

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

探究精神獎

080410

微笑圖形中找三點不共線

學校名稱：南投縣私立普台國民小學

作者： 小六 高顥瑄 小六 許藝馨	指導老師： 陳正勳 徐昇民
-------------------------	---------------------

關鍵詞：三點不共線、奇數方格、數列

作品摘要

經由 2×2 、 3×3 、 4×4 、 5×5 、 6×6 等三點不共線的圖形，我們在找尋在 $N \times N$ 的三點不共線的圖形，我們發現 N 為偶數 $N \times N$ 的三點不共線一定會有線對稱圖形，但 N 為奇數時都不會出現對稱圖形。當在 N 為奇數時， $N \times N$ 的表格中的數字總合為 $(1+N) \times N$ ，在 $N \times N$ 每一橫列兩數相減的總合為 $2(N-1)$ 。當 N 為偶數的方格中， $N \times N$ 的表格中的數字總合為 $(1+N) \times N$ ，每一橫列相減的數必為奇數最大的奇數為 $N-1$ ，且總合為 $\frac{N^2}{2}$ 。

壹、研究動機

我們都了解平面上任二點可以連成一直線，數學課時老師考考我們 3×3 的方格中是否可以直排、橫排、斜排都要三點不共線。經摸索了一些時間，我們找到所有的可能的情況，於是我們就想挑戰看看，試試看是否可以從 3×3 、 4×4 ... 等矩形，找到可以推演的模組。

貳、研究目的

- 一、找出 2×2 、 3×3 、 4×4 、 5×5 、 6×6 三點不共線的圖形。
- 二、推理出 $N \times N$ 的圖形規律。

參、研究問題

問題一、利用 $N \times N$ 的四個角必放其中一格，再找出三點不共線的圖形策略為何？

- (一) 2×2 找出所三點不共線的圖形。
- (二) 3×3 找出所三點不共線的圖形。
- (三) 4×4 找出所三點不共線的圖形。
- (四) 5×5 找出所三點不共線的圖形。
- (五) 6×6 找出所三點不共線的圖形。

問題二、利用問題一的圖形，找出圖形的關聯性為何？

- (一) 分類問題一的圖形。

問題三、利用問題二的圖形，將轉換成數字找出圖形關聯性為何？

- (一) 每個格子給不同的數字，找出圖形與數字的關係。
- (二) 探討圖形的數字總和關係。

問題四、利用問題三的數字總合，找尋線對稱圖形相關聯性為何？

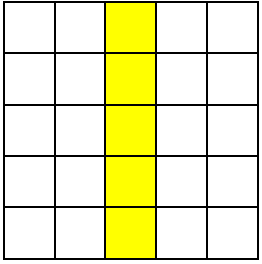
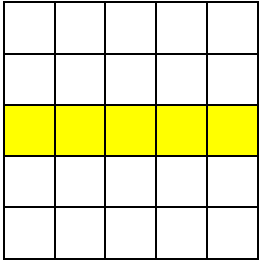
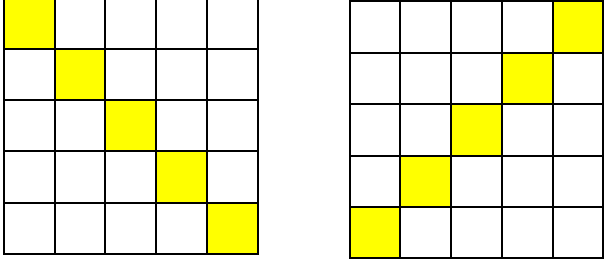
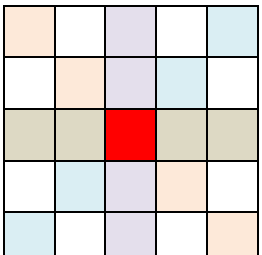
- (一) N 為奇數時，線對稱圖形的數字關聯性。
- (二) N 為偶數時，線對稱圖形的數字關聯性。

肆、研究設備及器材

- 一、電腦
- 二、紙、筆

伍、名詞解釋

一、三點不共線：在 $N \times N$ 的格子中，填入 $2N$ 的格子，在填入的格子中每一行、列與斜線中不能有填入超過二個格子，才能是三點不共線。

	<p>在黃色區域中每一行，只能選擇 2 格，才能是三點不共線。</p>
	<p>在黃色區域中每一列，只能選擇 2 格，才能是三點不共線。</p>
	<p>在黃色區域中斜線，只能選擇 2 格，才能是三點不共線。</p>
	<p>如果選擇紅色點，四個方向的行、列與斜線，四個方向只能在選擇 1 個格子填入，並且填入的格子也不能有三個格子可以在行、列與斜線中連成直線。</p>

二、!的涵義：一個正整數的階乘是所有小於及等於該數的正整數的積，並且有 0 的階乘為 1。自然數 n 的階乘寫作 $n!$ 。

三、線對稱圖形：指一個圖形沿一條直線摺疊，直線兩旁的部分能夠互相重合，這樣的圖形稱為線對稱圖形。

陸、研究過程或方法

【問題一】：先利用 $N \times N$ 的四個角必放其中一格，再找出三點不共線的圖形策略為何？

【問題 1-1】： 2×2 需放入填入 4 格，找出所三點不共線的圖形。

【做法 1-1】：

左上角先放	
找出的答案	

【發現 1-1】：

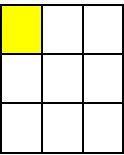
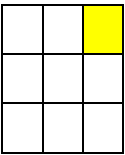
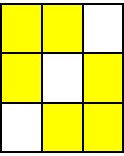
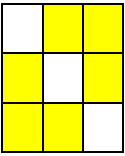
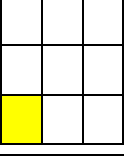
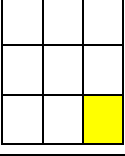
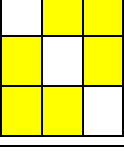
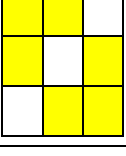
1. 先放置左上角，只有 1 種情況。

【結論 1-1】：

1. 在 2×2 的方格中需填入 4 個點總共 1 種情況。
2. 在 2×2 的方格中需填入 4 個點三點不共線只有 1 種。

【問題 1-2】： 3×3 需放入填入 6 格，找出所三點不共線的圖形。

【做法 1-2】：

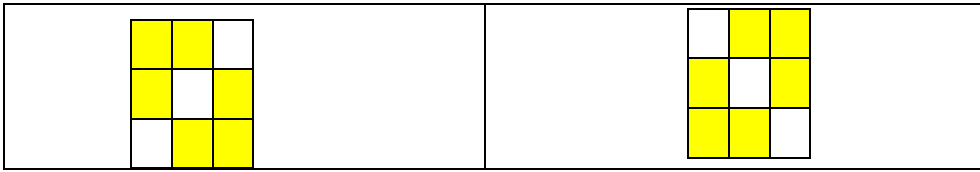
左上角先放		右上角先放	
找出的答案		找出的答案	
左下角先放		右下角先放	
找出的答案		找出的答案	

【發現 1-2】：

1. 先放置左上角，還有五格需要填入，所以總共有 $8!/5!(8-5)! = 56$ 種情況。
2. 先放置四個角可以找出四種可能，但先放左上角與右下角的圖形相同，放左下角與右上角的圖形相同。

【結論 1-2】：

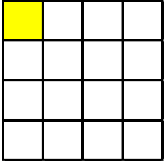
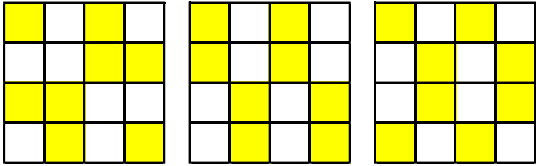
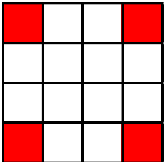
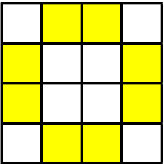
1. 在 3X3 的方格中需填入 6 個點總共 56 種情況。
2. 在 3X3 的方格中需填入 6 個點三點不共線只有 2 種。



3. 觀察上面 3X3 三點不共線 2 種圖形是旋轉後的圖形，所以放置四個角只要放置一個角就可以找出答案。

【問題 1-3】：4X4 需放入填入 8 格，找出所三點不共線的圖形。

【做法 1-3】：

<p>左上角先放</p>	
<p>找出的答案</p>	
<p>角不放</p>	
<p>找出的答案</p>	

原圖形	翻轉後圖形	
	翻轉	
	垂直翻轉	無
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	無	

【發現 1-3】：

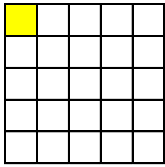
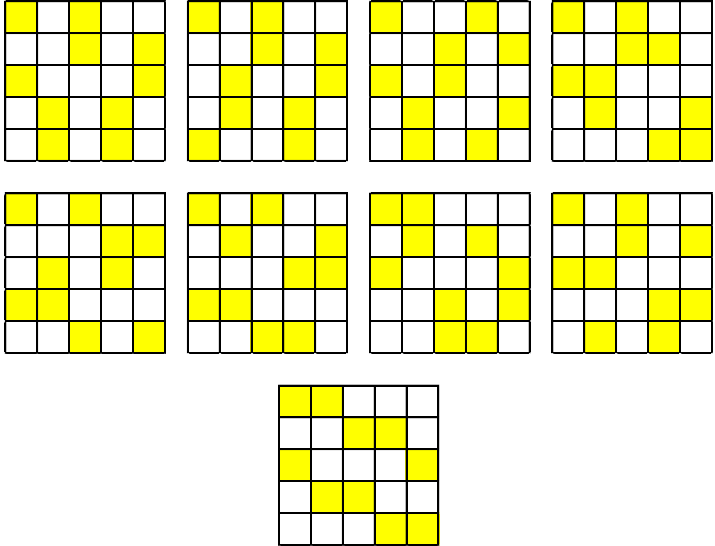
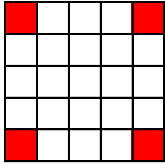
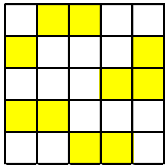
1. 先放置左上角，還有 7 格需要填入，所以總共有 $15!/7!(15-7)!=6435$ 種情況。
2. 角不放需要放 8 格總共有 $12!/8!(12-8)!=495$ 種情況
3. 先放置四個角可以找出三種，角不放可以找出一種。

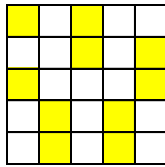
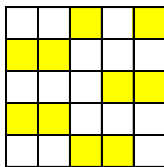
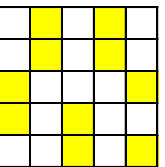
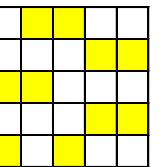
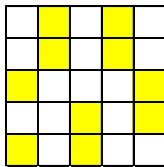
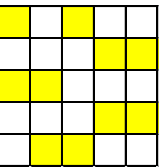
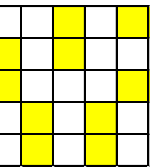
【結論 1-3】：

1. 在 4X4 的方格中需填入 8 個點總共 $6435+495=6930$ 種情況。
2. 在 4X4 的方格中需填入 8 個點三點不共線有 4 種，經過翻轉後有 11 種。

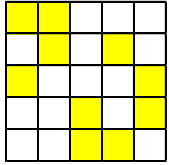
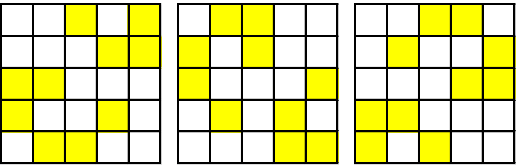
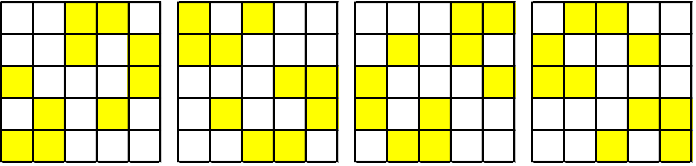
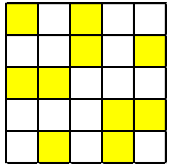
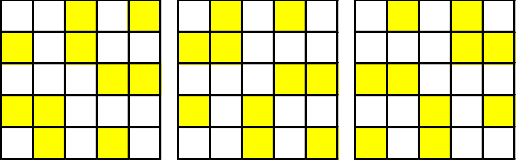
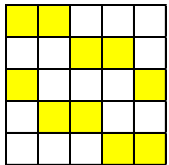
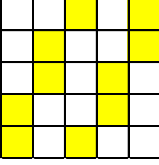
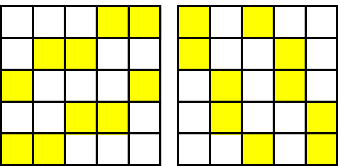
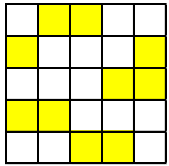
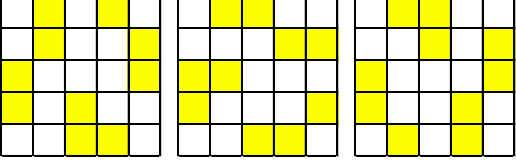
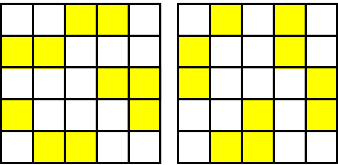
【問題 1-4】：5X5 需放入填入 10 格，找出所三點不共線的圖形。

【做法 1-4】：

<p>左上角先放</p>	
<p>找出的答案</p>	
<p>角不放</p>	
<p>找出的答案</p>	

原圖形	翻轉與垂直翻轉後圖形			
	<p>翻轉</p>			
<p>垂直翻轉</p>				

	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	無
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	

	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	無
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	

【發現 1-4】：

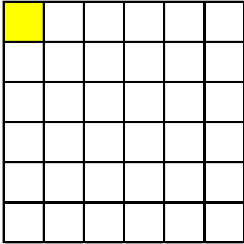
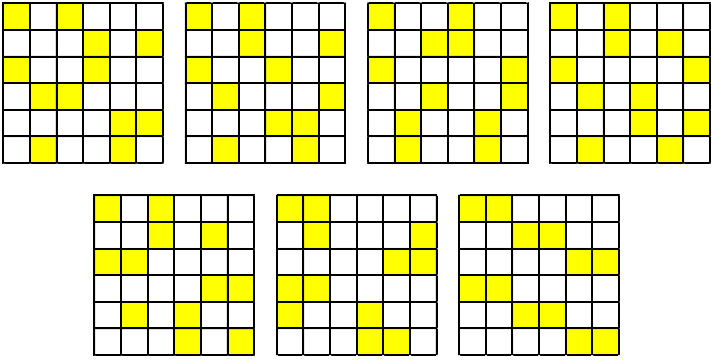
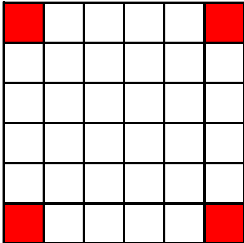
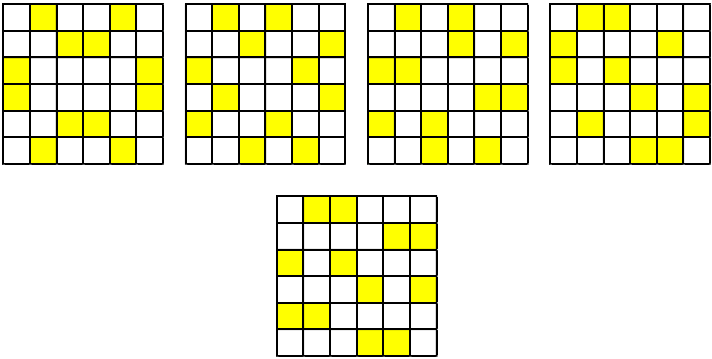
1. 先放置左上角，還有 9 格需要填入，所以總共有 $25!/9!(24-9)!=3268760$ 種情況。
2. 角不放需要放 10 格總共有 $21!/10!(21-10)!=352716$ 種情況
3. 先放置四個角可以找出九種，角不放可以找出一種。

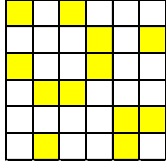
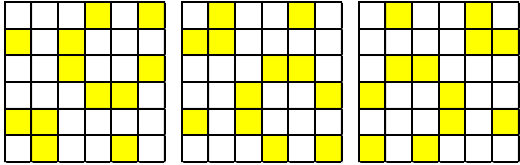
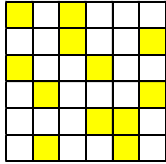
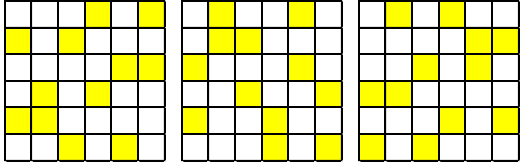
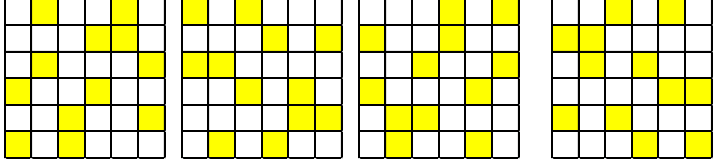
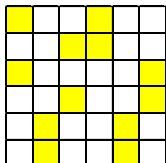
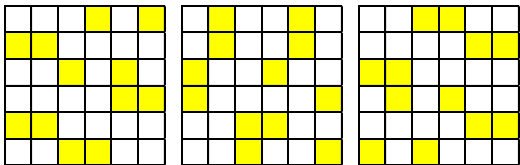
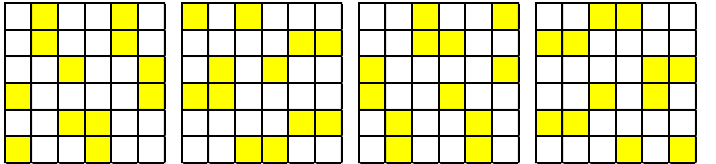
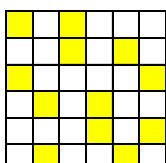
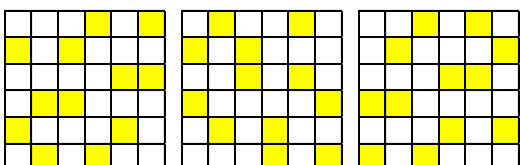
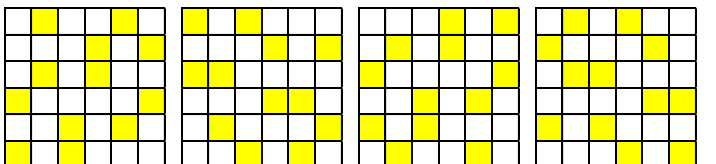
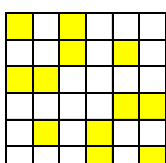
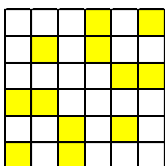
【結論 1-4】：

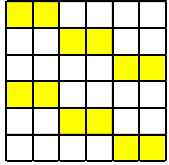
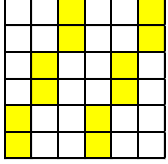
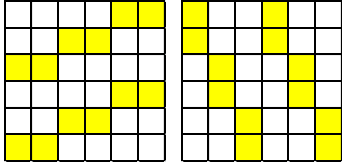
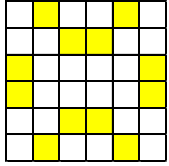
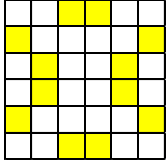
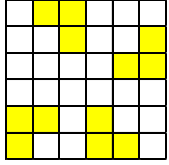
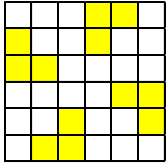
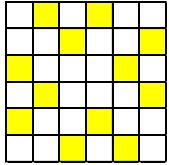
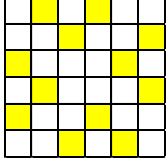
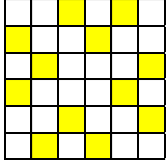
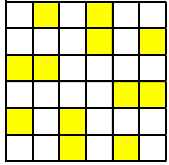
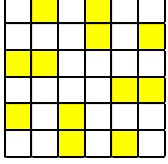
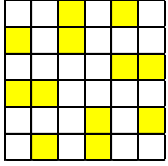
1. 在 5X5 的方格中需填入 10 個點總共 33040316 種情況。
2. 在 5X5 的方格中需填入 10 點三點不共線有 9 種，經過翻轉後有 62 種。

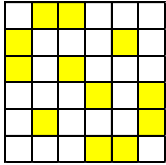
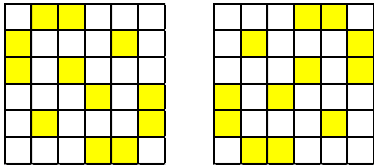
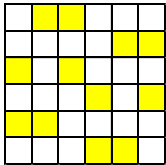
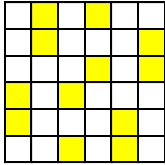
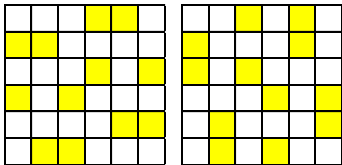
【問題 1-5】：6X6 需放入填入 12 格，找出所三點不共線的圖形。

【做法 1-5】：

<p>左上角先放</p>	
<p>找出的答案</p>	
<p>角不放</p>	
<p>找出的答案</p>	

原圖形	翻轉與垂直翻轉後圖形	
	翻轉	
	垂直翻轉	無
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	無

	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	無
	翻轉	無
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	
	翻轉	
	垂直翻轉	

	翻轉	
	垂直翻轉	無
	翻轉	
	垂直翻轉	

【發現 1-5】：

1. 先放置左上角，還有 11 格需要填入，所以總共有 $36!/11!(35-11)! = 15020132400$ 種情況。
2. 角不放需要放 12 格總共有 $32!/12!(32-12)! = 225792840$ 種情況
3. 先放置四個角可以找出七種，角不放可以找出五種。

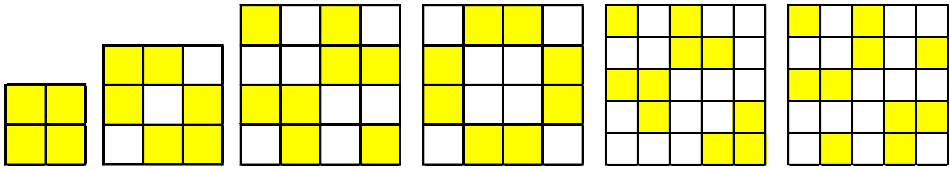
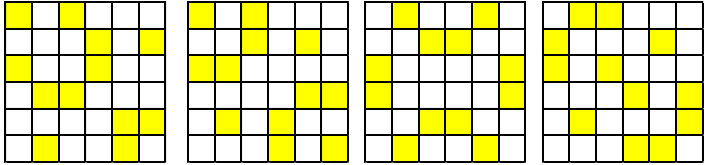
【結論 1-5】：

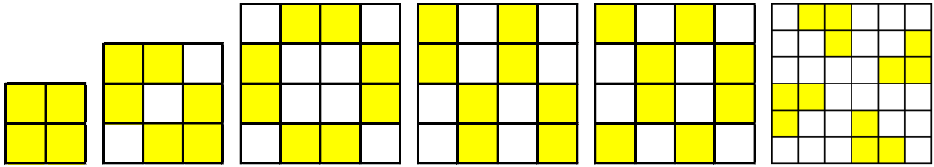
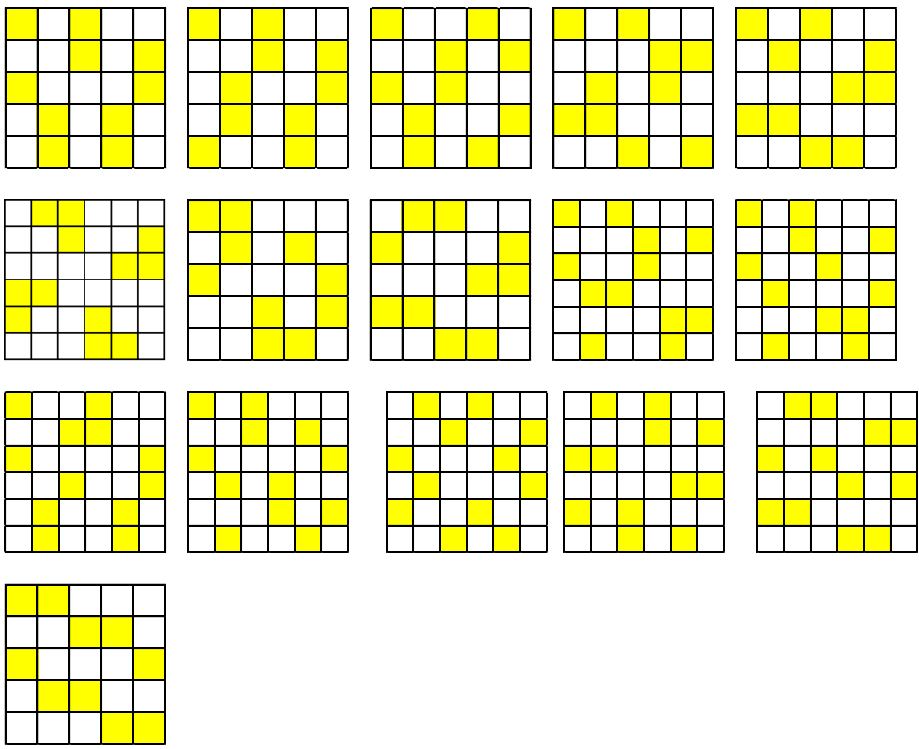
1. 在 6X6 的方格中需填入 12 個點總共 15245925240 種情況。
2. 在 6X6 的方格中需填入 12 點三點不共線有 12 種。經過翻轉後有 51 種。

【問題二】：利用問題一的圖形，找出圖形的關聯性為何？


【問題 2-1】：分類問題一的圖形。

【做法 2-1】：

線對稱圖形	
	

相同形狀	
沒有對稱圖形	

【發現 2-1】：

1. 從 2X2、3X3、4X4、5X5 與 6X6 的三點不共線中都可以發現至少有一個線對稱。
2. 在偶數方格中皆可以找到四個相同圖形組成。
3. 在其他的圖型中最常找到的型狀為 。

【結論 2-1】：

1. 在線對稱的圖型中，大部份對稱軸為對角線。
2. 在偶數方格中可以找到相同圖形，所以接下來我們想將數字放入方格中，找尋三點不共線的規律。

【問題三】：利用問題二的圖形，將方格轉換成數字找出圖形之間的關聯性為何？

【問題 3-1】：每個格子給不同的數字，找出圖形與數字的關係。

【做法 3-1】：

	圖形	數字總和																																																																																																																																																
2X2	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> </table>	1	2	3	4	10																																																																																																																																												
1	2																																																																																																																																																	
3	4																																																																																																																																																	
3X3	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	30																																																																																																																																							
1	2	3																																																																																																																																																
4	5	6																																																																																																																																																
7	8	9																																																																																																																																																
4X4	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	68																																																																																																																
1	2	3	4																																																																																																																																															
5	6	7	8																																																																																																																																															
9	10	11	12																																																																																																																																															
13	14	15	16																																																																																																																																															
1	2	3	4																																																																																																																																															
5	6	7	8																																																																																																																																															
9	10	11	12																																																																																																																																															
13	14	15	16																																																																																																																																															
5X5	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	130																																																																					
1	2	3	4	5																																																																																																																																														
6	7	8	9	10																																																																																																																																														
11	12	13	14	15																																																																																																																																														
16	17	18	19	20																																																																																																																																														
21	22	23	24	25																																																																																																																																														
1	2	3	4	5																																																																																																																																														
6	7	8	9	10																																																																																																																																														
11	12	13	14	15																																																																																																																																														
16	17	18	19	20																																																																																																																																														
21	22	23	24	25																																																																																																																																														
1	2	3	4	5																																																																																																																																														
6	7	8	9	10																																																																																																																																														
11	12	13	14	15																																																																																																																																														
16	17	18	19	20																																																																																																																																														
21	22	23	24	25																																																																																																																																														
6X6	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td></tr> </table> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr> <tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr> <tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	222
1	2	3	4	5	6																																																																																																																																													
7	8	9	10	11	12																																																																																																																																													
13	14	15	16	17	18																																																																																																																																													
19	20	21	22	23	24																																																																																																																																													
25	26	27	28	29	30																																																																																																																																													
31	32	33	34	35	36																																																																																																																																													
1	2	3	4	5	6																																																																																																																																													
7	8	9	10	11	12																																																																																																																																													
13	14	15	16	17	18																																																																																																																																													
19	20	21	22	23	24																																																																																																																																													
25	26	27	28	29	30																																																																																																																																													
31	32	33	34	35	36																																																																																																																																													
1	2	3	4	5	6																																																																																																																																													
7	8	9	10	11	12																																																																																																																																													
13	14	15	16	17	18																																																																																																																																													
19	20	21	22	23	24																																																																																																																																													
25	26	27	28	29	30																																																																																																																																													
31	32	33	34	35	36																																																																																																																																													
1	2	3	4	5	6																																																																																																																																													
7	8	9	10	11	12																																																																																																																																													
13	14	15	16	17	18																																																																																																																																													
19	20	21	22	23	24																																																																																																																																													
25	26	27	28	29	30																																																																																																																																													
31	32	33	34	35	36																																																																																																																																													

【發現 3-1】：

1. 找出來三點不共線的圖形帶入數字後，發現 2X2 答案皆為 10，3X3 案皆為 30，4X4 答案皆為 68，5X5 答案皆為 130，6X6 答案皆為 222。

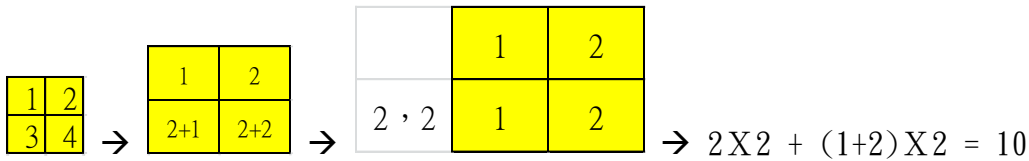
【結論 3-1】:

- 我們觀察 $N \times N$ 的數字總合，我們觀察到 10、30、68、130、222 有規律存在，
 $10=2 \times 2 \times 2+2$ ， $30=3 \times 3 \times 3+3$ ， $68=4 \times 4 \times 4+4$ ， $130=5 \times 5 \times 5+5$ ， $222=6 \times 6 \times 6+6$ ，
 可以驗證找的答案是否符合三點不共線，所以在 $N \times N$ 的方格中要填入 $2N$ 的記號，
 三點不共線的數字總合為 $N \times N \times N + N = N^3 + N$ 。

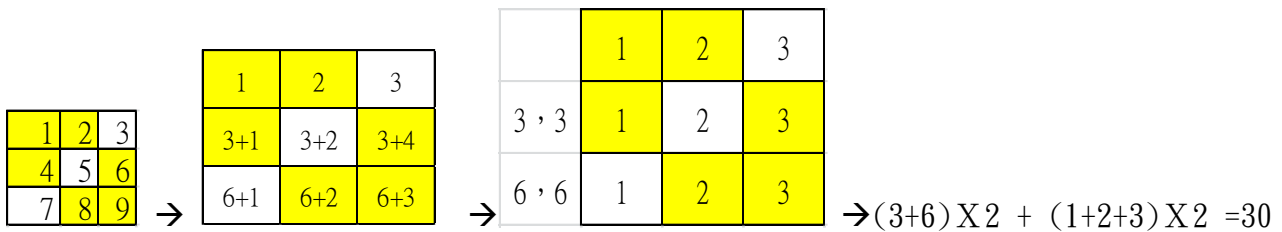
【問題 3-2】: 探討圖形的數字總和關係。

【做法 3-2】:

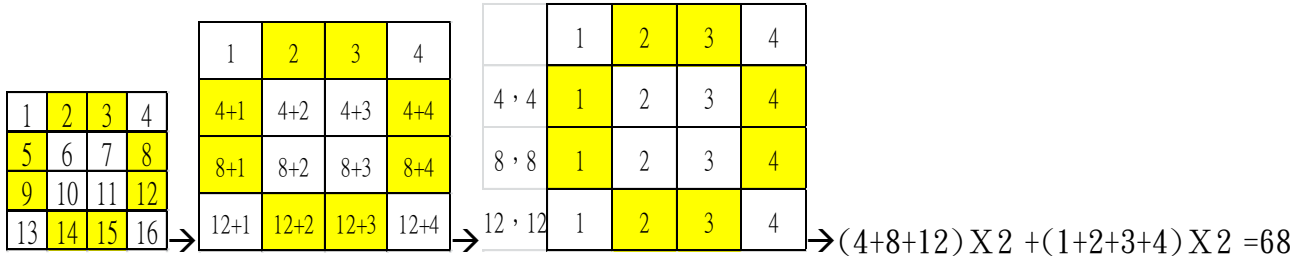
- 以 2×2



- 以 3×3



- 以 4×4



【發現 3-2】:

- 原本使用每個格子數字不相同，但經過我們將表格數字拆解出以上的式子，我們可以使用每一排數字相同。
- 因為三點不共線，所以每一直行只會出現二格，也就是每個數字只會出現 2 次，如果超過 2 次或不足 2 次也就是有出現三點共線的情況。

【結論 3-2】:

- 在 $N \times N$ 的表格中的數字總合為 $N^3 + N$ 時，簡化為數字總合為 $(1+2+3+\dots+N) \times 2 = \frac{(1+N) \times N}{2} \times 2 = (1+N) \times N$ 。

【問題四】：利用問題三的數字總合，找尋線對稱圖形相關聯性為何？

【問題4-1】：N為奇數時，線對稱圖形的數字關聯性。

【做法 4-1】：

1. 利用3X3橫列兩數相減

1	2	3	2-1	1
1	2	3	3-1	2
1	2	3	3-2	1

發現：

我們猜想正中央是N-1，上下皆為1，所以推測5X5為列圖表

1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	4	1	2	3	4	5	4
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1

→ 首先從中間開始

1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	4	1	2	3	4	5	4
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1

在從由下往下填入

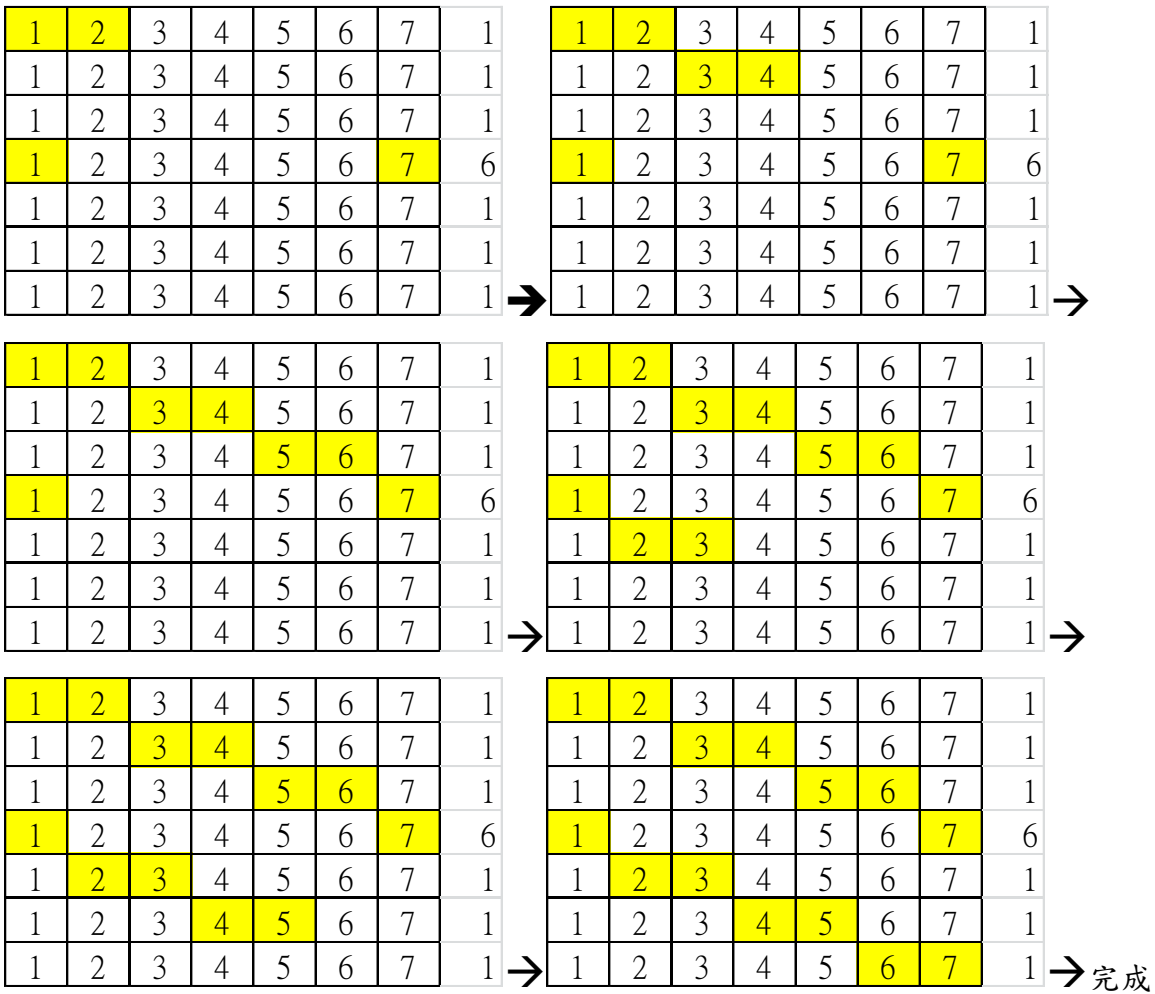
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	4	1	2	3	4	5	4
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1
1	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	1

→ 完成

推測7X7也有相同規律

1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	6	1	2	3	4	5	6	7	6
1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	3	4	5	6	7	1
1	2	3	4	5	6	7	1	1	2	3	4	5	6	7	1

→



【發現 4-1】:

1. 在N為奇數時，圖形可以依照 3X3 的方式推出其他的相類似的圖形。
2. 最中間的數字最大且為 N-1，其他數字皆為 1。

【結論 4-1】:

1. 在NXN的表格中的數字總合為 $(1+N) \times N$ ，橫列兩數相減的總合 3 X 3 為 4，5 X 5 為 8，7 X 7 為 12，所以我們可推出NXN橫列兩數相減的總合為 $N \times 2 - 2 = 2(N-1)$ 。

【問題 4-2】: N為偶數時，線對稱圖形的數字關聯性。

【做法 4-2】:

1. 2 X 2 橫列兩數相減

1	2	1
1	2	1

2. 4 X 4 橫列兩數相減

1	2	3	4	1
1	2	3	4	3
1	2	3	4	3
1	2	3	4	1

由 2 X 2 與 4 X 4 的相減數字觀察，我們發現最上與最下的二格為 1，中間都夾都 N-1。因此我們推測 6 X 6 為

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	1

→我們發現這個圖形是錯誤產生 4 條三點共線→

【發現 4-2】：

於是我們觀察了這個圖形，將橫列 3 與 4 與橫列 2 與 5 對調，就不會有三點共線的情況，所以把相減的數列 1、3、5、5、3、1 修改為 1、5、3、3、5、1，重新填入格子。

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	1

→

1	2	3	4	5	6	1
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	3
1	2	3	4	5	6	5
1	2	3	4	5	6	1

→ 完成

【發現 4-2】：

偶數的圖形皆為線對稱的圖形，所以相減的數列也呈現為對稱，以 6 X 6 為例，相減數列為 1、5、3、3、5、1，填入的數字也為奇數數列 1、3、5 …，且如果按照順序會導出的圖形產出三點共線的圖形。所以我們猜測 8 X 8 相減數列為 1、5、7、3、3、7、5、1

1	2	3	4	5	6	7	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	1

1	2	3	4	5	6	7	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	1

1	2	3	4	5	6	7	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	1

1	2	3	4	5	6	7	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	1

1	2	3	4	5	6	7	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	3
1	2	3	4	5	6	7	8	7
1	2	3	4	5	6	7	8	5
1	2	3	4	5	6	7	8	1

→ 完成

我們繼續做 10 X 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

【發現 4-2】：在這個形中我們發現有三點共線的狀況，我猜測相減的數列的排列可能有錯。於是我們數列順序調整為 1、9、3、7、5、5、7、3、9、1，把 5 調整正中間。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

→ 完成

12X12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	1

→

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	1

【發現 4-2】：在 8 X 8 的圖形有微笑圖形，但到 10 X 10 圖形轉變了，所以我們猜測是不是相減的數列有其他的可能，我找到 10 X 10 的笑臉的圖形相減的數列為 1、5、7、3、9、9、3、7、5、1，

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	

【結論 4-2】：

1. 觀察笑臉的圖形我們發現上半部的數列為 1、5、7、11... 第 1 個數字與第 2 個數字差 4，第 2 個數字與第 3 個數字差 2 以此類推，中間的數列為 3、9、15、21... 每次增加 6，下半部的數列與上半部相同。
2. 我們發現笑臉的圖形上半部與下半部的數列是按照第 1 個數字與第 2 個數字差 4，第 2 個數字與第 3 個數字差 2 的規律在增加，唯一有變化的部份為中間。
3. 中間的數列每次增加 6 的圖形可以分成下列三種笑臉圖形

1 8X8	2 10X10	3 12X12																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	1	1	2	3	4	5	6	7	8	5	1	2	3	4	5	6	7	8	7	1	2	3	4	5	6	7	8	3	1	2	3	4	5	6	7	8	3	1	2	3	4	5	6	7	8	7	1	2	3	4	5	6	7	8	5	1	2	3	4	5	6	7	8	1	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
1	2	3	4	5	6	7	8	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	11																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			

4.

	8X8	14X14	20X20	26X26	32X32
中間數列	3	3 9	9 3 15	3 9 15 9 21	3 9 15 21 27
數列關係		新增的數字放正中間	前數列前後相反，新增的數字放正中間	前數列第一個數字移至中間的上一格，新增的數字放中間	前數列第二與三的數列前後相反，新增的數字放正中間

	10X10	16X16	22X22	28X28	34X34
中間數列	3 9	3 9 15	9 3 15 21	3 9 15 21 27	3 9 15 21 27 33


數列關係		新增的數字放正中間	前數列前後相反，新增的數字放正中間	前數列第一個數字移至中間的上一格，新增的數字放中間	前數列第二與四的數列前後順序相反，新增的數字放正中間
------	--	-----------	-------------------	---------------------------	----------------------------

	12X12	18X18	24X24	30X30	36X36
中間數列	9 3	3 9 15	3 15 9 21	15 3 9 27 21	9 3 21 15 27 33
數列關係		新增的數字放正中間	前數列第二與三的數列前後相反，新增的數字放正中間	前數列第二與三的數列前後相反，新增的數字放正中間	

由上表得知，8X8 與 10X10 的圖形可以中間數列有特定的關係，可以用推論方式得知三點不線的圖形。

5. N 為偶數的方格中，我們發現變化比 N 為奇數還要大，但可以知道每一橫列相減的數必為奇數最大的奇數為 $N-1$ ，且總合為 $\frac{N^2}{2}$ 。

柒、研究結論

1. N X N 的圖形要找出三點不共線的圖形，我們從 2 X 2、3 X 3、4 X 4、5 X 5 到 6 X 6 我們找到的解答中，一開始佔有角邊的答案比較多，當 N 的越來越大時，放置角邊的答案就會變少。
2. N X N 的圖形空格填入數字從 1 到 N X N 時，三點不共線的數字總合為 $N^3 + N$ 。
3. 通常 N 的數字越小，圖形形成小三角形  的機率就越高，每一個圖形都只會有一到兩個連在一起的記號。
4. 在 N 為偶數 N X N 的三點不共線一定會有線對稱圖形，但 N 為奇數時不一定會出現對稱圖形。

5. 觀察笑臉的圖形我們發現上半部的數列為 1、5、7、11... 第 1 個數字與第 2 個數字差 4，第 2 個數字與第 3 個數字差 2 以此類推，中間的數列為 3、9、15、21... 每次增加 6，下半部的數列與上半部相同。
6. 8 X 8 與 10 X 10 的圖形可以中間數列有特定的關係，可以用推論方式得知三點不線的圖形。
7. 在 N 為奇數時，N X N 的表格中的數字總合為 $(1+N)X N$ ，在 N X N 每一橫列兩數相減的總合為 $2(N-1)$ 。
8. N 為偶數的方格中，N X N 的表格中的數字總合為 $(1+N)X N$ ，每一橫列相減的數必為奇數最大的奇數為 $N-1$ ，且總合為 $\frac{N^2}{2}$ 。

捌、研究建議

我們三點不共線的圖形時，在 N 的值小於 4 的時候很容易找出答案，隨著 N 的值增加，找出答案的固難度就增加，當我們使用數字後協助我們判別答案是否正確與縮小找的範圍，本次我們只找到一些特殊圖案的圖案，利用數字才發現規律，未來我們想使用斜率或座標的方法找尋規律。

玖、參考資料

維基百科 三點不共線 https://en.wikipedia.org/wiki/No-three-in-line_problem
 Mathpickle <http://mathpickle.com/project/no-three-minarets-in-a-line/>

【評語】 080410

此作品乃探討在 $N \times N$ 的格子中，如何填入 $2N$ 的格子以形成三點不共線的圖形，主題有趣。作者經由 2×2 、 3×3 、 4×4 、 5×5 、 6×6 等三點不共線圖形的實例討論出發，但隨著數值的增加，複雜度也隨之增加，作者利用將方格轉換成數字的策略協助進行，並將猜測的結果做些調整，探究精神佳，值得鼓勵。

壹、研究動機

我們都了解平面上任二點可以連成一直線，數學課時老師考考我們3×3的方格中是否可以直排、橫排、斜排都要三點不共線。經摸索了一些時間，我們找到所有的可能的情況，於是我們就想挑戰看看，試試看是否可以從3×3，4×4…等矩形，找到可以推演的模組。

貳、研究目的

- 一、找出2×2、3×3、4×4、5×5、6×6三點不共線的圖形。
- 二、推理出N×N的圖形是否有特殊規律？

參、研究問題

- 一、利用N×N的四個角必放其中一格，再找出三點不共線的圖形策略為何？
 - (一) 2×2需填入4格，找出三點不共線的圖形為何？
 - (二) 3×3需填入6格，找出三點不共線的圖形為何？
 - (三) 4×4需填入8格，找出三點不共線的圖形為何？
 - (四) 5×5需填入10格，找出三點不共線的圖形為何？
 - (五) 6×6需填入12格，找出三點不共線的圖形為何？
- 二、利用問題一的圖形，找出圖形的關聯性為何？
 - (一) 分類問題一的圖形並找出圖形之間的關聯。
- 三、利用問題二的圖形，將轉換成數字找出圖形關聯性為何？
 - (一) 每個格子給不同的數字，找出圖形與數字的關係。
 - (二) 探討圖形的數字總和關係。
- 四、利用問題三的數字總和，找尋線對稱圖形相關聯性為何？
 - (一) N為奇數時，線對稱圖形的數字關聯性為何？
 - (二) N為偶數時，線對稱圖形的數字關聯性為何？

肆、研究工具

- 一、電腦與EXCEL軟體
- 二、紙、筆

伍、研究過程或方法

【問題一】：先利用N×N的四個角必放其中一格，再找出三點不共線的圖形策略為何？

【問題1-1】：2×2需填入4格，找出三點不共線的圖形為何？

【做法1-1】：

左上角先放	
找出的答案	

【發現1-1】：

1. 先放置左上角，只有1種情況。

【結論1-1】：

1. 在2×2的方格中需填入4個點總共1種情況。
2. 在2×2的方格中需填入4個點三點不共線只有1種。

【問題1-2】：3×3需填入6格，找出三點不共線的圖形為何？

【做法1-2】：

左上角先放		右上角先放	
找出的答案		找出的答案	
左下角先放		右下角先放	
找出的答案		找出的答案	

【發現1-2】：

1. 先放置左上角，還有五格需要填入，所以總共有8!/5! (8-5)! = 56種情況。
2. 先放置四個角可以找出四種可能，但先放左上角與右下角的圖形相同，放左下角與右上角的圖形相同。

【結論1-2】：

1. 在3×3的方格中需填入6個點總共56種情況。
2. 在3×3的方格中需填入6個點三點不共線只有2種。

--	--

3. 觀察上面3×3三點不共線2種圖形是旋轉後的圖形，所以放置四個角只要放置一個角就可以找出答案。

【問題1-3】：4×4需填入8格，找出三點不共線的圖形為何？

【做法1-3】：

左上角先放	
找出的答案	
角不放	
找出的答案	

原圖形	翻轉後圖形
	翻轉
	垂直翻轉 無
	翻轉
	垂直翻轉
	翻轉
	無

【發現1-3】：

1. 先放置左上角，還有7格需要填入，所以總共有15!/7! (15-7)! = 6435種情況。
2. 角不放需要放8格總共有12!/8! (12-8)! = 495種情況
3. 先放置四個角可以找出三種，角不放可以找出一種。

【結論1-3】：

1. 在4×4的方格中需填入8個點總共6435+495=6930種情況。
2. 在4×4的方格中需填入8個點三點不共線有4種，經過翻轉後有11種。

【問題1-4】：5×5需填入10格，找出三點不共線的圖形為何？

【做法1-4】：

左上角先放	
找出的答案	
角不放	
找出的答案	

原圖形	翻轉與垂直翻轉後圖形	原圖形	翻轉與垂直翻轉後圖形
	翻轉 		翻轉
	垂直翻轉 		垂直翻轉
	翻轉 		翻轉
	垂直翻轉 		垂直翻轉
	翻轉 		翻轉
	垂直翻轉 無		垂直翻轉 無
	翻轉 		翻轉
	垂直翻轉 		垂直翻轉
	翻轉 		翻轉
	垂直翻轉 		垂直翻轉

【發現1-4】：

1. 先放置左上角，還有9格需要填入，所以總共有25!/9! (24-9)! = 3268760種情況。
2. 角不放需要放10格總共有21!/10! (21-10)! = 352716種情況
3. 先放置四個角可以找出九種，角不放可以找出一種。

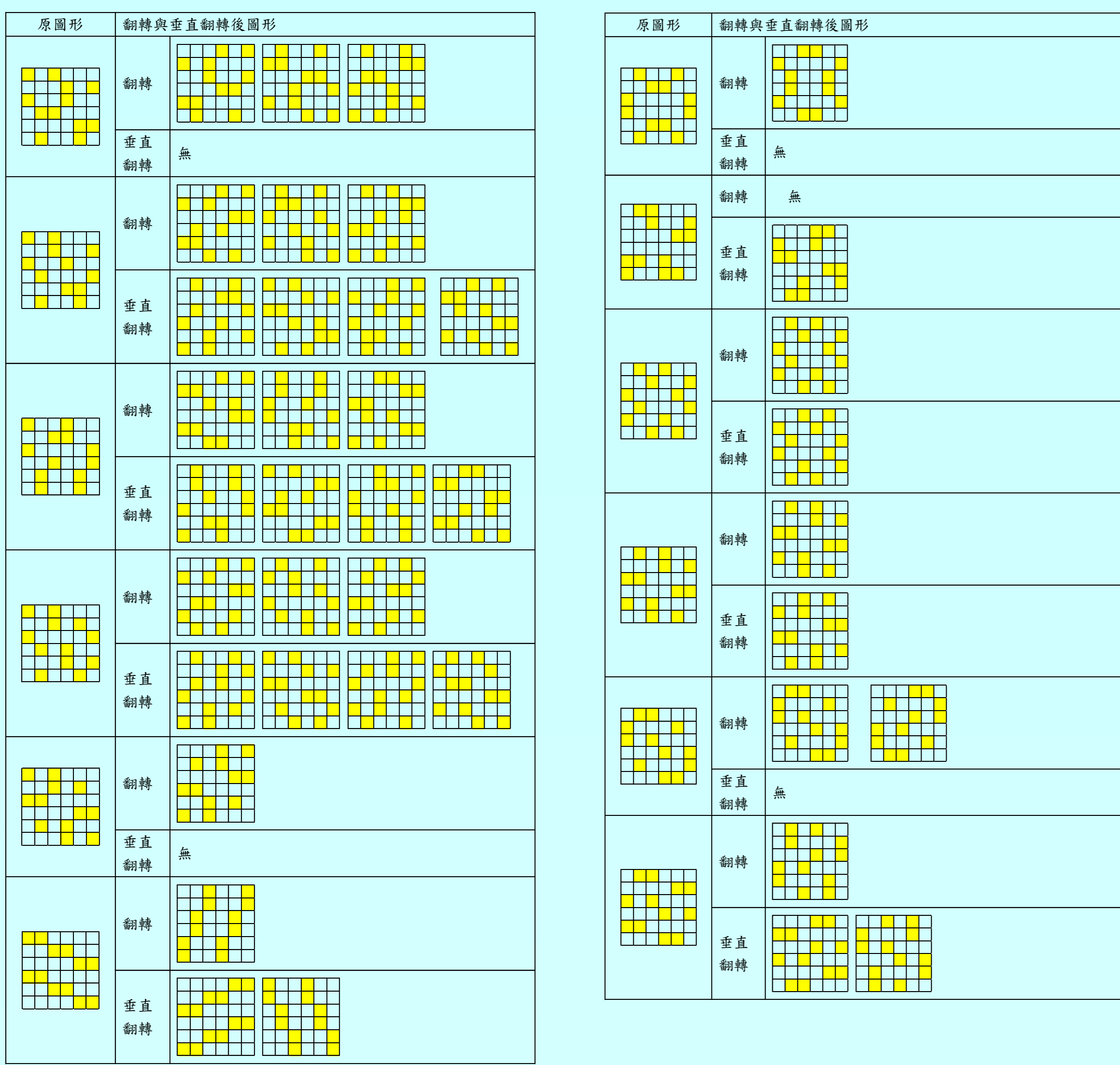
【結論1-4】：

1. 在5×5的方格中需填入10個點總共33040316種情況。
2. 在5×5的方格中需填入10點三點不共線有10種，經過翻轉後有62種。

【問題1-5】：6×6需填入12格，找出三點不共線的圖形為何？

【做法1-5】：

左上角先放	
找出的答案	
角不放	
找出的答案	



【發現1-5】：

- 先放置左上角，還有11格需要填入，所以總共有 $36!/11!(35-11)!$ = 15020132400種情況。
- 角不放需要放12格總共有 $32!/12!(32-12)!$ = 225792840種情況
- 先放置四個角可以找出七種，角不放可以找出五種。

【結論1-5】：

- 在 6×6 的方格中需填入12個點總共15245925240種情況。
- 在 6×6 的方格中需填入12點三點不共線有12種。經過翻轉後有51種。

【問題二】：利用問題一的圖形，找出圖形的關聯性為何？

【問題2-1】：分類問題一的圖形。

【做法2-1】：

線對稱圖形	相同形狀	沒有對稱圖形

【發現2-1】：

- 從 2×2 、 3×3 、 4×4 、 5×5 與 6×6 的三點不共線中都可以發現至少有一個線對稱。
- 在偶數方格中皆可以找到四個相同圖形組成。
- 在其他的圖型中最常找到的型狀為 。

【結論2-1】：

- 在線對稱的圖型中，大部份對稱軸為對角線。
- 在偶數方格中可以找到相同圖形，所以接下來我們想將數字放入方格中，找尋三點不共線的規律。

【問題三】：利用問題二的圖形，將方格轉換成數字找出圖形之間的關聯性為何？

【問題3-1】：每個格子給不同的數字，找出圖形與數字的關係。

【做法3-1】：

	圖形	數字總和
2×2		10
3×3		30
4×4		68
5×5		130
6×6		222

【發現3-1】：

- 找出來三點不共線的圖形帶入數字後，發現 2×2 答案皆為10， 3×3 案皆為30， 4×4 答案皆為68， 5×5 答案皆為130， 6×6 答案皆為222。

【結論3-1】：

- 我們觀察 $N \times N$ 的數字總和，我們觀察到10、30、68、130、222有規律存在， $10=2 \times 2 \times 2+2$ ， $30=3 \times 3 \times 3+3$ ， $68=4 \times 4 \times 4+4$ ， $130=5 \times 5 \times 5+5$ ， $222=6 \times 6 \times 6+6$ ，可以驗證找的答案是否符合三點不共線，所以在 $N \times N$ 的方格中要填入 $2N$ 的記號，

三點不共線的數字總和為 $N \times N \times N + N = N^3 + N$

【問題3-2】：探討圖形的數字總和關係。

【做法3-2】：

- 以 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2+1 & 2+2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \cdot 2 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow 2 \times 2 + (1+2) \times 2 = 10$$

- 以 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \\ 6+1 & 6+2 & 6+3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 \cdot 3 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ 6 \cdot 6 \end{matrix} \rightarrow (3+6) \times 2 + (1+2+3) \times 2 = 30$$

- 以 4×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & 4+4 \\ 8+1 & 8+2 & 8+3 & 8+4 \\ 12+1 & 12+2 & 12+3 & 12+4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 4 \cdot 4 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 8 \cdot 8 \\ 12 \cdot 12 \end{matrix} \rightarrow (4+8+12) \times 2 + (1+2+3+4) \times 2 = 68$$

【發現3-2】：

- 原本使用每個格子數字不相同，但經過我們將表格數字拆解出以上的式子，我們可以使用每一排數字相同。
- 因為三點不共線，所以每一直行只會出現二格，也就是每個數字只會出現2次，如果超過2次或不足2次也就是有出現三點共線的情況。

【結論3-2】：

- 在 $N \times N$ 的表格中的數字總和為 N^3+N 時，簡化為數字總和為

$$(1+2+3+\dots+N) \times 2 = \frac{(1+N) \times N}{2} \times 2 = (1+N) \times N$$

【問題四】：利用問題三的數字總和，找尋線對稱圖形相關聯性為何？

【問題4-1】：N為奇數時，線對稱圖形的數字關聯性。

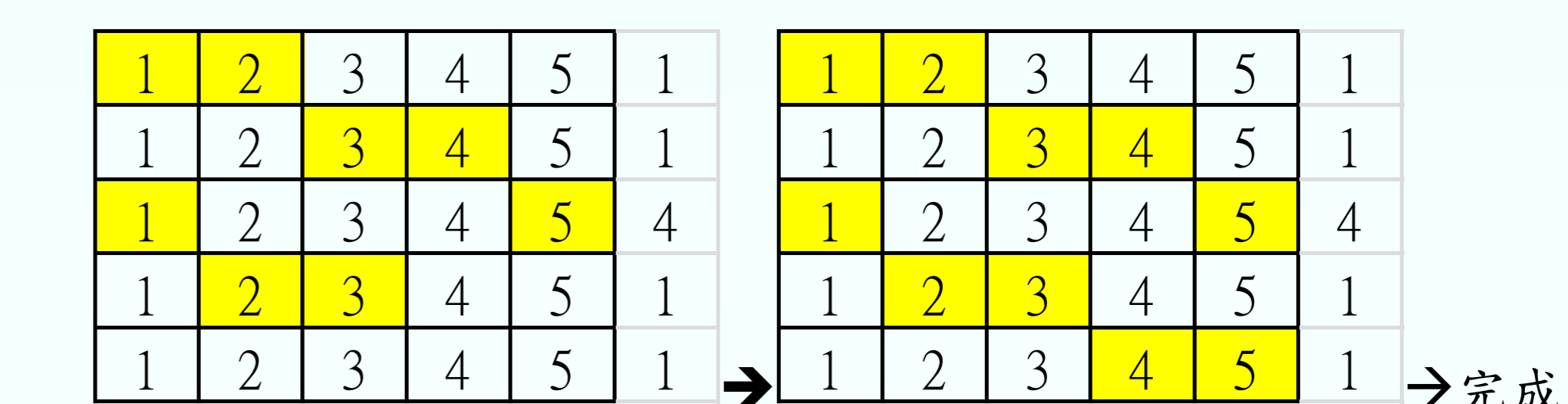
【做法4-1】：

- 利用 3×3 橫列兩數相減

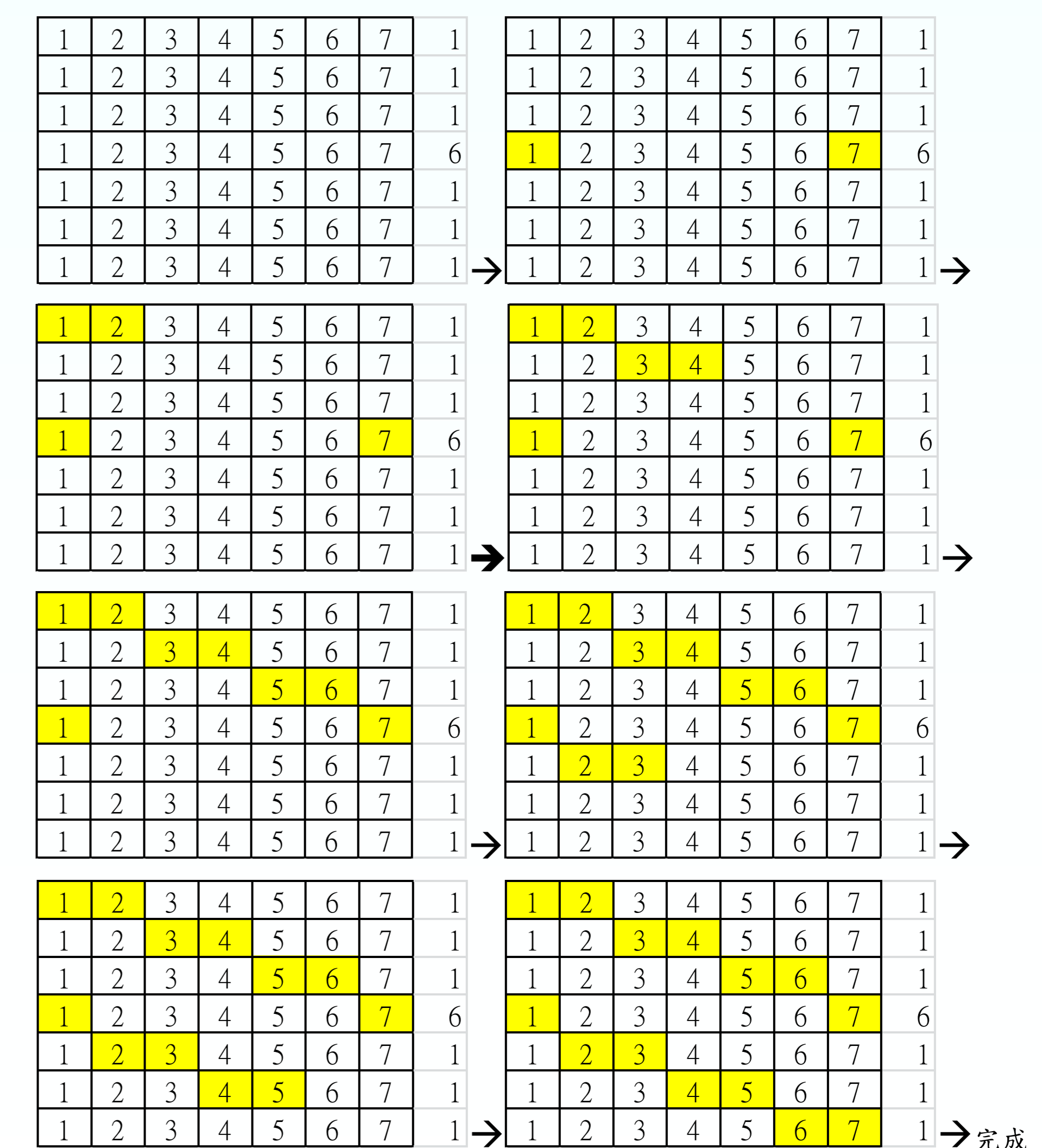
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3-1 & 2 \\ 3-2 & 1 \end{matrix}$$

發現：

我們猜想正中央是 $N-1$ ，上下皆為1，所以推測 5×5 為列圖表



- 推測 7×7 也有相同規律



【發現4-1】：

- 在N為奇數時，圖形可以依照3×3的方式推出其他的相類似的圖形。
- 最中間的數字最大且為N-1，其他數字皆為1。

【結論三】：

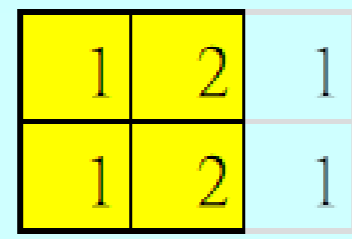
- 在N×N的表格中的數字總和為 3×3為12，5×5為30，7×7為56，所以我們可推出N×N數字總和(1+N)×N
 橫列兩數相減的總和3×3為4，5×5為8，7×7為12，
 所以我們可推出N×N橫列兩數相減的總和為

$$N \times 2 - 2 = 2(N - 1)$$

【問題4-2】：N為偶數時，線對稱圖形的數字關聯性。

【做法4-2】：

- 2×2 橫列兩數相減



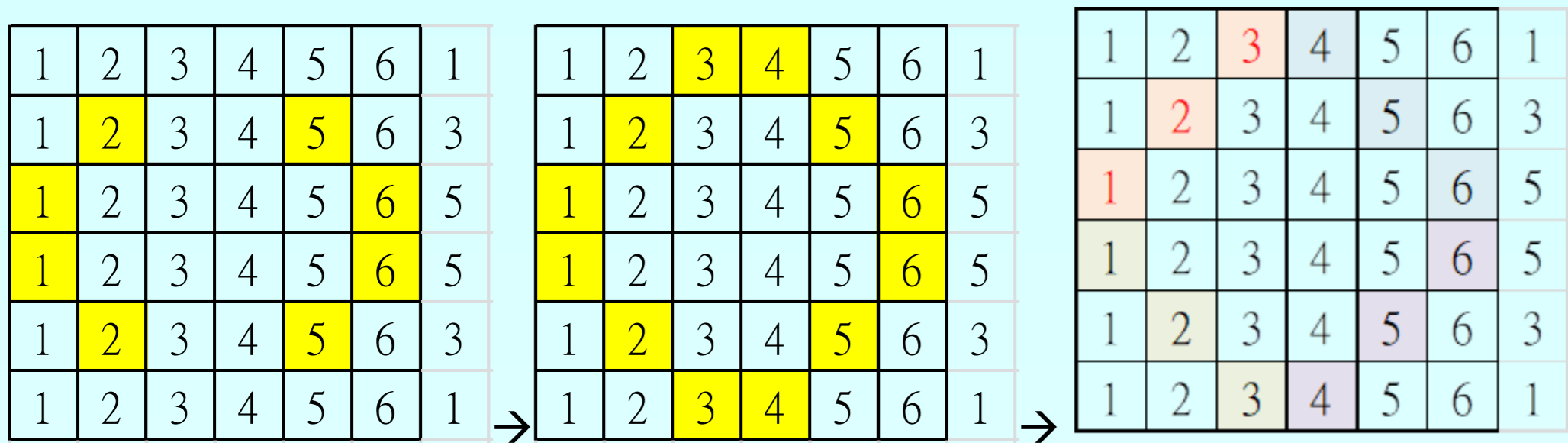
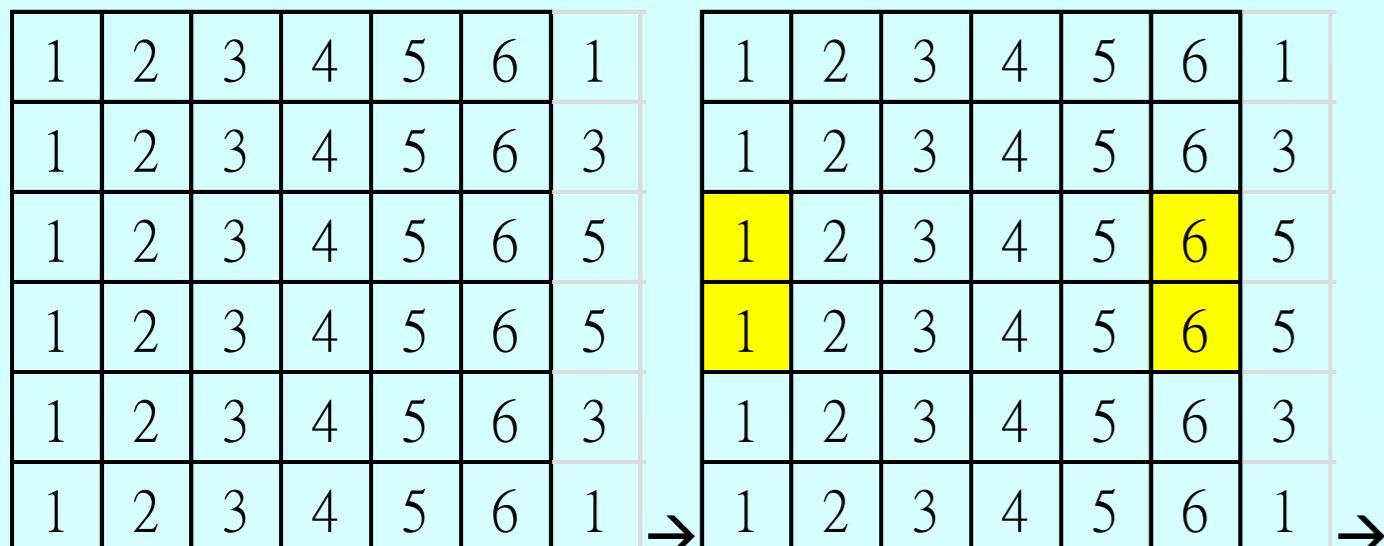
- 4×4 橫列兩數相減



發現：

由2×2與4×4的相減數字觀察，我們發現最上與最下的二格為1，中間都夾都N-1。

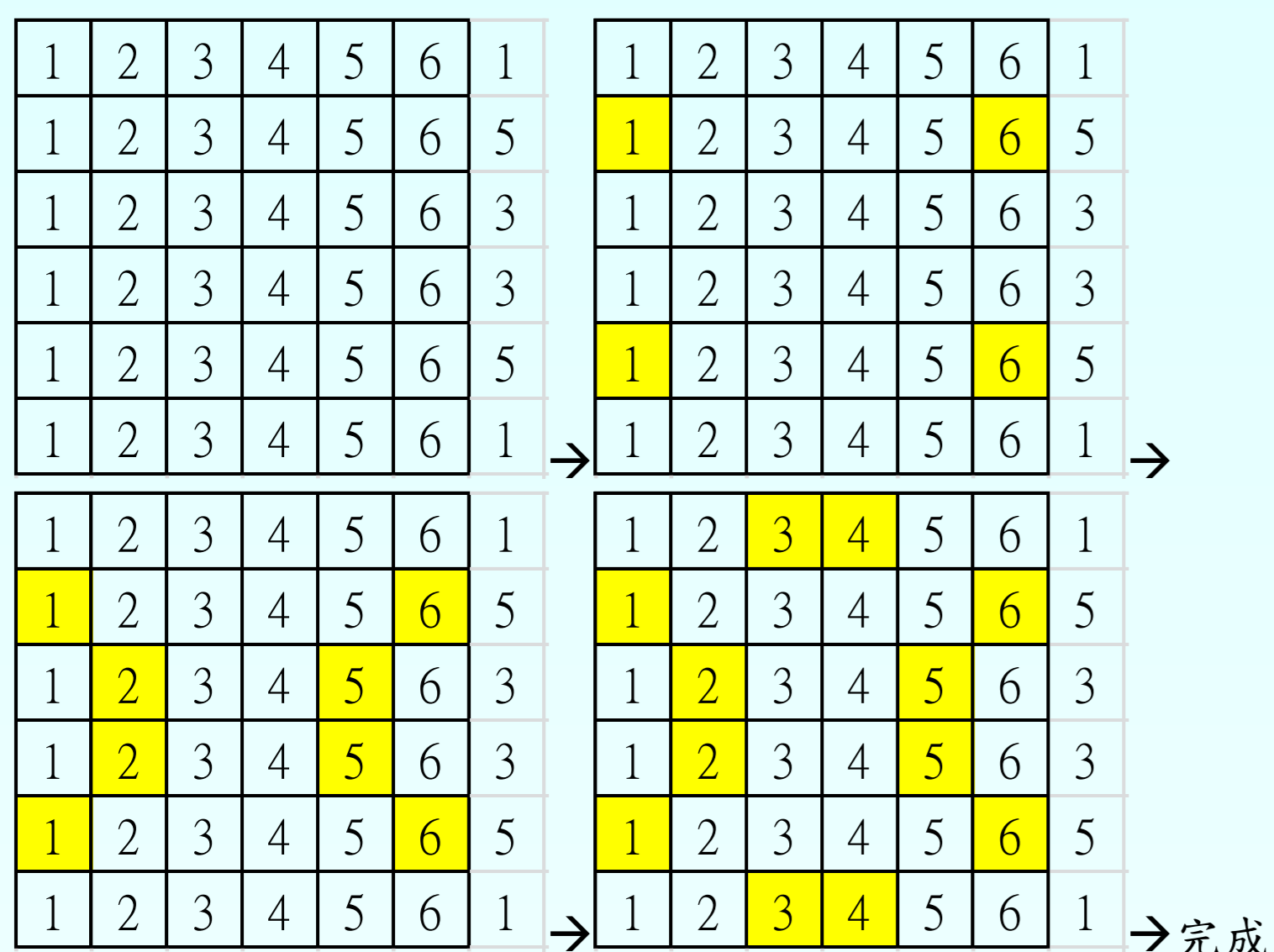
- 因些我們推測6×6為



我們發現這個圖形是錯誤產生4條三點共線

【發現】：

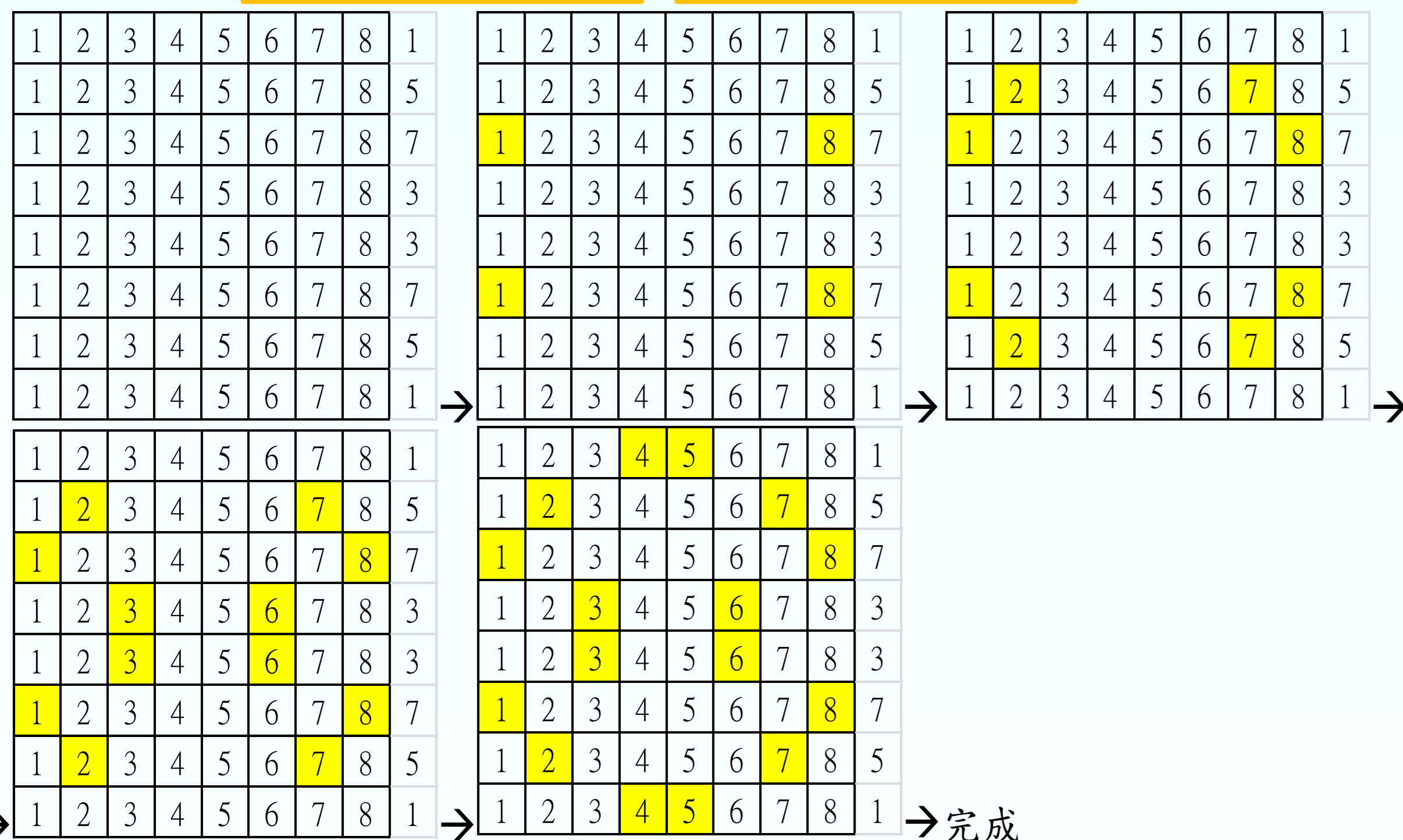
於是我們觀察了這個圖形，將橫列3與4與橫列2與5對調，就不會有三點共線的情況，所以把相減的數列1、3、5、5、3、1修改為1、5、3、3、5、1，重新填入格子。



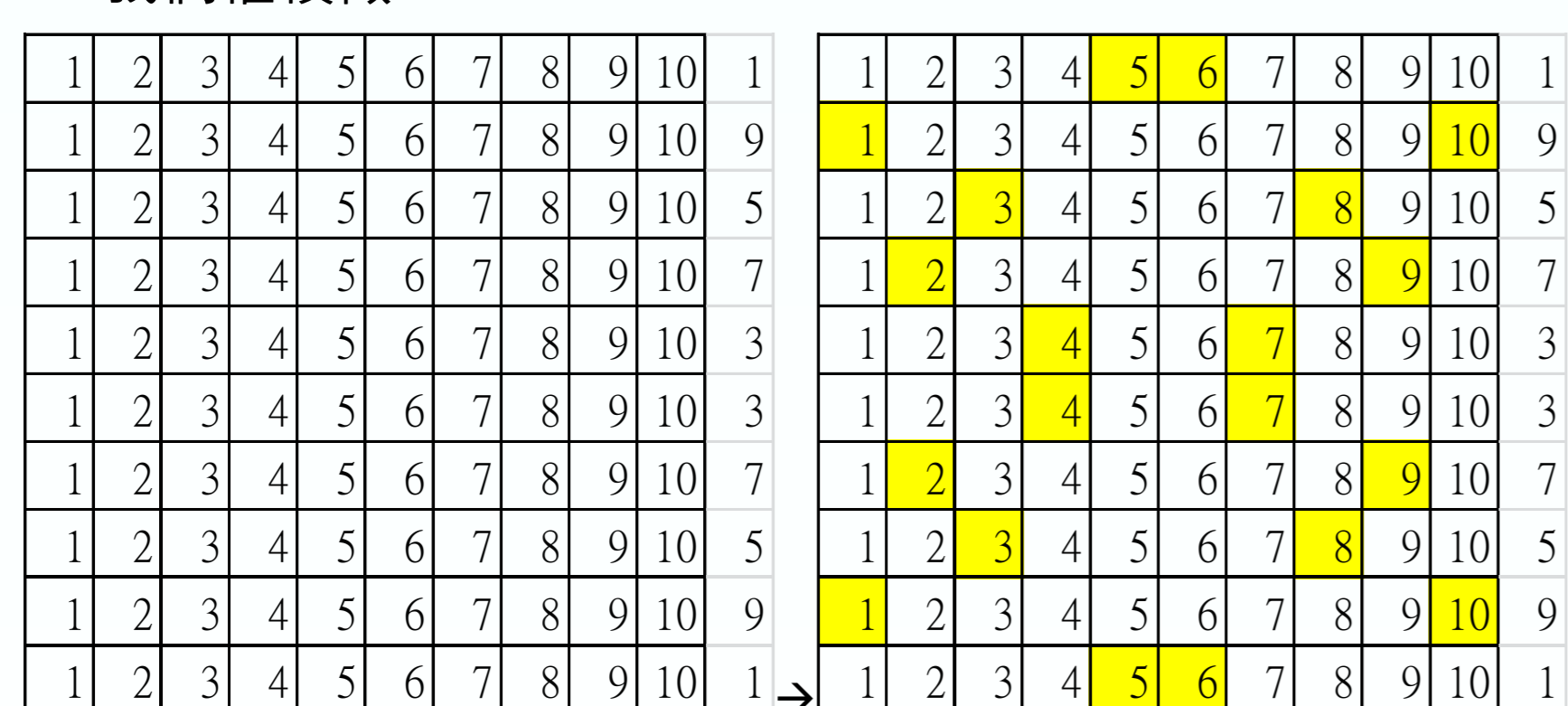
【發現】：

偶數的圖形皆為線對稱的圖形，所以相減的數列也呈現為對稱，以6×6為例，相減數列為1、5、3、3、5、1，填入的數字也為奇數數列1、3、5...，且如果按照順序會導出的圖形產生三點共線的圖形。所以我們猜測8×8相減數列為

1、5、7、3、3、7、5、1

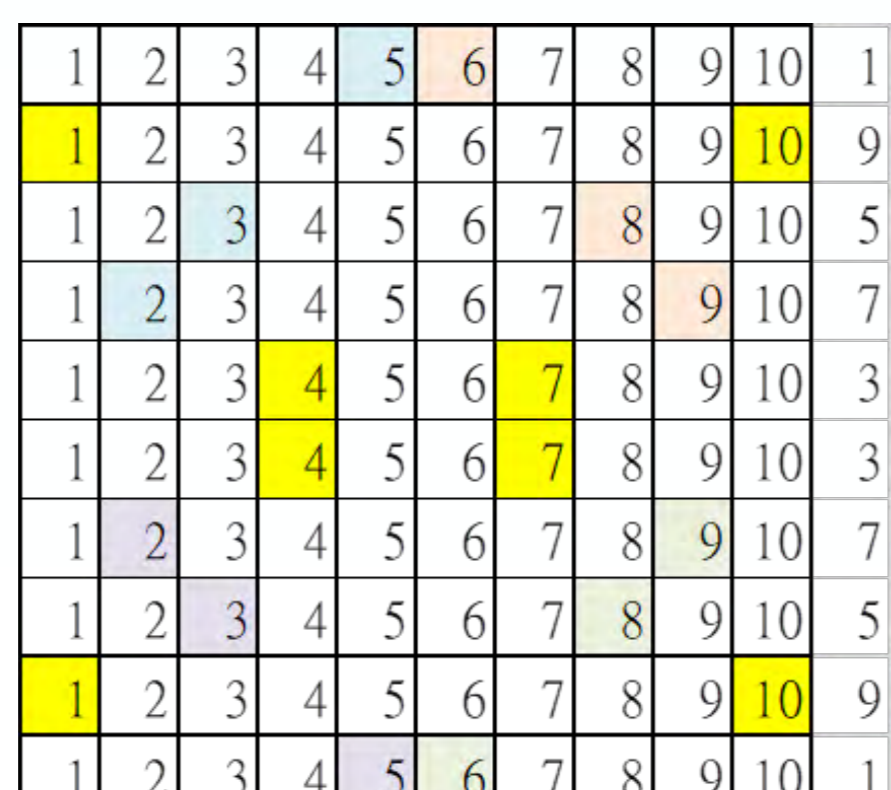


- 我們繼續做10×10



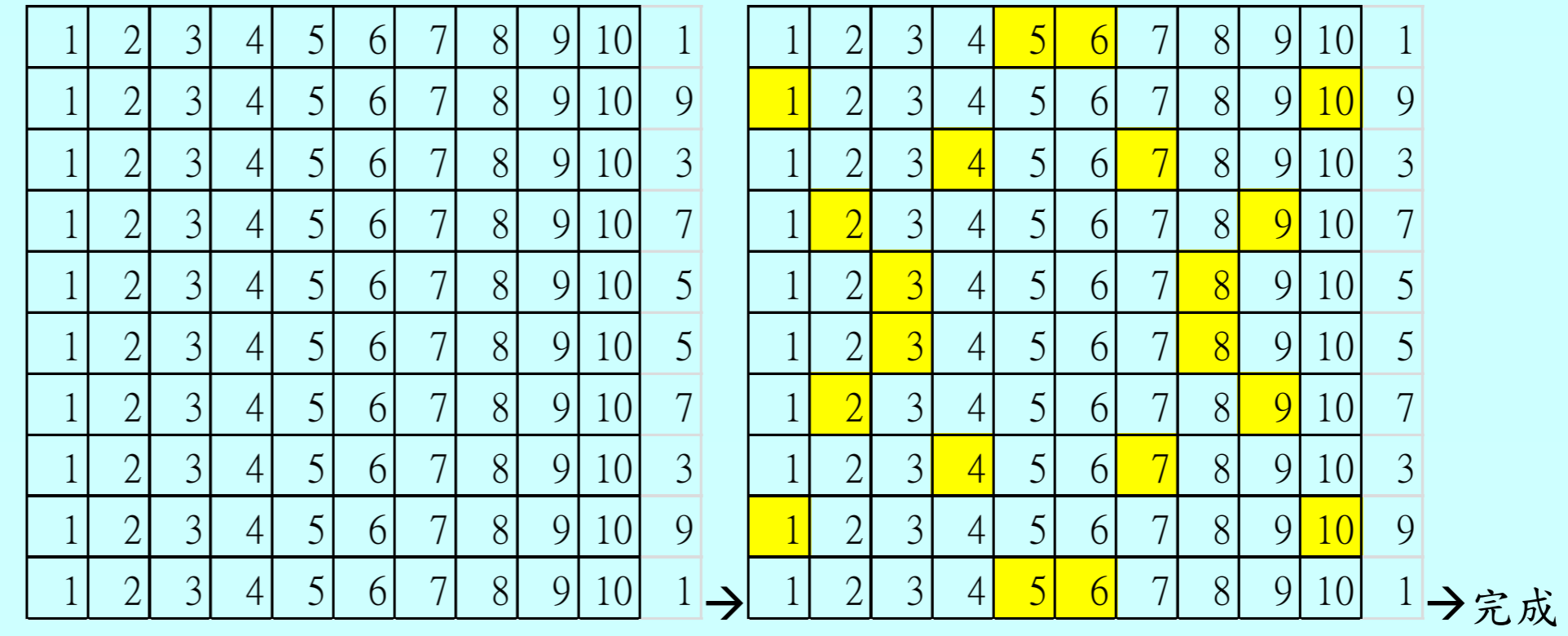
【發現】：

在這個圖形中我們發現有三點共線的狀況，我猜測相減的數列的排列可能有錯誤。

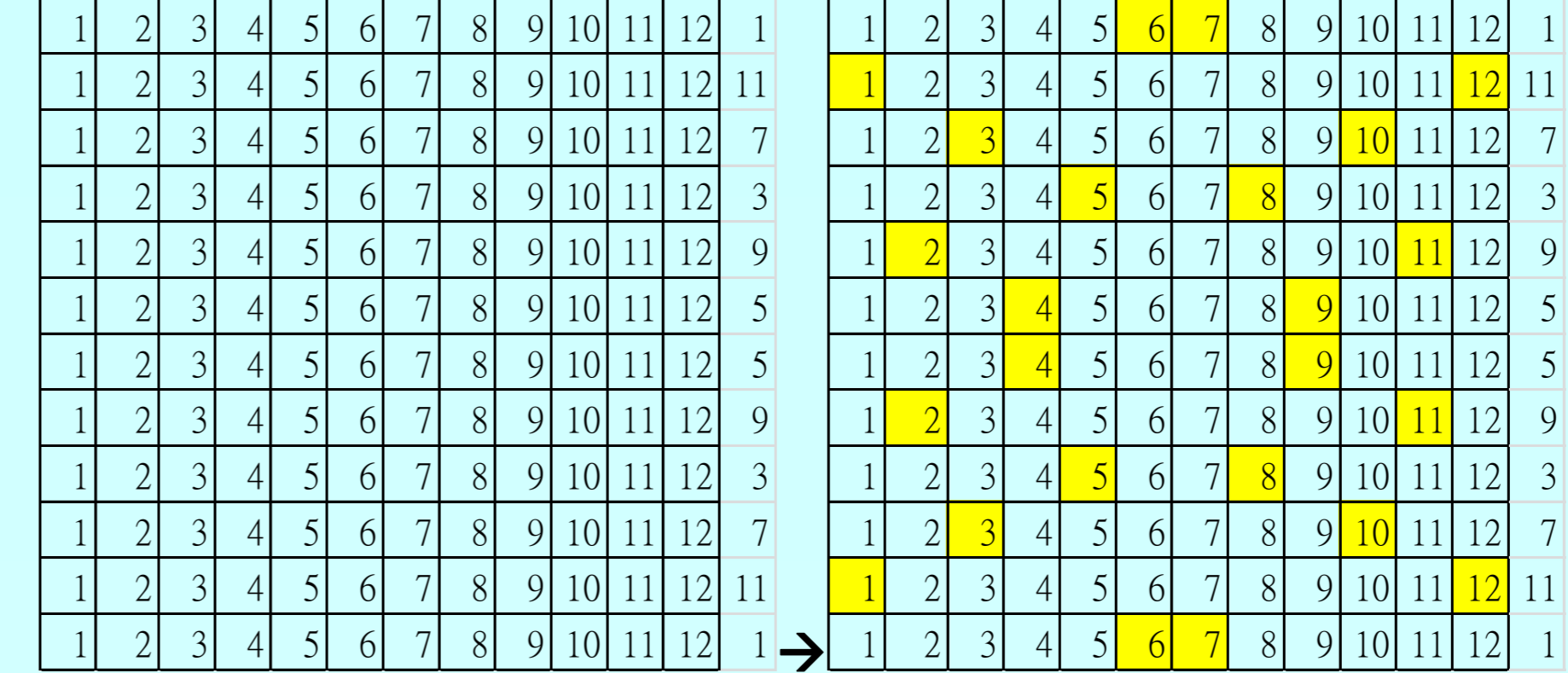


於是我們數列順序調整為

1、9、3、7、5、5、7、3、9、1，把5調整中間。

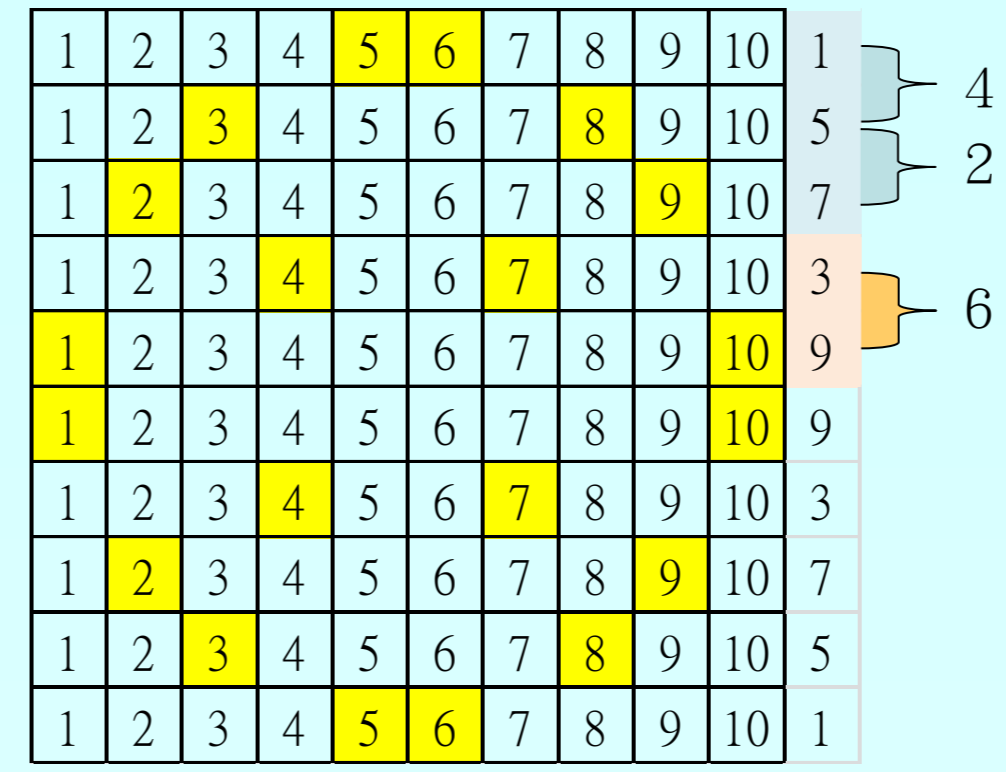


- 12X12

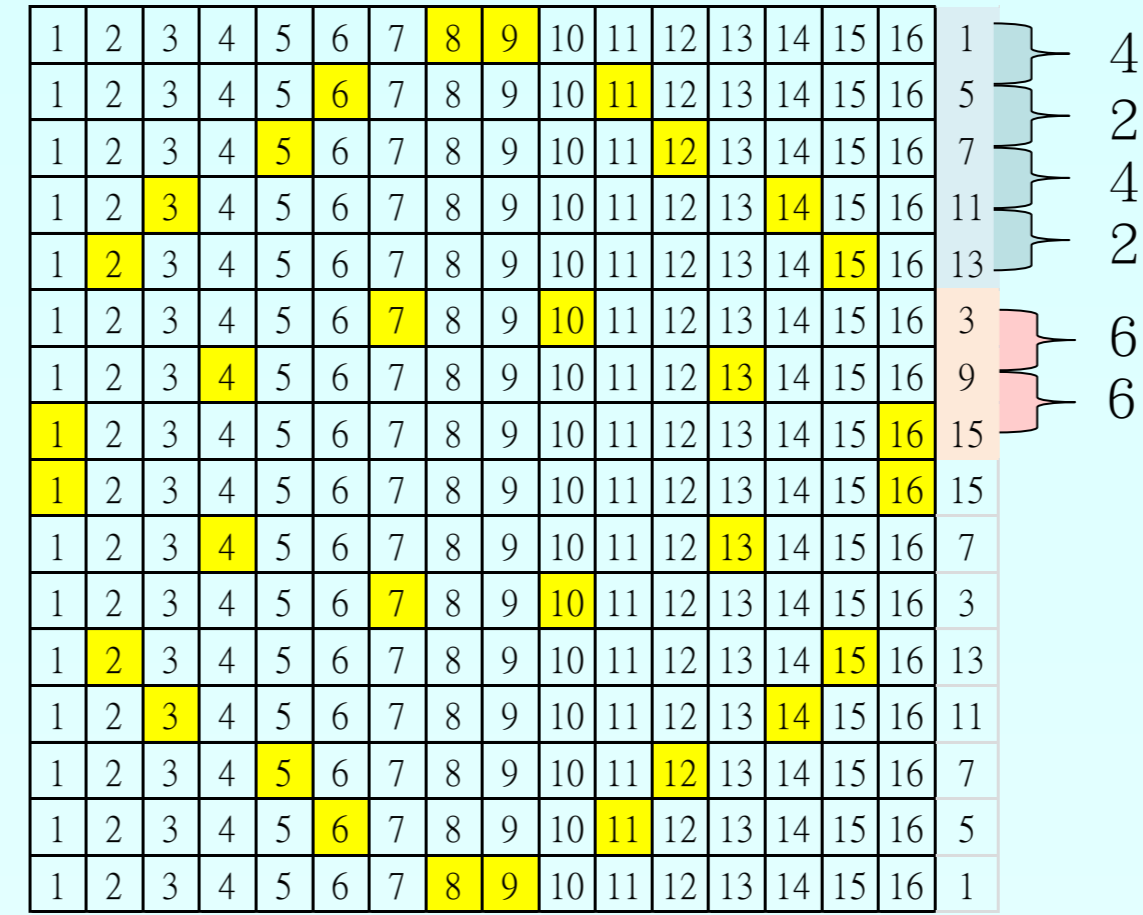


【發現4-2】：

在8×8的圖形有微笑圖形，但到10×10圖形轉變了，所以我們猜測是不是相減的數列有其他的可能，我找到10×10的笑臉的圖形相減的數列為1、5、7、3、9、9、3、7、5、1，

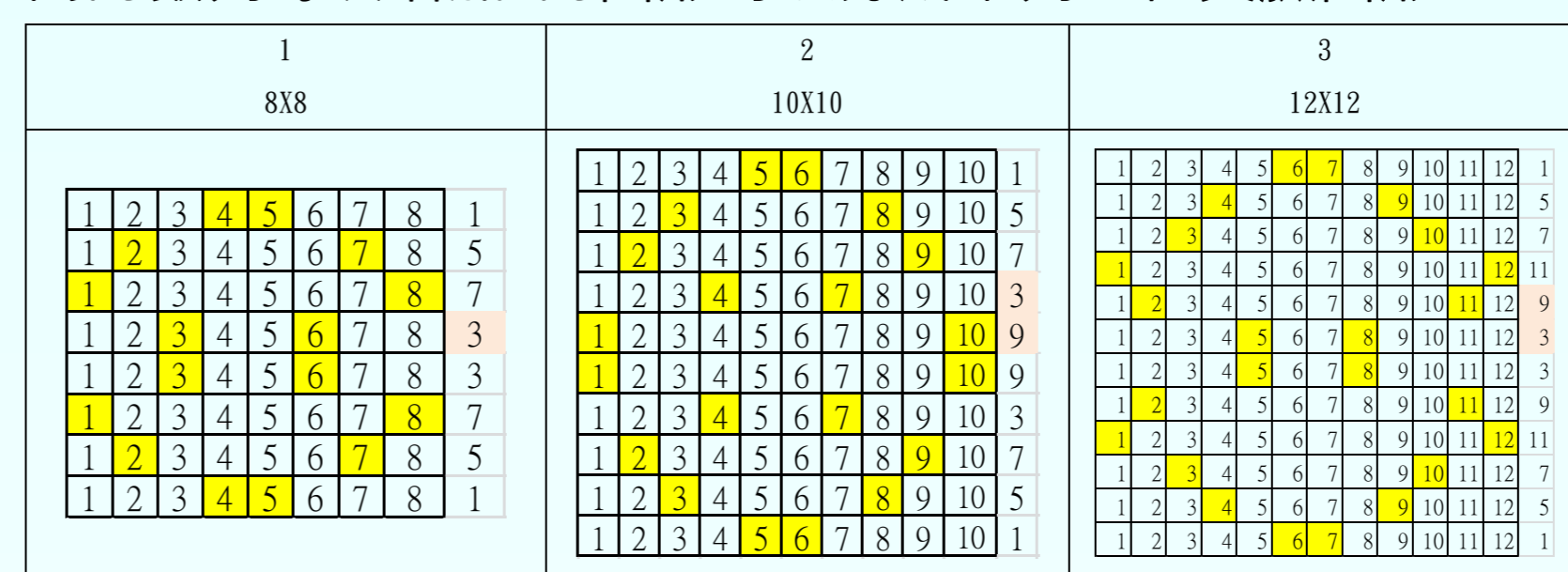


- 16 X 16



【結論4-2】：

- 觀察笑臉的圖形我們發現上半部的數列為1、5、7、11...第1個數字與第2個數字差4，第2個數字與第3個數字差2以此類推，中間的數列為3、9、15、21...每次增加6，但每個圖形的排列不同，所以中間是唯有變化的部分，下半部的數列與上半部相同。
- 中間的數列每次增加6的圖形可以分成下列三種笑臉圖形



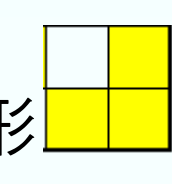
- N為偶數的方格中，我們發現變化比N為奇數還要大，但可以知道每一橫列相減的數必為奇數最大的奇數為N-1，且總合為 $\frac{N^2}{2}$

柒、研究結論

1. N×N的圖形再找出三點不共線的圖形，我們從2×2、3×3、4×4、5×5、6×6、7×7、8×8我們找到的解答中，一開始佔有角邊的答案比較多，當N

越來越大時，8放置角邊的答案就會變少。

2. N×N的圖形上格填入數字從1到N×N時，三點不共線的數字總和為 $\frac{N^2}{2}$

三、通常N的數字越小，圖形形成小三角形  的機率就越高，每一個圖形都只會有一到兩個連在一起的記號。

四、在N為偶數N×N的三點不共線一定會有線對稱圖形，但N為奇數時都不會出現對稱圖形。

五、在N為奇數時，N×N的表格中的數字總和為(1+N)×N，在N×N每一橫列兩數相減的總和為 2(N-1)。

六、觀察笑臉的圖形我們發現每一列相差的數值再相減，會得到上面的規律，所以10×10、16×16、22×22每差6就有相同的笑臉。

七、N為偶數的方格中，N×N的表格中的數字總和為(1+N)×N，每一橫列相減的數必為奇數最大的奇數為N-1，且總和為 $\frac{N^2}{2}$ 。

捌、研究建議

我們三點不共線的圖形時，在N的值小於4的時候很容易找出答案，隨著N的值增加，找出答案的困難度就增加，當我們使用數字後協助我們判別答案是否正確與縮小找的范围，本次我們只找到一些特殊圖案的圖案，利用數字才發現規律，未來我們想使用斜率或座標的方法找尋規律。

玖、參考資料

- 維基百科 三點不共線 https://en.wikipedia.org/wiki/No-three-in-line_problem
- Mathpickle <http://mathpickle.com/project/no-three-minarets-in-a-line/>