

# 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 數學科

(鄉土)教材獎

080408

玩創多米諾

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者： 小五 張嘉泰 小五 王語賢 小四 李亭霓	指導老師： 林佑盈 張鐙月
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：多米諾骨牌、四則運算、排列組合

## 摘要

本研究從探討多米諾骨牌遊戲出發，討論可否利用不同策略達成骨牌遊戲勝利，並且從遊戲過程中研究骨牌特性，思考如何將此特性與四則運算結合，研究出不同的遊戲玩法，除此之外，也期望在研究過程中，可以探討出骨牌排列的規則，進而歸納出合適的公式，以利遊戲進行與增加訓練四則運算能力之機會。



(圖一 製作多米諾骨牌模型)

### 壹、研究動機

之前在上課時老師教我們四則運算的加、減、乘、除，透過一些題目的實際運算，覺得可以將所學到的計算能力運用在生活中，是一件有趣的事情。下課剛好有同學帶「多米諾骨牌」來學校，在遊戲的過程中，發現骨牌兩側連接點要用同樣的數字，並且這 28 張骨牌總和是 168。我們就思考著可否利用多米諾骨牌的遊戲特性，把老師上課教的四則運算，運用到骨牌遊戲上，並且修改遊戲方法，利用骨牌點數加、減、乘、除的過程中，使骨牌計算出來的總和為 0，並找出其中的規律。

於是我找了認識的五年級學長、學姐，一起成立了三人研究小組，一同進行「多米諾骨牌」研究。

### 貳、研究目的

- 一、思考出運用不同策略 Domino 骨牌遊戲可獲勝方法。
- 二、找出如何運用加、減法讓 Domino 骨牌的排列組合最終答案為零。
- 三、找出如何運用加、減、乘、除讓 Domino 骨牌有特殊排列組合。
- 四、將四則運算應用在生活上，透過構思出骨牌的不同玩法，可以訓練四則運算能力並添加遊戲的趣味性。

### 參、研究器材

紙、筆、記錄本、筆記本、Domino 骨牌遊戲、Domino 骨牌遊戲模型（厚紙板、直尺、剪刀、彩色筆）

### 肆、研究架構

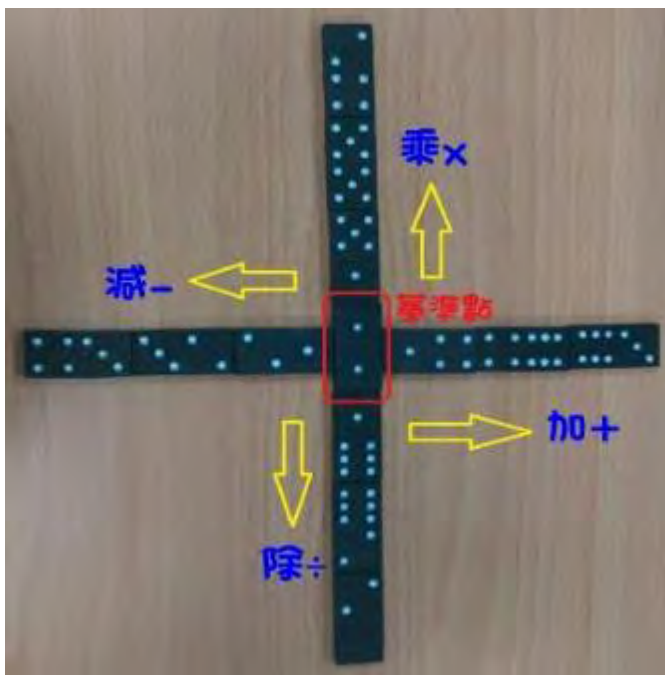
- 一、找出 Domino 骨牌遊戲獲勝方法。
- 二、思考如何將四則運算融入 Domino 骨牌遊戲中。

三、修改 Domino 骨牌遊戲規則，玩家以合作方式，運用加法、減法，以中央骨牌當作基準點並向左右延伸，共同排列出最後答案為零的組合。(如圖二)

四、以中央骨牌當作基準點，上(乘)、下(除)、左(減)、右(加)四方延伸，四人共同進行，增加玩家、四則運算讓遊戲更添豐富性。(如圖三)



(圖二)



(圖三)

#### 伍、研究過程

在研究過程中，有查詢是否有人做過相關的骨牌研究，發現在之前在做骨牌的相關研究，是研究骨牌推倒、倒下、魔方陣、與任意矩形的三階多米諾，而我們是把多米諾與四則運算做融合來做研究，並設計出公式與遊戲規則，是完全創新與先前研究完全不同!

#### 一、瞭解 Domino 骨牌遊戲

(一) 多米諾骨牌 (Dominoes)，又稱西洋骨牌，每個多米諾骨牌都是一個矩形牌，中間以一條線將其分成兩個正方形的，每一端都標有一些點數或空白。

(二) 骨牌通常以其兩端點數命名，例如  $\boxed{2|5}$  或  $\boxed{5|2}$  是用來代表兩端分別為 2 點和 5 點的骨牌 (如圖四)。在兩端具有相同值的骨牌為「雙牌」，通常稱為雙 0、雙 1、雙 2 等 (如圖五)，相反，兩端不同值的骨牌稱為「單牌」。

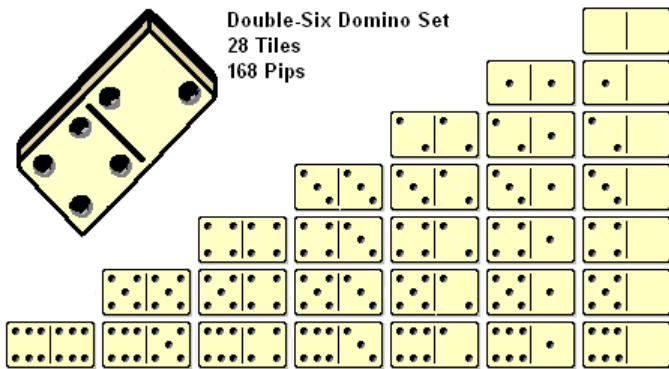


(圖四 代表  $\boxed{2|5}$  或  $\boxed{5|2}$  之骨牌)

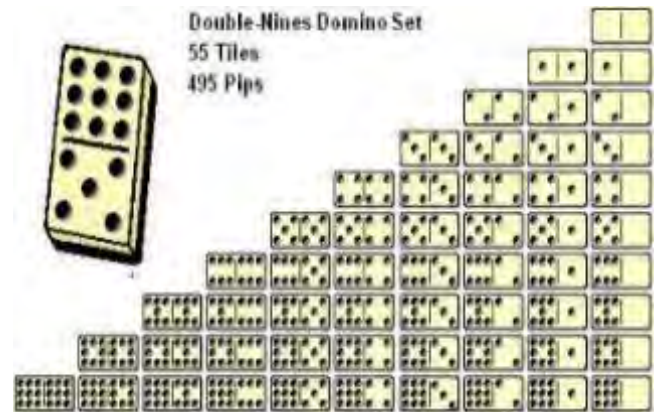


(圖五 雙排：雙 0、雙 1、雙 2、雙 3、  
雙 4、雙 5、雙 6)

(三) 市面上最常見的多米諾骨牌是雙 6(共 28 張牌如圖六)和雙 9(共 55 張牌如圖七)，也有更多的骨牌組合可以以公式類推，一個雙  $n$  牌組，骨牌數目的公式為： $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ，因本研究為探討西洋骨牌之基礎，故以雙 6 牌數為主，其餘骨牌牌數可供未來研究。



(圖六 雙 6 多米諾骨牌)



(圖七 雙 9 多米諾骨牌)

(四) 多米諾骨牌遊戲規則：

1. 雙 6 共有 28 張牌，平均分配給四人，一人 7 張。
2. 玩家擁有  $\boxed{6|6}$  的先出，玩家以順時鐘順序出牌，向骨牌兩端做延伸，若手中無牌的玩家可以 pass 換下一位玩家繼續出牌。
3. 最快將手上所有骨牌出完的玩家即可贏得分數，分數計算方式為：其他玩家手上剩餘的骨牌數字加總，即為贏家此局所獲得分數。
4. 分數最快累積達到 100 分則為遊戲總冠軍。

## 二、製作 Domino 骨牌遊戲

(一) 所需用具：厚紙板、直尺、剪刀、彩色筆



(二) 製作過程：

 <p>1</p>	 <p>2</p>	 <p>3</p>
<p>準備材料： 厚紙板、直尺、剪刀、 彩色筆</p>	<p>測量實際骨牌尺寸： 長：3.7 公分 寬：1.7 公分</p>	<p>在厚紙板上描繪尺寸。</p>
 <p>4</p>	 <p>5</p>	
<p>剪下厚紙板並用彩色筆在各 小塊厚紙板上描繪點數。</p>	<p>將骨牌從 <math>0 0</math> 排列到 <math>6 6</math>，並檢查是否為 28 張 骨牌(雙 6) 即完成製作。</p>	

三、操作 Domino 骨牌遊戲

遊戲過程中，發現：

(一) 同一張骨牌數字相同的先出，較不容易輸。

舉例說明：

若手上有  $6|6$   $5|5$   $6|5$   $6|2$   $6|3$

則要先出  $6|6$   $5|5$ ，因為此兩張牌前後可連接的選項只有一種，故要  
先把選項少的牌先出完，否則後面可能無牌可連接。

(二) 先出牌的玩家，因為可以決定出牌數字，比較容易先出完手中的骨牌，贏的機  
率比較大。

(三) 過程中要隨時觀察牌局，每個數字的出現次數為 8 次，若觀察到某數字已經出  
現很多次，代表可連接的手牌已變少，應該要趕快出完此數字牌。

→ (28 張牌 × 2 個數) ÷ 7 個數字 = 每個數字的出現次數為 8 次。

(四) 當手牌中有同數字骨牌較多時，先出此數字骨牌，要趕快把此數字出完，不然之後出此數字牌的機會會越來越少。

舉例說明：

若手中有  $\boxed{4|1}$   $\boxed{4|3}$   $\boxed{4|5}$   $\boxed{2|1}$   $\boxed{2|3}$ ，4 出現三次，1、2、3 皆出現兩次，則可出排順序以 4 為優先，1、2、3 第二順位出牌。

#### 四、初階版 Domino 骨牌遊戲

Domino 骨牌是將點數向兩端連接延伸的遊戲，除了「兩端連接」這個條件之外，我們嘗試將國小數學課時常訓練的四則運算融入此遊戲當中，希望可以透過 Domino 骨牌將四則運算更加靈活運用，並且增添趣味的腦力激盪之機會。

**初階版：**修改 Domino 骨牌遊戲規則，玩家以合作方式，運用加法、減法，以中央骨牌當作基準點並向左右延伸，共同排列出**最後答案為零**的組合。基準點會有 (0, 0)、(1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 4)、(5, 5)、(6, 6) 做替換。

公式為： $\bigcirc - \diamond = 0$

$\bigcirc$  為加法總和， $\diamond$  為減法總和，由於基準點在中間，又兩個數字一樣，所以平分兩邊剛好為 0。(如圖八 示範排列，只先排出排法，但未完全使用完所有骨牌)



(圖八)

(一) 研究過程中，發現：

1. 所有骨牌數字加起來總數為 168，平分為二，則基準點兩側總和應為  $168 \div 2 = 84$ 。

兩邊骨牌放置的時後，盡量平衡兩邊的數字，可先把一邊排成加總為 84，再將另一邊拼湊出 84。

2. 當一邊的骨牌數字加總太大時，下一次放置就要選點數小一點的骨牌；若一邊的骨牌數字加總太小時，則下一次放置就要選點數大一點的骨牌。

3. 兩邊都要平均分配點數，不要都把相同數字集中在同一邊。

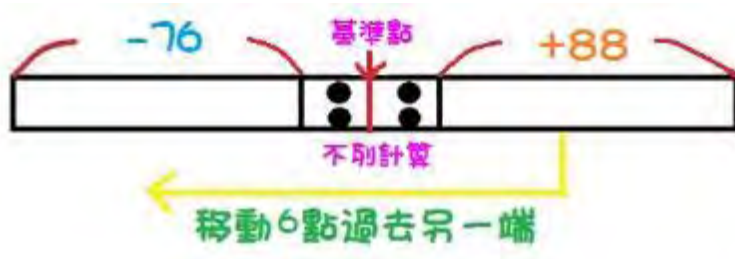
(二) 速排方法

1.  $(168 - \boxed{\text{基準數}}) \div 2 =$  每一邊排列組合

2. 先把基準擺放好，隨機並盡量平均排放兩邊。

3. 計算兩邊的差距。(以正、負做計算)，計算完的兩邊差距  $\div 2 =$  多的那端骨牌移動到少的那端骨牌數。

舉例說明：



基準點為  $2 \times 2 = 4$ ，因為基準點左右平分，加、減同一個數字，所以可以不納入計算，故計算公式為： $(168 - 4) \div 2 = 82$

範例為隨機排放並將兩邊點數加總計算，左邊 (-) 總和為 76，右邊 (+) 總和為 88，兩邊差距為  $88 - 76 = 12$ 。

研究過程中，我們發現移動 1 點，兩端距離差為 2，故只需要移動距離差的一半即可達到平衡。

$12 \div 2 = 6$  → 則點數較多的【右邊(+)] 需移動 6 點至【左邊(-)]，即可達到兩邊骨牌點數總和各為 82。

【右邊(+)]： $88 - 6 = 82$

【左邊(-)]： $-(76 + 6) = -82$

### (三) 實際操作

1. 基準點為  $\boxed{0 \mid 0}$

$168 \div 2 = 84$  → 各邊需排放骨牌點數總和為 84。(如圖九)



(圖九)

2. 基準點為  $\boxed{1 \mid 1}$  →  $1 \times 2 = 2$

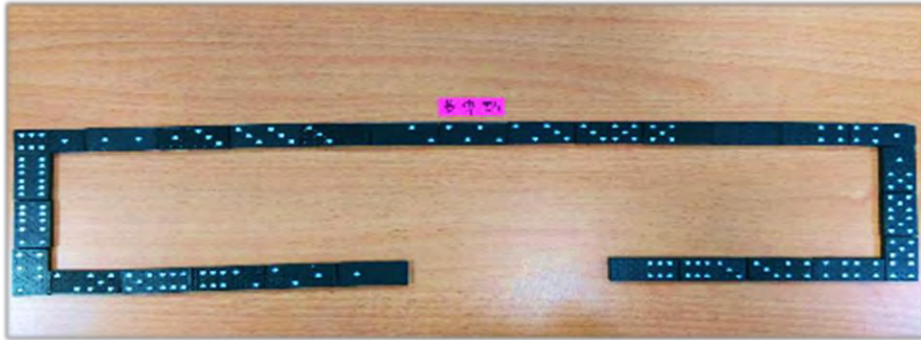
$(168 - 2) \div 2 = 83$  → 各邊需排放骨牌點數總和為 83。(如圖十)



(圖十)



3. 基準點為  $\boxed{2|2} \rightarrow 2 \times 2 = 4$   
 $(168 - 4) \div 2 = 82 \rightarrow$  各邊需排放骨牌點數總和為 82。(如圖十一)



(圖十一)

4. 基準點為  $\boxed{3|3} \rightarrow 3 \times 2 = 6$   
 $(168 - 6) \div 2 = 81 \rightarrow$  各邊需排放骨牌點數總和為 81。(如圖十二)



(圖十二)

5. 基準點為  $\boxed{4|4} \rightarrow 4 \times 2 = 8$   
 $(168 - 8) \div 2 = 80 \rightarrow$  各邊需排放骨牌點數總和為 80。(如圖十三)



(圖十三)

6. 基準點為  $\boxed{5|5} \rightarrow 5 \times 2 = 10$   
 $(168 - 10) \div 2 = 79 \rightarrow$  各邊需排放骨牌點數總和為 79。(如圖十四)



(圖十四)



7. 基準點為  $\boxed{6 \mid 6} \rightarrow 6 \times 2 = 12$

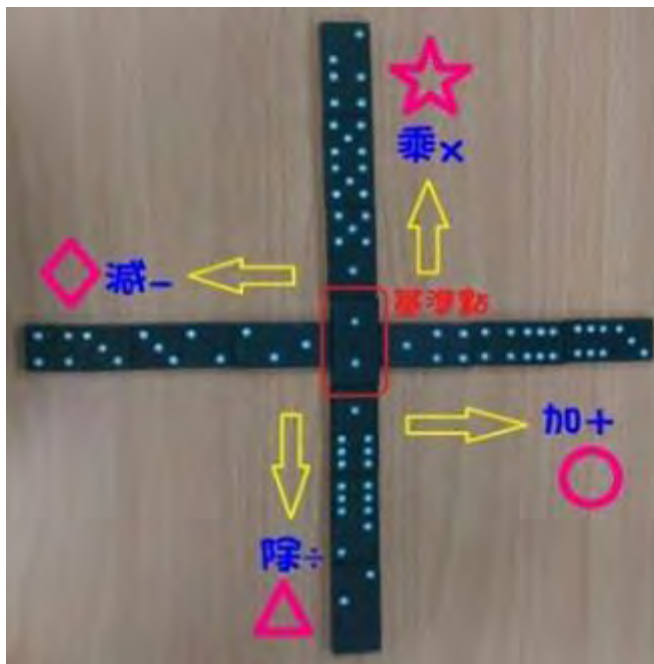
$(168 - 12) \div 2 = 78 \rightarrow$  各邊需排放骨牌點數總和為 78。(如圖十五)



(圖十五)

### 五、進階版 Domino 骨牌遊戲

**進階版：**以  $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(3, 3)$ 、 $(4, 4)$ 、 $(5, 5)$ 、 $(6, 6)$  為基準點，研究是否能代入基準點，將點數經過加、減、乘、除後為 0 的骨牌排列。在研究過程中，中間為基準點，去替換基準點，把上方骨牌排列為乘 (☆)，下方骨牌排列為除 (△)，左方骨牌排列為減 (◇)，右方骨牌排列為加 (○)。在數學四則運算過程中，當有遇到加減乘除時，算式會為先乘除後加減。(如下圖十六)



(圖十六)

基準點在中間，代入公式：基準點總和  $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$  的骨牌排列組合。

(一) 以  $(0, 0)$  為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列。

1. 四則運算中，當骨牌基準點要做四則運算時，會先乘除上下兩邊的骨牌總和，再做加減左右兩邊的骨牌總和。
2. 假設乘的骨牌總和用 ☆ 來代替，除的骨牌總和用 △ 來代替，加的骨牌總和

用○來代替，減的骨牌總和用◇來代替。

3. 因為在所有二十八張骨牌中，骨牌至少有一邊為 0 的骨牌共有 7 張，在排列的過程中，透過不同的基準點，其排列骨牌的方式會有所不同。
4. 當由 (0, 0) 為基準點時排列時，因為扣掉基準點時，有一邊為 0 的骨牌還有 6 張骨牌，，在多米諾骨牌的玩法中，相鄰的骨牌那一面，必須是相同的數字。所以當 (0, 0) 為基準點時，必須上下左右，也就是加減乘除必須要都放有一邊為 0 的骨牌。

如下圖圖十七所示：



(圖十七)

5. 因為上下左右各放一張有一邊為 0 的骨牌，所以還會剩下兩張有一邊為 0 的骨牌，研究後發現，把剩餘兩張骨牌放同一邊，會比較好找出符合的骨牌排列。
6. 由於所有二十八張骨牌數字總和為 168，基準點為 (0, 0)，在不同基準點時，為了不因乘除的關係，讓數字變化過大，所以當乘除兩邊的數字總和一樣時，等於在代入公式時，基準點在運算乘除過後，等於基準點乘於 1，還是為基準點本身，只要做單純的加減計算，會較好排列出公式：基準點總和 $\times\star\div\triangle+\circ-\diamond=0$  的骨牌排列方式。
7. 所有骨牌總數和為 168，因為要分配到加減乘除四邊，把總和除以 4 平均分配， $168\div 4=42$ ，也就等於當加減乘除四邊數字總和為 42 時，就能剛好代入公式，四則運算後為 0。
8. 實際研究排列如下圖圖十八：



(圖十八)

9. 計算過程：  
 $(168-0)\div 4=42$  (42 為乘法、除法、加法、減法四邊總和)  
公式：基準點總和 $\times\star\div\triangle+\circ-\diamond=0$

代入公式： $0 \times 42 \div 42 + 42 - 42 = 0 \rightarrow 0 + 42 - 42 = 0 \rightarrow 42 - 42 = 0$

(二) 以 (1, 1) 為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列。

1. 改以 (1, 1) 為基準點，會有 7 張至少有一邊為 0 的骨牌，在研究過程中，把至少有一邊為 0 的骨牌，分成三邊來排列，排成 3 張、2 張、2 張，會比較好排列出符合公式的骨牌排列。
2. 公式算法為：基準點總和  $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$ ，基準點由 (0, 0) 變為 (1, 1)，因為  $1+1=2$ ，而基準點的數值就由 0 變為 2。
3. 骨牌總數為 168，扣掉基準數的數值為  $168 - 2 = 166$ ，由上面第一點研究過程提過，當乘除數字一樣時，還是基準數本身數值，所以把乘除排成同數值總和，易找出符合公式的骨牌排列。因為  $166 \div 4 = 41 \dots 2$ ，就把乘除排成總和為 41 的骨牌排列。  
而由於代入公式為  $2 \times 41 \div 41 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 2 \times 1 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 2 + \bigcirc - \diamond = 0$ ，由上面公式推演可知，減的總和 ( $\diamond$ ) 要大於加的總和 ( $\bigcirc$ )，才能使公式在 四則運算後為 0。  
由於  $166 \div 4$  的餘數為 2，把多的餘數給減的總和那邊，恰好代入公式能等於 0，所以可得知加的總和為 41，減的總和為 43，就可排出適宜的排列。
4. 由於基準點為 (1, 1)，所以加減乘除四邊各需放有一邊為 1 的骨牌。如下圖圖十九所示：



(圖十九)

5. 實際研究排列如下圖圖二十：



(圖二十)

6. 計算過程：

$(168 - 2) \div 4 = 41 \dots 2$  (41 為乘法、除法兩邊總和)

因為餘數 2 剛好分給減法總和那邊，代入公式就會相等

所以  $41 + 2 = 43$  (43 為減法總和，41 為加法總和)

公式：基準點總和  $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$

代入公式： $2 \times 41 \div 41 + 41 - 43 = 0 \rightarrow 2 + 41 - 43 = 0 \rightarrow 43 - 43 = 0$

(三) 以 (2, 2) 為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列。

1. 因為加減乘除各邊都需要有至少一邊為 2 的骨牌，至少有一邊為 2 的骨牌有 (2, 0)、(2, 1)、(2, 2)、(2, 3)、(2, 4)、(2, 5)、(2, 6)，而 (2, 2) 已當作基準點，所以還有 6 張骨牌，但因多米諾骨牌特性，同一邊相鄰的骨牌數字必相同，所以加減乘除各放一張骨牌後，還有 2 張骨牌，研究後發現，將剩餘兩張骨牌放在同一邊，會比放在其中兩邊的最後一個位置好排列。

如下圖圖二十一所示：



(圖二十一)

2. 因為骨牌總數和為 168，以 (2, 2) 為基準點時，基準點數值為  $2 + 2 = 4$ ，又  $168 - 4 = 164$ ，需要分配給加減乘除四邊，所以  $164 \div 4 = 41$ ，在前面第一點研究過程已知，乘除總和數值一樣，會方便計算後為 1，變為只剩加減兩邊去影響基準點的數值，所以把乘除兩邊的骨牌總和排為 41。
3. 由上面第 2 點可知，代入公式後  $4 \times 41 \div 41 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 4 + \bigcirc - \diamond = 0$ ，而由推演的公式可知，加的總和會小於減的總和，這樣代入公式計算後才會等於 0，並減的總和大於加的總和 4。由先前研究可知，只要移動所需差的一半 2 即可，所以實際只要移動加法那邊的數值 2，移去減法那邊即可。加法總和為  $41 - 2 = 39$ ，減法總和為  $41 + 2 = 43$ ，而代入公式後會變為  $4 \times 41 \div 41 + 39 - 43 = 0$ 。
4. 在排列過程中，(6, 6)、(5, 5)，這種數字較大的骨牌容易影響數值變化，因為在它們前方跟後方的骨牌也是連接一樣的數字，所以在排列過程中，會盡量一開始就把它們排在乘除兩邊，會更好找出適宜的排列。
5. 實際研究排列如下圖圖二十二：





(圖二十二)

6. 計算過程：

$$(168-4) \div 4 = 41 \text{ (41 為乘法、除法兩邊總和)}$$

$$4 \div 2 = 2 \quad 41 + 2 = 43 \text{ (43 為減法總和)}$$

$$41 - 2 = 39 \text{ (39 為加法總和)}$$

$$\text{公式：基準點總和} \times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$$

$$\text{代入公式：} 4 \times 41 \div 41 + 39 - 43 = 0 \rightarrow 4 + 39 - 43 = 0 \rightarrow 43 - 43 = 0$$

(四) 以 (3, 3) 為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列。

1. 因為加減乘除各邊都需要有至少一邊為 3 的骨牌，而 (3, 3) 是基準點，所以還剩 6 張骨牌，但因多米諾骨牌特性，相鄰兩邊骨牌數字相同，所以研究後發現，將剩餘兩張骨牌放在同一邊，會比較好找出符合公式的排列。下圖圖二十三為一開始排列的範例：



(圖二十三)

2. 骨牌總數和為 168，當以 (3, 3) 為基準點時，基準點數值為  $3+3=6$ ，而又  $168-6=162$ ，需要分配給加減乘除四邊，所以用  $162 \div 4 = 40 \dots 2$ ，在前面第一點研究過程已知，為了方便乘除計算後為 1，會把兩邊骨牌數值一樣，變為只有加減兩邊會去影響到基準點的數值，由上述算式推演，會把乘除兩邊的骨牌總和排為 40 的排列。
3. 由上面第 2 點可知，代入公式後  $6 \times 40 \div 40 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 6 \times 1 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 6 + \bigcirc - \diamond = 0$ ，而由推演得知，加的總和必小於減的總和，並減的總和大於加的總和為 6。但  $162 \div 4 = 40 \dots 2$ ，有餘數 2，因為減的總和  $>$  加的總和，

所以把多的餘數 2，給減的那邊。

由於研究是要替換基準點，從  $(0, 0) \sim (6, 6)$  來找到符合公式基準點總和  $\times \star \div \triangle + \circ - \diamond = 0$ ，在後續的研究過程中，如果因為基準值的大小，運算到後面加減兩邊有差距時，都可利用這個規律，移動兩邊數值時，所需移動的數值為差距的一半。

而原本兩邊在上面推算公式時，已知差距為 6，又餘數給減法那邊， $6 - 2 = 4$ ，實際差距變為 4。因為找到的規律為移動兩邊數值時，所需移動數值只需差距的一半，所以當差距為 4 時，可得知實際只需移動加法那邊數值 2 給減法那邊即可。加法總和為  $40 - 2 = 38$ ，減法總和為  $40 + 2 + 2 = 44$ 。

#### 4. 實際研究排列如下圖圖二十四：



(圖二十四)

#### 5. 計算過程：

$$(168 - 6) \div 4 = 40 \dots 2 \quad (40 \text{ 為乘法、除法兩邊總和})$$

$$(6 - 2) \div 2 = 2 \quad 40 - 2 = 38 \quad (38 \text{ 為加法總和})$$

$$40 + 2 + 2 = 44 \quad (44 \text{ 為減法總和})$$

$$\text{公式：基準點總和 } \times \star \div \triangle + \circ - \diamond = 0$$

$$\text{代入公式：} 6 \times 40 \div 40 + 38 - 44 = 0 \rightarrow 6 + 38 - 44 = 0 \rightarrow 44 - 44 = 0$$

(五) 以  $(4, 4)$  為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列。

1. 因為加減乘除各邊都需要有至少一邊為 4 的骨牌，還有 6 張有一邊為 4 的骨牌，由於多米諾骨牌特性，相鄰兩邊的骨牌數字必定相同，於是在加減乘除各放一張骨牌後，將剩餘兩張骨牌放在同一邊，會比較好找出相對應符合公式的骨牌排列。

一開始的排列方式如下圖圖二十五：



(圖二十五)

2. 已知骨牌總數和為 168，以 (4, 4) 為基準點時，基準點數值為 8，而  $168 - 8 = 160$ ，因為需要分配給加減乘除四邊，所以  $160 \div 4 = 40$ ，為了會方便乘除運算後乘除完為 1，就把乘除兩邊的骨牌數值總和排為 40。
3. 由上面第 2 點可知，代入公式後為  $8 \times 40 \div 40 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 8 + \bigcirc - \diamond = 0$ ，而由先前推演的公式可得知，加的總和  $\leq$  減的總和，由運算過程得知減的總和剛好會大於加的總和 8。
4. 當現在的數值總和差 8 時， $8 \div 2 = 4$ ，只要移動加法那邊的數值 4，移去減法那邊即可。而加法總和就會為  $40 - 4 = 36$ ，減法總和變為  $40 + 4 = 44$ 。
5. 實際研究排列如下圖圖二十六：



(圖二十六)

6. 計算過程：

$$(168 - 8) \div 4 = 40 \quad (40 \text{ 為乘法、除法兩邊總和})$$

$$8 \div 2 = 4 \quad 40 + 4 = 44 \quad (44 \text{ 為減法總和})$$

$$40 - 4 = 36 \quad (36 \text{ 為加法總和})$$

$$\text{公式：基準點總和} \times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$$

$$\text{代入公式：} 8 \times 40 \div 40 + 36 - 44 = 0 \rightarrow 8 + 36 - 44 = 0 \rightarrow 44 - 44 = 0$$

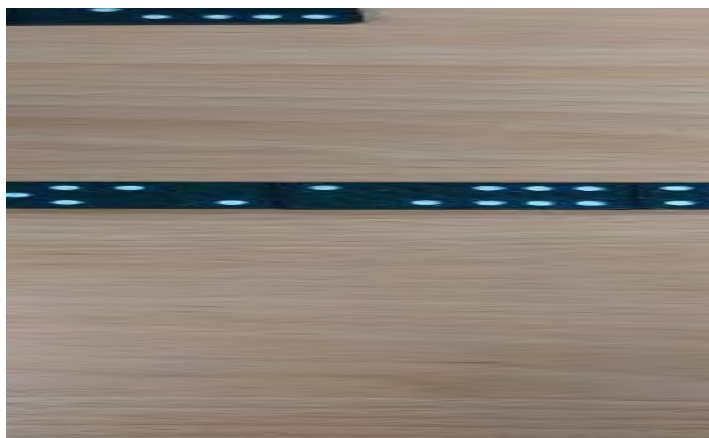
- (六) 以 (5, 5) 為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列

1. 因為是 (5, 5) 為基準點，而相鄰兩邊的骨牌數字必相同，於是在加減乘除四邊排完後，剩餘兩張有一邊為 5 的骨牌，排在同一邊會較好排列。並一開始的排法如下圖圖二十七：



(圖二十七)

2. 骨牌總數和為 168，當以 (5, 5) 為基準點時，基準點的數值為 10，又  $168 - 10 = 158$ ，當 158 分配給加減乘除四邊，用  $158 \div 4 = 39 \dots 2$ ，為了方便乘除計算後為 1，會把乘除兩邊的骨牌總和排為數值 39 的排列。
3. 由上面第 2 點可知，乘除總和為 39，代入公式：基準點總和  $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$ ，為  $10 \times 39 \div 39 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 10 \times 1 + \bigcirc - \diamond = 0 \rightarrow 10 + \bigcirc - \diamond = 0$ ，由先前研究可得知，餘數會給減法總和那邊，所以把餘數 2 給減的那邊。利用先前找到的規律，移動兩邊數值時，所需要移動的數值為兩邊差距的一半！ $10 - 2 = 8$ ，兩邊真正的實際差距變為 8。用  $8 \div 2 = 4$ ，真正需要移動加法那邊的數值 4 去給減法那邊即可。
4. 最後加法總和為  $39 - 4 = 35$ ，減法總和為  $39 + 2 + 4 = 45$ 。把加減乘除四邊總和數字代入公式後，就變為  $10 \times 39 \div 39 + 35 - 45 = 0$
5. 在骨牌的排列過程中，因為 (6, 6)、(5, 5)，這種數值較大的骨牌，會容易影響數值變化，又前後方的骨牌也是連接一樣的數字，假如是 (6, 6) 的骨牌，加上前後就是  $6 \times 4 = 24$ ；(5, 5) 的骨牌，加上前後就是  $5 \times 4 = 20$ ，這樣一邊就會占掉數值 24 或 20，佔很大的比重，所以一開始可先排完，會較順利找出相對應符合公式的骨牌排列。
6. 實際研究排列如下圖圖二十八：



(圖二十八)

7. 計算過程：

$$(168 - 10) \div 4 = 39 \dots 2 \quad (39 \text{ 為乘法、除法兩邊總和})$$

$$(10 - 2) \div 2 = 4 \quad 39 - 4 = 35 \quad (35 \text{ 為加法總和})$$

$$39 + 4 + 2 = 45 \quad (45 \text{ 為減法總和})$$

$$\text{公式：基準點總和} \times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$$

$$\text{代入公式：} 10 \times 39 \div 39 + 35 - 45 = 0 \rightarrow 10 + 35 - 45 = 0 \rightarrow 45 - 45 = 0$$

(七) 尋找以 (6, 6) 為基準點，排出四則運算為 0 的骨牌排列

1. 因為加減乘除各邊都需要有至少一邊為 6 的骨牌，當 (6, 6) 是基準點時，還有 6 張有一邊為 6 的骨牌，在排完加減乘除四邊後，剩餘兩張同一邊，會較好排列。一開始的排列方式如下圖圖二十九：





(圖二十九)

2. 骨牌總數和為 168，當 (6, 6) 為基準點時，數值為  $6+6=12$ ，又  $168-12=156$ ，當 156 需要分配給加減乘除四邊時，用  $156\div 4=39$ ，由先前研究已知，為了方便計算，會把乘除兩邊總和排一樣，所以乘除總和為 39。
3. 由上面第 2 點可知，代入公式後會為  $12\times 39\div 39+\circ-\diamond=0\rightarrow 12+\circ-\diamond=0$ ，又加的總和  $\leq$  減的總和，所以減的總和剛好會大於加的總和 12。
4. 在先前的規律已知，當骨牌在加減兩邊移動時，移動骨牌數值就只需差距的一半。所以當現在的數值總和差 12 時， $12\div 2=6$ ，只要移動加法那邊的數值 6，移去減法那邊即可。而加法總和就會是  $39-6=33$ ，減法總和是  $39+6=45$ ，並且把數字代入公式後，會變為  $12\times 39\div 39+33-45=0$ 。
5. 實際研究排列如下圖圖三十：



(圖三十)

6. 計算過程：
  - $(168-12)\div 4=39$  (39 為乘法、除法兩邊總和)
  - $12\div 2=6$   $39+6=45$  (45 為減法總和)
  - $39-6=33$  (33 為加法總和)
  - 公式：基準點總和 $\times\star\div\triangle+\circ-\diamond=0$
  - 代入公式： $12\times 39\div 39+33-45=0\rightarrow 12+33-45=0\rightarrow 45-45=0$



## 六、進階版變化遊戲



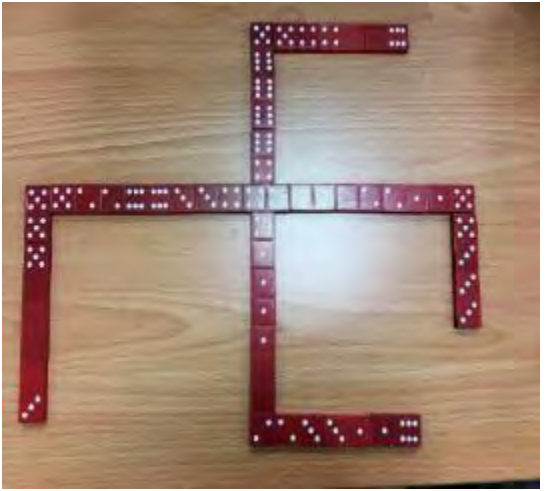
進階版其它變化研究發現：



由於在上面的研究過程中，為了好找出相對應公式的骨牌排列，都利用乘除總和一

樣，讓乘除總和運算後為 1，方便找出加減總和的變化。但實際上，方法不只一種，也可讓乘除總和運算後為 2，或是在找出各邊總和時，讓原本上面研究的乘除總和，往上或往下差 1，整體在運算過程中，都會有許多不同的變化，甚至去變動加減乘除任意一邊都會有不同的變化，以下是針對乘除總和運算後為 2、乘除總和與原本的往上差 1、用進階版公式來玩遊戲做研究。


(一) 乘除總和運算後為 2：

基準點	代入公式： 基準點總和 $\times \star \div \triangle + \bigcirc$ $- \diamond = 0$	計算過程	實際排列
(0, 0)	$0 \times 56 \div 28 + 42 - 42 = 0$	$168 \div 4 = 42$ $42 \times 2 \div (2 + 1) = 28$ (除法總和) $28 \times 2 = 56$ (乘法總和) $168 - 56 - 28 = 84$ 因為基準點是 0，直接 84 平分給加減法兩邊。 $84 \div 2 = 42$ (加、減法總和)	
(1, 1)	$2 \times 56 \div 28 + 39 - 43 = 0$	$(168 - 2) \div 4 = 41 \dots 2$ 選 41 是奇數，後面無法推演，改選 42 $42 \times 2 \div (2 + 1) = 28$ (除法總和) $28 \times 2 = 56$ (乘法總和) $168 - 2 - 56 - 28 = 82$ 因為基準點總和為 2， $2 \times 56 \div 28 = 4$ ，所以移動時 $4 \div 2 = 2$ $82 \div 2 = 41$ $41 + 2 = 43$ (減法總和) $41 - 2 = 39$ (加法總和)	





(2, 2)	$4 \times 56 \div 28 + 36 - 44 = 0$	$(168 - 4) \div 4 = 41$ 選 41 是奇數,後面無法推演,改選 42 $42 \times 2 \div (2 + 1) = 28$ (除法總和) $28 \times 2 = 56$ (乘法總和) $168 - 4 - 56 - 28 = 80$ $80 \div 2 = 40$ 因為基準點總和為 4, $4 \times 56 \div 28 = 8$ ,所以移動時 $8 \div 2 = 4$ $40 + 4 = 44$ (減法總和) $40 - 4 = 36$ (加法總和)	
(3, 3)	$6 \times 52 \div 26 + 36 - 48 = 0$	$(168 - 6) \div 4 = 40 \dots 2$ $40 \times 2 \div (2 + 1) = 26 \dots 2$ (26 為除法總和) $26 \times 2 = 52$ (乘法總和) $168 - 6 - 52 - 26 = 84$ $84 \div 2 = 42$ 因為基準點總和為 6, $6 \times 56 \div 28 = 12$ ,所以移動時 $12 \div 2 = 6$ $42 + 6 = 48$ (減法總和) $42 - 6 = 36$ (加法總和)	
(4, 4)	$8 \times 52 \div 26 + 33 - 49 = 0$	$(168 - 8) \div 4 = 40$ $40 \times 2 \div (2 + 1) = 26 \dots 2$ (26 為除法總和) $26 \times 2 = 52$ (乘法總和) $168 - 8 - 52 - 26 = 82$ $82 \div 2 = 41$ 因為基準點總和為 8, $8 \times 56 \div 28 = 16$ ,所以移動時 $16 \div 2 = 8$ $41 + 8 = 49$ (減法總和) $41 - 8 = 33$ (加法總和)	



(5, 5)	$10 \times 52 \div 26 + 30 - 50 = 0$	$(168 - 10) \div 4 = 39 \dots 2$ $39 \times 2 \div (2 + 1) = 26$ (除法總和) $26 \times 2 = 52$ (乘法總和) $168 - 10 - 52 - 26 = 80$ $80 \div 2 = 40$ 因為基準點總和為 10, $10 \times 56 \div 28 = 20$ , 所以移動時 $20 \div 2 = 10$ $40 + 10 = 50$ (減法總和) $40 - 10 = 30$ (加法總和)	
(6, 6)	$12 \times 52 \div 26 + 27 - 51 = 0$	$(168 - 12) \div 4 = 39$ $39 \times 2 \div (2 + 1) = 26$ (除法總和) $26 \times 2 = 52$ (乘法總和) $168 - 12 - 52 - 26 = 78$ $78 \div 2 = 39$ 因為基準點總和為 12, $12 \times 56 \div 28 = 24$ , 所以移動時 $24 \div 2 = 12$ $39 + 12 = 51$ (減法總和) $39 - 12 = 27$ (加法總和)	

(二) 乘除總和與原本的數字往下減一：

基準點	代入公式： 基準點總和× $\star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$	計算過程	實際排列
(0, 0)	$0 \times 41 \div 41 + 43 - 43 = 0$	原本代入公式： $0 \times 42 \div 42 + 42 - 42 = 0$ 因為往下減一, 乘、除總和為 41 $(168 - 41 - 41) \div 2 = 43$ (43 為加、減總和)	

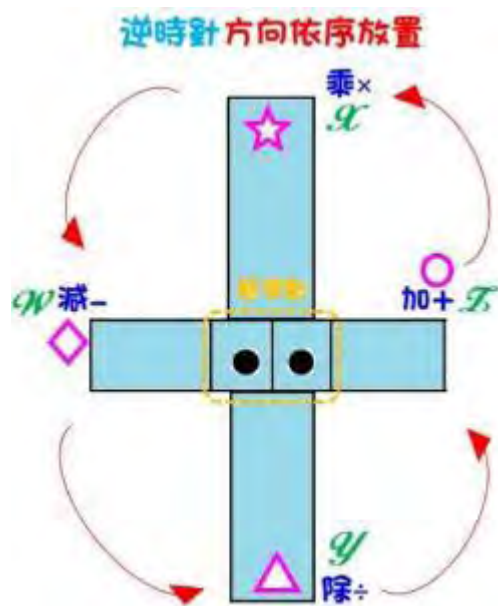


(1, 1)	$2 \times 40 \div 40$ $+ 42 - 44$ $= 0$	<p>原本代入公式：<math>2 \times 41</math>  <math>\div 41 + 41 - 43 = 0</math>            因為往下減一,乘、            除總和為 40  <math>(168 - 2 - 40 - 40) \div 2</math>  <math>= 43</math>  <math>2 \div 2 = 1</math>  <math>43 - 1 = 42</math>(加法總和)  <math>43 + 1 = 44</math>(減法總和)</p>	
(2, 2)	$4 \times 40 \div 40$ $+ 40 - 44$ $= 0$	<p>原本代入公式：<math>4 \times 41</math>  <math>\div 41 + 39 - 43 = 0</math>            因為往下減一,乘、            除總和為 40  <math>(168 - 4 - 40 - 40) \div 2</math>  <math>= 42</math>  <math>4 \div 2 = 2</math>  <math>42 - 2 = 40</math>(加法總和)  <math>42 + 2 = 44</math>(減法總和)</p>	
(3, 3)	$6 \times 39 \div 39$ $+ 39 - 45$ $= 0$	<p>原本代入公式：<math>6 \times 40</math>  <math>\div 40 + 38 - 44 = 0</math>            因為往下減一,乘、            除總和為 39  <math>(168 - 6 - 39 - 39) \div 2</math>  <math>= 42</math>  <math>6 \div 2 = 3</math>  <math>42 - 3 = 39</math>(加法總和)  <math>42 + 3 = 45</math>(減法總和)</p>	
(4, 4)	$8 \times 39 \div 39 + 37$ $- 45 = 0$	<p>原本代入公式：<math>8 \times 40</math>  <math>\div 40 + 36 - 44 = 0</math>            因為往下減一,乘、            除總和為 39  <math>(168 - 8 - 39 - 39) \div 2</math>  <math>= 41</math>  <math>8 \div 2 = 4</math>  <math>41 - 4 = 37</math>(加法總和)  <math>41 + 4 = 45</math>(減法總和)</p>	

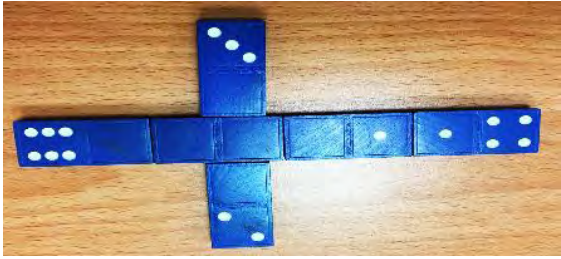
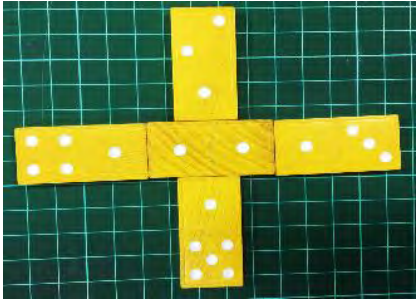
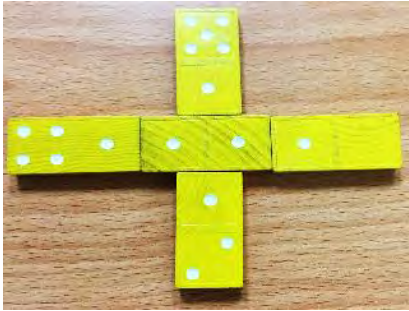
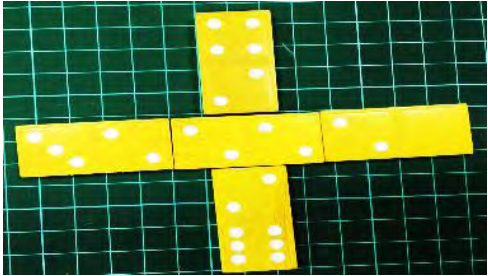

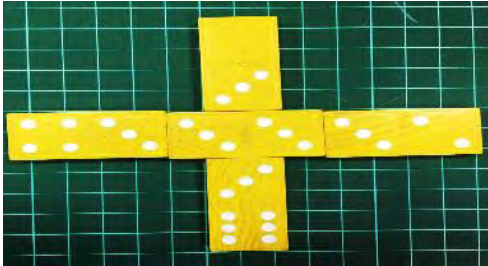
(5, 5)	$10 \times 38 \div 38$ $+ 36 - 46$ $= 0$	原本代入公式： $10 \times 39 \div 39 + 35 - 45 = 0$ 因為往下減一，乘、除總和為 38 $(168 - 10 - 38 - 38) \div 2 = 41$ $10 \div 2 = 5$ $41 - 5 = 36$ (加法總和) $41 + 5 = 46$ (減法總和)	
(6, 6)	$12 \times 38 \div 38$ $+ 34 - 46$ $= 0$	原本代入公式： $12 \times 39 \div 39 + 33 - 45 = 0$ 因為往下減一，乘、除總和為 38 $(168 - 12 - 38 - 38) \div 2 = 40$ $12 \div 2 = 6$ $40 - 6 = 34$ (加法總和) $40 + 6 = 44$ (減法總和)	

(三) 利用進階版公式來遊戲：






利用進階版骨牌公式：基準點總和  $\times \star \div \triangle + \circ - \diamond = 0$  來玩遊戲，因為順時針會有除以 0 無意義，或容易除數過大、有分數的問題，所以用**逆時針**來排列，看能用最少排列幾張骨牌，又能符合公式來研究。



基準點	最少排列幾張	研究過程	實際排列(圖)
(0, 0)	6 張 (能排列 6 張的不只一組解)	0 乘除任何不為零的數都為 0，所以只要讓加減兩邊骨牌總和相等即可。 上圖代入公式： $0 \times 1 \div 3 + 6 - 6 = 0$ 。	

		<p>下圖代入公式：<math>0 \times 3 \div 2 + 6 - 6 = 0</math>。</p>	
(1, 1)	<p>5 張 (能排列 5 張的只有兩組解)</p>	<p>因為要讓基準點與乘法總和相乘,相乘後為除法總和的倍數,再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式：<math>2 \times 3 \div 6 + 4 - 5 = 0</math>。 下圖代入公式：<math>2 \times 6 \div 3 + 1 - 5 = 0</math>。</p>	 
(2, 2)	<p>5 張 (能排列 5 張的不只一組解)</p>	<p>基準點與乘法總和相乘,相乘後為除法總和的倍數,再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式：<math>4 \times 6 \div 8 + 2 - 5 = 0</math>。 下圖代入公式：<math>4 \times 2 \div 8 + 6 - 7 = 0</math>。</p>	 
(3, 3)	<p>5 張 (能排列 5 張的只有一組解)</p>	<p>基準點與乘法總和相乘,相乘後為除法總和的倍數,再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 代入公式：<math>6 \times 3 \div 9 + 5 - 7 = 0</math>。</p>	



(4, 4)	6 張 (能排列 6 張的只有一組解)	基準點與乘法總和相乘,相乘後為除法總和的倍數,再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 代入公式： $8 \times 5 \div 10 + 5 - 9 = 0$ 。	
(5, 5)	8 張 (能排列 8 張的不只一組解)	基準點與乘法總和相乘,相乘後為除法總和的倍數,再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式： $10 \times 6 \div 6 + 13 - 23 = 0$ 。 下圖代入公式： $10 \times 6 \div 6 + 11 - 21 = 0$ 。	 
(6, 6)	8 張 (能排列 8 張的不只一組解)	基準點與乘法總和相乘,相乘後為除法總和的倍數,再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式： $12 \times 6 \div 8 + 9 - 18 = 0$ 。 下圖代入公式： $12 \times 6 \div 8 + 12 - 21 = 0$ 。	 

☆ 補充進階版遊戲證明：(過程中先把公式中的乘法總和用未知數 X 代替，除法總和用未知數 Y 代替，加法總和用未知數 Z 代替，減法總和用未知數 W 代替)。

**(1, 1) 為基準點**

$$2X \div Y + Z - W = 0 \Rightarrow 2X \div Y + Z = W \Rightarrow 2X \div Y = W - Z \Rightarrow 2X = Y(W - Z)$$

( $W > Z$ ，因為減法總和必大於加法總和)。

因為  $2X$  的關係，所以未知數 Y 或  $W - Z$  必有一個為偶數。

X、Y、Z、W 的可能性由下方空格推論來了解恰有兩組解：



基準點與值\可能性	第一種	第二種	第三種	第四種	第五種	第六種	第七種	第八種	第九種
$(1, 0) = 1$			Z	Z	Z				
$(1, 2) = 3$		X	W	Y		Z	Z		
$(1, 3) = 4$	Y	Z							Z
$(1, 4) = 5$		W		W		W		Z	
$(1, 5) = 6$	X	Y		X					W
$(1, 6) = 7$					W		W	W	
成立與否	否	成立	否	成立	否	否	否	否	否

第一種：先推論 Y 為偶數， $Y=4 \Rightarrow 2X=4(W-Z) \Rightarrow X=2(W-Z)$ ，X 要為偶數才行， $X=6$ ， $W-Z=3$  找不到符合的數值。不成立!

第二種：推論 Y 為偶數， $Y=6 \Rightarrow 2X=6(W-Z) \Rightarrow X=3(W-Z)$ ，X 要為 3 的倍數才行， $X=3 \Rightarrow W-Z=1 \Rightarrow W=5, Z=4$  即符合。成立!

第三種：推論  $W-Z$  為偶數，先推論  $W-Z=3-1 \Rightarrow 2X=2Y \Rightarrow X=Y$  找不到符合的數值。不成立!

第四種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=5-1 \Rightarrow 2X=4Y \Rightarrow X=2Y \Rightarrow X=6, Y=3$  即符合。成立!

第五種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=7-1 \Rightarrow 2X=6Y \Rightarrow X=3Y$  找不到符合的數值。不成立!

第六種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=5-3 \Rightarrow 2X=2Y \Rightarrow X=Y$  找不到符合的數值。不成立!

第七種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=7-3 \Rightarrow 2X=4Y \Rightarrow X=2Y$  找不到符合的數值。不成立!

第八種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=7-5 \Rightarrow 2X=2Y \Rightarrow X=Y$  找不到符合的數值。不成立!

第九種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=6-4 \Rightarrow 2X=2Y \Rightarrow X=Y$  找不到符合的數值。不成立!

由上述所有可能性的探討，可證得基準點  $(1, 1)$  在排列進階版遊戲時，最少需要五張骨牌，只有兩組解。

### **$(3, 3)$ 為基準點**

$$6X \div Y + Z - W = 0 \Rightarrow 6X \div Y + Z = W \Rightarrow 6X \div Y = W - Z \Rightarrow 6X = Y(W - Z)$$

$(W > Z)$ ，因為減法總和必大於加法總和。

X、Y、Z、W 的可能性由下方空格推論來了解恰有一組解：

基準點與值\可能性	第一種	第二種	第三種	第四種	第五種	第六種	第七種	第八種	第九種
$(3, 0) = 3$			Z	Z	Z	X			
$(3, 1) = 4$	Y	X							Z
$(3, 2) = 5$			W			Z	Z		
$(3, 4) = 7$				W		W		Z	
$(3, 5) = 8$	X	Y							W
$(3, 6) = 9$					W	Y	W	W	
成立與否	否	否	否	否	否	成立	否	否	否

第一種：先推論 Y 為偶數， $Y=4 \Rightarrow 6X=4(W-Z) \Rightarrow 3X=2(W-Z)$ ，X 要為偶數才行， $X=8$ ， $48=4(W-Z) \Rightarrow W-Z=12$ ，找不到符合的數值。不成立!

第二種：先推論 Y 為偶數， $Y=8 \Rightarrow 6X=8(W-Z) \Rightarrow 3X=4(W-Z)$ ，X 要為偶數才行， $X=4$ ， $24=8(W-Z) \Rightarrow W-Z=3$ ，找不到符合的數值。不成立!

第三種：推論  $W-Z$  為偶數，先推論  $W-Z=5-3 \Rightarrow 6X=2Y \Rightarrow 3X=Y$ ，找不到符合的數值。不成立!

第四種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=7-3 \Rightarrow 6X=4Y \Rightarrow 3X=2Y$ ，X 要為偶數才行， $X=4$  或  $8$ ，均找不到符合的數值。不成立!

第五種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=9-3 \Rightarrow 6X=6Y \Rightarrow X=Y$ ，找不到符合的數值。不成立!

第六種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=7-5 \Rightarrow 6X=2Y \Rightarrow 3X=Y \Rightarrow X=3, Y=9$ ，成立。

第七種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=9-5 \Rightarrow 6X=4Y \Rightarrow 3X=2Y$ ，X 要為偶數才行， $X=4$  或  $8$ ，均找不到符合的數值。不成立!

第八種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=9-7 \Rightarrow 6X=2Y \Rightarrow 3X=Y$ ，找不到符合的數值。不成立!

第九種：推論  $W-Z$  為偶數，推論  $W-Z=8-4 \Rightarrow 6X=4Y \Rightarrow 3X=2Y$ ，X 要為偶數才行，找不到符合的數值。不成立!

由上述所有可能性的探討，可證得基準點  $(3, 3)$  在排列進階版遊戲時，最少需要五張骨牌，只有一組解。

## 陸、研究結果

### 一、初階版研究發現：

- (一) 實驗過程中，盡量讓兩端骨牌點數皆包含  $0 \sim 6$ ，這樣才方便後續調整、移動骨牌。
- (二) 移動 1 點至另一端，兩端距離差距為 2，故只需要移動距離差的一半即可達到平衡。
- (三) 因為骨牌點數總和為 168，說兩端骨牌點數相加為 168，兩端只會有 ① (基數、基數)、② (偶數、偶數) 兩種組合才有可能相加為 168，故加、減兩端

的距離差都會是偶數，原因：

- ①奇數 - 奇數 = 偶數
- ②偶數 - 偶數 = 偶數

(四) 在初階版時只要利用,  $(168 - \boxed{\text{基準點}}) \div 2 =$  加減法兩邊組合, 因為總和固定後,  $\bigcirc = \diamond$  可以有許多不同種的牌列方法, 只需加減兩邊與基準點相連接的骨牌, 是一樣的點數即可。

## 二、進階版研究發現：

- (一) 考慮有一邊為 0 的骨牌，共有 7 張骨牌。若是中間基準點為  $(0, 0)$ ，扣掉四邊各一張相鄰需為有 0 的骨牌，還剩兩張，把剩餘兩張骨牌放在同一邊會較好排列。若是其他基準點，則把有一邊為 0 的骨牌，分三邊為 3 張、2 張、2 張會較好排列。
- (二) 當基準點為  $(1, 1) \sim (6, 6)$  時，因為相鄰四邊的骨牌需要跟基準點相同，所以扣掉四張骨牌後，還會有兩張有一邊跟基準點相同的骨牌，盡量把剩餘的兩張骨牌排放同一邊，會比放在兩邊的最後一個位子好排列。
- (三) 較大數字的骨牌，如  $(6, 6)$ 、 $(5, 5)$ ，因前後相鄰骨牌也需放相同數字，所以一開始先排在乘除兩邊，能較輕易的把骨牌排列找出，較不會影響加減兩邊的排列。
- (四) 要令加減乘除的數字符合公式時，會用骨牌總和 168 去減掉基準點，再把剩下的總和除以 4，因為公式為基準點總和  $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$ ，除出來的商數當作乘除兩邊的骨牌總和，乘除運算後為 1，會讓公式簡化變為基準點總和  $+ \bigcirc - \diamond = 0$ ，因為基準點會和加法那邊相加，所以減法總和必大於等於加法總和，而當  $(0, 0)$  為基準點時，基準點總和除以四邊，不會有餘數，所以當其他基準點有餘數時，會把餘數分給減法那邊。
- (五) 從先前研究可知，當加減兩邊在移動時，移動 1 倍，實際造成的數字差距為兩倍，所以當需要移動時，都只需要移動差距的一半即可。若遇到總和減掉基準點時，還有餘數，要設定加減兩邊總和時，需扣掉餘數，才為真正需要移動的差距。

範例：基準點為  $(3, 3)$ ，要找出符合公式的加減乘除各個總和為多少？

1.  $168 - 6 = 162$  (總和 168 減掉基準點)
2.  $162 \div 4 = 40 \dots 2$  (扣掉基準點的總和  $\div 4$ ，商數為乘除兩邊的總和，餘數給減法那邊的總和)
3.  $6 - 2 = 4$  (基準點的總和扣掉餘數為剩下的差距)
4.  $4 \div 2 = 2$  (剩下的差距  $\div 2$  為實際加法那邊需移動去減法那邊的數字)
5.  $40 - 2 = 38$  (商數減調需移動的數字後即為加法的總和)
6.  $40 + 2 + 2 = 44$  (商數加上加法移過來的數字，再加上餘數即為減法總和)

### 三、進階版其他研究發現：

- (一) 為了讓乘除總和運算後為 2，在找尋過程中,如果乘除總和兩邊數值相加為奇數，則加減總和會無法找到相對應的數字，所以會讓乘除總和數值相加為偶數，會較好找到相對應的加減總和。
- (二) 進階版的公式：基準點總和 $\times\star\div\triangle+\circ-\diamond=0$ ，一開始是利用  $(168 - \text{基準點})\div 4$  找出 $\star$ 與 $\triangle$ ，而 $\circ$ 與 $\diamond$ 是利用  $(168 - \text{基準點} - \star - \triangle)$  為 $\circ$ 與 $\diamond$ 的加總，再把上述加總 $\div 2$ ，與把基準點 $\div 2$  為 $\circ$ 與 $\diamond$ 需移動的實際差距，從加法總和那邊移動去減法總和，就可算出 $\circ$ 與 $\diamond$ 。  
在一開始是做 $\star=\triangle$ ，讓後面的 $\circ$ 與 $\diamond$ 好做計算，也有利用後來的 $\star=2\triangle$ 去做變化，發現在不同的 $\star$ 與 $\triangle$ ，會讓後面在找尋 $\circ$ 與 $\diamond$ 有許多不同的變化，造就了各種不同排列組合。
- (三) 在特殊遊戲的玩法時，因為不能有除以 0 無意義的狀況發生，所以最少在排列時，加上基準點的那張骨牌，至少都需要排列五張，其它依基準點，在符合公式時會有不同張數的變化。而不同的基準點，在實際排列時有的最少張數只有唯一或唯二解，而有的有好幾組解。因為只要考慮乘除總和運算後為多少，就可利用計算後的數值，加上加法總和與減法總和相等即可。
- (四) 在特殊遊戲玩法時，都會盡量一開始先找基準點總和與乘法總和相除，能為除法總和的倍數，再來依所計算出各邊總和的數值，找加減總和各需排列總和多少的骨牌。就是基準點總和 $\times\star=\triangle$ 的倍數，再利用基準點總和 $\times\star\div\triangle+\circ=\diamond$ ，即可找出相對應的骨牌，但由於骨牌連接點要相同，所以在實際排列時，有的最少張數會有唯一或唯二解，有的可依骨牌相差點數，能找出好幾組解，但若是不考慮最小張數，會有許多不同的解法可能性。

## 柒、討論

### 一、生活中的運用：

#### (一) Domino's pizza (招牌如圖三十一)

研究多米諾主題時，覺得很熟悉，後來終於發現原來是 pizza「達美樂」招牌，於是就好奇「達美樂」招牌的設計理念，利用電腦查詢資料得知：原來達美樂創始者 Mr.Monaghan，最初構想是在自己家鄉經營二、三家比薩店就滿足了，因此選擇骨牌的一點和兩點作為商店的標誌。沒想到現在的「達美樂」pizza 如同骨牌效應，接一連二、接二連三、接三連四……不停的蔓延拓展，現在全球各地都可以吃到美味可口的「達美樂」pizza。

#### (二) 卡通動物親子骨牌 (如圖三十一)

依照 Domino 骨牌的特性：兩端相同點數往兩端延伸，也可改變成不同造形，可將兩端有相同的動物圖案連接在一起，往兩端做延伸，藉由此遊戲，達成訓練幼兒對動物的分辨與認識，相當有趣。





(圖三十)



(圖三十一)

## 二、Domino 骨牌創意圖形

課堂中老師讓我們腦力激盪一下，想想看如何用多米諾特性：連接骨牌兩側必須與同點數的作為連接，我們結合創意，拼排出不同造型的圖案，原來多米諾骨牌還可以運用在激發創造力，在想如何排出有造型的骨牌時，也讓我們從先假設能否拼湊出一開始想要的圖案，在從原本的假設圖案去找尋，過程中慢慢去修正、找出規律，跟先前在研究骨牌四則運算公式時一樣，真的是很有趣。



(圖三十二 創意機器人)



(圖三十三 創意坦克車)

## 三、研究過程中的難題：

- (一) 一開始找不到研究方向，因為多米諾骨牌特性再加上人為因素，若是想研究獲勝機率，會有太多變數難控制，因此無法研究多米諾骨牌獲勝機率。
- (二) 在一開始也想過研究骨牌排法與速度變化的相關研究，但由於需精密儀器測量，且較難推論出相關數學公式，所以我們決定改變研究方向。
- (三) 多米諾骨牌一開始在定義規則與排列出所需骨牌時，基準點要以什麼為標準，去控制變數時，以及後續如何推論出公式，在研究過程中花費許多試驗時間去嘗試，最後才得出公式。

(四) 得出公式後，要研究如何排列骨牌，會較好排列出相關能符合公式的骨牌排列，這在探索過程中，經過了許多次的失誤，才慢慢研究出一些規律能較快排列出符合公式的骨牌排列。

## 捌、結論

當決定研究骨牌時，原本想要研究如何讓站立的骨牌接一連二倒下的完美無瑕、毫無破綻，角度、排法、甚至連給予的力量都是一種變因，我們討論了許久，最後決定改變方向，朝著 domino 骨牌遊戲研究，在研究過程中，會遇到非常多的困難，包含公式的設計，像初階版骨牌我們是利用變化基準點，加減計算後為 0 的概念，而進階版是利用四則運算先乘除後加減，並建立在初階版的公式上做基礎設計出來，有利用控制變因，先讓乘除總和運算後為 1、為 2，再去計算出加減所需的數字，最後利用移動一單位，實際會移動兩單位，去計算加減兩邊需移動的數值，移動的數值只需實際差距的一半。還有利用設計出來的公式再研究，能延伸什麼遊戲時，在找放置骨牌加減乘除四邊時，會遇到如果沒有找出基準點與乘法總和相乘，為除法總和的倍數，會容易有分數無法找出後面相對應的加減法總和放置的骨牌，在一開始研究時就該注意到這點！在後來找尋所需骨牌時，也多利用基準點總和 $\times \star \div \triangle + \bigcirc = \diamond$ ，就可找出相對應的骨牌，但由於骨牌連接點要相同，所以在實際排列時，有的最少張數會有唯一或唯二解，有的可依骨牌相差點數，能找出好幾組解，但若是不考慮最小張數，會有許多不同的解法可能性。

透過彼此同心協力克服難題，從研究過程中，我發現融入四則運算的改良版多米諾，讓我的計算能力大躍進，連其他同學都誇獎我們心算能力突飛猛進，我也將我們的研究、改良遊戲推廣給班上同學玩，藉此希望可以激盪出更多火花。

## 玖、參考資料

先前別人在做骨牌的相關研究，是研究骨牌推倒、倒下、魔方陣、與任意矩形的三階多米諾，而我們是把多米諾與四則運算做融合來做研究，並設計出公式與遊戲規則，是完全創新與先前別人的研究完全不同！

西洋骨牌（維基百科）

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A5%BF%E6%B4%8B%E9%AA%A8%E7%89%8C>

## 【親子桌遊】Domino 骨牌遊戲棋原來由來已久

<http://ptcarepipe.pixnet.net/blog/post/45311642-365-35-%E3%80%90%E8%A6%AA%E5%AD%90%E6%A1%8C%E9%81%8A%E3%80%91domino-%E9%AA%A8%E7%89%8C%E9%81%8A%E6%88%B2%E6%A3%8B%E5%8E%9F%E4%BE%86%E7%94%B1%E4%BE%86>

## 【評語】 080408

從多米諾骨牌遊戲出發，探討獲勝的不同策略，又利用骨牌的特性與數學的四則運算結合，設計出公式與遊戲規則，產出不同的遊戲玩法。透過遊戲的趣味性，培養四則運算能力，值得鼓勵。



## 摘要

本研究從探討多米諾骨牌遊戲出發，討論可否利用不同策略達成骨牌遊戲勝利，並且從遊戲過程中研究骨牌特性，思考如何將此特性與四則運算結合，研究出不同的遊戲玩法，除此之外，也期望在研究過程中，可以探討出骨牌排列的規則，進而歸納出合適的公式，以利遊戲進行與增加訓練四則運算能力之機會。



圖一為製作多米諾骨牌遊戲模型。

圖一

## 壹、研究動機

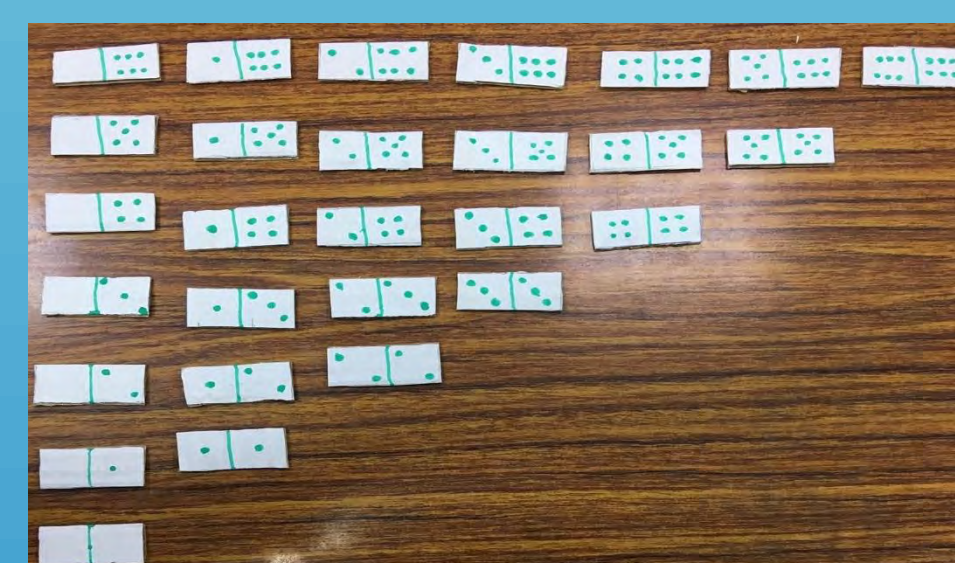
之前在上數學課時老師教我們四則運算的加、減、乘、除，透過一些題目的實際運算，覺得可以將所學到的計算能力運用在生活中，是一件有趣的事情。下課剛好有同學帶「多米諾骨牌」來學校，在遊戲的過程中，發現骨牌兩側連接點要用同樣的數字，並且這28張骨牌總和是168。我們就思考著可否利用多米諾骨牌的遊戲特性，把老師上課教的四則運算，運用到骨牌遊戲上，並且修改遊戲方法，利用骨牌點數加、減、乘、除的過程中，使骨牌計算出來的總和為0，並找出其中的規律。於是成立三人小組，一同進行「多米諾骨牌」研究。

## 貳、研究目的

- 一、思考出運用不同策略Domino骨牌遊戲可獲勝方法。
- 二、找出如何運用加、減法讓Domino骨牌的排列組合最終答案為零。
- 三、找出如何運用加、減、乘、除讓Domino骨牌有特殊排列組合。
- 四、將四則運算應用在生活上，透過構思出骨牌的不同玩法，可以訓練四則運算能力並添加遊戲的趣味性。

## 參、研究器材

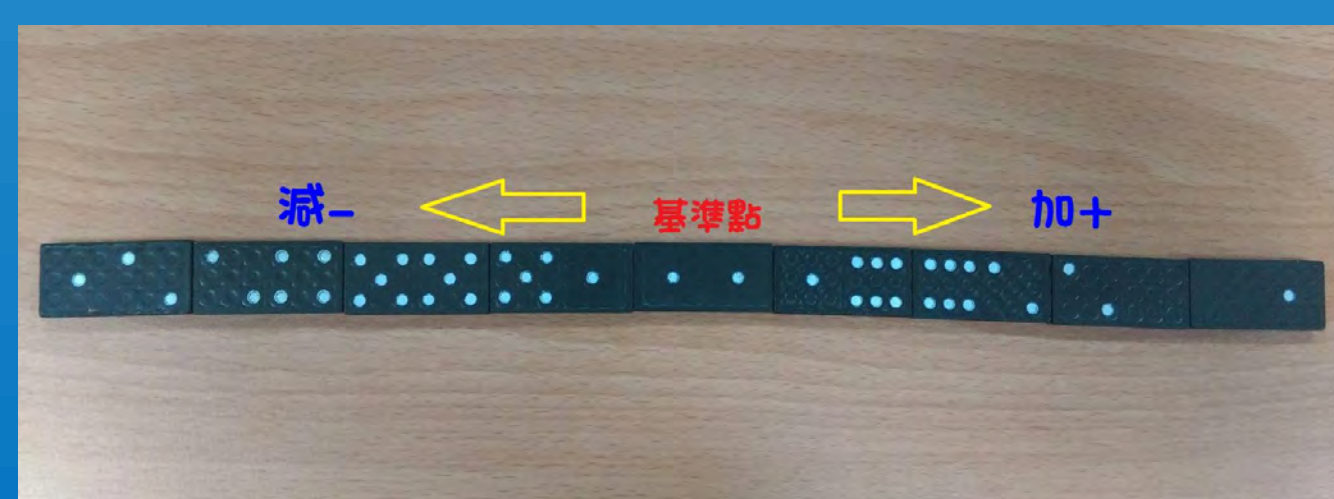
紙、筆、記錄本、筆記本、Domino骨牌遊戲、Domino骨牌遊戲模型（厚紙板、直尺、剪刀、彩色筆）



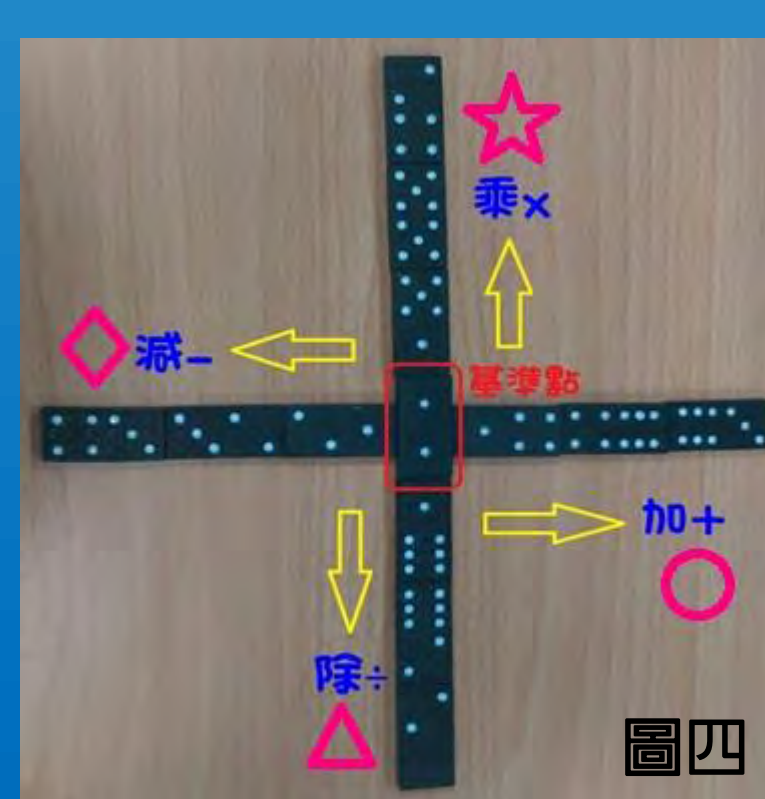
圖二為自製多米諾骨牌模型（共28張牌）。

## 肆、研究架構

- 一、找出Domino骨牌遊戲獲勝方法。
- 二、思考如何將四則運算融入Domino骨牌遊戲中。
- 三、修改Domino骨牌遊戲規則，玩家以合作方式，運用加法、減法，以中央骨牌當作基準點並向左右延伸，共同排列出最後答案為零的組合。（如圖三）
- 四、以中央骨牌當作基準點，上（乘）、下（除）、左（減）、右（加）四方延伸，四人共同進行，增加玩家、四則運算讓遊戲更添豐富性。（如圖四）



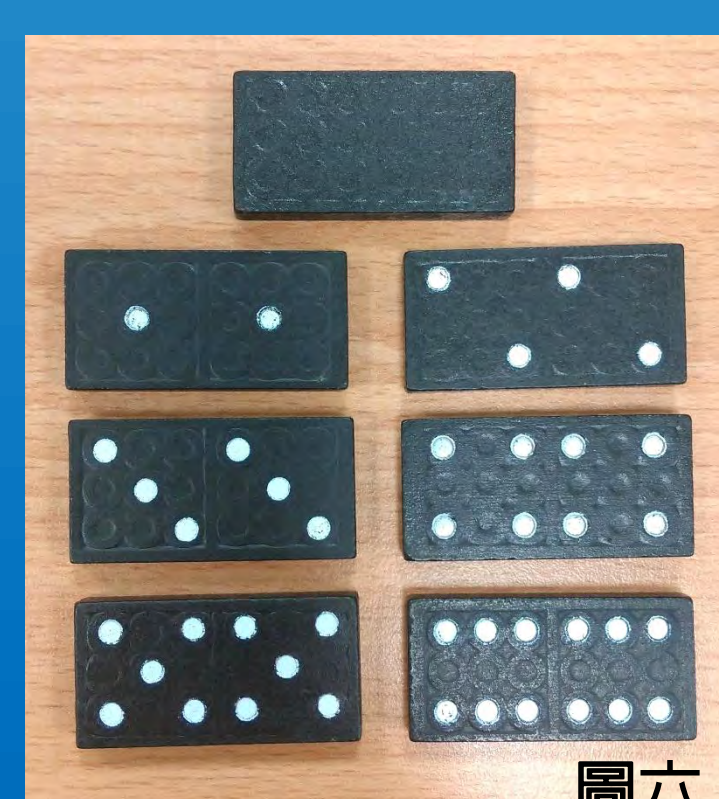
圖三



圖四



圖五



圖六

## 伍、研究過程

### 一、瞭解Domino骨牌遊戲

- (一) 多米諾骨牌 (Dominoes)，又稱西洋骨牌，每個多米諾骨牌都是一個矩形牌，中間以一條線將其分成兩個正方形的，每一端都標有一些點數或空白。
- (二) 骨牌通常以其兩端點數命名，例如 2 | 5 或 5 | 2 是用來代表兩端分別為2點和5點的骨牌（如圖五）。在兩端具有相同值的骨牌為「雙牌」，通常稱為雙0、雙1、雙2等（如圖六），相反，兩端不同值的骨牌稱為「單牌」。
- (三) 市面上最常見的多米諾骨牌是雙6（共28張牌如圖七）和雙9（共55張牌如圖八），也有更多的骨牌組合可以以公式類推，一個雙n牌組，骨牌數目的公式為： $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ，因本研究為探討西洋骨牌之基礎，故以雙6牌數為主，其餘骨牌牌數可供未來研究。
- (四) 多米諾骨牌遊戲規則：
  1. 雙6共有28張牌，平均分配給四人，一人7張。
  2. 玩家擁有 6 | 6 的先出，玩家以順時鐘順序出牌，向骨牌兩端做延伸，若手中無牌的玩家可以pass換下一位玩家繼續出牌。
  3. 最快將手上所有骨牌出完的玩家即可贏得分數，分數計算方式為：其他玩家手上剩餘的骨牌數字加總，即為贏家此局所獲得分數。
  4. 分數最快累積達到100分則為遊戲總冠軍。



準備材料：  
厚紙板、直尺、剪刀、彩色筆

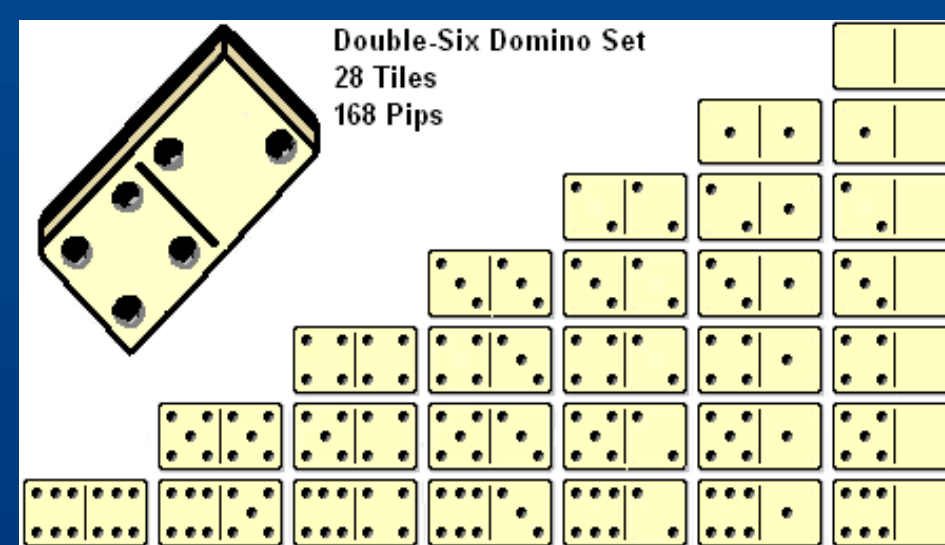
測量實際骨牌尺寸：  
長：3.7公分  
寬：1.7公分

在厚紙板上描繪尺寸。

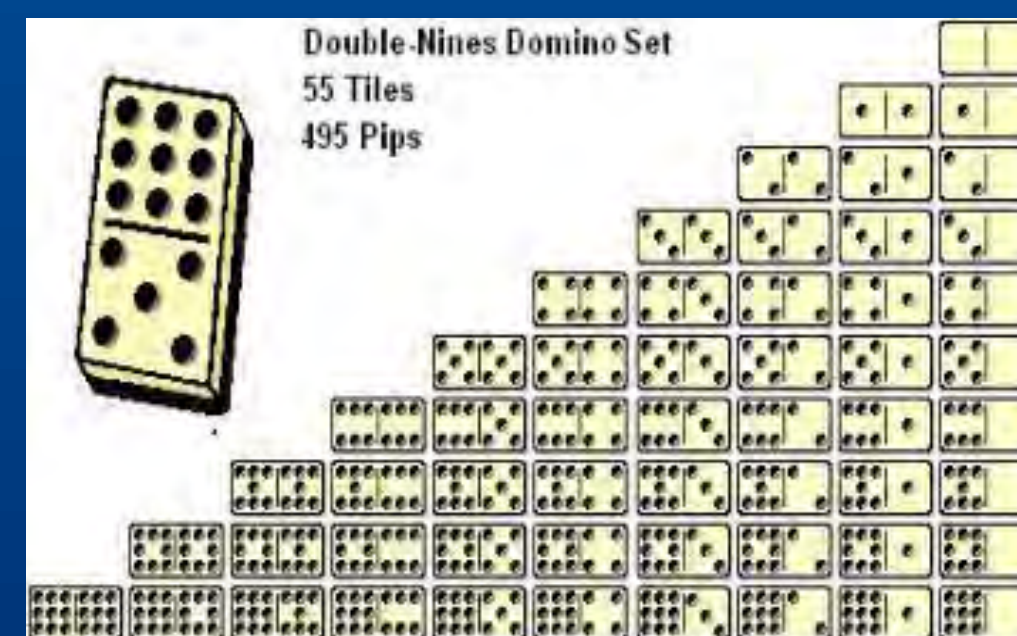


剪下厚紙板並用彩色筆在各小塊厚紙板上描繪點數。

將骨牌從 0 | 0 排列到 6 | 6，並檢查是否為 28 張骨牌（雙 6）即完成製作。



圖七為雙6多米諾骨牌。



圖八為雙9多米諾骨牌。

### 二、製作Domino骨牌遊戲

- (一) 所需用具：厚紙板、直尺、剪刀、彩色筆
- (二) 製作過程：如左表格

### 三、操作Domino骨牌遊戲

遊戲過程中，發現：

- (一) 同一張骨牌數字相同的先出，較不容易輸。
- (二) 先出牌的玩家，因為可以決定出牌數字，比較容易先出完手中的骨牌，贏的機率比較大。
- (三) 過程中要隨時觀察牌局，每個數字的出現次數為8次，若觀察到某數字已經出現很多次，代表可連接的手牌已變少，應該要趕快出完此數字牌。
- (四) 當手牌中有同數字骨牌較多時，先出此數字骨牌，要趕快把此數字出完，不然之後出此數字牌的機會會越來越少。



#### 四、初階版Domino骨牌遊戲

Domino骨牌是將點數向兩端連接延伸的遊戲，除了「兩端連接」這個條件之外，我們嘗試將國小數學課時常訓練的四則運算融入此遊戲當中，希望可以透過Domino骨牌將四則運算更加靈活運用，並且增添趣味的腦力激盪之機會。

**初階版：**修改Domino骨牌遊戲規則，玩家以合作方式，運用加法、減法，以中央骨牌當作基準點並向左右延伸，共同排列出最後答案為零的組合。基準點會有(0, 0)、(1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 4)、(5, 5)、(6, 6)做替換。

公式為： $\bigcirc - \diamond = 0$

$\bigcirc$ 為加法總和， $\diamond$ 為減法總和，由於基準點在中間，又兩個數字一樣，所以平分兩邊剛好為0。  
(如圖九 示範排列，並未把所有骨牌使用完，故兩側點數加總未達0)



(一) 研究過程中，發現：

1. 所有骨牌數字加起來總數為168，平分為二，則基準點兩側總和應為 $168 \div 2 = 84$ 。兩邊骨牌放置的時後，盡量平衡兩邊的數字，可先把一邊排成加總為84，再將另一邊拼湊出84。
2. 當一邊的骨牌數字加總太大時，下一次放置就要選點數小一點的骨牌；若一邊的骨牌數字加總太小時，則下一次放置就要選點數大一點的骨牌。
3. 兩邊都要平均分配點數，不要都把相同數字集中在同一邊。

(二) 速排方法

1.  $(168 - \text{基準數}) \div 2 = \text{每一邊排列組合}$
2. 先把基準擺放好，隨機並盡量平均排放兩邊。
3. 計算兩邊的差距。(以正、負做計算)
4. 計算完的兩邊差距  $\div 2 = \text{多的那端骨牌移動到少的那端骨牌數}$ 。

舉例說明：

基準點為 $2 \times 2 = 4$ ，因為基準點左右平分，加、減同一個數字，所以可以抵銷不納入計算，故計算公式為： $(168 - 4) \div 2 = 82$

範例為隨機排放並將兩邊點數加總計算，左邊(-)總和為76，右邊(+)總和為88，兩邊差距為 $88 - 76 = 12$ 。

研究過程中，我們發現，移動1點，兩端距離差為2，故只需要移動距離差的一半即可達到平衡。

$12 \div 2 = 6$  → 則點數較多的【右邊(+)]需移動6點至【左邊(-)]，即可達到兩邊骨牌點數總和各為82。

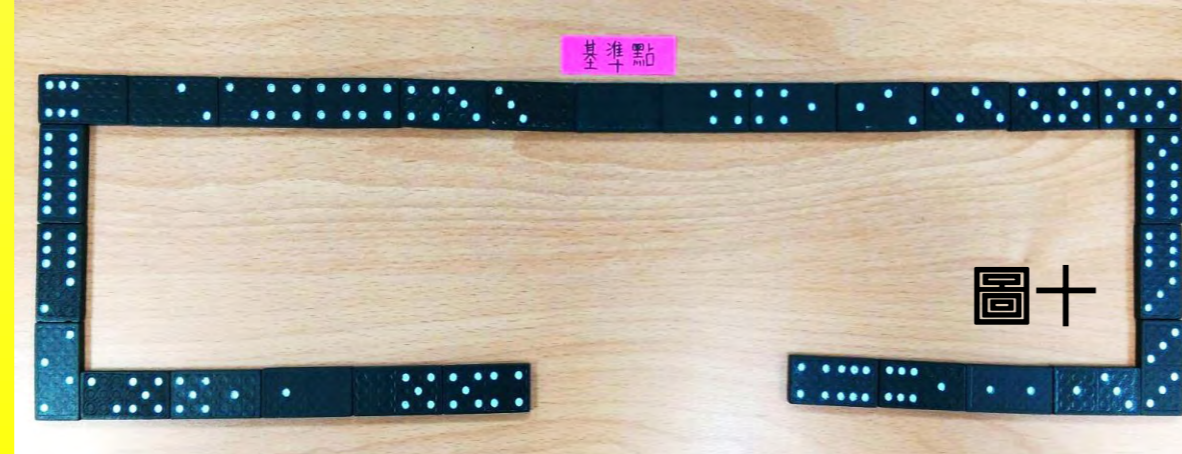
【右邊(+)]： $88 - 6 = 82$

【左邊(-)]： $-(76 + 6) = -82$



(三) 實際操作

1. 基準點為  $0 | 0$   
 $168 \div 2 = 84 \rightarrow$  各邊需排放骨牌點數總和為84。(如圖十)



#### 五、進階版Domino骨牌遊戲

**進階版：**以(0, 0)、(1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 4)、(5, 5)、(6, 6)為基準點，研究是否能代入基準點，將點數經過加、減、乘、除後為0的骨牌排列。在研究過程中，中間為基準點，去替換基準點，把上方骨牌排列為乘(☆)，下方骨牌排列為除(△)，左方骨牌排列為減(◇)，右方骨牌排列為加(○)。在數學四則運算過程中，當有遇到加減乘除時，算式會為先乘除後加減。(如圖十一)

基準點在中間，代入公式： $\text{基準點總和} \times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$  的骨牌排列組合。

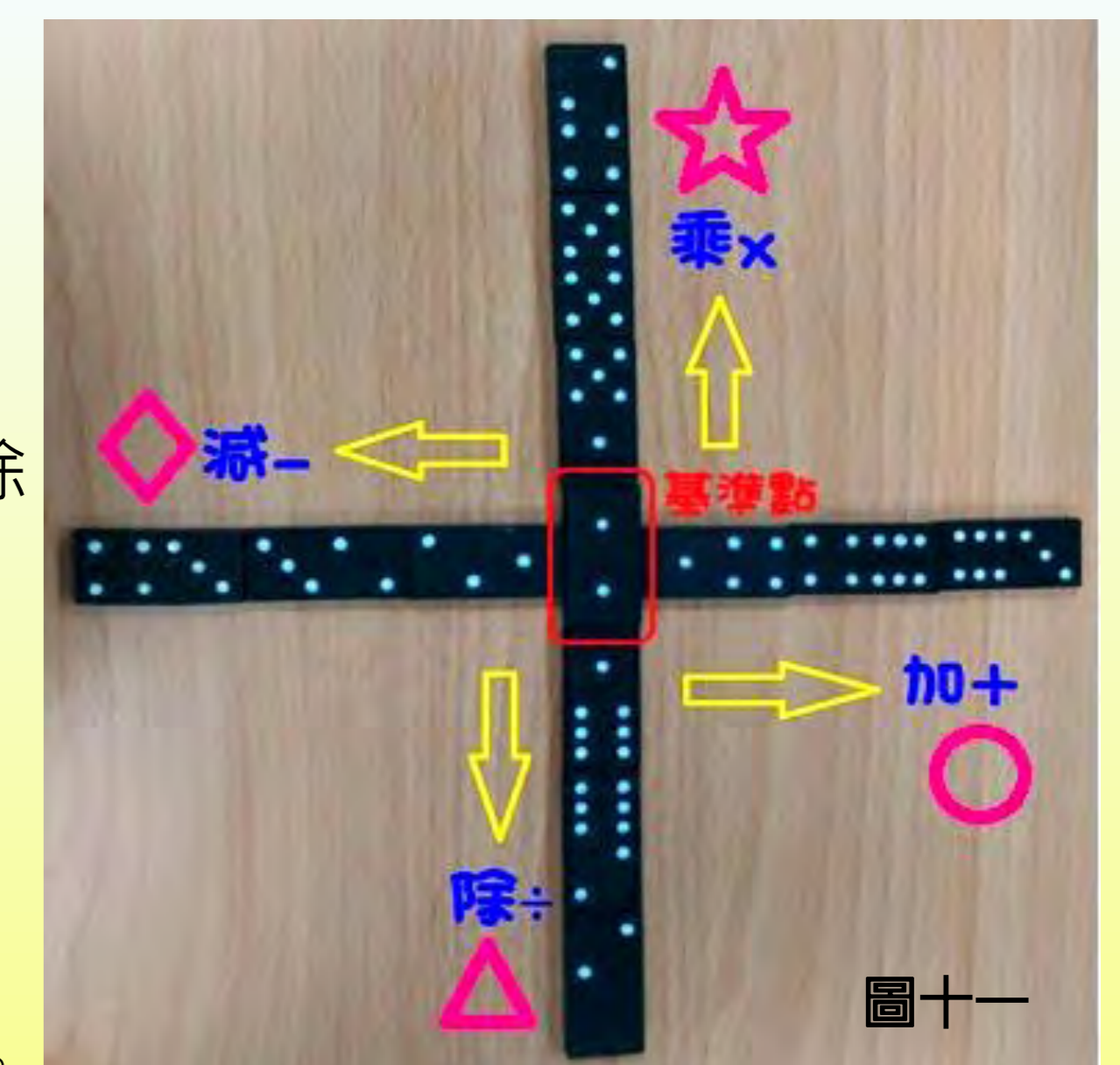
(一) 以(0, 0)為基準點，排出四則運算為0的骨牌排列。

1. 四則運算中，當骨牌基準點要做四則運算時，會先乘除上下兩邊的骨牌總和，再做加減左右兩邊的骨牌總和。
2. 假設乘的骨牌總和用☆來代替，除的骨牌總和用△來代替，加的骨牌總和用○來代替，減的骨牌總和用◇來代替。
3. 因為在所有二十八張骨牌中，骨牌至少有一邊為0的骨牌共有7張，在排列的過程中，透過不同的基準點，其排列骨牌的方式會有所不同。
4. 當由(0, 0)為基準點時排列時，因為扣掉基準點時，有一邊為0的骨牌還有6張骨牌，但因基準點為(0, 0)，在多米諾骨牌的玩法中，相鄰的骨牌那一面，必須是相同的數字。所以當(0, 0)為基準點時，必須上下左右，也就是加減乘除必須要都放有一邊為0的骨牌。(如圖十二)
5. 因為上下左右各放一張有一邊為0的骨牌，所以還會剩下兩張有一邊為0的骨牌，在研究後發現，盡量把剩餘兩張骨牌放同一邊，會比較好找出符合公式的骨牌排列。
6. 由於所有二十八張骨牌數字總和為168，基準點為(0, 0)，在不同基準點時，為了不因乘除的關係，讓數字變化過大，所以當乘除兩邊的數字總和一樣時，等於在代入公式時，基準點在運算乘除過後，等於基準點乘於1，還是為基準點本身，只要做單純的加減計算，會較好排列出公式： $\text{基準點總和} \times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$  的骨牌排列方式。
7. 所有骨牌總數和為168，因為要分配到加減乘除四邊，把總和除以4平均分配， $168 \div 4 = 42$ ，也就等於當加減乘除四邊數字總和為42時，就能剛好代入公式，四則運算後為0。
8. 計算過程：(實際排列如圖十三)  
 $(168 - 0) \div 4 = 42$   
(42為乘法、除法、加法、減法四邊總和)

公式： $\text{基準點總和} \times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$

代入公式：

$0 \times 42 \div 42 + 42 - 42 = 0 \rightarrow 0 + 42 - 42 = 0 \rightarrow 42 - 42 = 0$



#### 六、進階版變化遊戲

進階版其它變化研究發現：

由於在上面的研究過程中，為了好找出相對應公式的骨牌排列，都利用乘除總和一樣，讓乘除總和運算後為1，方便找出加減總和的變化。但實際上，方法不只一種，也可讓乘除總和運算後為2，或是在找出各邊總和時，讓原本上面研究的乘除總和，往上或往下差1，整體在運算過程中，都會有許多不同的變化，甚至去變動加減乘除任意一邊都會有不同的變化，以下是針對乘除總和運算後為2、乘除總和與原本的往下減1、用進階版公式來玩遊戲做研究。

(一) 乘除總和運算後為2：

基準點	代入公式	計算過程	實際排列
(0, 0)	基準點總和 $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$ $0 \times 56 \div 28 + 42 - 42 = 0$	$168 \div 4 = 42$ $42 \times 2 \div (2 + 1) = 28$ (除法總和) $28 \times 2 = 56$ (乘法總和) $168 - 56 - 28 = 84$ 因為基準點是0，直接84平分給加減法兩邊 $84 \div 2 = 42$ (加、減法總和)	

(二) 乘除總和與原本的數字往下減一：

基準點	代入公式	計算過程	實際排列
(0, 0)	基準點總和 $\times \star \div \triangle + \bigcirc - \diamond = 0$ $0 \times 41 \div 41 + 43 - 43 = 0$	原本代入公式： $0 \times 42 \div 42 + 42 - 42 = 0$ 因為往下減一，乘、除總和為41 $(168 - 41 - 41) \div 2 = 43$ (43為加、減總和)	

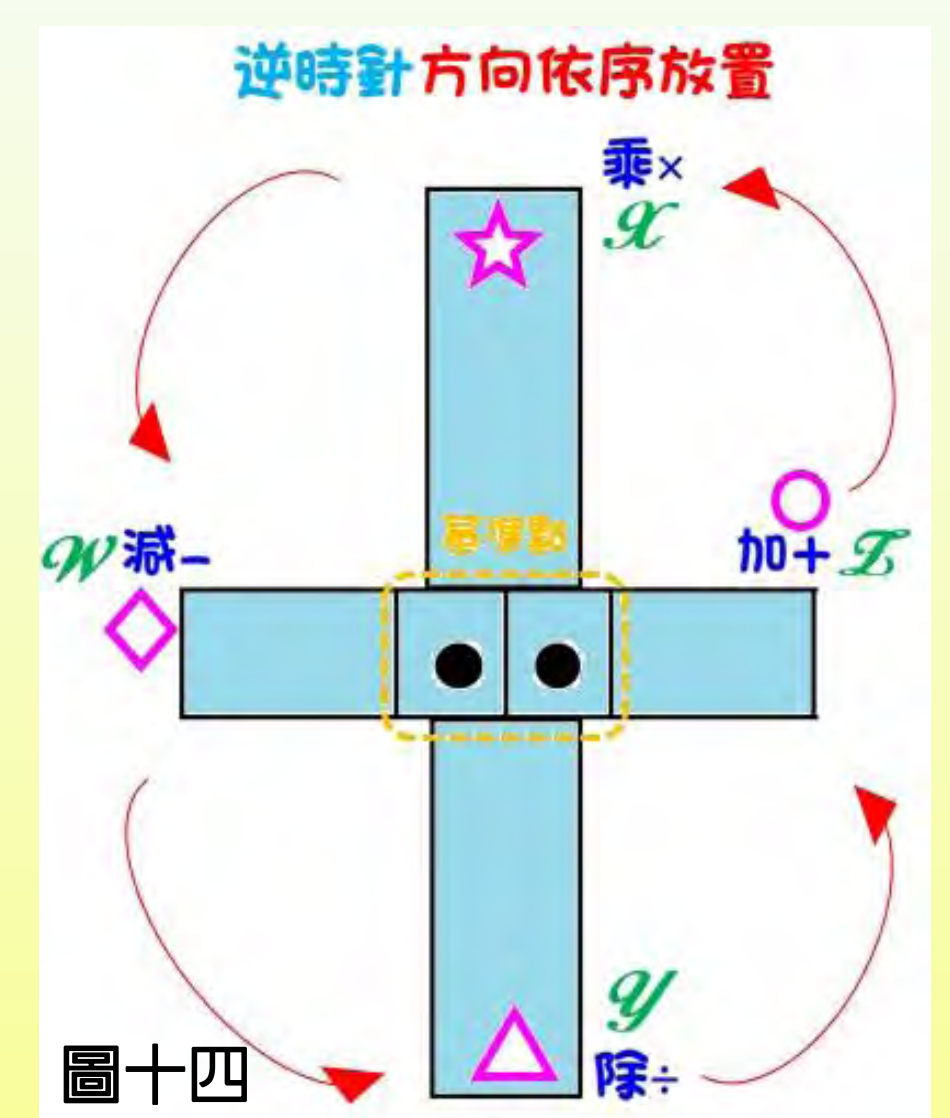


(三) 利用進階版公式來遊戲：

利用進階版骨牌公式：基準點總和  $\times \star \div \triangle + \circ - \diamond = 0$  來玩遊戲，因為順時針會有除以0無意義的考量，或容易除數過大、有分數的問題，所以用逆時針來排列，研究如何用最少張骨牌、又能符合公式的排列組合。(如圖十四)

基準點	最少排列幾張	研究過程	實際排列(圖)
(0,0)	6張(能排列6張的不只一組解)	0乘除任何不為零的數都為0，所以只要讓加減兩邊骨牌總和相等即可。 上圖代入公式： $0 \times 1 \div 3 + 6 - 6 = 0$ 。 下圖代入公式： $0 \times 3 \div 2 + 6 - 6 = 0$ 。	
(1,1)	5張(能排列5張的只有兩組解)	因為要讓基準點與乘法總和相乘，相乘後為除法總和的倍數，再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式： $2 \times 3 \div 6 + 4 - 5 = 0$ 。 下圖代入公式： $2 \times 6 \div 3 + 1 - 5 = 0$ 。	
(2,2)	5張(能排列5張的不只一組解)	基準點與乘法總和相乘，相乘後為除法總和的倍數，再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式： $4 \times 6 \div 8 + 2 - 5 = 0$ 。 下圖代入公式： $4 \times 2 \div 8 + 6 - 7 = 0$ 。	

基準點	最少排列幾張	研究過程	實際排列(圖)
(3,3)	5張(能排列5張的只有一組解)	基準點與乘法總和相乘，相乘後為除法總和的倍數，再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 代入公式： $6 \times 3 \div 9 + 5 - 7 = 0$ 。	
(4,4)	6張(能排列6張的只有一組解)	基準點與乘法總和相乘，相乘後為除法總和的倍數，再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 代入公式： $8 \times 5 \div 10 + 5 - 9 = 0$ 。	
(5,5)	8張(能排列8張的不只一組解)	基準點與乘法總和相乘，相乘後為除法總和的倍數，再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式： $10 \times 6 \div 6 + 13 - 23 = 0$ 。 下圖代入公式： $10 \times 6 \div 6 + 11 - 21 = 0$ 。	
(6,6)	8張(能排列8張的不只一組解)	基準點與乘法總和相乘，相乘後為除法總和的倍數，再去判斷加減總和兩邊該排出多少數值。 上圖代入公式： $12 \times 6 \div 8 + 9 - 18 = 0$ 。 下圖代入公式： $12 \times 6 \div 8 + 12 - 21 = 0$ 。	



圖十四

➢ 補充進階版遊戲證明：

(過程中先把公式中的乘法總和用未知數X代替，除法總和用未知數Y代替，加法總和用未知數Z代替，減法總和用未知數W代替)。

(1,1) 為基準點

$2X \div Y + Z - W = 0 \Rightarrow 2X \div Y + Z = W \Rightarrow 2X \div Y = W - Z \Rightarrow 2X = Y(W - Z)$  ( $W > Z$ , 因為減法總和必大於加法總和)。  
因為2X的關係，所以未知數Y或W-Z必有一個為偶數。

X、Y、Z、W的可能性由下方空格推論來了解恰有兩組解：

基準點與值\可能性	第一種	第二種	第三種	第四種	第五種	第六種	第七種	第八種	第九種
(1,0) = 1			Z	Z	Z				
(1,2) = 3		X	W	Y		Z	Z		
(1,3) = 4	Y	Z							Z
(1,4) = 5		W		W		W		Z	
(1,5) = 6	X	Y		X					W
(1,6) = 7					W		W	W	
成立與否	否	成立	否	成立	否	否	否	否	否

## 陸、研究結果

一、初階版研究發現：

- 實驗過程中，盡量讓兩端骨牌點數皆包含0~6，這樣才方便後續調整、移動骨牌。
- 把(0,0)、(1,1)、(2,2)、(3,3)、(4,4)、(5,5)、(6,6)留到最後，因為這些骨牌點數相同，只要安插在任兩張骨牌中間即可，故留至最後調整這些牌比較好操作。
- 移動1點至另一端，兩端距離差距為2，故只需要移動距離差的一半即可達到平衡。
- 因為骨牌點數總和為168，換句話說兩端骨牌點數相加為168，兩端只會有①(奇數、奇數)②(偶數、偶數)兩種組合才有可能相加為168，故加、減兩端的距離差都會是偶數，原因：  
①奇數 - 奇數 = 偶數  
②偶數 - 偶數 = 偶數

圖十六

二、進階版研究發現：

- 較大數字的骨牌，一開始先排在乘除兩邊，能較輕易的把骨牌排列找出，較不會影響加減兩邊的排列。
- 公式為基準點總和  $\times \star \div \triangle + \circ - \diamond = 0$ ，除出來的商數當作乘除兩邊的骨牌總和，乘除運算後為1，會讓公式簡化變為基準點總和  $+ \circ - \diamond = 0$ ，因為基準點會和加法那邊相加，所以減法總和必大於等於加法總和，而當(0,0)為基準點時，基準點總和除以四邊，不會有餘數，所以當其他基準點有餘數時，會把餘數分給減法那邊。
- 從先前研究可知，需要移動時，只需要移動差距的一半即可。若遇到總和減掉基準點時，還有餘數，需扣掉餘數，才為真正需要移動的差距。

三、進階版其他研究發現：

- 為了讓乘除總和運算後為2，在找尋過程中，如果乘除總和兩邊數值相加為奇數，則加減總和會無法找到相對應的數字，所以會讓乘除總和數值相加為偶數，會較好找到相對應的加減總和。
- 在特殊遊戲的玩法時，因為不能有除以0無意義的狀況發生，所以最少在排列時，加上基準點的那張骨牌，至少都需要排列五張，其它依基準點，在符合公式時會有不同張數的變化。
- 在特殊遊戲玩法時，都會盡量一開始先找基準點總和與乘法總和相除，能為除法總和的倍數，再來依所計算出各邊總和的數值，找加減總和各需排列總和多少的骨牌。

圖十五



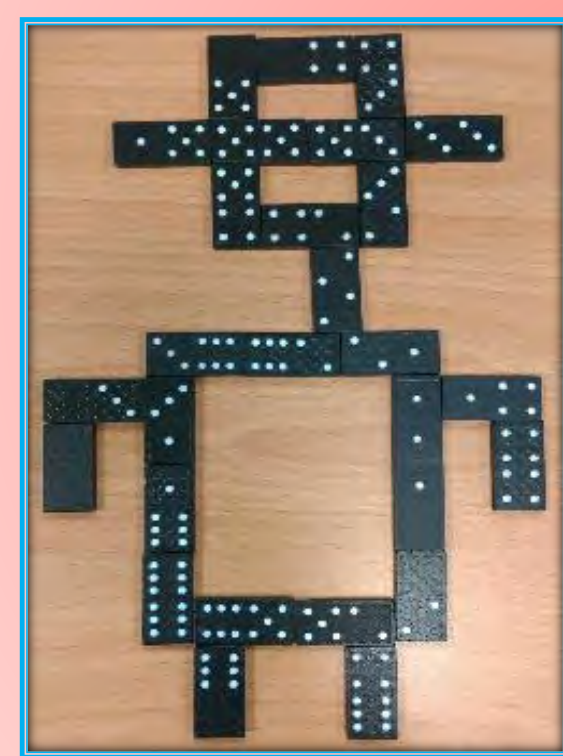
## 柒、討論

一、生活中的運用：

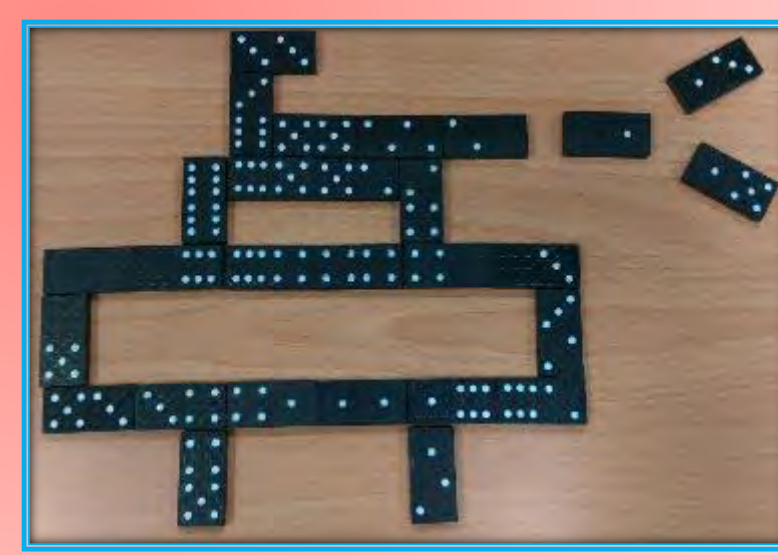
- 查詢「達美樂」招牌(如圖十五)，原來達美樂創始者Mr. Monaghan最初的構想是在自己家鄉經營二、三家比薩店就滿足了，因此選擇了骨牌的一點和兩點作為商店的標誌。沒想到現在的「達美樂」如同骨牌效應不停的蔓延拓展，現在全球各地都可以吃到美味可口的「達美樂」pizza。
- 卡通動物親子骨牌(如圖十六)依照Domino骨牌的特性：兩端相同點數往兩端延伸，也可改變成不同造型，可將兩端有相同的動物圖案連接在一起，往兩端做延伸，藉由此遊戲，達成訓練幼兒對動物的分辨與認識，相當有趣。

二、Domino骨牌創意圖形(如圖十七、十八)

課堂中老師讓我們腦力激盪一下，想想看如何用多米諾特性：相同點數往兩端延伸，並且結合創意，拼排出不同造型的圖案。



圖十七  
創意機器人



圖十八  
創意坦克車

三、研究過程中的難題

- 一開始找不到研究方向，因為多米諾骨牌特性再加上人為因素，若是想研究獲勝機率，會有太多變數難控制，因此無法研究多米諾骨牌獲勝機率。
- 在一開始也想過研究骨牌排法與速度變化的相關研究，但由於需精密儀器測量，且較難推論出相關數學公式，所以我們決定改變研究方向。
- 多米諾骨牌一開始在定義規則與排列出所需骨牌時，在研究過程中不斷嘗試，最後才得出公式。
- 得出公式後，要研究如何排列骨牌，會較好排列出相關能符合公式的骨牌排列，經過了許多次的失誤，才慢慢研究出一些規律能較快排列出符合公式的骨牌排列。

## 捌、結論

本研究從探討多米諾骨牌遊戲出發，討論如何利用不同策略達成骨牌遊戲勝利，並且從遊戲過程中研究骨牌特性，思考如何將此特性與四則運算結合，研究出不同的遊戲玩法。裡面研究內容有初階版加減骨牌研究、進階版加減乘除骨牌研究、進階版特殊遊戲研究，透過不同的替換公式裡的未知數，研究出不同可能的變化性。並延用一開始設計的公式，尋找用最少張數骨牌，來代入公式為0的可能性，還找出有的最少張數內有唯一解或唯二解，有的則不只一組解。透過這樣的研究，也讓我們的計算能力大增。

## 玖、參考資料

- 西洋骨牌(維基百科)
- 【親子桌遊】Domino骨牌遊戲棋原來由來已久