 個，B堆5 個，我們以 A+B=16，(A，B)=(11，5)表示。移動結果如右所示：

次數	A	B
原本	11	5
	↓-5	↓+5
1	6	10
	↓+6	↓-6
2	12	4
	↓-4	↓+4
3	8	8

第1次移動時， A> B，所以從A移動5個 (B 的個數)至B，移動後分別為 A=6，B=10。

第2次移動時， A<B，所以從B移動6個 (A 的個數)至A，移動後分別為 A=12，B=4。

第3次移動時， A> B，所以從A移動4個 (B 的個數)至B，移動後分別為 A=8，B=8。

此時 A=B=8，即可得知當(A，B)=(11，5)時，於第 3次移動後會公平分配成功(兩堆糖果數量相等)，可以表示為(11，5)→(6，10)→(12，4)→(8，8)。

但並不是所有情形都會公平分配成功，例如：A+B=14，(A，B)=(10，4)。移動結果如右所示：

次數	A	B
原本	10	4
	↓-4	↓+4
1	6	8
	↓+6	↓-6
2	12	2
	↓-2	↓+2
3	10	4

由上得知，第3次移動後， (A，B)=(10，4)，與原本的(A，B)=(10，4)重複出現，此時會有(10，4)→(6，8)→(12，2)→(10，4)→(6，8)→(12，2)...... 形成循環情形，表示當(A，B)=(10，4)時，必定無法公平分配。即**當某次移動後的 A，B 兩數，和前面次數 A，B 兩數重複出現時，不需再進行移動下去，因為必定無法公平分配**。

二、公平分配成功情行探討

(一)初次探討

兩堆糖果的數量關係有三種：A>B，A=B，A<B。其中，若A=B，例如：(1，1)、(2，2)、(3、3)、(4，4) ...... 則表示兩堆數已經形成公平分配，不需再討論。另外，A>B 及 A<B 兩種情形之間具有對稱的關係，例如(11，5)和(5，11)的情形如右：

次數	A	B
原本	11	5
	↓-5	↓+5
1	6	10
	↓+6	↓-6
2	12	4
	↓-4	↓+4
3	8	8

(11，5)→(6，10)→(12，4)→(8，8)

次數	A	B
原本	5	11
	↓+5	↓-5
1	10	6
	↓-6	↓+6
2	4	12
	↓+4	↓-4
3	8	8

(5，11)→(10，6)→(4，12)→(8，8)

所以我們**只討論 A>B 的情形**。

另外，因為一開始不知道會產生什麼情況，所以我們兩兩一組，打算先從 A+B=3，A+B=4 ......，A+B=8 將所有情形列出來，兩組對照所列的情形正確後，再做分析歸納。得到結果簡化如下：

A+B=3

次數	A	B
原本	2	1
1	1	2
	失敗	

A+B=5

次數	A	B
原本	4	1
1	3	2
2	1	4
	失敗	

次數	A	B
原本	3	2
1	1	4
2	2	3
	失敗	

A+B=4

次數	A	B
原本	3	1
1	2	2
	成功	

A+B=6

次數	A	B
原本	5	1
1	4	2
1	2	4
	失敗	

次數	A	B
原本	4	2
2	2	4
	失敗	

A+B=8

次數	A	B
原本	7	1
1	6	2
2	4	4
	成功	

次數	A	B
原本	6	2
1	4	4
	成功	

次數	A	B
原本	5	3
1	2	6
2	4	4
	成功	

A+B=7

次數	A	B
原本	6	1
1	5	2
2	3	4
3	6	1
	失敗	

次數	A	B
原本	5	2
1	3	4
2	6	1
3	5	2
	失敗	

次數	A	B
原本	4	3
1	1	6
2	2	5
3	4	3
	失敗	

原本我們認為：

1、糖果數目為奇數時**(A+B=奇數)，公平分配遊戲結果一定失敗**，因為奇數÷2無法整除，由上發現，當 A+B=3，A+B=5，A+B=7 都失敗，表示此推論成立。

2、只要糖果數目為偶數，即 A+B=2n(n 為自然數)，因為偶數÷2可以整除，所以公平分配遊戲結果一定成功？但由上發現，A+B=4，A+B=8 成功，但 A+B=6 失敗。為了探討原因，我們就不操作 A+B=奇數(因為必定失敗)，而繼續操作 A+B=10，A+B=12，A+B=14，A+B=16，再做分析歸納。

(二)第二次探討

得到結果簡化如下：

A+B=10

次數	A	B
原本	9	1
1	8	2
2	7	3
3	6	4
	失敗	

次數	A	B
原本	8	2
1	6	4
2	2	8
	失敗	

次數	A	B
原本	7	3
1	4	6
2	8	2
3	6	4
	失敗	

次數	A	B
原本	6	4
1	2	8
2	4	6
	失敗	

A+B=12

次數	A	B
原本	11	1
1	10	2
2	8	4
3	4	8
	失敗	

次數	A	B
原本	10	2
1	8	4
2	4	8
	失敗	

次數	A	B
原本	9	3
1	6	6
	成功	

次數	A	B
原本	7	5
1	2	10
2	4	8
3	8	4
	失敗	

次數	A	B
原本	8	4
1	4	8
	失敗	

A+B=14

次數	A	B
原本	13	1
1	12	2
2	10	4
3	6	8
4	12	2
	失敗	

次數	A	B
原本	12	2
1	10	4
2	6	8
3	12	2
	失敗	

次數	A	B
原本	11	3
1	8	6
2	2	12
3	4	10
4	8	6
	失敗	

次數	A	B
原本	10	4
1	6	8
2	12	2
3	10	4
	失敗	

次數	A	B
原本	9	5
1	4	10
2	8	6
3	2	12
4	4	10
	失敗	

次數	A	B
原本	8	6
1	2	12
2	4	10
3	8	6
	失敗	

A+B=16

次數	A	B
原本	15	1
1	14	2
2	12	4
3	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	14	2
1	12	4
2	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	13	3
1	10	6
2	4	12
3	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	12	4
1	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	11	5
1	6	10
2	12	4
3	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	10	6
1	4	12
2	8	8
	成功	

次數	A	B
原本	9	7
1	2	14
2	4	12
3	8	8
	成功	

經討論後得到結果如下：

1、糖果數目為偶數，即 A+B=2n(n 為自然數)不一定公平分配成功，由上可知：A+B=6，A+B=10，A+B=14 皆沒有任何一種情形成功，A+B=4，A+B=8，A+B=12，A+B=16，才有成功情形，故我們推論：**當A≠B 時，若 A+B≠4n(n 為自然數)，則公平分配遊戲結果一定失敗**。我們探討原因發現，任何成功的情形，其**倒數第 2 次移動後必定出現(3n，n)的狀況，這樣在最後 1 次移動後，(3n-n，n+n)便會成為公平分配成功的結果(2n，2n)**。由此可知，**A+B=4n(n 為自然數)是成功的先決條件**。

用一般式證明如下：

設 A+B=4n+2：

次數	A	B	
原本	4n+2-k	k	
1	4n+2-2k	2k	第1次移動後 (A，B)必為(偶數，偶數)
2	4n+2-4k	4k	(偶數，偶數)
3	4n+2-8k	8k	(偶數，偶數)
成功結果	2n+1(奇數)	2n+1(奇數)	
	必定失敗		與成功結果(奇數，奇數)不合，故必定失敗

2、但是 A+B 為4 的倍數，任何情形(A，B)一定能公平分配成功嗎？由上可知：A+B=4，A+B=8，A+B=16 時，任何情形(A，B)都成功，但 A+B=12 時，只有(9，3)成功，(11，1)、(10，2)、(8，4)、(7，5)這4 種情形都失敗了。為了探討原因，我們決定繼續操作 A+B=20，A+B=24，A+B=28，A+B=32，再做分析歸納。

(三)第三次探討

得到結果簡化如下：

A+B=20

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	19	1	18	2	17	3	16	4	15	5	14	6	13	7	12	8	11	9
1	18	2	16	4	14	6	12	8	10	10	8	12	6	14	4	16	2	18
2	16	4	12	8	8	12	4	16			16	4	12	8	8	12	4	16
3	12	8	4	16	16	4					12	8	4	16			8	12
4	4	16			12	8							8	12			16	4
	失敗		失敗		失敗		失敗		成功		失敗		失敗		失敗		失敗	

A+B=24

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	23	1	22	2	21	3	20	4	19	5	18	6	17	7	16	8	15	9
1	22	2	20	4	18	6	16	8	14	10	12	12	10	14	8	16	6	18
2	20	4	16	8	12	12	8	16	4	20			20	4			12	12
3	16	8	8	16					8	16			16	8				
4	8	16							16	8			8	16				
	失敗		失敗		成功		失敗		失敗		成功		失敗		失敗		成功	

次數	A	B	A	B
原本	14	10	13	11
1	4	20	2	22
2	8	16	4	20
3	16	8	8	16
4			16	8
	失敗		失敗	

A+B=28

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	27	1	26	2	25	3	24	4	23	5	22	6	21	7	20	8	19	9
1	26	2	24	4	22	6	20	8	18	10	16	12	14	14	12	16	10	18
2	24	4	20	8	16	12	12	16	8	20	4	24			24	4	20	8
3	20	8	12	16	4	24	24	4	16	12	8	20			20	8	12	16
4	12	16	24	4	8	20			4	24	16	12					24	4
5	24	4			16	12			8	20							20	8
	失敗		失敗		失敗		失敗		失敗		失敗		成功		失敗		失敗	

次數	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	18	10	17	11	16	12	15	13
1	8	20	6	22	4	24	2	26
2	16	12	12	16	8	20	4	24
3	4	24	24	4	16	12	8	20
4	8	20	20	8			16	12
5			12	16			4	24
	失敗		失敗		失敗		失敗	

A+B=32

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	31	1	30	2	29	3	28	4	27	5	26	6	25	7	24	8	23	9
1	30	2	28	4	26	6	24	8	22	10	20	12	18	14	16	16	14	18
2	28	4	24	8	20	12	16	16	12	20	8	24	4	28			28	4
3	24	8	16	16	8	24			24	8	16	16	8	24			24	8
4	16	16			16	16			16	16			16	16			16	16
	成功		成功		成功		成功		成功		成功		成功		成功		成功	

次數	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
原本	22	10	21	11	20	12	19	13	18	14	17	15
1	12	20	10	22	8	24	6	26	4	28	2	30
2	24	8	20	12	16	16	12	20	8	24	4	28
3	16	16	8	24			24	8	16	16	8	24
4			16	16			16	16			16	16
	成功		成功		成功		成功		成功		成功	

經討論後得到結果如下：

1、由上可知，A+B=4，A+B=8，A+B=16，A+B=32 時，每一種情形皆成功，我們**推測：A+B=2^k，任意數對(A，B)公平分配遊戲結果一定成功**。

2、由上可知，A+B=4，A+B=12，A+B=20，A+B=28，即**當 A+B≠2^k，A+B=n×4 (n 為奇數)時，必定只有一組數對(3n，n)能公平分配成功**。例如：A+B=4 只有一組(3，1)成功(它全部只有一組，所以也符合2^k情形)，A+B=12 只有一組(9，3)成功，A+B=20 只有一組(15，5)成功，A+B=28 只有一組(21，7)成功。探討原因我們發現，**在 A=B=4n的情形下，不論 A、B 一開始是奇數或偶數，在經過第一次移動後，不管再移動幾次，A、B 必定都是偶數**。

再根據第二次探討 1、所發現的結論：**倒數第 2 次移動後必定出現(3n，n)的狀況**，此時n又為奇數，表示只有倒數第2次 (3n，n)是原本情形才會成功。例如：A+B=28，表示成功時為(14，14)，倒推回去的倒數第2次必為 (21，7)，21、7 是奇數，又經過第一次移動後，不管再移動幾次，A、B必定都是偶數，表示 (21，7)只能出現在還沒移動時的原本情形，固 A+B=28 成功情形只有(21，7)一組。

3、由上可知，A+B=24，24=3×2^3，我們發現公平分配成功數對接可以提出公因數 3，即(21，3)→3(7，1)，(18，6)→3(6，2)，(15，9)→3(5，3)，若數對無法提出公因數 3則失敗，固我們**推測：當 A+B≠2^k，A+B=n×4 (n為偶數)時，可將 A+B=q×2^k，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能公平分配成功**。

三、公平分配成功時移動次數探討

A+B=4

(3，1) (2，2)

A+B=8

(7，1) (6，2) (5，3) (4，4)

A+B=16

(15，1) (14，2) (13，3) (12，4) (11，5) (10，6) (9，7) (8，8)

由路徑探討可找出成功時移動次數的規律性，我們可以分做四個部分探討：
(1)A、B同為奇數，(2) A、B同為偶數，$B=2^m$ 時，(3) A、B同為偶數，B=2p(p 為奇數)
(4) A、B同為偶數，B=2p(p 為偶數)

A+B	A	B	成功時移動次數
4	3	1	1
8	7	1	2
	6	2	
	5	3	2
16	15	1	3
	14	2	2
	13	3	3
	12	4	1
	11	5	3
	10	6	2
	9	7	3
32	31	1	4
	30	2	3

A+B	A	B	成功時移動次數
32	29	3	4
	28	4	2
	27	5	4
	26	6	3
	25	7	4
	24	8	1
	23	9	4
	22	10	3
	21	11	4
	20	12	2
	19	13	4
	18	14	3
	17	15	4

1、A、B 同為奇數時，

當 $A+B=4=2^2$ 時，(3，1)成功時移動次數為1。

當 $A+B=8=2^3$ 時，(7，1)、(5，3)成功時移動次數皆為2。

當 $A+B=16=2^4$ 時，(15，1)、(13，3)、(11，5)、(9，7)成功時移動次數皆為3。

當 $A+B=32=2^5$ 時，(31，1)、(29，3)、(27，5)、(25，7)......成功時移動次數皆為 4。

因我們推測：若 p 為奇數，則數對(2^k -p，p)公平分配成功時移動次數為 k-1 次。

2、A、B 同為偶數，$B=2^m$ 時，

當 B=2 時：

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
8	3	6	2	1
16	4	14	2	2
32	5	30	2	3

當 B=4 時：

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
16	4	12	4	1
32	5	24	8	2

當 B=8 時：

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
32	5	24	8	1

我們推測：數對(2^k -2^m，2^m) 公平分配成功時移動次數為 k-1-m 次。

3、A、B 同為偶數，B=2p(p 為奇數)

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
16	4	10	6	2
32	5	26	6	3
32	5	22	10	3
32	5	18	14	3

我們推測：數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-2 次。

4、A、B 同為偶數，B=2p(p 為偶數)

$A+B(=2^k)$	k	A	B	成功時移動次數
32	5	20	12	2

我們推測：數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-3 次。

(二)$A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為奇數)時移動次數探討

1、由第三次探討2、所得到結果：當 $A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為奇數)時，例如：A+B=12，A+B=20，A+B=28...... 必定只有一組數對(3n，n)能公平分配成功，且此數對(3n，n)經過1次移動便會行成公平分配成功數對 (2n，2n)。

2、因我們確定當 $A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為奇數)時，此時公平分配成功時移動次數為 1次。

(三)$A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為偶數)時移動次數探討

1、$A+B\neq2^k$，A+B=n ×4 (n 為偶數)時，例如：A+B=24，A+B=40 ......

$A+B=24=3\times2^3$：

$A+B=24=\boxed{3}\times2^3$	$A+B=8=2^3$	成功時移動次數
(21，3)=$\boxed{3}$×7 ，1)	(7，1)	2
(18，6) =$\boxed{3}$×6 ，2)	(6，2)	1
(15，9) =$\boxed{3}$×5 ，3)	(5，3)	2

2、由第三次探討3、推論得知，當 $A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為偶數)時，可將 $A+B=q\times2^k$，此時(A，B)必須符合(qa，qb) q(a，b)才能公平分配成功，而此時公平分配成功移動次數與(a，b)相同。

3、探討 $A+B=q\times2^k$ 的數對(qa，qb)和 $A+B=2^k$ 的數對(a，b)的移動過程可以發現，其中(qa，qb)→(qa-qb，qb+qb)，若提出q，則與 $A+B=2^k$ 的數對(a，b)→(a-b，b+b) 移動過程一模一樣(假設 a>b)。

伍、研究結果與結論

一、公平分配成功情行探討結果

(一) 當A≠B 時，若 A+B≠4n(n 為自然數)，則公平分配遊戲結果一定失敗，也就是 A+B=4n(n 為自然數)是成功的先決條件。

(二) A+B=4n(n 為自然數)時：

1、$A+B=2^k$，任意數對(A，B)公平分配遊戲結果一定成功。

2、當 $A+B\neq2^k$，A+B=n×4(n 為奇數)時，必定只有一組數對(3n，n)能公平分配成功。

3、當 $A+B\neq2^k$，A+B=n ×4 (n 為偶數)時，可將 $A+B=q\times2^k$，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→ q(a，b)才能公平分配成功。

二、公平分配成功時移動次數探討結果

(一)$A+B=2^k$ 時

1、A、B 同為奇數：

若 B=p 為奇數時，則數對(2^k -p，p)公平分配成功時移動次數為 k-1 次。

2、A、B 同為偶數：

(1)$B=2^m$ 時，數對(2^k -2^m，2^m) 公平分配成功時移動次數為 k-1-m 次。

(2)B=2p(p 為奇數)時，數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-2 次。

(3)B=2p(p 為偶數)時，數對(2^k -2p，2p) 公平分配成功時移動次數為 k-3 次。

(二)$A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為奇數)時

此時公平分配成功時移動次數為1次。

(三)$A+B\neq2^k$，A+B=n×4 (n 為偶數)時

$A+B=q\times2^k$，此時(A，B)必須符合(qa，qb)→q(a，b)才能公平分配成功，而此時公平分配成功移動次數與(a，b)相同，且 $a+b=2^k$。

陸、討論與未來展望

一、有同學提問說：公平分配很簡單啊！A+B=n，把總數n÷2，數量多的A方直接給少的B方 (A 的數量)-(n÷2)個，這樣剛好一邊一半1次解決，何必要這麼多步驟呢？老師跟我們分享這個公平分配遊戲有趣的地方是：它的遊戲規則其實比較接近社會現象，當糖果少的一方抗議自己比別人少時，有權力做分配的人不會將自己的糖果從口袋掏出來，而是會從現有糖果多的一方說為了公平，你要將多的拿出來給少的，而且為了怕多的一方反彈，分配者不可能1次解決，一定會分很多次慢慢的給，直到兩邊都沒意見就停止。更厲害的分配者，就像一開始老師說的故事一樣，分肉的猴子一步步在兩隻狗不知不覺中就把肉吃光了。聽了老師的分享，我們都覺得很有意思，學數學還可以學到社會現象，算是數學社會學吧！

二、藉由此 A+B=n 的實驗，未來希望可以推論出 A+B+C=n，A+B+C+D=n...... 等等糖果分成更多堆能平均分配成功的情形。

三、本實驗探討 A+B=n 能平均分配成功的情形，也許未來討論平均分配失敗的情形，也有另一番發現，例如 A+B=5，A+B=7 時：

(一)A+B=5

次數	A	B	A	B
原本	4	1	3	2
1	3	2	1	4
2	1	4	2	3
	失敗		失敗	

(二)A+B=7

次數	A	B	A	B	A	B
原本	6	1	5	2	4	3
1	5	2	3	4	1	6
2	3	4	6	1	2	5
3	6	1	5	2	4	3
	失敗		失敗		失敗	

雖然無法公平分配，但在移動的過程中，會出現每一種情況都出現且只出現一次，最後又回到原來情況的情形，例如：(4，1)→(3，2)→(1，4)，(6，1)→(5，2)→(3，4)→(6，1)，還蠻有趣的。