中華民國第58屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080409

步步回營-探討數字歸位的遊戲秘訣

學校名稱：高雄市苓雅區四維國民小學

作者：	指導老師：
小五 陳芯言	楊光昱 歐志昌

關鍵詞：撲克牌、Cycle、同餘

摘　　要

一、利用 Disjoint cycles 分析初始牌卡，定義符號$\oplus$作為 Cycle 拆解成數個 Cycles 的步驟合成，而**數字歸位則為拆解步驟的逆推**。發現特殊的 Cycle 類型，數字歸位有固定策略。

二、m-cycle 內部通路至少要$m-2$條才可能成功，且最少需要$m-1$步。

三、數字歸位可利用**<u>歸位判斷法</u>**、**<u>Cycle 拆解法</u>**、**<u>Cycles 的互補數歸位法</u>**，找出可能歸位方式。

四、判斷數字歸位的**最少步數**，步驟如下：

(一)以 Disjoint cycles 表示初始牌卡。

(二)檢查每個 Cycle 內部及 Cycles 間是否有通路連接。

若是，最少步數為$\underline{n-(\text{cycle數})}$。

若否，選擇合適的 Cycle **打破**，最少步數為$\underline{n-(\text{cycle數})+(\text{打破次數})\times 2}$。

五、n張牌卡數字歸位的方法不唯一，但**最少步數皆相同且介於$\underline{n-(\text{cycle數})}$到$\underline{n-1}$之間**。

六、**<u>選數控制歸位法</u>**是採**<u>大數先歸位</u>**原則，搭配**三個策略**，控制下一步欲選取的數。反覆操作，必可將數字歸位，但未必是最少步數。

壹、研究動機

五花八門的桌遊引起了一陣風潮，其中撲克牌是最常見且便宜的一種。許多撲克牌的遊戲，都必須兩個人以上才能玩，偶然看到這種「數字歸位」的遊戲，不受到人數限制，一個人閒暇時就可以自得其樂。看似簡單的遊戲規則，我實際操作後發現並不容易。因此，我想找出這遊戲所蘊藏的規則或解法，破解其中的奧妙。

貳、研究目的與問題

數字歸位遊戲是將 9 張隨機排列的數字卡歸位。由於情況太複雜，所以我從 3 張牌開始，再逐漸增加紙牌的張數，並將遊戲規則在相同的原則下跟著調整修改。我想找出破解此遊戲的方法，因此提出以下的研究問題：

一、初始牌卡是否能以符號簡化，以方便進行分析？

二、特殊的數字排列類型是否有可遵循的固定策略讓數字歸位？

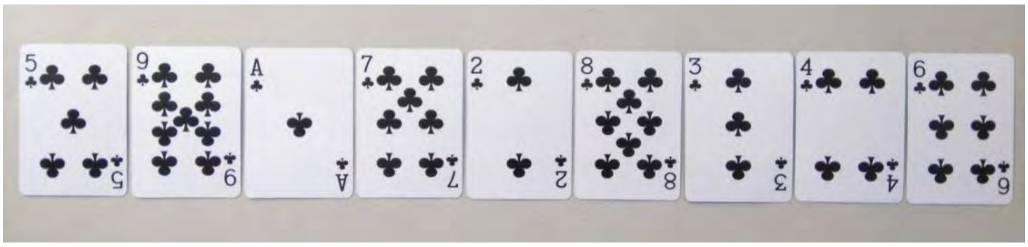
三、數字歸位是否有常用的技巧與特性？

四、如何判斷數字歸位的最少移動步數？

參、遊戲介紹與符號定義

一、原始的遊戲規則

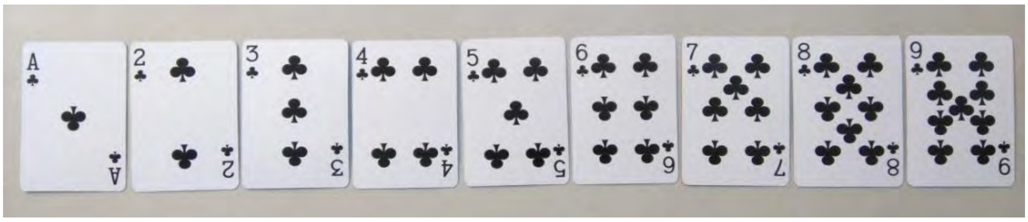
(一)將撲克牌取出同花色的點數 1~ 9 的紙牌，隨機將數字卡排成一列，如下圖：



(二)玩家從中取出兩張牌互換，則此兩張牌的數字和為下一步要選取兩張牌中的一張。例如：若選取 2 和 3 紙牌互換，則 2+3=5，所以下一步一定要移動 5 的紙牌。

(三)若所取互換的兩張牌，數字和大於 9，則十位數加個位數的和為下一步必定要移動的牌。例如：若選取點數 4 和 8 的紙牌互換，則 4+8=12，而 1+2=3，所以下一步一定要移動點數 3 的紙牌。

(四)依照上述規則，持續做兩張牌互換，直到九張牌依照 1,2,3,4,5,6,7,8,9 由小而大順序排列，稱為所有數字歸位或回家，即為過關。如下圖：



二、遊戲規則修改說明

因為 9 張紙牌隨機排列難以看出規律性，所以我從 3 張牌開始討論，再逐漸增加紙牌張數。假設紙牌張數為 n ，遊戲規則改變如下：

(一)將一副撲克牌中，取出同花色的點數 $1\sim n$ 的紙牌，隨機將數字卡排成一列。

(二)玩家從中取出兩張牌互換，則此兩張牌的數字和為下一步要選取兩張牌中的一張。若互換的兩張牌數字和大於 n ，則將數字和減 n 做為下一步必定要移動的牌。

(三)依照上述規則，持續做兩張牌互換，直到 n 張牌依照 $1,2,3,\cdots,n$ 由小而大順序排列，稱為所有數字歸位或回家，即為過關。

[註]原始遊戲規則中，9 張紙牌若所取互換的兩張牌，數字和大於 9，則十位數加個位數的和為下一步必定要移動的牌。亦即將數字和減 9 做為下一步必定要移動的牌。

三、名詞與符號的定義

(一) **Cycle 表示法**：數字排列的位置變化可以用 Cycle 表示法。

設 a,b,c 為正整數且 $a<b<c$ ，若排列次序為 bca ，表示 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ，

即將位置 $a\to$ 數字 b ，位置 $b\to$ 數字 c ，位置 $c\to$ 數字 a ，記作 abc 為 3-cycle。

例如：初始牌卡 312，以(132)表示。初始牌卡 2143，以(12)(34)表示。

(二) **Disjoint Cycles**：若 Cycle 表示法內無重複的數字，則稱為 Disjoint cycles。

例如：當 $n=5$ 時，初始牌卡 35412，Disjoint cycles 為(134)(25)表示。

(三)**還原數**：數字 $1\sim n$ 隨機排列，若選取 n 和任意數 a 互換，數字和必會大於 n ，數字和減 n 後必為 a 。因此， a 為下一步必定要移動的數，所以 n 稱為還原數。

(四)**Cycles 的合成符號⊕**：由於 Cycle 表示數字的位置變化，可以拆解為數個 Cycles 的合成，定義符號⊕作為**由左而右**的步驟合成。

例如：初始牌卡 35412 可拆解成(25)⊕(34)⊕(13)，表示

先(25)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ，再(34)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ，最後(13)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。

(五)**互補數**：數字 $1\sim n$ 排列，若 $a+b=n$ ，則稱 a 和 b 為互補數，而 n 的互補數為 n 。

(六)**通路**：當 Cycle 內部中，某兩數的和也在 Cycle 內部時，則視為一條內部通路。

當兩個 Cycles 間，若某個 Cycle 內兩數的和跳至另一個 Cycle，則稱此兩個 Cycles 間有外部通路。

例如：Disjoint cycles 為(134)(25)時，

(134)內部通路有 1+3=4、(25)內部通路有 2+5≡2(mod 5)。

而 1+4=5，3+4≡2(mod 5)，則(134)與(25)間有外部通路。

肆、研究過程

一、三張牌

(一)若已有一張牌歸位，則直接將剩餘兩張牌互換，只需 1 步。

例如：(1)(23)表示 132 (23 換)→123。

(二)若三張牌均未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
231	(123)	231→213→123 或 231→132→123	2
312	(132)=(213)	312→213→123 或 312→321→123	2

發現 當 1~3 排列為 3-cycle 時，數字歸位的方式不唯一且最少皆需要 2 步。

> [性質 1] 若$1\le a<b<c<n$ ，3-cycle 有(abc) 、(acb)兩種類型；
> 而類型(abc) 、(bca)與(cab)是相同的排列方式。

[證明]

3-cycle 有$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ 、$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ ，即(abc) 、(acb)兩種類型；

而類型(abc) 、(bca)與(cab)表示$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ，是相同的排列方式。

二、四張牌

(一)若已有兩張牌歸位，則直接將剩餘兩張牌互換，只需 1 步。

(二)若已有一張牌歸位，則剩下三張牌未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
1342	(1)(234)	1342→1324→1234	2
1423	(1)(243)	1423→1324→1234	2
3241	(2)(134)	3241→3214→1234 或 3241→1243→1234	2
4213	(2)(143)	4213→3214→1234 或 4213→4231→1234	2
2431	(3)(124)	2431→2134→1234	2
4132	(3)(142)	4132→2134→1234	2
2314	(4)(123)	2314→1324→1234	2
3124	(4)(132)	3124→3214→1234	2

發現 1 因為只剩三張牌未歸位，若還原數 4 未歸位，先由 4 著手歸位。

發現 2 若未歸位數字為a,b,c且$a+b\equiv c\ (\text{mod}\,4)$ ，則先將a,b互換，下步便可移動 c 。

> [性質 2] 當 3-cycle 為(abn)或(anb)類型時，其中$1\le a<b<n$且n是還原數，
> 則先從還原數n歸位著手，數字歸位需要 2 步。

[證明]

類型(abn)時，將 $bna\to ban\to abn$，需要 2 步。

類型(anb)時，將 $nab\to ban\to abn$，需要 2 步。

[性質 3] 當 3-cycle 為 (abc) 或 (acb) 類型時，其中 $1 \le a < b < c < n$ 且 n 是還原數，
若 $a+b \equiv c \pmod{n}$ 、 $a+c \equiv b \pmod{n}$ 或 $b+c \equiv a \pmod{n}$ ，則數字歸位需 2 步。

[證明]

當類型 (abc) 時，若 $a+b \equiv c \pmod{n}$ ，將 $bc\boxed{a} \to a\boxed{c}b \to abc$，需要 2 步。

若 $a+c \equiv b \pmod{n}$ ，將 $b\boxed{c}a \to b\boxed{a}c \to abc$，需要 2 步。

若 $b+c \equiv a \pmod{n}$ ，將 $\boxed{b}ca \to cb\boxed{a} \to abc$，需要 2 步。

當類型 (acb) 時，若 $a+b \equiv c \pmod{n}$ ，將 $ca\boxed{b} \to \boxed{c}ba \to abc$，需要 2 步。

若 $a+c \equiv b \pmod{n}$ ，將 $c\boxed{a}b \to ac\boxed{b} \to abc$，需要 2 步。

若 $b+c \equiv a \pmod{n}$ ，將 $\boxed{c}ab \to b\boxed{a}c \to abc$，需要 2 步。

(三)若四張牌均未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
2143	**(12)(34)**	2143→1243→1234 (1+2=3)	**2**
2341	(1234)	2341→2314→1324→1234 (還原數 4 著手) 2341→3241→1243→1234 (檢查 2+3≡1)	3
2413	(1243)	2413→2314→3214→1234 (還原數 4 著手) 2413→2431→2134→1234 (3 歸位，3+1=4) 2413→3412→1432→1234 (檢查 2+3≡1) 2413→1423→1324→1234	3
3142	(1342)	3142→3124→3214→1234 (還原數 4 著手) 3142→3124→2134→1234 (還原數 4 著手) 3142→1342→1324→1234 (1 歸位，1+3=4) 3142→2143→1243→1234 (檢查 2+3≡1) 3142→3241→1243→1234 (檢查 1+2=3)	3
3412	**(13)(24)**	3412→1432→1234	**2**
3421	(1324)	3421→3124→3214→1234 (還原數 4 著手) 3421→1423→1324→1234 (1 歸位，1+3=4) 3421→3412→1432→1234 (檢查 1+2=3) 3421→2431→2134→1234	3
4123	(1432)	4123→3124→2134→1234 (還原數 4 著手) 4123→4213→4231→1234 (檢查 1+2=3)	3
4312	(1423)	4312→2314→3214→1234 (還原數 4 著手) 4312→2314→1324→1234 (還原數 4 著手) 4312→4132→2134→1234 (3 歸位，3+1=4) 4312→4321→4231→1234 (檢查 1+2=3) 4312→4213→4231→1234	3
4321	**(14)(23)**	4321→4231→1234	**2**

發現 1 **當 1~4 排列為 4-cycle 時，數字歸位的方式不唯一且最少皆需要 3 步。**

發現 2 **當 Disjoint cycles 為(12)(34)、(13)(24)、(14)(23)時，先動沒有還原數 4 的 Cycle，則最少需要 2 步。**

[性質 4] 當遇到類型 $(ab)(cn)$ 時，其中 $1 \le a,b,c < n$ 且 n 是還原數，
若 $a+b \equiv c \pmod{n}$ 或 $a+b=n$，則需要 2 步可以將數字歸位。

[證明]

$(ab)(cn)$ 表示 $\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ b & a & n & c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ b & n & a & c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} c & a & b & n \\ n & b & a & c \end{pmatrix}$，以 $\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ b & a & n & c \end{pmatrix}$ 為例，

若 $a+b \equiv c \pmod{n}$，將 $b\boxed{a}nc \to abn\boxed{c} \to abcn$，需要 2 步。

若 $a+b=n$，將 $b\boxed{a}nc \to ab\boxed{n}c \to abcn$，需要 2 步。

其餘情況同理可證。

[討論] $n=3$，觀察 Cycle 拆解與數字歸位的關係

1. 將(123)拆解為(12)⊕(13) 或 (23)⊕(12)
   歸位(13)→(12)，即 2$\boxed{3}$1→2$\boxed{1}$3→123　　或 歸位(12)→(23)，即 23$\boxed{1}$→1$\boxed{3}$2→123。
2. 將(132)拆解為(12)⊕(23) 或 (13)⊕(12)
   歸位(23)→(12)，即 $\boxed{3}$12→$\boxed{2}$13→123　　或 歸位(12)→(13)，即 31$\boxed{2}$→$\boxed{3}$21→123。

發現 1 由於 Cycle 表示數字的位置變化，可以拆解為數個 Cycles 的步驟合成。
因此，要將起始牌卡的數字歸位，步驟為 Cycle 拆解步驟的「逆推」。

發現 2 由於 Cycle 的拆解方式有許多種，但是逆推時要符合數字歸位遊戲的規則，
則要考慮下一步的數字必須避開已經歸位的數字，才能節省歸位的步數。

[討論] $n=4$ 的 4-cycle。**[Cycle 前方的符號相同者，代表 cycle 排列恰為互補數，歸為同組。]**

★(1234)= (2341) (1234) =(123)⊕(14) = (23)⊕(12)⊕(14) (1234) =(134)⊕(23) = (34)⊕(13)⊕(23)	★(1432)=(3214)= (2143) (1432)=(132)⊕(34) = (12)⊕(23)⊕(34) (1432)=(143)⊕(12) = (14)⊕(13)⊕(12)
◆(1243)=(3124) (1243)=(123)⊕(34) = (13)⊕(23)⊕(34) (1243)=(243)⊕(12)=(23)⊕(43)⊕(12) (1243)=(124)⊕(13) = (12)⊕(14)⊕(13) (1243)=(24)(13)⊕(23) = (24)⊕(13)⊕(23)	◆(1324) (1324)=(132)⊕(14) = (13)⊕(12)⊕(14) (1324)=(124)⊕(32)=(12)⊕(41)⊕(32) (1324)=(243)⊕(13) = (23)⊕(34)⊕(13) (1324)=(13)(24)⊕(12)= (24)⊕(13)⊕(12)
●(1423)=(2314) (1423)=(123)⊕(24) = (13)⊕(23)⊕(24) (1423)= (123)⊕(24)= (23)⊕(12)⊕(24) (1423)=(142)⊕(13) = (12)⊕(24)⊕(13) (1423) =(143)⊕(23) =(14)⊕(13)⊕(23) (1423)=(14)(23)⊕(12) = (14)⊕(23)⊕(12)	●(1342)=(2134) (1342)=(132)⊕(24) = (13)⊕(12)⊕(24) (1342)=(132)⊕(24) = (12)⊕(23)⊕(24) (1342)=(234)⊕(13) = (23)⊕(24)⊕(13) (1342)=(134)⊕(12) = (34)⊕(13)⊕(12) (1342)=(12)(34)⊕(23) = (34)⊕(12)⊕(23)

發現 將 1~4 排列為 4-cycle 的 6 種情況，依據遊戲規則作 Cycle 拆解，比較後發現可以
分成三組★(1234)與(3214)，◆(3124)與(1324)，●(2314)與(2134)，
每組的 Cycle 排列恰為互補數，而 Cycle 的拆解也恰為互補數。

[性質 5] Cycle 拆解法

設 m 為正整數且 $3 \le m \le n$，$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{m-1}a_m)$ 拆解為 $(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_m)\oplus(a_ia_{i+1})$。

[證明]

$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{m-1}a_m)$

表示 $a_1\to a_2$，$a_2\to a_3$，$\cdots$，$a_{i-1}\to a_i$，$a_i\to a_{i+1}$，$\cdots$，$a_{m-1}\to a_m$，$a_m\to a_1$。

$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_m)$ 表示 $a_1\to a_2$，$a_2\to a_3$，$\cdots$，$\boxed{a_{i-1}\to a_{i+1}}$，$\cdots$，$a_{m-1}\to a_m$，$a_m\to a_1$

且 (a_ia_{i+1}) 表示 $a_i\to a_{i+1}$，$\boxed{a_{i+1}\to a_i}$

合成後 $a_1\to a_2$，$a_2\to a_3$，$\cdots$，$\boxed{a_{i-1}\to a_i}$，$a_i\to a_{i+1}$，$\cdots$，$a_{m-1}\to a_m$，$a_m\to a_1$。

所以 $(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{m-1}a_m)$=$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_m)\oplus(a_ia_{i+1})$，故得證。

[性質 6] 設 n 正整數且 $n\ge 2$，當數字 $1\sim n$ 排列為 n-cycle$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)$時，

則數字歸位需要 $n-1$ 步。

[證明] 因為 $(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)$ 可拆解為 $(a_1a_2\cdots a_{n-1})\oplus(a_na_1)$，而歸位為 Cycle 拆解法的逆推，

此時 a_n **已經歸位，下一步須選** $a_1+a_n\equiv a_i\ (\mathrm{mod}\ n)$，

再將 $(a_1a_2\cdots a_{n-1})$ 拆解為 $\boxed{(a_1\cdots a_{i-2}a_i\cdots a_{n-1})\oplus(a_{i-1}a_i)}$ **或** $\boxed{(a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n-1})\oplus(a_ia_{i+1})}$，

選擇時，**<u>需避開數字和出現已經歸位的數字</u>，做為下一步驟選取的數字**，

以此原則反覆進行下去，最後拆解為 $n-1$ 個 2-cycle 的步驟合成，

所以數字 $1\sim n$ 排列為 n-cycle$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)$ 數字歸位需要 $n-1$ 步。

[性質 7]設 m 正整數且 $2\le m\le n$，若 m-cycle 存在不同的數字歸位方式，

則最少皆需要 $m-1$ 步。

[說明]

若 m-cycle$(a_1a_2\cdots a_m)$ 有兩種以上不同的數字歸位方式，

設 $(a_1a_2\cdots a_m)$=$(a_ia_j)\oplus(a_ka_l)\oplus\cdots\oplus(a_oa_p)$，共 $m-1$ 個 2-cycle 合成，

或 $(a_1a_2\cdots a_m)$=$(a_qa_r)\oplus(a_sa_t)\oplus\cdots\oplus(a_ua_v)$，共 $m-1$ 個 2-cycle 合成，

所以若 m-cycle 存在不同的數字歸位方式，最少皆需要 $m-1$ 步。

三、五張牌

(一)若已有三張牌歸位，則直接將剩餘兩張紙牌互換，只需 1 步。

(二)若已有兩張牌歸位，則剩下三張牌未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
12453	(1)(2)(345)	12453→12435→12345	2
12534	(1)(2)(354)	12534→12435→12345	2
14352	(1)(3)(245)	14352→14325→12345	2
15324	(1)(3)(254)	15324→14325→12345	2
13542	(1)(4)(235)	13542→13245→12345	2
15243	(1)(4)(253)	15243→13245→12345	2
13425	(1)(5)(234)	13425→14325→12345	2
14235	(1)(5)(243)	14235→13245→12345	2
42351	(2)(3)(145)	42351→42315→12345	2
52314	(2)(3)(154)	52314→42315→12345	2
32541	(2)(4)(135)	32541→32145→12345	2
52143	(2)(4)(153)	52143→32145→12345	2
32415	(2)(5)(134)	32415→12435→12345	2
42135	(2)(5)(143)	42135→42315→12345	2
25341	(3)(4)(125)	25341→21345→12345	2
51342	(3)(4)(152)	51342→21345→12345	2
24315	(3)(5)(124)	24315→42315→12345	2
41325	(3)(5)(142)	41325→21345→12345	2
23145	(4)(5)(123)	23145→13245→12345	2
31245	(4)(5)(132)	31245→32145→12345	2

(三)若已有一張牌歸位，則剩下四張牌未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
13254	(1)(23)(45)	13254→12354→12345	2
13452	(1)(2345)	13452→12453→12435→12345 (2 歸位，3+2=5)	3
13524	(1)(2354)	13524→12534→12435→12345 (2 歸位，3+2=5)	3
14253	(1)(2453)	14253→14352→14325→12345 (3 歸位，2+3=5)	3
14523	(1)(24)(35)	14523→34521→32541→32145→12345 (打破 135) 14523→13524→12534→12435→12345 (打破 2435)	4
14532	(1)(2435)	14532→13542→13245→12345 (檢查 4+3=7≡2)	3
15234	(1)(2543)	15234→14235→13245→12345 (還原數歸位) 15234→15324→14325→12345 (3 歸位，2+3=5)	3
15423	(1)(2534)	15423→13425→14325→12345 (還原數歸位)	3
15432	(1)(25)(34)	15432→15342→12345 (3+4=7≡2)	2
32154	(2)(13)(45)	32154→12354→12345 (檢查 1+3=4)	2

32451	(2)(1345)	32451→32415→12435→12345 (還原數歸位)	3
32514	(2)(1354)	32514→32541→32145→12345 (4 歸位，4+1=5)	3
42153	(2)(1453)	42153→12453→12435→12345 (1 歸位，1+4=5)	3
42513	(2)(14)(35)	42513→12543→12345 (檢查 1+4=5)	2
42531	(2)(1435)	42531→12534→12435→12345 (1 歸位，1+4=5)	3
52134	(2)(1543)	52134→52314→52341→12345 (檢查 1+3=4)	3
52413	(2)(1534)	52413→52143→32145→12345 (4 歸位，4+1=5)	3
52431	(2)(15)(34)	52431→51432→51342→21345→12345 (打破 125)	4
21354	(3)(12)(45)	21354→21453→12453→12435→12345 (打破 345)	4
24351	(3)(1245)	24351→42351→12354→12345 (檢查 2+4=6≡1)	3
25314	(3)(1254)	25314→25341→21345→12345 (4 歸位，4+1=5)	3
41352	(3)(1452)	41352→14352→14325→12345 (1 歸位，1+4=5)	3
45312	(3)(14)(25)	45312→15342→12345 (1+4=5)	2
45321	(3)(1425)	45321→15324→14325→12345 (1 歸位，1+4=5)	3
51324	(3)(1542)	51324→41325→21345→12345 (還原數歸位)	3
54312	(3)(1524)	54312→24315→42315→12345 (還原數歸位)	3
54321	(3)(15)(24)	54321→52341→12345 (2+4=6≡1)	2
21543	(4)(12)(35)	21543→12543→12345 (1+2=3)	2
23541	(4)(1235)	23541→23145→13245→12345 (還原數歸位)	3
25143	(4)(1253)	25143→15243→13245→12345 (2 歸位，2+1=3)	3
31542	(4)(1352)	31542→31245→32145→12345 (還原數歸位)	3
35142	(4)(13)(25)	35142→35241→25341→21345→12345 (打破 1235)	4
35241	(4)(1325)	35241→31245→32145→12345 (還原數歸位)	3
51243	(4)(1532)	51243→21543→12543→12345 (檢查 5+2=7≡2)	3
53142	(4)(1523)	53142→23145→13245→12345 (還原數歸位)	3
53241	(4)(15)(23)	53241→52341→12345 (2+3=5)	2
23415	(5)(1234)	23415→13425→14325→12345 (2 歸位，2+1=3)	3
21435	(5)(12)(34)	21435→12435→12345 (3+4=7=2)	2
24135	(5)(1243)	24135→23145→13245→12345 (檢查 4+3=7≡2)	3
31425	(5)(1342)	31425→13425→14325→12345 (1 歸位，3+1=4)	3
34125	(5)(13)(24)	34125→14325→12345 (3+1=4)	2
34215	(5)(1324)	34215→14235→13245→12345 (1 歸位，3+1=4)	3
41235	(5)(1432)	41235→31245→32145→12345 (檢查 4+3=7≡2)	3
43125	(5)(1423)	43125→23145→13245→12345 (檢查 4+2=6≡1)	3
43215	(5)(14)(23)	43215→41235→31245→32145→12345 (打破 1234)	4

發現 1 Disjoint cycles 為 $(a)(bcde)$ 的類型時，最少需要 3 步。

發現 2 Disjoint cycles 為 $(a)(bc)(de)$ 的類型時，需先檢查 $b+c$ ，$d+e$ 的值；當 (bc) 與 (de) 有通路時，則最少需 2 步；否則須打破 $(bc)(de)$ ，最少需 4 步。

[性質 8] 當遇到類型$(ab)(cd)$時，其中$1\le a<b<n$，$1\le c<d<n$且n是還原數，若$a+b\equiv c \pmod{n}$或$a+b\equiv d \pmod{n}$，則數字歸位需要 2 步。

[證明]

類型$(ab)(cd)$表示$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} c & a & d & b \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} c & a & b & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$等情況，取第一種$badc$為例，

若$a+b\equiv c \pmod{n}$，將 $badc \to abd\boxed{c} \to abcd$，需要 2 步。

若$a+b\equiv d \pmod{n}$，將 $badc \to ab\boxed{d}c \to abcd$，需要 2 步。

其餘情況同理可證。

[性質 9]當遇到類型$(abcn)$，$(abnc)$或$(anbc)$時，其中$1\le a<b,c<n$且n是還原數，若$a+b\equiv c \pmod{n}$，$b+c\equiv a \pmod{n}$或$a+c\equiv b \pmod{n}$，則數字歸位最少需 3 步。

[註]若 n 的右側數字恰為條件的「數字和」，則從條件著手，否則皆從 n 歸位開始。

[證明]

類型$(abcn)$表示$\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ b & c & n & a \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ b & n & c & a \end{pmatrix}$，

1. 若$a+b\equiv c \pmod{n}$

   將 $bc\boxed{n}a \to bc\boxed{a}n \to a\boxed{c}bn \to abcn$ 或 $b\boxed{n}ca \to b\boxed{a}cn \to ab\boxed{c}n \to acbn$，需要 3 步。

2. 若$b+c\equiv a \pmod{n}$

   將 $\boxed{b}cna \to cbn\boxed{a} \to cb\boxed{a}n \to abcn$ 或 $\boxed{b}nca \to cnb\boxed{a} \to c\boxed{a}bn \to acbn$，需要 3 步。

3. 若$a+c\equiv b \pmod{n}$

   將 $bc\boxed{n}a \to b\boxed{c}an \to \boxed{b}acn \to abcn$ 或 $b\boxed{n}ca \to ba\boxed{c}n \to \boxed{b}can \to acbn$，需要 3 步。

類型$(abnc)$表示$\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ b & n & a & c \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ b & a & n & c \end{pmatrix}$，

1. 若$a+b\equiv c \pmod{n}$

   將 $bnac \to anb\boxed{c} \to a\boxed{c}bn \to abcn$ 或 $banc \to abn\boxed{c} \to ab\boxed{c}n \to acbn$，需要 3 步。

2. 若$b+c\equiv a \pmod{n}$

   將 $b\boxed{n}ac \to b\boxed{c}an \to cb\boxed{a}n \to abcn$ 或 $ba\boxed{n}c \to ba\boxed{c}n \to c\boxed{a}bn \to acbn$，需要 3 步。

3. 若$a+c\equiv b \pmod{n}$

   將 $b\boxed{n}ac \to b\boxed{c}an \to \boxed{b}acn \to abcn$ 或 $ba\boxed{n}c \to ba\boxed{c}n \to \boxed{b}can \to acbn$，需要 3 步。

類型$(anbc)$表示$\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ n & c & a & b \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ n & a & c & b \end{pmatrix}$，

1. 若$a+b\equiv c \pmod{n}$

   將 $\boxed{n}cab \to \boxed{b}can \to a\boxed{c}bn \to abcn$ 或 $\boxed{n}acb \to \boxed{b}acn \to ab\boxed{c}n \to acbn$，需要 3 步。

2. 若$b+c\equiv a \pmod{n}$

   將 $\boxed{n}cab \to \boxed{b}can \to cb\boxed{a}n \to abcn$ 或 $\boxed{n}acb \to \boxed{b}acn \to c\boxed{a}bn \to acbn$，需要 3 步。

3. 若$a+c\equiv b \pmod{n}$

   將 $n\boxed{c}ab \to nac\boxed{b} \to \boxed{b}acn \to abcn$ 或 $na\boxed{c}b \to nca\boxed{b} \to \boxed{b}can \to acbn$，需要 3 步。

[性質 10] 當遇到類型 $(abcn)$，$(abnc)$ 或 $(anbc)$ 時，其中 $1 \le a < b, c < n$ 且 n 是還原數，若 $a+b=n$ 或 $b+c=n$ 或 $a+c=n$，則將數字歸位最少步數，列表如下：

類型	$(abcn)$	$(abnc)$	$(anbc)$
$a+b=n$	3 步	3 步	無法判斷
$b+c=n$	3 步	無法判斷	3 步
$a+c=n$	無法判斷	3 步	3 步

[證明]

1. 類型 $(abcn)$ 表示 $\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ b & c & n & a \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ b & n & c & a \end{pmatrix}$，

   若 $a+b=n$，將 $bcna \to acnb \to acbn \to abcn$ 或 $bnca \to ancb \to abcn \to acbn$，需 3 步。

   若 $b+c=n$，將 $bcna \to cbna \to cban \to abcn$ 或 $bnca \to cnba \to cabn \to acbn$，需 3 步。

   若 $a+c=n$，將 $bcna \to banc \to bacn \to$? 或 $bnca \to bnac \to bcan \to$? 無法判斷

2. 類型 $(abnc)$ 表示 $\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ b & n & a & c \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ b & a & n & c \end{pmatrix}$，

   若 $a+b=n$，將 $bnac \to anbc \to acbn \to abcn$ 或 $banc \to abnc \to abcn \to acbn$，需 3 步。

   若 $b+c=n$，將 $bnac \to cnab \to cban \to$? 或 $banc \to canb \to cabn \to$? 無法判斷

   若 $a+c=n$，將 $bnac \to bnca \to bacn \to abcn$ 或 $banc \to bcna \to bcan \to acbn$，需 3 步。

3. 類型 $(anbc)$ 表示 $\begin{pmatrix} a & b & c & n \\ n & c & a & b \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a & c & b & n \\ n & a & c & b \end{pmatrix}$，

   若 $a+b=n$，將 $ncab \to ncba \to acbn \to$? 或 $nacb \to nbca \to abcn \to$? 無法判斷

   若 $b+c=n$，將 $ncab \to nbac \to cban \to abcn$ 或 $nacb \to nabc \to cabn \to acbn$，需 3 步。

   若 $a+c=n$，將 $ncab \to nacb \to bacn \to abcn$ 或 $nacb \to ncab \to bcan \to acbn$，需 3 步。

(四)若五張牌均未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
21453	(12)(345)	21453→21435→21345→12345	3
21534	(12)(354)	21534→21435→21345→12345	3
23154	(123)(45)	23154→13254→12354→12345	3
23451	(12345)	23451→23415→13425→14325→12345 23451→24351→42351→12354→12345	4
23514	(12354)	23514→23415→24315→42315→12345 23514→23541→23145→13245→12345	4
24153	(12453)	24153→24135→23145→13245→12345 24153→42153→42351→12354→12345	4
24513	(124)(35)	24513→42513→12543→12345	3
24531	(12435)	24531→24135→24315→42315→12345 24531→23541→32541→32145→12345	4
25134	(12543)	25134→24135→23145→13245→12345 25134→25143→15243→15342→12345	4

25413	(12534)	25413→23415→24315→42315→12345	4
25431	(125)(34)	25431→21435→12435→12345	3
31254	(132)(45)	31254→32154→12354→12345	3
31452	(13452)	31452→31425→31245→32145→12345	4
31524	(13542)	31524→31425→31245→32145→12345	4
34152	(13)(245)	34152→34125→32145→12345	3
34251	(13245)	34251→32451→32415→12435→12345	4
34512	(13524)	34512→34215→32415→12435→12345	4
34521	(135)(24)	34521→34125→14325→12345	3
35124	(13)(254)	35124→15324→14325→12345	3
35214	(13254)	35214→34215→32415→12435→12345	4
35412	(134)(25)	35412→15432→15342→12345	3
35421	(13425)	35421→31425→13425→14325→12345	4
41253	(14532)	41253→14253→14235→13245→12345	4
41523	(142)(35)	41523→21543→12543→12345	3
41532	(14352)	41532→41235→42135→42315→12345	4
43152	(14523)	43152→43125→23145→13245→12345	4
43251	(145)(23)	43251→42351→42315→12345	3
43512	(14)(235)	43512→13542→13245→12345	3
43521	(14235)	43521→42531→42135→42315→12345	4
45123	(14253)	45123→43125→34125→32145→12345	4
45132	(143)(25)	45132→45312→15342→12345	3
45213	(14)(235)	45213→15243→13245→12345	3
45231	(14325)	45231→15234→14235→13245→12345	4
51234	(15432)	51234→41235→31245→32145→12345	4
51423	(15342)	51423→31425→41325→21345→12345	4
51432	(152)(34)	51432→51342→21345→12345	3
53124	(15423)	53124→43125→23145→13245→12345	4
53214	(154)(23)	53214→52314→42315→12345	3
53412	(15234)	53412→53142→23145→13245→12345	4
53421	(15)(234)	53421→54321→52341→12345	3
54123	(153)(24)	54123→34125→14325→12345	3
54132	(15243)	54132→24135→42135→42315→12345 54132→54312→51342→21345→12345	4
54213	(15324)	54213→51243→21543→21543→12345	4
54231	(15)(243)	54231→53241→52341→12345	3

發現 1 當數字 1~5 排列為 5-cycle 時，則數字歸位最少需要 4 步。

發現 2 當數字 1~5 排列為 $(ab)(cde)$ 的類型時，則數字歸位最少需要 3 步。

[討論] $n=5$的 5-cycle

[前方的符號相同者，代表 cycle 排列恰為互補數，歸為同組。]

☆(12534)=(34125) (12534)=(14)⊕(24)⊕(34)⊕(53) =(24)⊕(34)⊕(53)⊕(12)	☆(14352)=(21435)= (43521) (14352)=(14)⊕(31)⊕(21)⊕(52) =(31)⊕(21)⊕(52)⊕(43)
★ (13245)= (24513) (13245)=(32)⊕(43)⊕(13)⊕(51) =(34)⊕(13)⊕(51)⊕(24)	★(15423)=(42315)= (31542) (15423)=(23)⊕(12)⊕(42)⊕(54) =(12)⊕(42)⊕(54)⊕(31)
■(12354)=(41235) (12354)=(14)⊕(24)⊕(34)⊕(54) =(34)⊕(54)⊕(23)⊕(12) =(23)⊕(12)⊕(51)⊕(41)	■(14325) (14325)=(14)⊕(31)⊕(21)⊕(51) =(13)⊕(51)⊕(32)⊕(43) =(32)⊕(43)⊕(54)⊕(14)
□(14523)=(23145) (14523)=(23)⊕(12)⊕(42)⊕(52) =(42)⊕(52)⊕(14)⊕(31) =(14)⊕(31)⊕(53)⊕(23)	□(15324)=(32415) (15324)=(32)⊕(43)⊕(13)⊕(53) =(13)⊕(53)⊕(41)⊕(24) =(14)⊕(24)⊕(52)⊕(32)
◎(13452)=(21345) (13452)=(34)⊕(13)⊕(21)⊕(52) =(13)⊕(21)⊕(42)⊕(52) =(12)⊕(42)⊕(52)⊕(34) =(42)⊕(52)⊕(34)⊕(13)	◎(15342)=(34215) (15342)=(21)⊕(42)⊕(34)⊕(53) =(42)⊕(34)⊕(13)⊕(53) =(34)⊕(13)⊕(53)⊕(21) =(13)⊕(53)⊕(21)⊕(42)
●(13542)=(42135) (13542)=(13)⊕(21)⊕(42)⊕(54) =(12)⊕(42)⊕(34)⊕(54) =(42)⊕(34)⊕(54)⊕(13) =(34)⊕(54)⊕(13)⊕(21)	●(13425) (13425)=(42)⊕(34)⊕(13)⊕(51) =(34)⊕(13)⊕(21)⊕(51) =(13)⊕(21)⊕(51)⊕(42) =(12)⊕(51)⊕(42)⊕(34)
⊙(13524)=(24135) (13524)=(34)⊕(13)⊕(24)⊕(52) =(35)⊕(23)⊕(43)⊕(13) =(23)⊕(52)⊕(43)⊕(13) =(13)⊕(21)⊕(52)⊕(41) =(34)⊕(54)⊕(13)⊕(24)	⊙(14253)=(31425) (14253)=(12)⊕(42)⊕(31)⊕(53) =(25)⊕(32)⊕(12)⊕(42) =(23)⊕(53)⊕(12)⊕(42) =(42)⊕(34)⊕(53)⊕(14) =(12)⊕(51)⊕(42)⊕(31)
＊(13254)=(41325) (13254)=(34)⊕(13)⊕(24)⊕(54) =(14)⊕(24)⊕(54)⊕(32) =(25)⊕(32)⊕(43)⊕(13) =(32)⊕(43)⊕(54)⊕(13) =(13)⊕(21)⊕(51)⊕(41)	＊(14235) (14235)=(12)⊕(42)⊕(31)⊕(51) =(41)⊕(31)⊕(51)⊕(23) =(35)⊕(23)⊕(12)⊕(42) =(23)⊕(12)⊕(51)⊕(42) =(42)⊕(43)⊕(54)⊕(14)

◇(14532)=(32145) (14532)=(13)⊕(21)⊕(43)⊕(53) =(32)⊕(43)⊕(53)⊕(14) =(45)⊕(14)⊕(31)⊕(21) =(14)⊕(31)⊕(53)⊕(21) =(12)⊕(42)⊕(52)⊕(32)	◇(15234)=(23415) (15234)=(42)⊕(34)⊕(12)⊕(52) =(23)⊕(12)⊕(52)⊕(41) =(15)⊕(41)⊕(24)⊕(34) =(14)⊕(24)⊕(52)⊕(34) =(34)⊕(13)⊕(53)⊕(23)
▼(12345) (12345)=(24)⊕(34)⊕(12)⊕(15) =(54)⊕(14)⊕(24)⊕(34) =(41)⊕(51)⊕(24)⊕(34) =(34)⊕(13)⊕(15)⊕(23) =(24)⊕(52)⊕(34)⊕(12) =(34)⊕(53)⊕(23)⊕(12)	▼(15432)=(43215) (15432)=(13)⊕(21)⊕(43)⊕(54) =(15)⊕(41)⊕(31)⊕(21) =(14)⊕(54)⊕(31)⊕(21) =(12)⊕(42)⊕(54)⊕(32) =(13)⊕(53)⊕(21)⊕(43) =(12)⊕(52)⊕(32)⊕(43)
▲(12453)=(31245) (12453)=(23)⊕(12)⊕(34)⊕(53) =(41)⊕(24)⊕(31)⊕(53) =(43)⊕(53)⊕(14)⊕(24) =(45)⊕(14)⊕(31)⊕(24) =(24)⊕(52)⊕(32)⊕(12) =(23)⊕(34)⊕(53)⊕(12) =(45)⊕(14)⊕(24)⊕(31)	▲(31524)=(24315) (31524)=(23)⊕(43)⊕(12)⊕(52) =(14)⊕(31)⊕(24)⊕(52) =(12)⊕(52)⊕(41)⊕(31) =(15)⊕(41)⊕(24)⊕(31) =(31)⊕(53)⊕(23)⊕(43) =(23)⊕(12)⊕(52)⊕(43) =(15)⊕(41)⊕(31)⊕(24)
◆(12435) (12435)=(14)⊕(24)⊕(13)⊕(51) =(23)⊕(34)⊕(12)⊕(51) =(13)⊕(51)⊕(23)⊕(43) =(35)⊕(23)⊕(12)⊕(43) =(14)⊕(13)⊕(51)⊕(24) =(43)⊕(54)⊕(14)⊕(24) =(35)⊕(23)⊕(43)⊕(12) =(32)⊕(25)⊕(43)⊕(12)	◆(12543)= (43125) (12543)=(23)⊕(12)⊕(34)⊕(54) =(14)⊕(31)⊕(24)⊕(54) =(24)⊕(54)⊕(32)⊕(12) =(25)⊕(23)⊕(43)⊕(12) =(12)⊕(51)⊕(41)⊕(31) =(14)⊕(24)⊕(54)⊕(31) =(25)⊕(23)⊕(12)⊕(43) =(23)⊕(53)⊕(12)⊕(43)

發現 1 將數字 1~5 排列為 5-cycle 的 24 種情況，依據遊戲規則作 Cycle 拆解，比較後發現可以分成 12 組，每組的 Cycle 排列恰為互補數，而 Cycle 的拆解也恰為互補數。

發現 2 觀察歸位過程，還原數 5 只會使用 1 次。

[性質 11]當 Disjoint cycles 為 $(ab)(cde)$ 的類型時，其中 $1 \le a < b \le n$，$1 \le c < d, e \le n$
且 n 是還原數，若**兩個 Cycles 間有通路且 (cde) 為可歸位型**，
則 $(ab)(cde)$ 數字歸位最少需要 3 步。
註：(cde) 為可歸位型指[性質 2]或[性質 3]的類型。

[證明]
若 (cde) 為可歸位型，則需 2 步可完成 cde 歸位，而 (ab) 只需 1 步即可歸位。
若 (ab) 與 (cde) 間有通路，則某個 Cycle 可由通路換到另一個 Cycle，
因此，$(ab)(cde)$ 數字歸位最少需要 2+1=3 步。

四、六張牌

(一)若已有四張牌歸位，則直接將剩餘兩張紙牌互換，只需 1 步。
(二)若已有三張牌歸位，則剩下三張牌未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
123564	(1)(2)(3)(456)	123564→123546→123456	2
123645	(1)(2)(3)(465)	123645→123546→123456	2
125463	(1)(2)(4)(356)	125463→125436→123456	2
126435	(1)(2)(4)(365)	126435→125436→123456	2
124653	(1)(2)(5)(346)	124653→124356→123456	2
126354	(1)(2)(5)(364)	126354→124356→123456	2
124536	(1)(2)(6)(345)	124536→125436→123456	2
125346	(1)(2)(6)(354)	125346→124356→123456	2
153462	(1)(3)(4)(256)	153462→153426→123456	2
163425	(1)(3)(4)(265)	163425→153426→123456	2
143652	(1)(3)(5)(246)	143652→143256→123456	2
163254	(1)(3)(5)(264)	163254→143256→123456	2
143526	**(1)(3)(6)(245)**	143526→145326→145236→143256→123456 打破(3)(245)成為(2435) 143526→143562→123564→123546→123456 打破(6)(245)成為(2456) 143526→413526→413256→143256→失敗 **打破(1)(245)成為(1452)**	**4**
153246	**(1)(3)(6)(254)**	153246→153264→153462→153426→123456 打破(6)(254)成為(2564) 153246→152346→132546→123546→123456 打破(3)(254)成為(2543) 153246→453216→423516→123546→123456 打破(1)(254)成為(1425)	**4**
136452	(1)(4)(5)(236)	136452→132456→123456	2
162453	(1)(4)(5)(263)	162453→132456→123456	2

135426	(1)(4)(6)(235)	135426→125436→123456	2
152436	(1)(4)(6)(253)	152436→153426→123456	2
134256	(1)(5)(6)(234)	134256→136254→136452→132456→123456 打破(6)(234)成為(2364) 134256→135246→125346→124356→123456 打破(5)(234)成為(2354) 134256→234156→214356→213456→123456 打破(1)(234)成為(1234)	4
142356	(1)(5)(6)(243)	142356→146352→126354→124356→123456 打破(6)(243)成為(2436) 142356→241356→231456→132456→123456 打破(1)(243)成為(1243) 142356→152346→132546→123546→123456 打破(5)(243)成為(2543)	4
523461	(2)(3)(4)(156)	523461→523416→123456	2
623415	(2)(3)(4)(165)	623415→523416→123456	2
423651	(2)(3)(5)(146)	423651→423156→123456	2
623154	(2)(3)(5)(164)	623154→423156→123456	2
423516	(2)(3)(6)(145)	423516→123546→123456	2
523146	(2)(3)(6)(154)	523146→523416→123456	2
326451	(2)(4)(5)(136)	326451→321456→123456	2
621453	(2)(4)(5)(163)	621453→321456→123456	2
325416	(2)(4)(6)(135)	325416→326415→326451→321456→123456 打破(6)(135)成為(1365) 325416→315426→513426→213456→123456 打破(2)(135)成為(1352) 325416→325146→324156→423156→123456 打破(4)(135)成為(1354)	4
521436	(2)(4)(6)(153)	521436→526431→126435→125436→123456 打破(6)(153)成為(1536) 521436→512436→312456→321456→123456 打破(2)(153)成為(1532) 521436→521346→523146→523416→123456 打破(4)(153)成為(1543)	4
324156	(2)(5)(6)(134)	324156→124356→123456	2
421356	(2)(5)(6)(143)	421356→423156→123456	2
263451	(3)(4)(5)(126)	263451→213456→123456	2
613452	(3)(4)(5)(162)	613452→213456→123456	2
253416	(3)(4)(6)(125)	253416→523416→123456	2

513426	(3)(4)(6)(152)	513426→213456→123456	2
243156	**(3)(5)(6)(124)**	243156→643152→623154→423156→123456 打破(6)(124)成為(1624) 243156→241356→231456→132456→123456 打破(3)(124)成為(1243) 243156→543126→513426→213456→123456 打破(5)(124)成為(1524)	**4**
413256	**(3)(5)(6)(142)**	413256→613254→613452→213456→123456 打破(6)(142)成為(1642) 413256→314256→324156→423156→123456 打破(3)(142)成為(1342) 413256→413526→143526→143256→失敗 **打破(5)(142)成為(1452)**	**4**
231456	(4)(5)(6)(123)	231456→132456→123456	2
312456	(4)(5)(6)(132)	312456→321456→123456	2

[討論]若 $n=6$ ，1245 排列的 4-cycle 歸位情形：**只有兩通路：1+4=5 和 2+5≡1 (mod 6)**

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步
2451	(1245)	(145)⊕(24)，歸位(24)→(145)，2451→4151→× (125)⊕(45)，歸位(45)→(125)，2451→2541→×	×
2514	(1254)	(154)⊕(25)，歸位(25)→(154)，2514→5214→5241→1245 (125)⊕(14)，歸位(14)→(125)，2514→2541→5241→1245	3
4521	(1425)	(145)⊕(25)，歸位(25)→(145)，4521→4251→1254→1245 (125)⊕(24)，歸位(24)→(125)，4521→2541→×	3
4152	(1452)	(145)⊕(12)，歸位(12)→(145)，4152→4251→× (152)⊕(45)，歸位(45)→(152)，4152→5142→×	×
5412	(1524)	(154)⊕(24)，歸位(24)→(154)，5412→5214→× (152)⊕(14)，歸位(14)→(152)，5412→5142→2145→1245	3
5124	(1542)	(154)⊕(12)，歸位(12)→(154)，5124→5214→× (152)⊕(24)，歸位(24)→(152)，5124→5142→×	×

發現 m-cycle 內部通路至少要 $m-2$ 條才有可能成功。若可歸位，則最少需要 $m-1$ 步。

[性質 12]當遇到類型 $(abcd)$ 時，其中 $1\le a,b,c,d<n$ ， n 是還原數且 $abcd$ 間只有兩通路。
若 abc 有一通路，假設 abc 間通路★+☆=∗ ，則將 $(abcd)$ 拆解為 $(abc)\oplus(ad)$ ，
再檢查是否有通路 $a+d\equiv$★ (mod n)，若有 ad ★的通路，則需 3 步可將數字歸位。

[證明]

假設 abc 間有通路為★+☆=∗ ，將 $(abcd)$ 拆解為 $(abc)\oplus(ad)$ ，數字歸位 $(ad)\rightarrow$ (abc) ，

若有 $a+d\equiv$★ (mod n)通路時，則數字歸位步驟為 $(ad)\rightarrow$(★☆)→(∗歸位)，需 3 步。

(三)若已有二張牌歸位，則剩下四張牌未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	最少步數
124365	(1)(2)(34)(56)	124365→123465→523461→523416→123456 打破(1)(34)	4
124536	(1)(2)(3456)	124536→125463→125436→123456	3
124635	(1)(2)(3465)	124635→124536→125436→123456	3
125364	(1)(2)(3564)	125364→125346→124356→123456	3
125634	(1)(2)(35)(46)	125634→123654→143652→143256→123456 打破(2)(35)	4
125643	(1)(2)(3546)	125643→124653→124356→123456	3
126345	(1)(2)(3654)	126345→125346→124356→123456	3
126534	(1)(2)(3645)	126534→124536→125436→123456	3
126543	(1)(2)(36)(45)	126543→126453→123456	2
143265	(1)(3)(24)(56)	143265→123465→123456	2
143562	(1)(3)(2456)	143562→123564→123546→123456	3
143625	(1)(3)(2465)	143625→123645→123546→123456	3
153264	(1)(3)(2564)	153264→153462→153426→123456	3
153624	(1)(3)(25)(46)	153624→153264→153462→153426→123456 打破(25)(46)	4
153642	(1)(3)(2546)	153642→153624→153264→153462→153426→123456	5
163245	(1)(3)(2654)	163245→163425→153426→123456	3
163524	(1)(3)(2645)	163524→162534→162435→163425→153426→123456 打破(3)(2645)成為(26453)	5
163542	(1)(3)(26)(45)	163542→143562→123564→123546→123456 打破(26)(45)	4
132465	(1)(4)(23)(56)	132465→123465→123456	2
135462	(1)(4)(2356)	135462→135426→125436→123456	3
136425	(1)(4)(2365)	136425→126435→125436→123456	3
152463	(1)(4)(2563)	152463→152436→153426→123456	3
156423	(1)(4)(25)(36)	156423→156432→136452→132456→123456 打破(25)(36)	4
156432	(1)(4)(2536)	156432→136452→132456→123456	3
162435	(1)(4)(2653)	162435→152436→132456→123456	3
165423	(1)(4)(2635)	165423→135426→153426→123456	3
165432	(1)(4)(26)(35)	165432→163452→123456	2
132654	(1)(5)(23)(46)	132654→132456→132546→123546→123456	4
134652	(1)(5)(2346)	134652→135642→125643→124653→124356→123456 打破(5)(2346)成為(23546)	5
136254	(1)(5)(2364)	136254→136452→132456→123456	3
142653	(1)(5)(2463)	142653→124653→124356→123456	3
146253	(1)(5)(24)(36)	146253→126453→123456	2

146352	(1)(5)(2436)	146352→126354→124356→123456	3
162354	(1)(5)(2643)	162354→612354→621354→623154→423156→123456 打破(1)(2643)成為(16432)	5
164253	(1)(5)(2634)	164253→162453→132456→123456	3
164352	(1)(5)(26)(34)	164352→146352→126354→124356→123456 打破(26)(34)	4
132546	(1)(6)(23)(45)	132546→123546→123456	2
134526	(1)(6)(2345)	134526→135426→153426→123456	3
135246	(1)(6)(2354)	135246→125346→124356→123456	3
142536	(1)(6)(2453)	142536→152436→153426→123456	3
145236	(1)(6)(24)(35)	145236→143256→123456	2
145326	(1)(6)(2435)	145326→145623→143625→123645→123546→123456 打破(6)(2435)成為(24635)	5
152346	(1)(6)(2543)	152346→132546→123546→123456	3
154236	(1)(6)(2534)	154236→164235→164253→162453→132456→123456 打破(6)(2534)成為(26534)	5
154326	(1)(6)(25)(34)	154326→354126→351426→321456→123456 打破(1)(34)	4
423165	(2)(3)(14)(56)	423165→123465→123456	2
423561	(2)(3)(1456)	423561→423516→123546→123456	3
423615	(2)(3)(1465)	423615→123645→123546→123456	3
523164	(2)(3)(1564)	523164→523146→523416→123456	3
523614	(2)(3)(15)(46)	523614→123654→123456	2
523641	(2)(3)(1546)	523641→523146→523416→123456	3
623145	(2)(3)(1654)	623145→623415→523416→123456	3
623514	(2)(3)(1645)	623514→423516→123546→123456	3
623541	(2)(3)(16)(45)	623541→623514→623154→423156→123456 打破(16)(45)	4
321465	(2)(4)(13)(56)	321465→421365→423165→123465→123456 打破(4)(13)	4
325461	(2)(4)(1356)	325461→315462→513462→513426→213456→123456 打破(2)(1356)成為(13562)	5
326415	(2)(4)(1365)	326415→326451→321456→123456	3
521463	(2)(4)(1563)	521463→125463→125436→123456	3
526413	(2)(4)(15)(36)	526413→126453→123456	2
526431	(2)(4)(1536)	526431→126435→125436→123456	3
621435	(2)(4)(1653)	621435→612435→612453→621453→321456→123456 打破(2)(1653)成為(16532)	5
625413	(2)(4)(1635)	625413→621453→321456→123456	3
625431	(2)(4)(16)(35)	625431→635421→653421→623451→123456 打破(2)(35)	4
321654	(2)(5)(13)(46)	321654→123654→123456	2
324651	(2)(5)(1346)	324651→324156→124356→123456	3

326154	(2)(5)(1364)	326154→126354→124356→123456	3
421653	(2)(5)(1463)	421653→421356→423156→123456	3
426153	(2)(5)(14)(36)	426153→426351→326451→321456→123456 打破(14)(36)	4
426351	(2)(5)(1436)	426351→421356→423156→123456	3
621354	(2)(5)(1643)	621354→623154→423156→123456	3
624153	(2)(5)(1634)	624153→324156→423156→123456	3
624351	(2)(5)(16)(34)	624351→623451→123456	2
321546	(2)(6)(13)(45)	321546→123546→123456	2
324516	(2)(6)(1345)	324516→124536→125436→123456	3
325146	(2)(6)(1354)	325146→125346→124356→123456	3
421536	(2)(6)(1453)	421536→124536→125436→123456	3
425136	(2)(6)(14)(35)	425136→125436→123456	2
425316	(2)(6)(1435)	425316→125346→124356→123456	3
521346	(2)(6)(1543)	521346→421356→423156→123456	3
524136	(2)(6)(1534)	524136→523146→523416→123456	3
524316	(2)(6)(15)(34)	524316→523416→123456	2
213465	(3)(4)(12)(56)	213465→513462→153462→153426→123456 打破(12)(56)	4
253461	(3)(4)(1256)	253461→523461→523416→123456	3
263415	(3)(4)(1265)	263415→263451→213456→123456	3
513462	(3)(4)(1562)	513462→153462→153426→123456	3
563412	(3)(4)(15)(26)	563412→163452→123456	2
563421	(3)(4)(1526)	563421→263451→213456→123456	3
613425	(3)(4)(1652)	613425→513426→213456→123456	3
653412	(3)(4)(1625)	653412→613452→213456→123456	3
653421	(3)(4)(16)(25)	653421→623451→123456	2
213654	(3)(5)(12)(46)	213654→613254→613452→213456→123456 打破(12)(46)	4
243651	(3)(5)(1246)	243651→423651→423156→123456	3
263154	(3)(5)(1264)	263154→261354→241356→231456→132456→123456 打破(3)(1264)成為(12643)	5
413652	(3)(5)(1462)	413652→213654→213456→214356→124356→123456	5
463152	(3)(5)(14)(26)	463152→643152→623154→423156→123456 打破(14)(26)	4
463251	(3)(5)(1426)	463251→263451→213456→123456	3
613254	(3)(5)(1642)	613254→613452→213456→123456	3
643152	(3)(5)(1624)	643152→623154→423156→123456	3
643251	(3)(5)(16)(24)	643251→623451→123456	2
213546	(3)(6)(12)(45)	213546→123546→321546→321456→123456 打破(3)(12)	4
243516	(3)(6)(1245)	243516→423516→423615→423651→423156→123456	5
253146	(3)(6)(1254)	253146→253416→523416→123456	3

413526	(3)(6)(1452)	413526→143526→153426→152436→132456→123456 打破(3)(1452)	5
453126	(3)(6)(14)(25)	453126→153426→123456	2
453216	(3)(6)(1425)	453216→423516→123546→123456	3
513246	(3)(6)(1542)	513246→563241→163245→143265→123465→123456 打破(6)(1542)	5
543126	(3)(6)(1524)	543126→513426→213456→123456	3
543216	(3)(6)(15)(24)	543216→143256→143652→123654→123456 打破(6)(24)	4
216453	(4)(5)(12)(36)	216453→126453→123456	2
236451	(4)(5)(1236)	236451→231456→132456→123456	3
261453	(4)(5)(1263)	261453→162453→132456→123456	3
316452	(4)(5)(1362)	316452→312456→321456→123456	3
361452	(4)(5)(13)(26)	361452→163452→163254→143256→123456 打破(4)(26)	4
362451	(4)(5)(1326)	362451→312456→321456→123456	3
612453	(4)(5)(1632)	612453→216453→126453→123456	3
631452	(4)(5)(1623)	631452→231456→132456→123456	3
632451	(4)(5)(16)(23)	632451→623451→623415→523416→123456 打破(5)(16)	4
215436	(4)(6)(12)(35)	215436→125436→123456	2
235416	(4)(6)(1235)	235416→253416→523416→123456	3
251436	(4)(6)(1253)	251436→152436→153426→123456	3
315426	(4)(6)(1352)	315426→312456→321456→123456	3
351426	(4)(6)(13)(25)	351426→321456→123456	2
352416	(4)(6)(1325)	352416→253416→523416→123456	3
512436	(4)(6)(1532)	512436→312456→321456→123456	3
531426	(4)(6)(1523)	531426→231456→132456→123456	3
532416	(4)(6)(15)(23)	532416→523416→123456	2
214356	(5)(6)(12)(34)	214356→124356→123456	2
234156	(5)(6)(1234)	234156→214356→213456→123456	3
241356	(5)(6)(1243)	241356→231456→132456→123456	3
314256	(5)(6)(1342)	314256→324156→423156→123456	3
341256	(5)(6)(13)(24)	341256→143256→123456	2
342156	(5)(6)(1324)	342156→341256→143256→123456	3
412356	(5)(6)(1432)	412356→421356→321456→123456	3
431256	(5)(6)(1423)	431256→341256→143256→123456	3
432156	(5)(6)(14)(23)	432156→412356→312456→321456→123456 打破(14)(23)	4

發現 數字歸位的最少步數和 Disjoint cycles 有固定的判斷準則。
除了 1-cycle 已經歸位外，其它需檢查每個 Cycle 內部是否能自行歸位，
Cycles 間是否有通路。最少步數為打破次數與新的每個 Cycle 的最小步數有關。

(四)若已有一張牌歸位，則剩下五張牌未歸位，因為種類繁多，所以舉例說明：

例 1：初始牌卡 253164，Disjoint cycles 為(3)(12564)，

從還原數 6 歸位，即(12564)=(1254)⊕(46)

數字歸位 253164→253146→253416→523416→123456，最少需要 4 步。

例 2：初始牌卡 426531，Disjoint cycles 為(2)(14536)，

從還原數 6 歸位，即(14536)=(1453)⊕(16)

數字歸位 426531→421536→423516→123546→123456，最少需要 4 步。

例 3：初始牌卡 542136，Disjoint cycles 為(6)(15324)，

檢查若 4 歸位 4+1=5，即(15324)=(1532)⊕(14)

數字歸位 542136→512436→312456→321456→123456，最少需要 4 步。

發現 1 數字 1~6 的 Disjoint cycles 若有 5-cycle，數字歸位最少皆需要 4 步。

發現 2 若 5-cycle 有還原數 6，可從還原數歸位著手。

發現 3 檢查 Cycle 內，若每個 t 歸位後，數字和是否在 Cycle 內，作為可能的第一步。

例 4：初始牌卡 321645，Disjoint cycles 為(2)(13)(465)，

除了(2)已歸位外，檢查(13)、(465)都是 Cycle 內部可自行歸位型，

又兩個 Cycles 間有通路 1+3=4，4+5≡3 (mod 6)，可以互相連接，

但(465)內部需從還原數 6 歸位著手，通路 1+3=4 無法連接到 6，

所以，先(465)歸位，再連接到(13)。

數字歸位 321645→321546→321456→123456，最少需要 3 步。

例 5：初始牌卡 356421，Disjoint cycles 為(4)(25)(136)，

除了(2)已歸位外，檢查(25)、(136) 都是 Cycle 內部可自行歸位型，

又兩個 Cycles 間只有通路 2+5≡1 (mod 6)可以連接，

所以，先(25)歸位，再連到(136)。

數字歸位 356421→326451→321456→123456，最少需要 3 步。

例 6：初始牌卡 534216，Disjoint cycles 為(6)(15)(234)，

除了(6)已歸位外，檢查(15)內部可自行歸位型

但(234)無法自行歸位，因此需要打破 Cycles 製造通路，

若打破(234)(6)，

數字歸位 534216→532416→562413→563412→163452→123456，最少需要 5 步。

發現 1 將初始牌卡先以 Disjoint cycles 表示，可以幫助分析那些數字已經歸位，那些數字間有循環的關係。

發現 2 為了找到數字歸位的最少步數，除了已經歸位的數字儘量不動外，先檢查其餘每個 Cycle 的內部是否能自行歸位，及 Cycles 間是否有通路連接。再依據通路的狀況，作為決定歸位次序的參考。

發現 3 若某個 Cycle 的內部無法自行歸位，或 Cycles 間沒有通路連接，則需選擇合適的 Cycle 打破，製造更多通路，再進行數字歸位。

(五)若六張牌均未歸位，因為初始牌卡種類繁多，其 Disjoint cycles 可能為 6-cycle、(2-cycle)(4-cycle)、(3-cycle)(3-cycle)、(2-cycle)(2-cycle) (2-cycle)，但若 Cycle 排列恰為互補數，則 Cycle 的拆解也恰為互補數。利用 Cycles 的互補數歸位法，可以將需要討論的情況減少一半。舉例說明如下：

例 1：Disjoint Cycles 為(153462)，與互補的 Disjoint cycles (513264)=(132645)，

(153462)=(51)⊕(14)⊕(34)⊕(21)⊕(62)， 歸位 514632→514236→524136→523146→ 523416→123456，最少需要 5 步。	(513264)= (15)⊕(52)⊕(32)⊕(45)⊕(64)， 歸位 362514→342516→352416→253416→ 523416→123456，最少需要 5 步。
或(153462)=(45)⊕(56)⊕(15)⊕(34)⊕(21)， 歸位 514632→524631→523641→123645→ 123546→123456，最少需要 5 步。	或(513264)=(21)⊕(16)⊕(51)⊕(32)⊕(45)， 歸位 362514→362415→263415→263451→ 213456→123456，最少需要 5 步。

例 2：Disjoint Cycles 為(126354)，與互補的 Disjoint cycles(546312)=(125463)

(126354)=(15)⊕(14)⊕(25)⊕(35)⊕(63)， 歸位 265143→235146→253146→523146→ 523416→123456，最少需要 5 步。	(546312)= (51)⊕(52)⊕(41)⊕(31)⊕(63)， 歸位 251643→251346→253146→253416→ 523416→123456，最少需要 5 步。
或(126354)= (25)⊕(56)⊕(24)⊕(35)⊕(12)， 歸位 265143→165243→163245→163425→ 153426→123456，最少需要 5 步。	或(546312)=(41)⊕(16)⊕(42)⊕(31)⊕(54)， 歸位 251643→241653→243651→423651→ 423156→123456，最少需要 5 步。

例 3：Disjoint Cycles 為(14)(2536)，與互補的 Disjoint cycles(52)(4136)

(14)(2536)=(23)⊕(26)⊕(53)⊕(14)， 歸位 456132→156432→136452→132456→ 123456，最少需要 1+3=4 步。	(52)(4136)=(43)⊕(46)⊕(13)⊕(52)， 歸位 356124→326154→126354→124356→ 123456，最少需要 1+3=4 步。

例 4：Disjoint Cycles 為(153)(246)，與互補的 Disjoint cycles(513)(426)

檢查(153)不可自行歸位，需打破(153)(246) (153)(246) =(34)⊕(63)⊕(24)⊕(35)⊕(12)⊕(52) 歸位 541632→241635→142635→142653→ 124653→124356→123456， 最少需要 1+(6-1)=6 步。	檢查(513)不可自行歸位，需打破(513)(426) (513)(426) =(32)⊕(63)⊕(42)⊕(31)⊕(54)⊕(14) 歸位 365214→365241→364251→164253→ 162453→132456→123456， 最少需要 1+(6-1)=6 步。

例 5：Disjoint cycles 為(13)(26)(45)，與互補的 Disjoint cycles(53)(46)(21)

檢查(13)(45)，(26)可自行歸位， 但 cycle 間無通路，需要打破(13)(45)， (13)(26)(45)=(62)⊕(53)⊕(45)⊕(14)⊕(34)， 歸位 361542→461532→164532→165432→	檢查(53)(21)，(46)可自行歸位， 但 cycle 間無通路，需要打破(53)(21)， (53)(46)(21)=(64)⊕(13)⊕(21)⊕(52)⊕(32)， 歸位 215634→315624→312654→321654→

16345$\boxed{2}$→123456，最少需 1+(4-1)+1=5 步。	12365$\boxed{4}$→123456，最少需 1+(4-1)+1=5 步。

五、數字歸位遊戲的標準解題流程

經由先前一連串的討論，我找出一套數字歸位遊戲的**標準解題流程**，並可以判斷數字歸位的最少步數。我以流程圖的方式來說明：

將初始牌卡以 Disjoint cycles 表示，設$(a$-cycle$)(b$-cycle$)\cdots(g$-cycle$)$

↓

除了(1-cycle)已歸位外，其他每個 Cycle 檢查<u>內部數字是否可自行歸位</u>，並判斷 <u>**Cycles 間是否有通路**</u>連接。

★內部自行歸位類型
- (ab)型
- (abn)型
- (abc)型且 abc 有通路
- $(abcn)$型且 abc 有通路
- $(abcn)$型且 abc 某兩個數字和為 n
- n-cycle

★計算內部通路數
m-cycle 至少 $m-2$ 條通路，且通路可連接。

☆判斷 cycles 間通路

是：由通路決定 Cycles 的先後歸位次序。若較難判斷時，可利用$\boxed{\text{歸位判斷法}}$破題及$\boxed{\text{Cycle 拆解法}}$，尋找可能歸位方式。
★最少需要$\boxed{n-\text{(cycle 數)}}$步。

否：選擇合適的 Cycle 打破後，合併為新的$(t$-cycle$)$，使內部可自行歸位。
★最少需要$\boxed{n-\text{(cycle 數)}+\text{(打破次數)}\times 2}$步。

★$\boxed{\text{小結}}$：**初始牌卡的 Disjoint cycles 若有通路連接，最少步數為$n-(\text{cycle數})$。**

若無通路，則需打破，增加(打破次數)$\times 2$步，但不超過$n-1$步。

因此，最少步數介於$n-(\text{cycle數})$到$n-1$之間。

[註] **歸位判斷法：**

m-cycle 若有還原數n，也許可從還原數n歸位著手。

m-cycle 內可逐一檢查t歸位後的數字和是否仍在 Cycle 內，作為可能的第一步。

[註] **Cycle 拆解法：**

$(a_1a_2\cdots a_{m-1}a_m)$可拆解為$(a_1a_2\cdots a_{m-1})\oplus(a_ma_1)$，而數字歸位為 Cycle 拆解法的逆推。

....

例 1：**初始牌卡 125496783**

初始牌卡 125396783，Disjoint cycles 是**(1)(2)(4)(6)(7)(8)(359)**

↓

除了(1)(2)(4)(6)(7)(8)已歸位外，檢查(359)是否可自行歸位？

★內部自行歸位
(359)是(abn)類型

是 ↓

數字歸位 1254$\boxed{9}$6783→1254$\boxed{3}$6789→123456789，最少需要 **9-7=2** 步。

例 2：**初始牌卡 627915438**

初始牌卡 627915438，Disjoint cycles 是**(2)(165)(37498)**

★內部自行歸位
(165)是 (abc) 類型
且 **1+5=6** 有通路

☆Cycles 間通路
3+7≡1，換(165)
6+1=7，換(37498)

除了(2)已歸位外，
檢查(165)是否可自行歸位？
檢查(37498)是否可自行歸位？
(165)(37498)是否有通路連接？

★計算內部通路數
(37498)至少需 3 條通路。
3+4=7，3+9≡3，
7+9≡7，4+9≡4，
4+8≡3，**9+8≡8**。

是

又(37498)= (3748)⊕(98)= (378)⊕(84)⊕(98)= $\boxed{(87)\oplus(73)}$⊕(84)⊕(98)，3+7≡1 換(165)
數字歸位 627915438→627815439→627415839→623415879→623451879→
123456879→123456789，最少需要 **9-3=6** 步。

....

例 3：**初始牌卡 473512698**

初始牌卡 473512698，Disjoint cycles 是**(145)(276)(3)(89)**

★內部自行歸位
(145)是 (abc) 類型
且 **1+4=5** 有通路
(89)是 (ab) 類型

除了(3)已歸位外，檢查
(145),(276),(89)是否可自行歸位？
(145) (276) (89)是否有通路連接？

★計算內部通路數
(276)內部無通路。

☆Cycles 間通路
4+5=9，換(89)
1+5=6，換(276)

否

將(276)與(89)打破，Disjoint cycles 成為**(145)(3)(89762)**。
數字歸位 473512698→483512697→483512796→183542796→183452796
→183452769→183456729→123456789，最少**(9-4)+2=7** 步。

....

例 4：**初始牌卡 123975684**

初始牌卡 123975684，Disjoint cycles 是**(1)(2)(3)(4)(8)(9)(576)**

☆Cycles 間通路
5+6≡2，換(2)
2567 通路 2 條
5+7≡3，換(3)
3567 通路 1 條
6+7≡4，換(4)
4567 通路 1 條

除了(1)(2)(3)(4)(8)(9)已歸位外，
檢查(576)是否可自行歸位？

★計算內部通路數
(576)內部無通路。

否

若將(576)(2)與(9)打破，通路再增加 4 條，
數字歸位 123475689→123476589→193476582→193476285→

1$\boxed{9}$34267855→1$\boxed{5}$3426789→123456789，最少(9-7)+2×2=6 步。

伍、研究結果

一、將數字$1\sim n$隨機排列，位置與數字間會有循環的關係，所以我利用「Disjoint cycles」來表示初始牌卡。Disjoint cycles 可以快速看出那些數字已經歸位，那些數字間有循環關係。此外，我也定義了相關的名詞。

(一) i-cycle 的數字間有循環性，但表示法不唯一且有i種。

(二) 3-cycle 有(abc)、(acb)兩種類型，其中$1\le a<b<c\le n$。

(三) 數字歸位時，若取a和n互換，則下一步必定取a，所以n稱為**還原數**。

(四) 由於 Cycle 表示數字的位置變化，可以拆解為數個 Cycles 的合成，定義符號⊕作為”**由左而右**”的步驟合成。所以，**數字歸位過程為 Cycle 拆解步驟的逆推**。

例如：初始牌卡 2341 的 Disjoint cycles 為(1234)，(1234)= (23)⊕(12)⊕(14)，

所以數字歸位(14)→(12)→(23)，即 23$\boxed{4}$1→23$\boxed{1}$4→1$\boxed{3}$24→1234，需要 3 步。

(五) 數字$1\sim n$排列，若$a+b=n$，則稱a和b為**互補數**，而n的互補數為n。

(六) 當 Cycle 內部，某兩數的和也在 Cycle 內部時，則視為 Cycle 有內部通路。
當兩個 Cycles 中，某 Cycle 內的兩數和可換到另一個 Cycle 時，則稱 Cycles 間有外部通路。

二、Disjoint cycles 可歸位類型的判斷

(一)Cycle 內部數字可自行歸位類型

1. (ab)類型：(ab)直接互換，最少 1 步。

2. (abn)類型：從n歸位著手，最少 2 步。

3. (abc)類型且條件$a+b\equiv c \pmod n$：直接使用條件，最少 2 步。

4. $(abcn)$類型且abc有通路：若n的右側數字恰為條件的「數字和」，即$b+c=a$的a，則從此條件著手，否則一律從n歸位開始，最少 3 步。

5. $(abcn)$類型且條件$a+b=n$或$b+c=n$：直接使用條件，最少 3 步。

6. $(abcd)$類型且$abcd$間<u>只有兩通路</u>：若abc間有通路★+☆=∗，則將$(abcd)$拆解為$(abc)\oplus(ad)$，再檢查是否有通路$a+d\equiv$★，最少 3 步。

7. 數字$1\sim n$排列為n-cycle 時，則數字歸位最少需要$n-1$步。

(二) Cycles 間有通路類型

1. $(ab)(cn)$類型且條件$a+b\equiv c \pmod n$或$a+b=n$：直接使用條件，最少 2 步。

2. $(ab)(cde)$類型，若 Cycles 間有通路且(cde)為可歸位型：依條件決定次序最少 3 步。

(三) m-cycle 內部數字間的通路數

1.若m-cycle 內部通路越多，越容易內部自行歸位，但至少要$m-2$條通路才可能成功。

2.若 m-cycle 內部可自行歸位，則數字歸位最少需要 $m-1$ 步，但數字歸位方式不唯一。

三、數字歸位的技巧與特性

(一) 歸位判斷法：

m-cycle 若有還原數 n，也許可從還原數 n 歸位著手。

例如：初始牌卡 514632，從還原數 6 歸位著手，

數字歸位 514632→514236→524136→523146→523416→123456。

m-cycle 內可逐一檢查 t 歸位後的數字和是否仍在 Cycle 內，作為可能的第一步。

例如：初始牌卡 542136，檢查若 4 歸位 4+1=5，從 4 歸位著手，

數字歸位 542136→512436→312456→321456→123456。

(二) Cycle 拆解法：$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{n-1}a_n)$ 可拆解為 $(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n)\oplus(a_ia_{i+1})$。

例如：(1324)=(132)⊕(14)=(13)⊕(12)⊕(14)

(三) Cycles 的互補數歸位法：若兩個 **Disjoint cycles 排列恰為互補數，則 Cycle 的拆解方式也恰為互補數，所以數字歸位過程也恰為互補數**。

例如：Disjoint cycles 為(153462)，與互補的 Disjoint cycles (513264)=(132645)，

(153462)=(51)⊕(14)⊕(34)⊕(21)⊕(62)， 歸位 514632→514236→524136→523146→523416→123456。	**(513264)= (15)⊕(52)⊕(32)⊕(45)⊕(64)**， 歸位 362514→342516→352416→253416→523416→123456。

陸、討論

一、特殊初始牌卡 23⋯n1 的數字歸位方式

當 $n=3$ 時，初始牌卡 231，Disjoint cycles 是(123)，**(123) = (32)⊕(12)** 數字歸位 231→132→123，最少 2 步。
當 $n=4$ 時，初始牌卡 2341，Disjoint cycles 是(1234)，**(1234) = (43)⊕(13)⊕(23)** 數字歸位 2341→3241→1243→1234，最少 3 步。
當 $n=5$ 時，初始牌卡 23451，Disjoint cycles 是(12345)，**(12345) =(54)⊕(14)⊕(24)⊕(34)** 數字歸位 23451→24351→42351→12354→12345，最少 4 步。
觀察規律性，若初始牌卡 23⋯n1，Disjoint cycles 是(123⋯n)， **(123⋯(n-2)(n-1)n)= (n(n-1))⊕(1(n-1))⊕(2(n-1))⊕⋯⊕((n-3) (n-1))⊕((n-2) (n-1))**
當 $n=9$ 時，初始牌卡 234567891，Disjoint cycles 是(123456789)， **(123456789)=(98)⊕(18)⊕(28)⊕(38)⊕(48)⊕(58)⊕(68)⊕(78)** 數字歸位 234567891→234568791→234586791→234856791→238456791→283456791→823456791→123456798→123456789，最少 8 步。

小結：**特殊的初始牌卡 23⋯n1，Disjoint cycles 是(123⋯n)，Cycle 的拆解有固定規律。因此，數字歸位方式有固定模式可遵循。**

二、數字歸位的最小步數與打破 Cycles 次數的關係

例 1：初始牌卡 213876549，Disjoint cycles 為(3)(6)(9)(12)(57)(48)，

檢查 1+2≡5+7≡4+8≡3，

若打破(3)(12)共 1 次，與(57)、(48)有通路可連結，

數字歸位 2$\boxed{13}$876549→2318765$\boxed{4}$9→$\boxed{23}$1476589→321476$\boxed{5}$89→$\boxed{3}$21456789→123456789，最少需要 1+(3-1)+(2-1)+(2-1)=5 步。

例 2：初始牌卡 213546879，Disjoint cycles 為(3)(6)(9)(12)(45)(78)，

檢查 1+2=3，4+5=9，7+8≡6，

若打破(12)(45)通路 1 條，(45)(78)通路 1 條，太少難歸位。

若打破(12)(78)通路 2 條，但與(45)無通路連結。

若打破(3)(45)(78)共 2 次，與(12)有通路可連結，

數字歸位 $\boxed{21}$3546879→12$\boxed{3}$546879→125346$\boxed{8}$79→1283$\boxed{4}$6579→1284365$\boxed{7}$9→1284$\boxed{3}$6759→12$\boxed{8}$456739→123456789，最少需要 1+2+(5-1) =7 步。

小結：**數字歸位的過程，打破 Cycles 的次數可能不只一次，但最少步數不超過 $n-1$ 步。**

三、Cycle 拆解法與數字歸位最少步數的關係

例如：初始牌卡 846739152，Disjoint cycles 是(185369247)

又(185369247)= (18536247)⊕(29)=(1853647)⊕(24)⊕(29) = (185347)⊕(64)⊕(24)⊕(29)

= (18534)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(29) = (1534)⊕(85)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(29)

=(153)⊕(41)⊕(85)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(29) …失敗

重拆(185369247)= (18536247)⊕(29)= (1853247)⊕(62)⊕(29)=(153247)⊕(85)⊕(62)⊕(29)

= (15327)⊕(47)⊕(85)⊕(62)⊕(29)=(1527)⊕(32)⊕(47)⊕(85)⊕(62)⊕(29)

=(127)⊕(52)⊕(32)⊕(47)⊕(85)⊕(62)⊕(29) …失敗

重拆(185369247)= (18569247)⊕(36)=(1856247)⊕(92)⊕(36)=(185647)⊕(24)⊕(92)⊕(36)

=(18547)⊕(64)⊕(24)⊕(92)⊕(36)=(1854)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(92)⊕(36)

=…=(15)⊕(41)⊕(85)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(92)⊕(36)…成功

數字歸位 8467$\boxed{3}$9152→84376$\boxed{9}$152→843762159→8237$\boxed{64}$159→823746$\boxed{1}$59→$\boxed{8}$23146759→5231$\boxed{4}$6789→$\boxed{5}$23416789→123456789，最少需要 8 步。

重拆(185369247)=(18536947)⊕(24)= (15)⊕(41)⊕(85)⊕(71)⊕(46)⊕(94)⊕(36)⊕(24)成功

數字歸位 84673915$\boxed{2}$→82$\boxed{6}$739154→82376$\boxed{9}$154→8237$\boxed{64}$159→823746$\boxed{1}$59→$\boxed{8}$23146759→5231$\boxed{4}$6789→$\boxed{5}$23416789→123456789，最少需要 8 步。

小結：**Cycle 拆解法預先尋找可能的歸位方式。若可成功，最少步數皆相同且方法不唯一。**

四、數字歸位遊戲的「選數控制歸位法」

數字歸位遊戲的**標準解題流程**，能幫助經驗豐富的玩家找出**最少步數的解法**。但是大多數玩家其實不容易短時間快速解決。若**不考慮最少步數**，只求務必將數字歸位，以下提供「選數控制歸位法」可以將每個數字依序歸位。

「**選數控制歸位法**」是將初始牌卡採**大數先歸位**的原則，搭配**三個策略**，可以控制下一

步欲選取的數。反覆持續操作後，最終必可將數字歸位，但未必是最少步數。

「**選數控制歸位法**」的流程圖如下：

將初始牌卡
採<u>**大數先歸位**</u>原則，
利用策略 A、B、C 控制
欲選取的數使其歸位，
最後再從**小數歸位**，
視情況調整。

[策略 A]
若數字必選 a ，欲改選 b ，
利用 $c=b-a \pmod n$ ，需 1 步。
方法： $(ac)\to b$ 必選。

[策略 B]
若數字必選 n ，欲改選 a ，需 2 步。
方法： $(na)\to(an)\to a$ 必選。

[策略 C]　(通常用在數字 a 已經歸位)
若數字必選 a ，欲改選互補數 b ，需 4 步。
方法： $(ab)\to(na)\to(ab)\to(nb)\to b$ 必選。

例 1：初始牌卡	257684913
(先 9 歸位)	→257684319
(策略 A 改選 8)	→237684519
(8 歸位)	→237614589
(策略 B 改選 7)	→239614587→237614589
(7 歸位)	→235614789
(策略 C 改選 6)	→265314789→265914783→235914786→235614789
(6 歸位)	→235416789
(策略 A 改選 5)	→235146789
(5 歸位)	→234156789
(策略 B 改選 2)	→934156782→234156789
(小數歸位)	→134256789→124356789
(策略 C 改選 4)	→125346789→129346785→129356784→124356789
(4 歸位)	→123456789　　需 22 步。

例 2：初始牌卡	718932546
(先 9 歸位)	→718632549
(策略 A 改選 8)	→718236549
(8 歸位)	→714236589
(策略 A 改選 7)	→713246589
(7 歸位)	→513246789
(策略 A 改選 5)	→512346789
(5 歸位)	→412356789
(策略 B 改選 1)	→492356781→412356789

(小數歸位) →$421\boxed{3}56789$→$\boxed{4}23156789$→123456789 需 12 步。

例 3：初始牌卡 $5\boxed{9}4326718$

(先 9 歸位) →$5\boxed{8}4326719$

(8 歸位) →$51432678\boxed{9}$

(策略 B 改選 5) →$95143678\boxed{5}$→$\boxed{5}14326789$

(5 歸位) →$214356\boxed{7}89$

(策略 C 改選 2) →$71435628\boxed{9}$→$91435628\boxed{7}$→$\boxed{9}14356782$→$\boxed{2}14356789$

(小數歸位) →$124\boxed{3}56789$→123456789 需 11 步。

柒、結論

一、數字$1\sim n$隨機排列的初始牌卡，我利用 Disjoint cycles 表示位置與數字間的循環關係。可快速看出哪些數已歸位，判斷 Cycle 內部是否能自行歸位及 Cycles 間是否有通路。

二、由於 Cycle 表示數字的位置變化，可以拆解為數個 Cycles 的合成。所以，我定義符號⊕作為由左而右的步驟合成。而**數字歸位過程為 Cycle 拆解步驟的逆推**。

三、特殊的 Cycle 類型，例如：(ab)型、(abn)型、(abc)型、$(abcn)$型、$(abcd)$型、$(ab)(cn)$型、$(ab)(cde)$型，數字歸位方式有固定策略可以判斷與遵循。

四、m-cycle 內部通路越多，越容易自行歸位，但至少要$m-2$條通路才可能成功。若m-cycle 內部可自行歸位，則數字歸位最少需要$m-1$步，但方式不唯一。

五、數字歸位可利用**歸位判斷法**破題及 **Cycle 拆解法**的技巧，尋找可能的歸位方式。若兩個 Disjoint cycles 排列恰為互補數，則使用 **Cycles 的互補數歸位法**。

六、將初始牌卡以 Disjoint cycles 表示，可以判斷數字歸位的**最少步數**，原則如下：除了(1-cycle)已歸位外，其他每個 Cycle 檢查內部是否可自行歸位，並判斷 Cycles 間是否有通路連接。

(一)若是，最少步數為$n-(\text{cycle數})$。

(二)若否，選擇合適 Cycles 打破合為新 Cycle。最少步數為$n-(\text{cycle數})+(\text{打破次數})\times 2$。

七、特殊的初始牌卡 23⋯n1，數字歸位有固定規律可遵循。

八、**n張牌卡隨機排列，數字歸位的方法不唯一，但最少步數皆相同，且最少步數介於$n-(\text{cycle數})$到$n-1$之間**。

九、「**選數控制歸位法**」是將初始牌卡採**大數先歸位**的原則，搭配**三個策略**，可以控制下一步欲選取的數。反覆持續操作後，最終必可將數字歸位，但未必是最少步數。

捌、參考資料

一、帶我回家。陳冠綺，游佳臻，林杏蓁。嘉義縣第 56 屆科展國中組數學科作品。

二、國小數學第五冊。除法。2017。南一出版社。

【評語】080409

從撲克牌遊戲出發，探討數字歸位與所需的最少移動步數，主題有趣。作者善用符號，引入 Cycle 表示法並利用「Disjoint cycles」來表徵初始牌卡位置，透過歸位判斷法、Cycle 拆解法與 Cycles 的互補數歸位法，探討牌數從3到6的情形並逐一找出可能歸位方式，進而提出n張牌數字歸位遊戲的標準解題流程，具實用價值。另外，作者運用通路概念，提出判斷數字歸位的最少步數的步驟與檢查原則，值得嘉許。

作品海報

壹、研究動機

五花八門的桌遊引起了一陣風潮，其中撲克牌是最常見且便宜的一種。許多撲克牌的遊戲，都必須兩個人以上才能玩，偶然看到這種「數字歸位」的遊戲，不受到人數限制，一個人閒暇時就可以自得其樂。看似簡單的遊戲規則，我實際操作後發現並不容易。因此，我想找出這遊戲所蘊藏的規則或解法，破解其中的奧妙。

貳、研究目的與問題

數字歸位遊戲是將 9 張隨機排列的數字卡歸位。由於情況太複雜，所以我從 3 張牌開始，再逐漸增加紙牌的張數，並將遊戲規則在相同的原則下跟著調整修改。我想找出破解此遊戲的方法，因此提出以下的研究問題：

一、初始牌卡是否能以符號簡化，以方便進行分析？
二、特殊的數字排列類型是否有可遵循的固定策略讓數字歸位？
三、數字歸位是否有常用的技巧與特性？
四、如何判斷數字歸位的最少移動步數？

參、遊戲介紹與符號定義

一、遊戲規則說明

初始牌卡 591728346　　　　數字歸位 123456789


假設紙牌張數為 n，遊戲規則改變如下：

(一)將一副撲克牌中，取出同花色的點數 $1\sim n$ 的紙牌，隨機將數字卡排成一列。

(二)玩家從中取出兩張牌互換，則此兩張牌的數字和為下一步要選取兩張牌中的一張。

若互換的兩張牌數字和大於 n，則將數字和減 n 做為下一步必定要移動的牌。

(三)依照上述規則，持續做兩張牌互換，直到 n 張牌依照 $1,2,\cdots,n$ 由小而大順序排列，稱為所有數字歸位或回家，即為過關。

[註]原始遊戲規則中，9 張紙牌若所取互換的兩張牌，數字和大於 9，則十位數加個位數的和為下一步必定要移動的牌。

亦即將數字和減 9 做為下一步必定要移動的牌。

二、名詞與符號的定義

(一) Cycle 表示法：數字排列的位置變化可以用 Cycle 表示法。設 a,b,c 為正整數且 $a<b<c$，若排列為 bca，表示 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$，

即位置 $a\to$ 數字 b，位置 $b\to$ 數字 c，位置 $c\to$ 數字 a，記作 (abc) 為 3-cycle。例如：初始牌卡 312，以(132)表示。

(二) Disjoint Cycles：若 Cycle 表示法內**無重複的數字**，稱為 Disjoint cycles。例如：初始牌卡 35412，Disjoint cycles 為(134)(25)。

(三)還原數：若選取 n 和任意數 a 互換，則 $n+a\equiv a\pmod n$。因此，a 為下一步必定要移動的數，所以 n 稱還原數。

(四)Cycles 的合成符號⊕：Cycle 表示數字的位置變化，可以拆解為數個 Cycles 的合成，**定義符號⊕作為由左而右的步驟合成**。

例：初始牌卡 35412 可拆解成(25)⊕(34)⊕(13)，先(25)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，再(34)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，最後(13)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

(五)互補數：數字 $1\sim n$ 排列，若 $a+b=n$，則稱 a 和 b 為互補數，而 n 的互補數為 n。

(六)通路：當 Cycle 內部中，某兩數的和也在 Cycle 內部時，則視為一條內部通路。

當兩個 Cycles 間，若某個 Cycle 內兩數的和跳至另一個 Cycle，則稱此兩個 Cycles 間有外部通路。

例如：Disjoint cycles 為(134)(25)時，(134)內部通路有 1+3=4、(25)內部通路有 2+5≡2(mod 5)。

而 1+4=5，3+4≡2(mod 5)，則(134)與(25)間有外部通路。

肆、研究過程

一、三張牌

(一)若已有一張牌歸位，則直接將剩餘兩張牌互換，只需 1 步。 例如：(1)(23)表示 132 (23 換)→123。

(二)若三張牌均未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	Cycle 拆解法 數字歸位過程	最少步數
231	(123)	拆解為(12)⊕(13) 或 (23)⊕(12) 歸位(13)→(12)，即 231→213→123 或歸位(12)→(23)，即 231→132→123	2
312	(132)	拆解為(12)⊕(23) 或 (13)⊕(12) 歸位(23)→(12)，即 312→213→123 或歸位(12)→(13)，即 312→321→123	2

[性質 1] 若 $1\le a<b<c\le n$，3-cycle 有 (abc)、(acb) 兩種類型；而類型 (abc)、(bca) 與 (cab) 是相同的排列方式。

[證明]

3-cycle 有 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$，即 (abc)、(acb) 兩種類型；

而 (abc)、(bca) 與 (cab) 皆表示 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$，是相同的排列方式。

發現 1 當 1~3 排列為 3-cycle 時，歸位方式不唯一且最少 2 步。

發現 2 將初始牌卡的數字歸位，步驟為 Cycle 拆解的「逆推」。

二、四張牌

(一)若已有兩張牌歸位，則直接將剩餘兩張牌互換，只需 1 步。

(二)若已有一張牌歸位，則剩下三張牌未歸位，討論如下：

初始牌卡	Disjoint cycles	數字歸位過程	步數
1342	(1)(234)	1342→1324→1234	2
1423	(1)(243)	1423→1324→1234	2
3241	(2)(134)	3241→3214→1234	2
4213	(2)(143)	4213→3214→1234	2
2431	(3)(124)	2431→2134→1234	2
4132	(3)(142)	4132→2134→1234	2
2314	(4)(123)	2314→1324→1234	2
3124	(4)(132)	3124→3214→1234	2

[性質 2]當 (abn) 或 (anb) 類型時，其中 $1\le a<b<n$ 且 n 是還原數，則先從還原數 n 歸位著手，數字歸位需要 2 步。

[證明] 類型 (abn) 時，將 $bna\to ban\to abn$，需要 2 步。

類型 (anb) 時，將 $nab\to ban\to abn$，需要 2 步。

[性質 3]當 (abc) 或 (acb) 類型時，其中 $1\le a<b<c<n$ 且 n 是還原數，若 $a+b\equiv c\pmod n$、$a+c\equiv b\pmod n$ 或 $b+c\equiv a\pmod n$，則數字歸位需 2 步。

[證明]當類型 (abc) 時，若 $a+b\equiv c\pmod n$，將 $bca\to acb\to abc$，需 2 步。

若 $a+c\equiv b\pmod n$，將 $bca\to bac\to abc$，需 2 步。

若 $b+c\equiv a\pmod n$，將 $bca\to cba\to abc$，需 2 步。

同理可證　當類型 (acb) 時，數字歸位需 2 步。

(三)若四張牌均未歸位，討論後發現：

[性質 4]遇到類型$(ab)(cn)$時，其中$1\le a,b,c<n$且n是還原數，
若$a+b\equiv c\ (\mathrm{mod}\,n)$或$a+b=n$，則需要 2 步可以將數字歸位。

[討論]$n=4$的 4-cycle **(符號相同代表排列恰為互補數，歸為同組。)**

★(1234)= (2341)	★(1432)=(2143)
(1234)=(23)⊕(12)⊕(14)	(1432)=(21)⊕(32)⊕(34)
(1234)=(34)⊕(13)⊕(23)	(1432)=(14)⊕(31)⊕(21)
◆(1243)=(3124)	◆(1324)
(1243)=(13)⊕(23)⊕(34)	(1324)=(31)⊕(21)⊕(14)
(1243)=(23)⊕(43)⊕(12)	(1324)=(21)⊕(41)⊕(32)
(1243)=(12)⊕(14)⊕(13)	(1324)=(32)⊕(34)⊕(31)
(1243)=(24)⊕(13)⊕(23)	(1324)=(24)⊕(31)⊕(21)
●(1423)=(2314)	●(1342)=(2134)
(1423)=(13)⊕(23)⊕(24)	(1342)=(31)⊕(21)⊕(24)
(1423)=(23)⊕(12)⊕(24)	(1342)=(21)⊕(32)⊕(24)
(1423)=(12)⊕(24)⊕(13)	(1342)=(32)⊕(24)⊕(31)
(1423)=(14)⊕(13)⊕(23)	(1342)=(34)⊕(31)⊕(21)
(1423)=(14)⊕(23)⊕(12)	(1342)=(34)⊕(21)⊕(32)

發現 **將 1~4 排列為 4-cycle 的 6 種情況，依據遊戲規則作 Cycle 拆解，發現可分三組，每組的 Cycle 排列恰為互補數，而 Cycle 的拆解也恰為互補數。**

[性質 5] **Cycle 拆解法**：設m為正整數且$3\le m\le n$，
$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{m-1}a_m)$拆解為$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_m)\oplus(a_ia_{i+1})$。

[證明]$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_{m-1}a_m)$
表示$a_1\to a_2$，…，$a_{i-1}\to a_i$，$a_i\to a_{i+1}$，…，$a_{m-1}\to a_m$，$a_m\to a_1$。
$(a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_m)$表示$a_1\to a_2$，…，$\boxed{a_{i-1}\to a_{i+1}}$，…，$a_m\to a_1$
且(a_ia_{i+1})表示$a_i\to a_{i+1}$，$\boxed{a_{i+1}\to a_i}$
合成後$a_1\to a_2$，…，$\boxed{a_{i-1}\to a_i}$，$a_i\to a_{i+1}$，…，$a_{m-1}\to a_m$，$a_m\to a_1$。

[性質 6]設n正整數且$n\ge 2$，當數字$1\sim n$排列為
n-cycle$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)$時，則數字歸位需要$n-1$步。

[證明]因為$(a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n)$可拆解為$(a_1a_2\cdots a_{n-1})\oplus(a_na_1)$，
而歸位為 Cycle 拆解法的逆推，此時a_n **已經歸位**，
下一步須選$a_1+a_n\equiv a_i\ (\mathrm{mod}\,n)$，再將$(a_1a_2\cdots a_{n-1})$拆解為
$\boxed{(a_1\cdots a_{i-2}a_i\cdots a_{n-1})\oplus(a_{i-1}a_i)}$ 或 $\boxed{(a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n-1})\oplus(a_ia_{i+1})}$，
選擇**需避開數字和出現已經歸位的數字，做為下一步驟選取數字**，
以此原則進行下去，最後拆解為$n-1$個 2-cycle 的步驟合成，
所以數字歸位需要$n-1$步。

[性質 7] 設m正整數且$2\le m\le n$，若m-cycle 存在不同的數字歸位方式，
則最少皆需要$m-1$步。

三、五張牌、六張牌

[性質 8]遇到類型$(ab)(cd)$時，其中$1\le a<b<n$，$1\le c<d<n$且n是還原數
若$a+b\equiv c\ (\mathrm{mod}\,n)$或$a+b\equiv d\ (\mathrm{mod}\,n)$，則數字歸位需要 2 步。

[性質 9]遇到類型$(abcn)$，$(abnc)$或$(anbc)$時，其中$1\le a<b,c<n$且n是還原數，若$a+b\equiv c\ (\mathrm{mod}\,n)$，$b+c\equiv a\ (\mathrm{mod}\,n)$或$a+c\equiv b\ (\mathrm{mod}\,n)$，則數字歸位最少需 3 步。
[註]**若n右側數字恰為條件的<u>數字和</u>，則從條件著手，否則從n歸位開始。**

[性質 10]遇到類型$(abcn)$，$(abnc)$或$(anbc)$時，其中$1\le a<b,c<n$且n是還原數，若$a+b=n$或$b+c=n$或$a+c=n$，則數字歸位最少步數如下：

類型	$(abcn)$	$(abnc)$	$(anbc)$
$a+b=n$	3 步	3 步	無法判斷
$b+c=n$	3 步	無法判斷	3 步
$a+c=n$	無法判斷	3 步	3 步

[性質 11]Disjoint cycles 為$(ab)(cde)$類型時，其中$1\le a<b\le n$，$1\le c<d,e\le n$且n是還原數，若**<u>兩個 Cycles 間有通路</u>**且(cde)**為<u>可歸位型</u>**，則數字歸位最少 3 步。

[討論]若$n=6$，1245 排列的 4-cycle 歸位情形：

Disjoint cycles	Cycle 拆解法與數字歸位過程 **只有兩通路：1+4=5 和 2+5≡1 (mod 6)**	最少步數
(1245)	(145)⊕(24)，歸位(24)→(145)，2451→4151→× (125)⊕(45)，歸位(45)→(125)，2451→2541→×	×
(1254)	(154)⊕(25)，歸位(25)→(154)，2514→5214→5241→1245 (125)⊕(14)，歸位(14)→(125)，2514→2541→5241→1245	3
(1425)	(145)⊕(25)，歸位(25)→(145)，4521→4251→1254→1245 (125)⊕(24)，歸位(24)→(125)，4521→2541→×	3
(1452)	(145)⊕(12)，歸位(12)→(145)，4152→4251→× (152)⊕(45)，歸位(45)→(152)，4152→5142→×	×
(1524)	(154)⊕(24)，歸位(24)→(154)，5412→5214→× (152)⊕(14)，歸位(14)→(152)，5412→5142→2145→1245	3
(1542)	(154)⊕(12)，歸位(12)→(154)，5124→5214→× (152)⊕(24)，歸位(24)→(152)，5124→5142→×	×

發現 **m-cycle 內部通路至少$m-2$條才可能成功。若可歸位最少需$m-1$步。**

[性質 12]遇到類型$(abcd)$，$1\le a,b,c,d<n$，n是還原數且$abcd$ <u>只有兩通路</u>。若abc有一通路，假設abc間通路★+☆=∗，則將$(abcd)$拆解$(abc)\oplus(ad)$，再檢查是否有通路$a+d\equiv$★ $(\mathrm{mod}\,n)$，若有ad ★通路，則數字歸位需 3 步。

伍、研究結果

一、數字歸位遊戲的標準解題流程與最少步數

將**初始牌卡**以 Disjoint cycles 表示，設$(a\text{-cycle})(b\text{-cycle})\cdots(g\text{-cycle})$

★**內部自行歸位類型**
- (ab)型
- (abn)型
- (abc)型，abc有通路
- $(abcn)$型，abc有通路
- $(abcn)$型，abc某兩個數字的和為n
- n-cycle

除(1-cycle)已歸位外，其他每個 Cycle 檢查<u>內部數字是否可自行歸位</u>，並判斷 <u>**Cycles**</u> **間是否有通路**連接。

★**計算內部通路數**
m-cycle 至少$m-2$條通路且通路可連接。

☆**判斷 cycles 間通路**

是：
由通路決定 Cycles 的先後歸位次序。若較難判斷時，可用歸位判斷法破題及 Cycle 拆解法，尋找可能歸位方式。
★最少需要 **$n-$(cycle 數)** 步。

否：
選擇合適的 Cycle <u>打破</u>後，合併為新的 (t-cycle)，使內部可自行歸位。
★最少需要 **$n-$(cycle 數) +(打破次數)×2** 步。

★**小結**：**初始牌卡的 Disjoint cycles 若有通路連接，最少步數為$n-$(cycle數)。**
若無通路，則需打破，每次增加(打破次數)×2 步，但不超過$n-1$步。
因此，最少步數介於$n-$(cycle數) 到$n-1$之間。

[註] **歸位判斷法**：
m-cycle 若有還原數n，可從還原數n歸位著手。
例如：514632→514236→524136→523146→523416→123456。
m-cycle 內逐一檢查t歸位後的數字和是否仍在 Cycle 內，可作為第一步。
例如：542136→512436→312456→321456→123456。

例 1：初始牌卡 627915438，Disjoint cycles 是**(2)(165)(37498)**

★**內部自行歸位**
(165)是(abc)型且 **1+5=6** 有通路

☆**Cycles 間通路**
3+7≡1，換(165)
6+1=7，換(37498)

除了(2)已歸位外，檢查(165),(37498)是否可自行歸位？**(165)(37498)**是否有通路連接？

★**計算內部通路數**
(37498)至少需 3 條通路。
3+4=7，3+9≡3，
7+9≡7，4+9≡4，
4+8≡3，**9+8≡8**。

是

(37498)=(3748)⊕(98)=(378)⊕(84)⊕(98)=(87)⊕**(73)**⊕(84)⊕(98)，
數字歸位 627915438→627815439→627415839→623415879→623451879→123456879→123456789，最少需要 **9-3=6** 步。

例 2：初始牌卡 473512698，Disjoint cycles 是**(145)(276)(3)(89)**

★**內部自行歸位**
(145)是(abc)型且 **1+4=5** 有通路
(89)是(ab)類型

除了(3)已歸位外，檢查(145),(276),(89)是否可自行歸位？(145) (276) (89)是否有通路連接？

★**計算內部通路數**
(276)內部無通路

☆**Cycles 間通路**
4+5=9，換(89)
1+5=6，換(276)

否

將(276)與(89)打破，選(29)換，Disjoint cycles 成為**(145)(3)(27698)**。
又**(27698)=**(76)⊕(78)⊕(98)⊕(27)，**(145)=**(45)⊕(14)，數字歸位 473512698→473519628→423519678→423518679→423517689→423516789→123546789→123456789，最少**(9-4)+1×2=7** 步。

二、Cycles 的互補數歸位法

若兩個 **<u>Disjoint cycles 排列恰為互補數，則 Cycle 的拆解方式也恰為互補數</u>**，<u>所以數字歸位過程也恰為互補數</u>。
例如：Disjoint cycles 為(153462)，與互補的 Disjoint cycles (513264)，

(153462)=(51)⊕(14)⊕(34)⊕(21)⊕(62)， 歸位 514632→514236→524136→523146→523416→123456。	**(513264)= (15)⊕(52)⊕(32)⊕(45)⊕(64)**， 歸位 362514→342516→352416→253416→523416→123456。

陸、討論

一、特殊初始牌卡 23⋯n1 的數字歸位方式

當 $n=3$，初始牌卡 231，Disjoint cycles 是(123)，**(123) = (32)⊕(12)**，數字歸位 231→132→123，最少 2 步。
當 $n=4$，初始牌卡 2341，Disjoint cycles 是(1234)，**(1234) = (43)⊕(13)⊕(23)**，數字歸位 2341→3241→1243→1234，最少 3 步。
當 $n=9$，初始牌卡 234567891，Disjoint cycles 是(123456789)，**(123456789)=(98)⊕(18)⊕(28)⊕(38)⊕(48)⊕(58)⊕(68)⊕(78)** 數字歸位 234567891→234568791→234586791→234856791→238456791→283456791→823456791→123456798→123456789， 最少需要 8 步。

小結：特殊的初始牌卡 23⋯n1，Disjoint cycles 是(123⋯n)，Cycle 的拆解有固定規律。因此，數字歸位方式有固定模式可遵循。

二、數字歸位的最小步數與打破 Cycles 次數的關係

例 1：初始牌卡 213876549，Disjoint cycles 為(3)(6)(9)(12)(57)(48)，檢查 1+2≡5+7≡4+8≡3，

若<u>**打破(3)(12)共 1 次**，與(57)、(48)有通路可連結</u>，

數字歸位 213876549→231876549→231476589→321476589→321456789→123456789，最少(9-6)+**1×2**=5 步。

例 2：初始牌卡 213546879，Disjoint cycles 為(3)(6)(9)(12)(45)(78)，檢查 1+2=3，4+5=9，7+8≡6，

若打破(12)(45)通路 1 條，(45)(78)通路 1 條，太少難歸位。若打破(12)(78)通路 2 條，但與(45)無通路連結。

若<u>**打破(3)(45)(78)共 2 次**，與(12)有通路可連結</u>，

數字歸位 213546879→123546879→125346879→128346579→128436579→128436759→128456739→123456789，

最少需要(9-6)+**2×2** =7 步。

小結：數字歸位的過程，打破 Cycles 的次數<u>可能不只一次</u>，但最少步數不超過 $n-1$ 步。

三、Cycle 拆解法與數字歸位最少步數的關係

例如：初始牌卡 846739152，Disjoint cycles 是(185369247)

又(185369247)= (18536247)⊕(29)=(1853647)⊕(24)⊕(29) = (185347)⊕(64)⊕(24)⊕(29)= (18534)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(29)

= (1534)⊕(85)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(29)=(153)⊕(41)⊕(85)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(29) ⋯失敗

重折(185369247)= (18569247)⊕(36)=(1856247)⊕(92)⊕(36)=⋯=(15)⊕(41)⊕(85)⊕(17)⊕(64)⊕(24)⊕(92)⊕(36) ⋯成功

歸位 846739152→843769152→843762159→823764159→823746159→823146759→523146789→523416789→123456789。

重折(185369247)=(18536947)⊕(24)=⋯=(15)⊕(41)⊕(85)⊕(71)⊕(46)⊕(94)⊕(36)⊕(24) ⋯成功

歸位 846739152→826739154→823769154→823764159→823746159→823146759→523146789→523416789→123456789。

小結：利用 <u>Cycle 拆解法</u>預先尋找可能的歸位方式。若初始牌卡可以成功歸位，最少步數皆會相等，且方法不唯一。

四、數字歸位遊戲的「選數控制歸位法」

「**選數控制歸位法**」是將初始牌卡採<u>**大數先歸位**</u>的原則，搭配**三個策略**，可以控制下一步欲選取的數。反覆持續操作後，最終必可將數字歸位，但未必是最少步數。

「**選數控制歸位法**」的流程圖如下：

將初始牌卡採<u>大數先歸位</u>原則，利用策略 A、B、C 控制欲選取的數使其歸位，最後再從<u>小數歸位</u>，視情況調整。

[策略 A]
若數字必選 a，欲改選 b，利用 $c=b-a \pmod n$。
方法: $(ac)\to b$ 必選。需 1 步

[策略 B]
若數字必選 n，欲改選 a，
方法: $(na)\to(an)\to a$ 必選
需 2 步。

[策略 C] (通常用在數字 a 已經歸位)
若數字必選 a，欲改選互補數 b。
方法: $(ab)\to(na)\to(ab)\to(nb)\to b$ 必選。
需 4 步

例如：初始牌卡	572184693
先 9 歸位	→572184639
策略 A 改選 8	→372184659
8 歸位	→372154689
策略 A 改選 7	→472153689
7 歸位	→462153789
策略 A 改選 6	→264153789
6 歸位	→234156789
策略 B 改選 3	→294156783→234156789
策略 A 改選 4	→214356789
4 歸位	→213456789
策略 C 改選 2	→713456289→913456287→913456782→213456789
2 歸位	→123456789　　需 16 步。

柒、結論

一、數字 $1\sim n$ 隨機排列的初始牌卡，我利用 Disjoint cycles 表示位置與數字間的循環關係。可快速看出哪些數已歸位，判斷 Cycle 內部是否能自行歸位及 Cycles 間是否有通路。

二、由於 Cycle 可拆解為數個 Cycles 的合成。我定義符號⊕作為由左而右的步驟合成。而<u>數字歸位為 Cycle 拆解步驟的逆推</u>。

三、特殊 Cycle 類型，例如: (ab)、(abn)、(abc)、$(abcn)$、$(abcd)$、$(ab)(cn)$、$(ab)(cde)$ 型，數字歸位有固定策略可以判斷與遵循。

四、m-cycle 內部通路越多，越容易自行歸位，但至少要 $m-2$ 條通路才可能成功。若成功，則最少需要 $m-1$ 步，但方式不唯一。

五、數字歸位可利用<u>歸位判斷法</u>及 <u>Cycle 拆解法</u>，尋找可能方式。若 <u>Disjoint cycles 排列恰為互補數</u>，則使用 <u>**Cycles 的互補數歸位法**</u>。

六、將初始牌卡以 Disjoint cycles 表示，除了已歸位外，檢查每個 Cycle 內部是否可自行歸位，並判斷 Cycles 間是否有通路連接。若否，選擇合適 Cycles <u>打破</u>合為新 Cycle。因此，數字歸位的最少步數為 <u>$n-(\text{cycle數})+(\text{打破次數})\times 2$</u>。

七、特殊的初始牌卡 23⋯n1，數字歸位有固定規律可遵循。

八、n 張牌卡隨機排列，數字歸位的方法不唯一，但<u>最少步數</u>皆相同，且最少步數介於 $n-(\text{cycle數})$ 到 $n-1$ 之間。

九、「**選數控制歸位法**」是將初始牌卡採<u>**大數先歸位**</u>的原則，搭配**三個策略**，可以控制下一步欲選取的數。反覆持續操作後，最終必可將數字歸位，但未必是最少步數。

捌、參考資料

一、帶我回家。陳冠綺，游佳臻，林杏蓁。嘉義縣第 56 屆科展國中組數學科作品。

二、國小數學第五冊。除法。2017。南一出版社。