

# 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

第一名

080406

狡兔八窟

學校名稱：新北市樹林區大同國民小學

作者： 小五 廖凡儀 小六 黃子恆	指導老師： 吳孟貞
-------------------------	--------------

關鍵詞：超立方體、對稱、文字字串

## 得獎感言

錄自陳之藩，謝天。

需要感謝的人太多了，就感謝天罷。無論什麼事，不是需要先人的遺愛與遺產，即是需要眾人的支持與合作，還要等候機會的到來。越是真正做過一點事，越是感覺自己的貢獻之渺小。

廖凡儀和黃子恆恭錄

2018年7月31日於樹林中山路星巴克



2018年7月27日於第58屆全國科展頒獎典禮

## 摘要

本研究要求對超立方體中，每個頂點開槍以獵捕兔子，每經過一輪後，兔子可以留在原處，或跳動到相鄰的位置，每輪槍數均相同。如此，每輪開幾槍？總共開槍幾輪才能獵到兔子？

本研究先以正多面體和足球探討。經由研究足球的經驗，利用組合數和文字字串解決任意維度超立方體開槍點數量的問題。尤其是，文字字串從建構、組合觀點，提出不同角度的研究。

對於超立方體的輪數問題。發現 0 維度每輪至少 1 槍，需要 1 輪。1 維度每輪至少 2 槍，需要 1 輪。3 維度需要 4 輪，可以依序用 4 槍、5 槍、5 槍和 4 槍。4 維度每輪均使用 8 槍，需 6 輪。

## 壹、前言

### 一、研究動機

基於教材相關性和全國科展作品集的理由，選擇題目 1.1.1. 當作我們的研究主題。

(一) 題目 1.1.1. 所提正立方體屬於 3 維度超立方體在教科書五年級下學期[1]。

(二) 第 56 屆全國科展國小數學，【神算】引用自科學研習月刊[2]。

第 57 屆全國科展國小數學，【一直乘以 2】引用自科學研習月刊[3]。

連續兩年，全國科展國小數學均有作品選自科學研習月刊。科學研習月刊的題目，有趣，又有數學深度。

本作品選自科學研習月刊，2017 年 8 月 2 日，第 56 卷，第 8 期，第 46 頁[4]。

**題目 1.1.1.** 兔子甲藏在正立方體的八個頂點之一。每一輪，獵人乙選擇一些頂點，並同時對這些頂點開槍。如果這些頂點之一有兔子甲，獵人乙就獵到兔子甲了。否則兔子甲在獵人乙下一輪開槍之前可以移動到相鄰的頂點，也可以選擇停在原地不動。

獵人乙在開槍之前不知道兔子甲在哪裡，也不知道兔子甲有沒有移動。如果獵人乙每輪開槍的頂點數要一樣多，聰明的讀者，請問要保證可以獵到兔子甲，每一輪最少要同時對幾個頂點開槍？至少要開槍幾輪？

另一隻兔子丙的窩互相連結的形狀長得像是正八面體骨架。聰明的讀者，請問如果獵人乙要保證可以獵到兔子丙，每一輪最少要同時對幾個頂點開槍？至少要開槍幾輪？

## 二、研究題材

在這個研究，將依序探討正多面體、足球和超立方體。

(一)正多面體，計有 5 種。題目 1.1.1.所提議正立方體就是正多面體的一種，在 p6。。

(二)足球是 12 個五邊形和 20 個六邊形所組成的。每個頂點都有 3 條邊圖，在 p9。本研究利用的足球的研究，得到超立方體的開槍布局靈感。

(三)超立方體是本研究的主軸，在 p14。

正多面體和足球將在本研究第三章討論；超立方體將在第肆章討論。

## 三、符號與名詞定義

符號 1.3.1.  $S_k$  :  $k$  維度超立方體，依題目 1.1.1.，每輪至少  $S_k$  次開槍可以保證抓到兔子。

符號 1.3.2.  $J_k$  :  $k$  維度超立方體，依題目 1.1.1.，每輪至少  $S_k$  次開槍布局下，需要  $J_k$  輪。

符號 1.3.3. 組合數， $C_n^m = \frac{m!}{n! \times (m-n)!}$ 。

符號 1.3.4.  $|x|$  為大於  $x$  或等於  $x$  的最小的非負整數。

符號 1.3.5.  $T_n$  :  $2n-1$  維度和  $2n$  維度超立方體的文字字串。

符號 1.3.6.  $|T_n|$  : 計算  $2n-1$  維度和  $2n$  維度超立方體的文字字串  $T_n$  代表的數值。

超立方體，任選一點當基準點均相同，本研究將在第肆章第一節討論。本研究選定某一頂點當作北極。再規定的計算數量。

組合數、 $T_n$  和  $|T_n|$  詳見第肆章第二節、第三節及第四節。

定義 1.3.7. 正則圖:圖形中，每個頂點的邊數都相同。

本研究所討論的五種正多面體、足球、超立方體都是正則圖。

## 四、研究目的

研究目的 1.4.1. 本研究的目的是，探討正多面體、足球和  $k$  維度超立方體，每輪最少開幾槍，「保證」可以獵到兔子，同時，在保證可以獵到兔子的情況下，開槍幾輪？

## 五、研究架構



圖 1.5.1 研究架構

## 六、研究特色

本研究的困難，在於  $k$  維度超立方體屬於正則圖，每個頂點都有  $k$  個邊，遇到高維度的超立方體，很難用直觀的觀察期間的結構。

提出組合數  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k$  在 p15；文字字串在 p15，數值  $\left| T_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right|$ ，解決  $k$  維度超立方體每輪至少  $S_k$  次開槍。對於超立方體開槍布局計數方式採用文字字串是國內科展計算超立方體的創舉。

也就是，

我們發現  $k$  維度超立方體阻擋點數量計算方式。

## 貳、研究過程

### 一、文獻探討

(一)組合設計：第 46 屆全國科展國小數學科『神奇的尺』[5]p9 至 p10。

本研的特色，首創文字字串  $T_n$  和其數值  $|T_n|$  就是組合設計的一種。

(二)巴斯卡三角形：第 56 屆全國科展國小數學科，『神算』[2]P12。同樣題材出現在第 57 屆全國科展國中數學科『神機妙算』[6] P1。

本研究針對超立方體組合數的靈感，來自於『神算』的研究過程。

(三)圖論：第 57 屆全國科展國小數學科『一直乘以 2』[3]P7 至 P9 圖論，樹。後來，一直乘以 2 的同樣題材，在 2018 年台灣國際科學展覽數學科，以『「乘」「乘」有序一乘二數列及乘五數列的探討』發表[7]。引用題目 1.1.1.的部分條文：「另一隻兔子丙的窩互相連結的形狀長得像是正八面體骨架。」。本研究的超立方體就是因應引題目 1.1.1.所提的架構，使用圖論的工具。

### 二、距離和連通

**定義 2.2.1.** 連通：在一個圖  $G$  中，若從頂點  $v_i$  到頂點  $v_j$  有路徑相連；也就是，從頂點  $v_j$  到  $v_i$  也一定有路徑，則稱  $v_i$  和  $v_j$  是連通的。

**定義 2.2.2.** 若在一圖  $G$  中，若從頂點  $v_i$  到頂點  $v_j$  沒有有路徑相連，稱為不連通。

**定義 2.2.3.** 在一個圖  $G$ ，若有任意兩個頂點  $u$  和  $v$  連通，則規定最短的線段需要經過  $k$  個線段，則稱為頂點  $u$  和  $v$  距離為  $k$ ，記做作  $d_G(u, v) = k$ 。若圖形  $G$ ，有兩個頂點  $u$  和  $v$ ，沒有連通，則  $d_G(u, v) = \infty$ 。

**例子 2.2.4.** 如圖 2.2.5，為一個連通圖，其中，頂點 1 和頂點 2 的距離是 2；頂點 1 和頂點 3 的距離是 6；頂點 1 和頂點 4 的距離是 6；頂點 1 和頂點 5 的距離是 6；頂點 22 和頂點 21 的距離是 1。設相異頂點  $u$  和  $v$  在圖 2.2.5，則  $1 \leq d_G(u, v) \leq 6$ 。

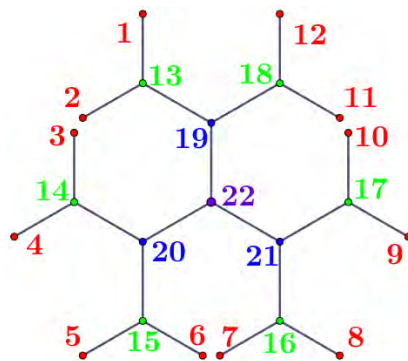


圖 2.2.5

### 三、緊縮

定義 2.3.1. 圖形中，經過特定開槍後，兔子若留在原處，則可能出現兔子的區域為危險區域。

定義 2.3.2. 圖形扣除危險區域，稱為安全區域。

將安全區域中的點區分成兩種，一類為「暫時安全點」，另一類為「保證安全點」。

定義 2.3.3. 暫時安全點，滿足以下兩點條件，一、在安全區域內，  
二、危險區域中存在一點與該點距離為 1。

定義 2.3.4. 保證安全點，滿足以下兩點條件，一、在安全區域內，  
二、危險區域中不存在一點與該點距離為 1。

例子 2.3.5. 若這次開槍，圖 2.2.5 中的頂點 13,14,15,16,17,18, 19,20,21,22，共 10 個頂點。則暫時安全點為頂點 13,14,15,16,17,18。保證安全點為頂點 19,20,21,22。

### 四、阻擋點

例子 2.4.1. 假設，某次搜尋前，頂點  $a$  在危險區域，和頂點  $a$  相鄰的頂點，屬於安全區域且和頂點  $a$  距離為 1 的有  $k$  個頂點  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 。此  $k$  個頂點沒有和其他的危險區域頂點相連，屬於暫時安全點。

若，某次搜尋把頂點  $a$  和  $k$  個頂點  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  擺設開槍點，則頂點  $a$  成為暫時安全點開槍點， $k$  個頂點  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  成為保證安全點。此時， $k$  個頂點  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  成為保證點後，將不用再開槍。如圖 2.4.2。

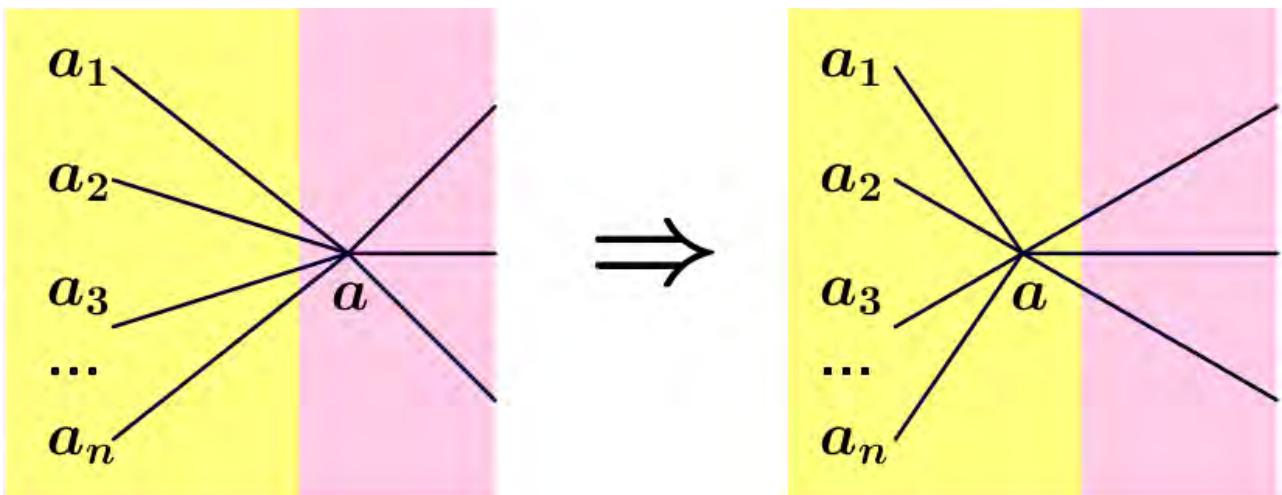


圖 2.4.2

# 參、正多面體、足球

## 一、正多面體

正多面體有 5 類[9]：正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體。這 5 類正多面體都是正則圖。其中，

**事實 3.1.1.** 在正多面體，任選一點當基準點均相同。

[說明] 不破壞正多面體圖的構，透過平移、旋轉、翻轉、外翻和內翻，基準點可以由某一個點移動到另一點。 □

**性質 3.1.2.** 正四面體要同時選 4 個頂點開槍，且只要花 1 輪。

[證明] 若 1 輪選 3 個點開槍，則沒被查到的搶匪，可在下一輪躲到另外 3 個點或不動。

做 3 頂點的開槍，做開槍等於沒做。正四面體要同時選 4 個頂點開槍。 □

**定義 3.1.3.** 給定一個圖  $G$ ，有  $n$  個頂點，每個頂點和圖  $G$  另外其他的  $n-1$  個頂點，直接連通，稱為完全圖。

**事實 3.1.4.** 完全圖的每個頂點都是直接連通。每個頂點到任意相異頂點，只要走 1 步就到達。必須要同時對於圖形中每一個頂點開槍。

將正立方體編號，如圖 3.1.5。只考慮各頂點是否有線段相連結。如圖 3.1.6。

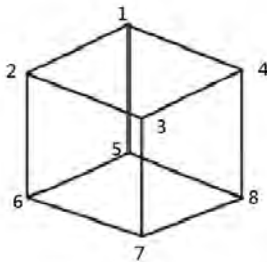


圖 3.1.5

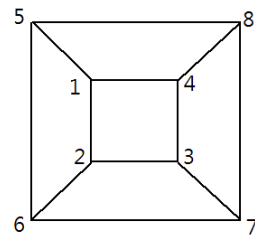


圖 3.1.6

**性質 3.1.7.** 正六面體，每輪需要 5 槍，需要 4 輪。

[證明] (1) 每輪選 4 個頂點開槍，發現搶匪抓不到。

若，不依照連通，下一輪開槍後，搶匪可能出現在任何一個位置。

若，依照連通，考慮性質 3.1.1. 在正多面體，任選一點當基準點均相同。以事實 3.1.1 來看，姑且以頂點 1,5,6,8 作為第一輪開槍，此時，頂點 1,6,8 為防禦點，確保頂點 5 為安全範圍。第 2 輪將前一輪開槍，節省的頂點 5 選擇頂點 2、7 或 8，均無法增加保證安全的區域。也就是說，正六面體每個頂點有三個邊，第 1 輪 3 個頂點可以保護 1 個頂點，但，第 2 輪，就無法增加保證安全區域。



(2)每輪選 5 個頂點開槍，總共花 4 輪，編號如同圖 3.1.5 和圖 3.1.6。

第 1 輪開槍 1、2、3、4、5，第 1 輪開槍後保證安全點有頂點 1。

第 2 輪開槍 2、3、4、5、6，第 2 輪開槍後保證安全點有頂點 1 和 2。

第 3 輪開槍 3、4、5、6、7，第 3 輪開槍後保證安全點有頂點 1、2、3 和 6。

第 4 輪開槍 4、5、7 和 8，全部開槍完畢。



**性質 3.1.8.** 正八面體，如圖 3.1.9，每輪選 5 個頂點開槍，共花 2 輪，不浪費。

[證明](1)每輪選 4 個頂點開槍，任意一點的旁邊接 3 條線。

除了對角線，需要 2 步才能到達。另外旁邊有 3 條線段可以連通。因此，留下 2 個，再下一步，全部 6 個點，都可能有兔子的蹤跡。

(2)每輪選 5 個頂點開槍，如圖 3.1.9。沒有浪費的開槍數。

第 1 輪開槍：1、2、3、4、5，保證安全點為頂點 1。

第 2 輪開槍：2、3、4、5、6，全部開槍完畢。

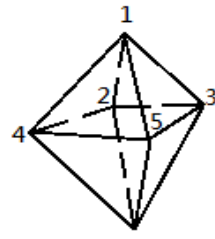


圖 3.1.9



**性質 3.1.10.** 正十二面體，每輪要開 7 槍，總共花 10 輪。

[證明] 請參酌圖 3.1.11 的號碼。及事實 3.1.1 在正多面體，任選一點當基準點均相同。

(1)每輪選 6 個頂點開槍。每輪選 6 個頂點必須連通。依照緊縮，每輪選 6 個頂點。不妨先選頂點 1,2,3,6,7,8；如此，讓頂點 2 和頂點 7 成為保證安全點。多出來的 2 個頂點分配給頂點 4 和頂點 9。如此，多一個頂點 3 成為保證安全點。但是，頂點 3 多出來的部份，無法再增加安全區域。每輪選 6 個頂點開槍，太少。

(2)每輪選 7 個頂點開槍，總共花 10 輪，開槍順序及保證安全點，如表 3.1.12。

表 3.1.12

輪次	開槍頂點	保證安全點
1	1、2、3、4、5、13、15	1、5
2	2、3、4、7、9、13、15	1、2、3、5
3	4、6、7、9、11、13、15	1、2、3、4、5
4	6、7、9、11、13、15、16	1、2、3、4、5、6
5	7、8、9、11、13、15、16	1、2、3、4、5、6、7
6	8、9、11、13、15、16、17	1、2、3、4、5、6、7、8
7	9、10、11、13、15、16、17	1、2、3、4、5、6、7、8、9
8	10、11、13、15、16、17、18	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、17
9	11、12、13、15、16、18、19	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、17、18
10	13、14、15、16、19、20	保證抓到兔子



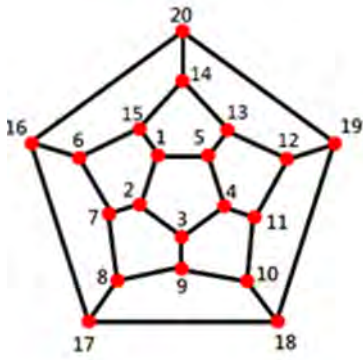


圖 3.1.11

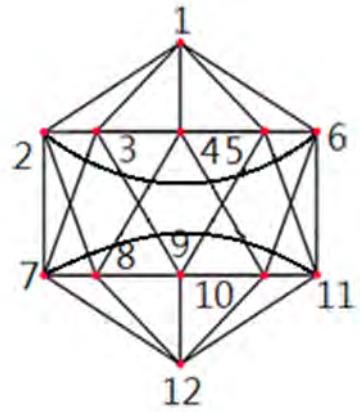


圖 3.1.13

**性質 3.1.14.** 正二十面體，每輪選 7 個頂點開槍，需要 6 輪。

[證明](1)如圖 3.1.13，每輪選 6 個頂點開槍，選頂點 1,2,3,4,5,6，只能產生 1 個保證安全點，而 1 個保證安全點，無法再產生其他的保證安全點。每輪選 6 個頂點開槍，太少。

(2)每輪選 7 個頂點開槍，如圖 3.1.13。

- 第 1 輪開槍頂點 1,2,3,4,5,6,7，第 1 輪產生新的保證安全點有頂點 1。
- 第 2 輪開槍頂點 2,3,4,5,6,7,8，第 2 輪產生新的保證安全點有頂點 2。
- 第 3 輪開槍頂點 3,4,5,6,7,8,9，第 3 輪產生新的保證安全點有頂點 3。
- 第 4 輪開槍頂點 4,5,6,7,8,9,10，第 4 輪產生新的保證安全點有頂點 4。
- 第 5 輪開槍頂點 5,6,7,8,9,10,11，第 5 輪產生新的保證安全點有頂點 5,6。
- 第 6 輪開槍頂點 7,8,9,10,11,12，保證抓到兔子 □

得到，

表 3.1.15

正多面體	每輪要多少個開槍點	總共多少輪數	浪費的開槍數
正四面體	4	1	0
正六面體	5	4	1
正八面體	5	2	0
正十二面體	7	10	3
正二十面體	7	6	1

發現

依據表 3.1.15，對偶的正六面體和正八面體，每輪的阻擋點數量是 5 次開槍。

對偶的正十二面體和正二十面體，每輪的阻擋點數量是 7 次開槍。

**事實 3.1.16.** 呈現對偶的正多面體，每輪阻擋點的數量均相同。

## 二、足球

藉由正則圖的足球例子，我們發現另一種超立方體阻擋點的布局方式。在沒有圖形幫忙的數值計算法。針對足球，我們提出兩種演算方法：數值計算法和足球的圍堵法。

**演算方法 3.2.1.** 對於足球，我們使用下列的步驟：

步驟一：由 1 組開槍開始測試，逐步升高 2 組，3 組，一直到可以保證抓到兔子。

此時，每輪出動的開槍，均為  $n$  個。

步驟二：出動  $n$  組開槍後，可抓到兔子數。來源有兩個，步驟一的 60 個，或是步驟三結果。

若，一直重複上一輪的步驟二，則視為無效的圍捕， $n$  組開槍變成  $n+1$  組開槍。

若，步驟二的殘留數目，和上一輪的殘留數目相比，比上一輪的第二步少，視為有效的蒐查。直到殘留的數目為 0。

步驟三：殘留的兔子可躲到別的地方，下一輪開槍前，增加可藏匿的地方。重回步驟二。

**例子 3.2.2.** 依照演算方法 3.2.1.，如圖 3.2.3。

[說明] 如圖 3.2.3 的第 1 列，我們先布署 1 個開槍， $60-1=59$ ，開槍後，兔子會移動造成  $59+1=60$ ，如此，反覆出現 59，60，59，60，59，60。

再舉一例，如圖 3.2.3 的第 3 列，我們先布署 3 個開槍點， $60-3=57$ ，開槍後，兔子會移動造成  $57+3=60$ ，如此，反覆出現 57，60，57，60，57，60。

1	→	59	→	60	→	59	→	60	→	59	→	60...
2	→	58	→	60	→	58	→	60	→	58	→	60...
3	→	57	→	60	→	57	→	60	→	57	→	60...
4	→	56	→	59	→	56	→	59	→	56	→	59...
5	→	55	→	59	→	55	→	59	→	55	→	59...
6	→	54	→	58	→	54	→	58	→	54	→	58...
7	→	53	→	58	→	53	→	58	→	53	→	58...
8	→	52	→	57	→	49	→	55	→	47	→	54
			→	46	→	53	→	46	→	53	→	46
			→	53...								
9	→	51	→	56	→	47	→	54	→	45	→	52
			→	43	→	49	→	40	→	49	→	40
			→	49	→	40...						
10	→	50	→	55	→	45	→	52	→	42	→	51
			→	41	→	50	→	40	→	49	→	39
			→	49	→	39	→	49	→	39...		
11	→	49	→	55	→	44	→	52	→	41	→	51
			→	40	→	39	→	49	→	38	→	48

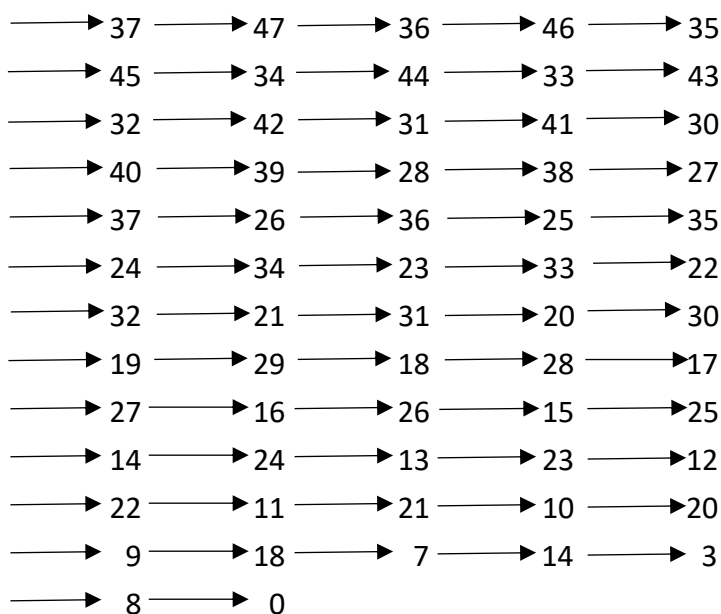


圖 3.2.3

由圖 3.2.3 得知，足球每輪需要開 11 槍圍捕，且要花 37 輪。 (3.2.4.)

**演算方法 3.2.5.** 針對足球提出的演算方法。

步驟一：取足球的極端，派 11 個開槍開槍，如圖 3.2.6 的甲。

步驟二：和步驟一相鄰的點，繼續派 11 個開槍開槍，如圖 3.2.6 的乙。

步驟三：持續，往另外一端前進。

步驟四：如圖 3.2.6 的丙，一定會出現最大周長。由 10 個開槍圍成周長，另一個開槍連通。

步驟五：持續，往另外一端前進。

步驟六：持續縮小可能出現兔子的區域，會出現圖 3.2.6 的丁。

步驟七：最後到達第 37 輪的開槍，全部圍捕成功，如圖 3.2.6 的戊。

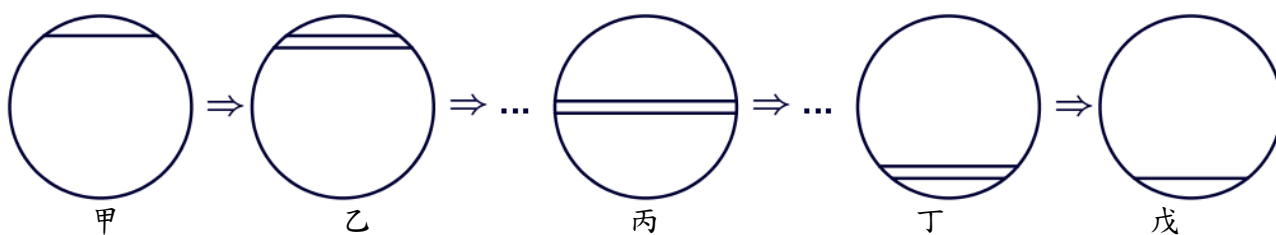


圖 3.2.6

針對足球，演算方法 3.2.1.，沒有考慮圖形的形狀；演算方法 3.2.5.則有考慮圖形，稱為足球圍捕法。二者均需要每輪 11 組開槍開槍和需要 37 輪的開槍。

經由探討足球的經驗，我們發現一種超立方體開槍布局的方法。

## 肆、超立方體

### 一、超立方體

考慮超立方體[10]

**定義 4.1.1.** 0 維度超立方體為 1 個頂點，沒有線段相連，如圖 4.1.2。

1 維度超立方體為 2 個頂點，有 1 條線段相連，如圖 4.1.3。

2 維度超立方體為 4 個頂點，有 4 條線段相連，如圖 4.1.4。

3 維度超立方體為 8 個頂點，有 12 條線段相連。如圖 4.1.5。

4 維度超立方體為 16 個頂點，有 32 條線段相連，如圖 4.1.6。

$k$  維度超立方體，有  $2^k$  個頂點，每個頂點有  $k$  個邊，總共有  $k \times 2^{k-1}$  條線段。



圖 4.1.2



圖 4.1.3

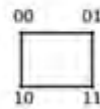


圖 4.1.4

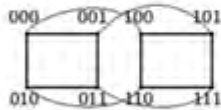


圖 4.1.5

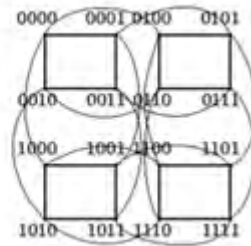


圖 4.1.6

也就是，

在  $k$  維度超立方體中，每個頂點都有  $k$  個座標，每個座標只以 0 或 1 表示。

**性質 4.1.7.** 在  $k$  維度超立方體，任選一點當基準點均相同。

[證明] 不破壞圖的結構，透過平移、旋轉、翻轉、外翻和內翻，基準點由某一個點移動到另一點。此時，整個座標體系將調整。 □

設  $k$  維度超立方體 3 個相異頂點，頂點  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_k)$ ，相異頂點  $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ ，第 3 個相異頂點  $w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_k)$ ，則有下列的定義、事實和性質。

**定義 4.1.8.**  $k$  維度超立方體，任意兩頂點距離， $d = \sum_{i=1}^k |u_i - v_i|$ ， $\forall 1 \leq i \leq k$ 。

**例子 4.1.9.** 圖 3.1.5 和圖 3.1.6 中，均是國小五年級數學課本所稱的正立方體。

圖 3.1.6 的頂點 1 和圖 4.1.5 的(000)相同。

圖 3.1.6 的頂點 5 和圖 4.1.5 的(010)相同。

依照定義 2.2.3.，圖 3.1.6 的頂點 1 到頂點 5 的距離是 1。

依照定義 4.1.8.，圖 4.1.5(000)到(010)距離是 $|0-0|+|1-0|+|0-0|=1$ 。  
二者的定義均相同。

**定義 4.1.10.**  $k$  維度超立方體，只有距離  $d = \sum_{i=1}^k |u_i - v_i| = 1$ ，頂點  $u$  和頂點  $v$  之間有線段相連。

**例子 4.1.11.** 如圖 4.1.6，4 維度超立方體。

頂點(0000)和頂點(0001)的距離是 1，有線段相連。

頂點(0100)和頂點(0110)的距離是 1，有線段相連。

頂點(0011)和頂點(0000)的距離是 2，沒有線段相連。

頂點(0101)和頂點(1010)的距離是 4，沒有線段相連。

**事實 4.1.12.** 在  $k$  維度超立方體中，設頂點  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_k)$ ，另頂點  $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ ，若  $u_i + 1 \equiv v_i \pmod{2}$ ，則  $k = \sum_{i=1}^k |u_i - v_i|$ ，此時， $1 \leq i \leq k$ ，對每個  $i$  要同時成立。

## 二、對稱

再以對稱的角度，探討  $k$  維度超立方體。

將 0 維度、1 維度、2 維度的超立方體分別如圖、圖 4.2.1、圖 4.2.2 和圖 4.2.3。圖 4.2.3 的超立方體可變成圖 4.2.4 和圖 4.2.5。如此，可以建構 3 維度超立方體，如圖 4.2.6。

我們可以發現，圖 4.2.1、圖 4.2.2、圖 4.2.3、圖 4.2.4、圖 4.2.5 和圖 4.2.6，都屬於線對稱的圖形，具有國小數學課本的相關性。



圖 4.2.1



圖 4.2.2

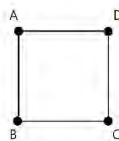


圖 4.2.3



圖 4.2.4



圖 4.2.5

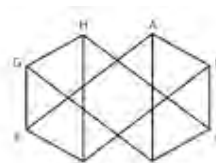


圖 4.2.6

- 例子 4.2.7.** (1)圖 4.2.1 是 0 維度超立方體。  
 (2)圖 4.2.2 是 1 維度的超立方體，其中有 2 個 0 維度超立方體，且互相以線段相連。此時，圖 4.2.1 在圖 4.2.2 出現，圖 4.2.1 是圖 4.2.2.的子圖。  
 (3)圖 4.2.3 是 2 維度的超立方體，其中有 2 個 1 維度超立方體，且互相只有以 1 條線相連。圖 4.2.3、圖 4.2.4 和圖 4.2.5，3 個圖形均相同。此時，圖 4.2.2. 在圖 4.2.3 出現，圖 4.2.2 是圖 4.2.3.的子圖。  
 (4)圖 4.2.6 是 3 維度超立方體。此時，圖 4.2.3、圖 4.2.4 和圖 4.2.5 都是圖 4.2.6 的子圖。

**事實 4.2.8.** 從 0 維度到  $k$  維度超立方體都是  $k+1$  維度超立方體的子圖。

**演算方法 4.2.9.** 取 2 個  $k$  維度超立方體構造第  $k+1$  維度的方法。

步驟一：取 2 個  $k$  維度超立方體。每個超立方體各有  $2^k$  個頂點，每個頂點有  $k$  個邊，總共有  $k \times 2^{k-1}$  條線段。如圖 4.2.10。

步驟二：將步驟一的 2 個  $k$  維度超立方體間，各取 1 個頂點，設為頂點  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_k)$ ，另頂點  $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ ，只要兩點的距離  $1 = \sum_{i=1}^k |u_i - v_i|$ ，再連成一條直線。如圖 4.2.11。

步驟三：在圖 4.2.11 中， $k+1$  維度超立方體中，選任意兩點，頂點  $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k+1})$ ，和頂點

$t = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_{k+1})$ ，只要  $1 = \sum_{i=1}^{k+1} |s_i - t_i|$ ，就會有一條線段相連，其餘，沒有線段相連。

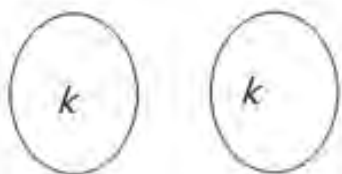


圖 4.2.10

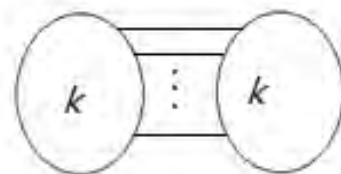


圖 4.2.11

也就是，

由演算方法 4.2.9，構造出來的任意 2 個相異頂點，頂點  $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k+1})$ ，和頂點  $t = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_{k+1})$ 。只要

$$1 = \sum_{i=1}^{k+1} |s_i - t_i|。$$

對於頂點  $s$  和頂點  $t$  的座標，只有 1 個不同，其餘，在  $k+1$  維度的座標均相同。此時，不同的座標，只有 2 個數值可以填入，0 或 1。於是，

**事實 4.2.12.** 2 個  $k$  維度超立方體構成 1 個  $k+1$  維度超立方體，可以呈現對稱現象。

對  $k+1$  維度超立方體的結構，由 2 個  $k$  維度超立方體所構成。此時，這 2 個  $k$  維度超立方體自我相似。自我相似的特性，出現在第 56 屆國展國小數學科【神算】和第 57 屆國展國小數學科【一直乘以 2】的作品。

請注意，

演算方法 4.2.9.和事實 4.2.12.增加超立方體開槍布局的困難。

### 三、代碼問題

在這個章節，我們嘗試，在每輪  $S_k$  的情況下，對於  $k$  維度超立方體需要多少輪，提出討論。因為，超立方體中每個頂點座標，只有 0 或 1。我們發現幾個有趣的代碼問題。

**事實 4.3.1.** 當  $k=0$ ，超立方體，可以每個頂點以 0 或 1 的布局開槍，如圖 4.1.2，顯然，每輪用 0 點不足夠。同時，需要 1 輪且 1 槍。

**事實 4.3.2.** 當 1 維度超立方體如圖 4.1.3，顯然，每輪用 1 點不足夠。1 維度超立方體布局以 1 輪 2 次開槍。

**事實 4.3.3.** 對於 2 維度超立方體如圖 4.1.4，顯然，每輪用 2 點不足夠。

2 維度超立方體布局以每輪 3 次開槍。

第 1 輪選代碼 00、代碼 01 和代碼 10。第 1 輪開槍後，代碼 00 頂點變成保證安全點，移到代碼 11 的頂點。

第 2 輪選代碼 01、代碼 10 和代碼 11。

對於 2 維度超立方體，需要 2 輪，每輪各 3 槍。

**事實 4.3.4.** 3 維度超立方體如圖 4.1.5，每輪使用 4 點是不夠。

3 維度超立方體布局以每輪 5 次開槍。

第 1 輪，分 2 部份，屬於代碼  $0^{**}$  和代碼  $1^{**}$ 。

屬於代碼  $0^{**}$ ，選代碼 000、001 和 010，3 頂點， $F(3)=3$ 。

屬於代碼  $1^{**}$ ，選代碼 100 和 101，2 頂點， $F(2)=2$ 。

第 2 輪，也是分成兩部份，屬於代碼  $0^{**}$  和代碼  $1^{**}$ 。

此時，000 頂點屬於保證安全點，移到代碼 011 的頂點。

代碼  $0^{**}$  的部份，選代碼 001、010 和 011，3 個頂點。

代碼  $1^{**}$  的部份，選代碼 100 和 101，2 頂點。

第 2 輪後，代碼 000 和代碼 001 均成為保證安全點。

第 3 輪，也是分成兩部份，屬於代碼  $0^{**}$  和代碼  $1^{**}$ 。



屬於 0\*\* 的部份，選代碼 010 和 011，2 個頂點。

屬於 1\*\* 的部份，選代碼 100、101、110，三部份。

第 2 輪後，代碼 000、代碼 001 代碼 1000 均成為保證安全點。

第 4 輪，挑代碼 010、011、101、110 和 111 頂點，計 5 次開槍。

3 維度超立方體，以代碼表示，如表 4.3.5 表示，有斜線關係。

表 4.3.5

第 1 輪	000	001	010	100	101
第 2 輪	001	010	011	100	101
第 3 輪	010	011	100	101	110
第 4 輪	011	X	101	110	111

3 維度超立方體的 4 輪，如圖 4.3.6 所示，各輪布局的搜查點。所繪的正方形，已經去除代碼，兩個相連接的正方形線段也拿掉。圖 4.3.6 的數字，1 代表第 1 輪開槍點，2 代表第 2 輪開槍點，3 代表第 3 輪開槍點，4 代表第 4 輪開槍點。

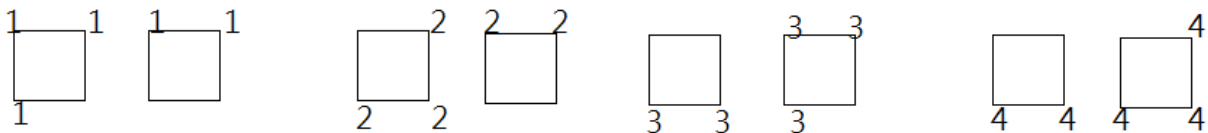


圖 4.3.6

發現，圖 4.5.6 中，第 1 輪開槍點布局和第 4 輪開槍的布局現點對稱。

第 2 輪開槍點布局和第 3 輪開槍布局呈現點對稱。

4 維度超立方體，考慮開槍點的布局以 7 點布置。兩個相連接的正方形線段拿掉。圖 4.3.7 的數字，1 代表第 1 輪開槍點，圖 4.3.8 的 2 代表第 2 輪開槍點，圖 4.3.9 的 3 代表第 3 輪開槍點。很顯然，圖 4.3.6 的(0000)在第 1 輪開槍之後，成為保證安全點。圖 4.3.8 是第 2 輪開槍之後，再增加 1 個頂點和(0000)連通。姑且，以(0010)當作第 2 輪開槍後，新增的保證安全點。當布署第 3 輪的開槍布局之後，無法再增加保證安全點。

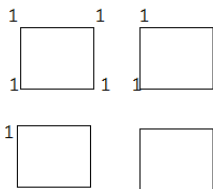


圖 4.3.7

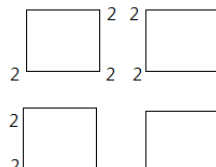


圖 4.3.8

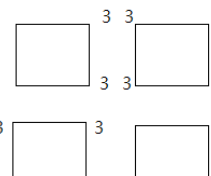


圖 4.3.9

發現

使用 7 次開槍不能夠滿足 4 維度超立方體 (4.3.10.)

每輪布署的數量以 8 槍布局，總共 6 輪，保證抓到兔子，如表 4.3.11。

表 4.3.11

	1	2	3	4	5	6	7	8
第 1 輪	0000	0001	0010	0011	0100	0101	1000	1001
第 2 輪	0010	0011	0100	0101	0110	1000	1001	1010
第 3 輪	0011	0100	0101	0110	1000	1001	1010	1100
第 4 輪	0011	0101	0110	0111	1001	1010	1011	1100
第 5 輪	0101	0110	0111	1001	1010	1011	1100	1101
第 6 輪	0110	0111	1010	1011	1100	1101	1110	1111

#### 四、一種布局方法

很顯然，0 維度超立方體，阻擋點的數量  $S_0 = 1$ 。 (4.4.1.)



圖 4.4.2

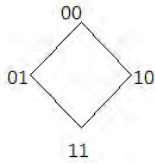


圖 4.4.3



圖 4.4.4

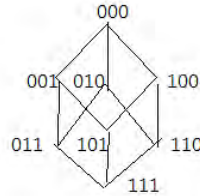


圖 4.4.5

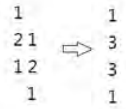


圖 4.4.6

圖 4.4.2 是 1 維度超立方體，1 條線段，兩個頂點，以直立排列。

$$C_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]}^1 = C_1^1 = 1 \text{ 及 } \left| T_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]} \right| = |T_1| = 1。$$

$$1 \text{ 維度超立方體阻擋點的數量， } S_1 = C_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]}^1 + \left| T_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]} \right| = 1 + 1 = 2。 (4.4.7.)$$

圖 4.4.3 是 2 維度超立方體，以變直立排列為  $(1,2,1)^T$ ，如圖 4.4.3。

$$C_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]}^2 = C_1^2 = 2 \quad \left| T_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]} \right| = |T_1| = 1。$$

$$2 \text{ 維度超立方體阻擋點的數量， } S_2 = C_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]}^2 + \left| T_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]} \right| = 2 + 1 = 3。 (4.4.8.)$$

圖 4.4.5 是 3 維度超立方體，以直立排列為  $(1,3,3,1)^T$ ，如圖 4.4.5。

取兩個中間的數字 3 和 3。如圖 4.4.5。 $C_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}^3 = C_2^3 = 3$ 。

$$\left| T_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} \right| = |T_2| = |T_1| + 1 = 2 \quad (4.4.9.)$$

請注意，

$$\frac{|T_2|}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad (4.4.10.)$$

$$3 \text{ 維度超立方體阻擋點的數量, } S_3 = C_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}^3 + \left| T_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} \right| = 3 + 2 = 5 \quad (4.4.11.)$$

## 五、四維超立方體

2 個 3 維度超立方體變成 1 個 4 維度超立方體，如圖 4.5.1、圖 4.5.2、圖 4.5.3 及圖 4.5.4。  
取最中間的部分如圖 4.5.5 及圖 4.5.6。

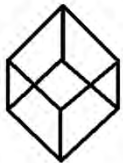


圖 4.5.1



圖 4.5.2

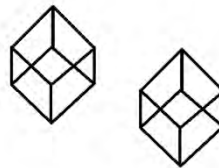


圖 4.5.3

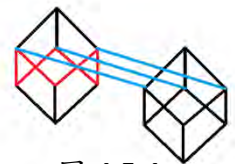


圖 4.5.4



圖 4.5.5



圖 4.5.6

加上代碼後如圖 4.5.7。取  $C_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor}^4 = 6$ ，有 6 個阻擋點如圖 4.5.8 的紅色代碼。

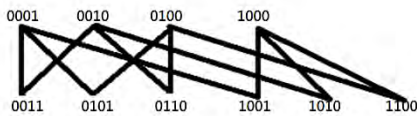


圖 4.5.7

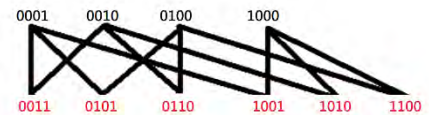
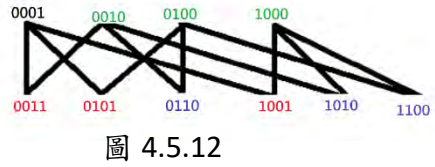
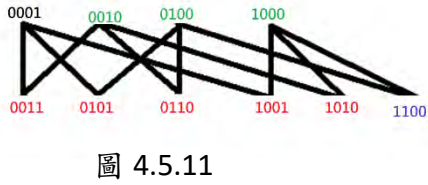
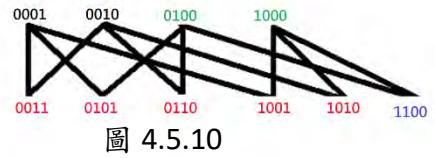
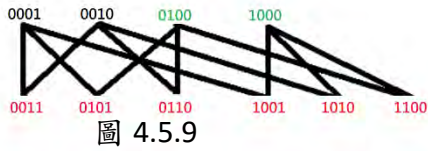


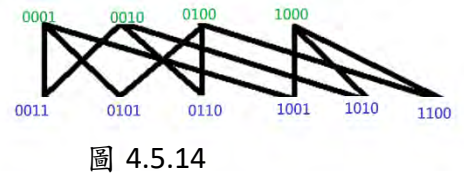
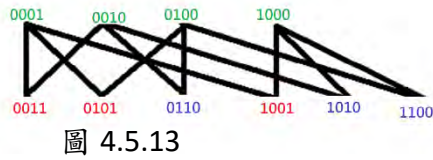
圖 4.5.8

另外取  $T_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor} = 2$ 。2 個阻擋點如圖 4.5.9 的綠色。此時，保護圖 4.5.10 的藍色。

此時，多出來一個阻擋點移到圖 4.5.11 的代碼 0010，保護圖 4.5.12 的 2 個新增的藍色代碼 0110 和代碼 1010。



只要選圖 4.5.12 的藍色已保護點 1 個到圖 4.5.13 的代碼 0001。就可以保護圖 4.5.14 的 6 個全部藍色的點。



$$|T_1| - 1 = 0 \quad |T_2| = |T_1| - 1 + 2 = (1 - 1) + 2 = 2 \quad \circ$$

$$S_4 = C_{\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} + \left| T_{\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} \right| = 6 + 2 = 8 \quad \circ$$

## 六、五度超立方體

5 維度超立方體，以直立排列為  $(1,5,10,10,5,1)^T$ ，取兩個中間數字 10 和 10。

$$C_{\left[ \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} = C_3^5 = 10 \quad \circ$$

相關的圖形拆解成 3 個部分，如圖 4.6.1、圖 4.6.2 和圖 4.6.3。



圖 4.6.1



圖 4.6.2

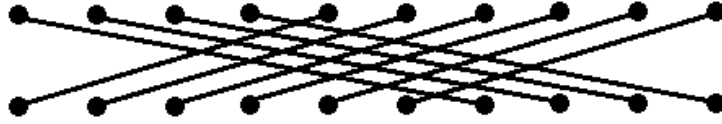


圖 4.6.3

如圖 4.6.4，先開 4 槍如紅色，保護 1 個綠色，此時，綠色可以移到下 1 輪。  
 如圖 4.6.5，再開 5 槍如紅色，又保護 1 個綠色，共 2 個綠色可以移到下一輪。  
 如圖 4.6.6，再開 6 槍如紅色，又保護 1 個綠色，共 4 個綠色可以移到下一輪。  
 如圖 4.6.7，再開 7 槍如紅色，又保護 1 個綠色，共 5 個綠色可以移到下一輪。  
 如圖 4.6.8，再開 8 槍如紅色，又保護 2 個綠色，共 7 個綠色可以移到下一輪。  
 如圖 4.6.9，再開 8 槍如紅色，全部完成。

下面的圖形，紅色代表開槍點，藍色代表沒開槍點，綠色代表受保護點。



圖 4.6.4



圖 4.6.5



圖 4.6.6



圖 4.6.7



圖 4.6.8



圖 4.6.9

其中，

$$\left| T_{\left[ \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} \right| = |T_3| = (|T_2| - 1) + 3 = (2 - 1) + 3 = 4。$$

$$|T_3| = 4 = 2 + 1 + 1 = \frac{C_2^4}{3} + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_0^0}{1} = \sum_{i=1}^3 \frac{C_{i-1}^{2i-2}}{i}。$$

$|T_3| = 4$ ，只需要 4 槍就可以。

## 七、高維度的超立方體

6 維度超立方體，以直立排列為  $(1, 6, 15, 20, 15, 6, 1)^T$ ，

取兩個中間最大的數字 15 和 10。 $C_{\left[ \begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]}^6 = C_3^6 = 20。$

分上層分解為 15，再拆成 10、5，如圖 4.7.1 甲和乙。

下層相對應 20，再拆成 10、10，如圖 4.7.1 甲和乙。

上層 10 對應下層 10，就是  $|T_3| = 4$ ，如圖 4.7.1 丙。

上層 5 對應下層 10，因為， $5 < 10$ ，另一邊的 10 可以轉擋圖 4.7.1 丙的上層 5 對應的下層 10，不計算。

採用由右到左的逐步計算， $\left| T_{\left[ \begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} \right| = |T_3|。$

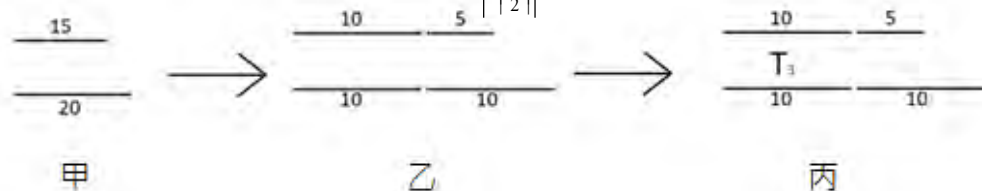


圖 4.7.1

$$\left| T_{\left[ \begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} \right| = |T_3| = (|T_2| - 1) + 3 = (2 - 1) + 3 = 4。$$

6 維度超立方體阻擋點的數量， $S_6 = C_{\left[ \begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} + \left| T_{\left[ \begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} \right| = 20 + 4 = 24。$

7 維度超立方體的數列以直立排列  $(1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1)^T$ ， $C_{\left[ \begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} = 35$ ，

取  $(1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1)^T$  中最大 2 個數值 35 和 35。

分成 2 層；如圖 4.7.2 的變化。

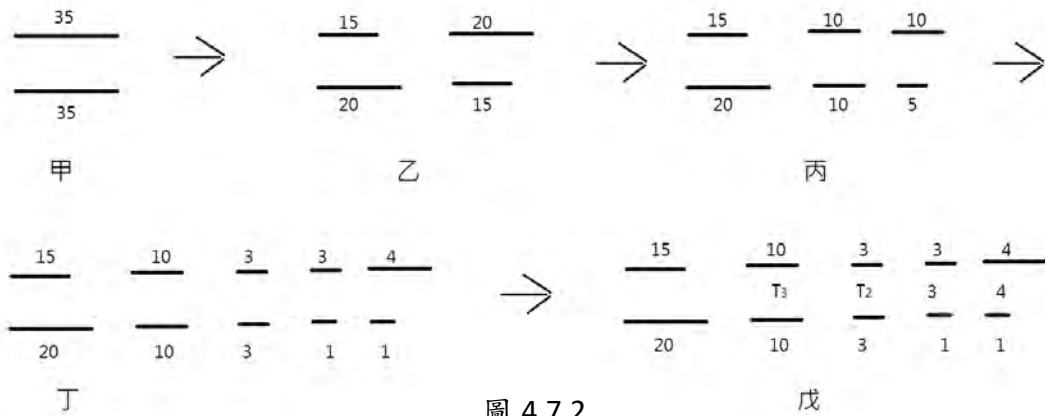


圖 4.7.2

採用由右到左的逐步計算，如圖 4.7.2 的戊。

$$|T_4| = (|T_3| - 2) + (|T_2| - 1) + (3 - 1) + 4 = 9。$$

$$|T_4| - |T_3| = 5 = \frac{C_3^6}{4}。$$

$$|T_4| = 9 = \frac{C_3^6}{4} + \frac{C_2^4}{3} + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_0^0}{1} = \sum_{i=1}^4 \frac{C_{i-1}^{2i-2}}{i}$$

7 維度超立方體阻擋點的數量， $S_7 = C_{\left[ \begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} + \left| T_{\left[ \begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} \right| = 35 + 9 = 44。$

8 維度超立方體，數列以直立排列  $(1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1)^T$ ， $C_{\left[ \begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]} = 70$ 。如圖 4.7.3。

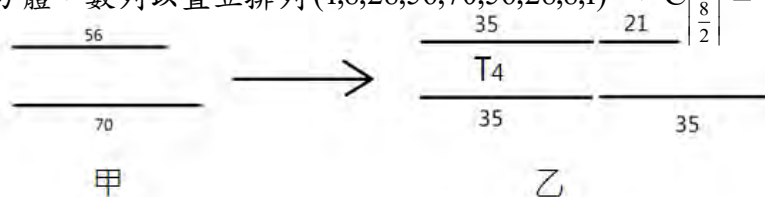


圖 4.7.3

此時，

$$8 \text{ 維度超立方體阻擋點的數量}, S_8 = C_{\lfloor \frac{8}{2} \rfloor}^8 + T_{\lfloor \frac{8}{2} \rfloor} = 70 + 9 = 79。$$

## 八、每輪開槍次數的一般式

依照題目 1.1.1.，每一輪最少要同時對幾個頂點進行開槍？這是一個效率問題。但是，我們在研究足球的演算方法 3.2.5.，發現開槍點的佈置需要通過所研究物體的最大周長，方可達成圍堵的效果。找不出最優解，所以先求解，而無法去確定它是最優解。

**事實 4.8.1.** 已知  $S_0 = 1$ ， $S_1 = 2$ ， $S_2 = 3$ ， $S_3 = 5$ ， $S_6 = 24$ ， $S_7 = 44$ ， $S_8 = 79$ 。

**性質 4.8.2.** 針對  $k$  維度超立方體，組合數  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = \frac{k!}{(k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)! \times (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)!}$ 。

[證明](1) 奇數  $k$  時，以距離頂點(000...000)是  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$  的頂點，其數量有  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = C_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k$  個。最

多的數量必須要超過  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = C_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^k$  開槍點，如圖 4.8.3 紅色部分。

(2) 偶數  $k$  時，以距離頂點(000...000)是  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  的頂點，其數量有  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k$  個。最多

的數量必須要超過  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k$  開槍點，如圖 4.8.4 紅色部分。



圖 4.8.3



圖 4.8.4



考慮第 14 頁的圖 4.2.10 及圖 4.2.11。我們從另一個角度思考，如圖 4.8.5 及圖 4.8.6。假設  $k$  維度採用組合數及文字字串，如圖 4.8.5。則， $k+1$  維度是由 2 個  $k$  維度所構成如圖 4.8.6。如此，計算  $k+1$  維度的  $S_{k+1}$ ，先拆解文字字串，複製兩個文字字串，再組合，如圖 4.8.7。





圖 4.8.5

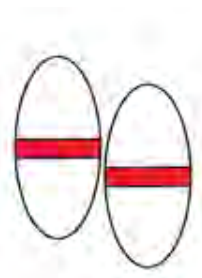


圖 4.8.6



圖 4.8.7

請注意， $k$  維度超立方體，文字字串的生成變化。

2 生成  $T_2 3$ ， $|T_2 3| = (2-1) + 3 = 4 = |T_3|$ 。 (4.8.8.)

式子 4.8.8 的想法，如圖 4.8.9、圖 4.8.10 及圖 4.8.11。

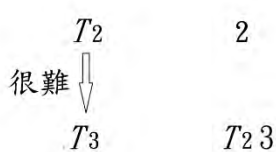


圖 4.8.9

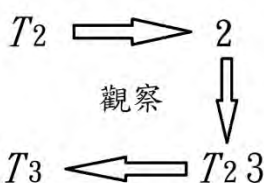


圖 4.8.10

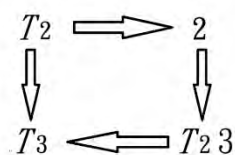


圖 4.8.11

$T_2 3$  生成  $T_3 T_2 34$ ， $|T_3 T_2 34| = (4-2) + (2-1) + (3-1) + 4 = 9 = |T_4|$  (4.8.12.)

式子 4.8.12 的想法如圖 4.8.13、圖 4.8.14 和圖 4.8.15。

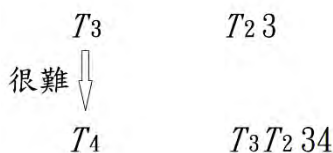


圖 4.8.13

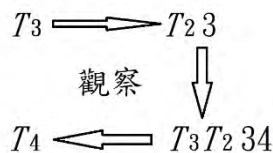


圖 4.8.14

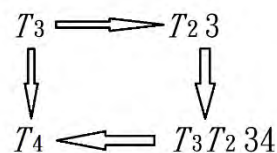


圖 4.8.15

$T_3 T_2 34$  生成  $T_4 T_3 T_2 34 T_2 34 5$   
 $|T_4 T_3 T_2 34 T_2 34 5|$   
 $= (9-4) + (4-2) + (2-1) + (3-1) + (4-2) + (2-1) + (3-1) + (4-1) + 5$   
 $= 23 = |T_5|$

發現  $65 = |T_6|$ 。

考慮生成關係如圖 4.8.16。

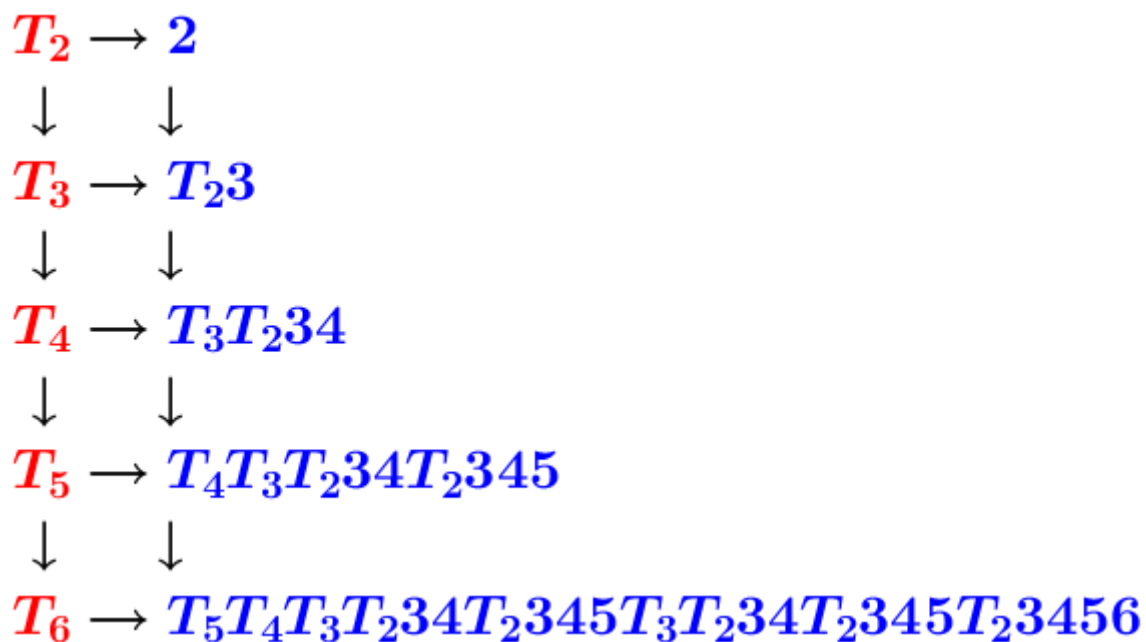


圖 4.8.16

得到

$a(m,n)$  的數值如表 4.8.17，和  $b(m,n)$  如表 4.8.18 的數值，交互運算。

表 4.8.17  $a(m,n)$  的數值

文字字串	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$
$T_3$	1	0	0	0	0	0	0	0
$T_4$	1	1	0	0	0	0	0	0
$T_5$	2	1	1	0	0	0	0	0
$T_6$	5	2	1	1	0	0	0	0
$T_7$	14	5	2	1	1	0	0	0
$T_8$	42	14	5	2	1	1	0	0
$T_9$	132	42	14	5	2	1	1	0
$T_{10}$	429	132	42	14	5	2	1	1

表 4.8.18  $b(m,n)$  的數值

文字字串	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_3$	1	0	0	0	0	0	0	0
$T_4$	1	1	0	0	0	0	0	0
$T_5$	2	2	1	0	0	0	0	0
$T_6$	2	2	3	1	0	0	0	0
$T_7$	14	14	9	4	1	0	0	0
$T_8$	42	42	28	14	5	1	0	0
$T_9$	132	132	90	48	20	6	1	0
$T_{10}$	429	429	297	165	75	27	7	1

其中，

(1)  $T_3 = T_2 \cdot 3$ 。表 4.8.17 和表 4.8.18， $a(1,1)=1$  表示 1 個  $T_2$ ； $b(1,1)=1$  表示 1 個 3。

(2)  $T_5 = T_4 T_3 T_2 34 T_2 345$ 。

(3) 表 4.8.17  $a(3,1)=2$  表示 2 個  $T_2$ 。 $a(3,2)=1$  表示 1 個  $T_3$ 。 $a(3,3)=1$  表示 1 個  $T_4$ 。

(4) 表 4.8.18  $b(3,1)=2$  表示 2 個 3。 $b(3,2)=2$  表示 2 個 4。 $b(3,3)=1$  表示 1 個 5。

$$b(1,1) = 1 \circ b(1,n) = 0, n > 1 \circ b(n,n) = 1 \circ b(m,n) = 0, m < n \circ$$

$$b(n+1,n) = n \circ b(m,n) = \sum_{i=1}^{\infty} b(m-1,n)$$

發現，

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 4, T_4 = 9, T_5 = 23, T_6 = 65, T_7 = 197, T_8 = 626, T_9 = 2056, T_{10} = 6918 \circ$$

得到一組數列，(1,2,4,9,23,65,197,626,2056,6918)輸入數列大全[11]，得到 Partial sums of Catalan numbers (A000108)。

$$\text{超立方體的開槍點數量， } T_n \text{ 和卡特蘭數有關。} \quad (4.8.19.)$$

請思考，

**性質 4.8.20.**  $2k-1$  維度超立方體最中間 2 層之下層及  $2k$  維度超立方體最中間的一層由下往  
上，距離是 1 的數量是  $k$ 。

[證明](1) 0 維度超立方體，1 個頂點， $T_0 = 0$ 。

(2) 1 維度超立方體，2 個頂點，1 條線段， $T_1 = 1$ 。

(3) 2 維度超立方體，給定中間的 1 個頂點，只有 1 條， $T_1 = 1$ 。

(4) 3 維度超立方體，給定中間頂點，有 2 條線段， $T_2 = 2$ 。

(5) 奇數  $2k-1$  維度超立方體，最中間有相同數量的 2 層， $C_{k-1}^{2k-1} = C_k^{2k-1}$ 。

下一層代碼有  $k-1$  個 0， $k$  個 1。

上一層代碼有  $k$  個 0， $k-1$  個 1。

給定下一層特定點走向上一層，距離是 1 的有  $k$  個。

(6) 偶數  $2k$  維度超立方體，最中間數量最大是  $C_k^{2k}$  當下一層；上一層  $C_k^{2k}$ 。

下一層代碼有  $k$  個 0， $k$  個 1。

上一層代碼有  $k$  個 0， $k-1$  個 1。

給定下一層特定點走向上一層，距離是 1 的有  $k$  個。 □

**推理 4.8.21.** 當  $n_1 = 2k-1$ ， $n_2 = 2k$ ， $T_{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} = T_{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor}$ 。

上述得到文字字串，

$$T_n \text{ 生成 } T_{n+1}, n \geq 2, \text{ 此時, } T_{n+1} = T_n(n+1), (n+1) \text{ 是一個文字字串。} \quad (4.8.22.)$$

$$n \text{ 生成 } T_2 345 \dots (n+1)。 \text{ 此時, } n \geq 2 \text{ 和 } (n+1) \text{ 都是一個文字字串。} \quad (4.8.23.)$$

**例子 4.8.24.**  $|T_2| + 2 = 4 \cdot 2 = C_2^3 - 1。$   
 $|T_3| + 2 + 3 = 9 \cdot 2 + 3 = C_2^4 - 1。$   
 $|T_4| + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 = 23 \cdot 2 + 3 = C_2^5 - 1 \cdot 2 + 3 + 4 = C_2^5 - 1。$   
 $|T_5| + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 2 + 3 + 4 + 5 = 65。$   
 此時,  $2 + 3 = C_2^4 - 1 \cdot 2 + 3 + 4 = C_2^5 - 1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 = C_2^6 - 1。$   
 也就是,  $|T_5| + C_2^4 - 1 + C_2^5 - 1 + C_2^4 - 1 + C_2^5 - 1 + C_2^6 - 1 = 65。$

此時，

$$|T_n| = \sum_{i=1}^n \frac{C_2^{2i-2}}{i}。 \quad (4.8.25.)$$

在這個研究，

$$S_k = C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k + |T_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}|。 \quad (4.8.26.)$$

### 九、在每輪開 $S_k$ 槍下，需要開幾輪數的問題

已知,  $S_0 = 1, J_0 = 1 \cdot S_1 = 2, J_1 = 1 \cdot S_2 = 3, J_2 = 2 \cdot S_3 = 5, J_3 = 4。$

**事實 4.9.1.** 3 維度超立方體,  $S_3 = 5$ , 需要開槍 4 輪。

第 1 輪和第 4 輪及第 2 輪和第 3 輪的布局呈對稱。

**事實 4.9.2.** 4 維度超立方體,  $S_4 = 8, J_4 = 6。$

第 1 輪和第 6 輪的布局呈現對稱。

第 2 輪和第 5 輪的布局呈現點對稱。

第 3 輪和第 4 輪的布局呈現點對稱。

如圖 4.9.3。綠色代表安全點，黑色代表開槍點。

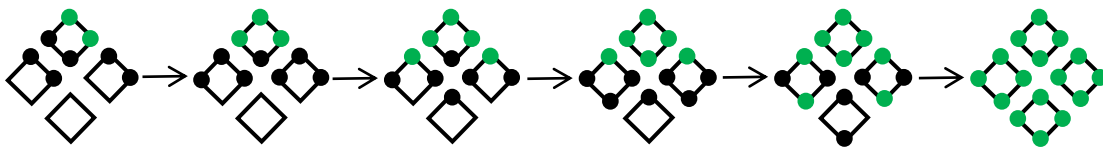


圖 4.9.3

**猜想 4.9.4.** 若  $k$  維度超立方體需要  $S_k$  情況下，需要開槍  $J_k$  輪，且  $J_k$  是偶數，則第  $i$  輪和第  $J_k - i + 1$  輪的開槍布局呈點對稱。

針對猜想 4.9.3，本研究從新計算各維度最有效率的開槍布局。此時，各維度每輪開槍數是  $S_k$ 。但是，有時候  $k$  維度的若干開槍數是低於  $S_k$ 。

0 維度是 1 個頂點，需要 1 輪，每 1 輪 1 槍。

1 維度是 2 個頂點，需要 1 輪，每 1 輪 2 槍。

2 維度是 4 個頂點，需要 2 輪。第 1 輪 3 槍。

第 2 輪 3 槍。

第 1 輪開槍數和第 2 輪開槍數相同，開槍數是對稱。

3 維度是 8 個頂點，需要 4 輪。第 1 輪可以 4 槍， $4 < 5 = S_3$ 。

第 2 輪要 5 槍， $5 = S_3$ 。

第 3 輪要 5 槍， $5 = S_3$ 。

第 4 輪只要 4 槍， $4 < 5 = S_3$ 。

第 1 輪開槍數和第 4 輪開槍數相同，開槍數是對稱。

第 2 輪開槍數和第 3 輪開槍數相同，開槍數是對稱。

再觀察 4 維度是 16 個頂點，需要 6 輪， $S_4 = 8$  槍。

第 1 輪需要  $S_4 = 8$  槍。

第 2 輪需要  $S_4 = 8$  槍。

第 3 輪需要  $S_4 = 8$  槍。

第 4 輪需要  $S_4 = 8$  槍。

第 5 輪需要  $S_4 = 8$  槍。

第 6 輪需要  $S_4 = 8$  槍。

考慮  $4 = 2 \times 2$ ，

4 維度的每輪均是  $S_4 = 8$ ，再比較 2 維度每輪均是  $S_2 = 3$ 。

設計電腦偵測程式，

如表 4.9.5 及表 4.9.6。表 4.9.5 提供每輪的槍數及每輪後的危險點數量，提供給表 4.9.6。

表 4.9.5

每輪槍數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
危險點	8	8	8	8	7	7	6	4	0

表 4.9.6

每輪槍數	總共幾輪	每輪變化										
5	4	7		0	0	0	0	0	7	0	0	0
		6		0	0	0	0	0	0	6	0	0
		4		0	0	0	0	0	0	0	4	0
		0		0	0	0	0	0	0	0	0	0

得到

$S_0 = 1, J_0 = 1 \circ S_1 = 2, J_1 = 1 \circ S_2 = 3, J_2 = 2 \circ S_3 = 5, J_3 = 4 \circ S_4 = 8, J_4 = 6 \circ S_5 = 14, J_5 = 10 \circ S_6 = 24, J_6 = 18$ 。將(1, 1, 2, 4, 6, 10, 18)輸入數列大全，得到 A203175[12]。

也就是，數列大全的 A203175 告訴我們

猜想 4.9.7.  $J_k$  具有存在性。

猜想 4.9.8.  $J_k$  具有唯一性，因為，(1, 1, 2, 4, 6, 10, 18)到目前只有一個結果，A203175。

猜想 4.9.9.  $J_k$  所形成的數列，只有前兩項 1, 1 是奇數，A203175 的第 3 項開始都是偶數。

猜想 4.9.10. 對於超立方體的開槍布局，都是呈現線對稱。

猜想 4.6.11.  $J_k = J_{k-1} + 2 \times J_{k-3}$ 。

## 伍、結論

(1)正多面體，如表 5.1.1。表 5.1.1 如 p8 的表 3.1.15。

表 5.1.1

正多面體	每輪要多少個開槍點	總共多少輪數	浪費的開槍數
正四面體	4	1	0
正六面體	5	4	1
正八面體	5	2	0
正十二面體	7	10	3
正二十面體	7	6	1

(2)足球，60 個點，90 條線，60 個面，每輪要 11 個開槍點，共 37 輪。

(3)  $k$  維度超立方體的阻擋點， $S_k = C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k + \left| T_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right|$ 。

其中， $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = \frac{k!}{\left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor!\right) \times \left(k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor!\right)}$ ， $\left| T_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right| = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{C_{i-1}^{2i-2}}{i}$ 。

## 參考資料

1. 國小數學教科書，翰林版本五年級下學期，p123 至 p138，2017 年 9 月。
2. 周佳萱等，第 56 屆全國科展國小數學科『神算』，P12。
3. 黃子恆等，第 57 屆全國科展國小數學科『一直乘以 2』，P7 至 P9 圖論，樹。
4. 游森棚，科學研習月刊，2017 年 8 月 2 日，第 56 卷，第 8 期，第 46 頁。
5. 李淨雯等，第 46 屆全國科展國小數學科『神奇的尺』，p9 至 p10。
6. 第 57 屆全國科展國中數學科『神機妙算』，P1。
7. 第 45 屆全國科展國小數學科『老師無法解決的難題』，p5 至 p17。
8. 廖沛妍，2018 年台灣國際科展，『「乘」「乘」有序—乘二數列及乘五數列的探討』未出版。
9. 正多面體的定義及對偶，20180119，維基百科。
10. 超立方體，20180119，維基百科。
11. 數列大全，20180307，A000108。
12. 數列大全，20180721，A203175。

## 致謝

感謝數學界的前輩。尤其是，圖 2.2.5、圖 2.4.2、圖 3.3.6 及圖 4.4.6 的構想來自我們，但繪圖由\*\*高中的\*\*\*老師。

## 【評語】 080406

從一個有趣又有深度的數學問題出發，探討如何布局（每輪幾槍、最少幾輪）才能獵到藏在正立方體某一頂點處的兔子，並將情境延伸到不同類別的形體，包括正多面體、 $2n$  面體與足球。作者從足球獲得的解題經驗，進一步挑戰更高層次的超立方體，透過作者在現場清晰的表達能力，能將重要觀念與關鍵處說明清楚，值得讚賞。



## 壹、前言

**題目 1.1.** 兔子甲藏在正立方體的八個頂點之一。每一輪，獵人乙選擇一些頂點，並同時對這些頂點開槍。如果這些頂點之一有兔子甲，獵人乙就獵到兔子甲了。否則兔子甲在獵人乙下一輪開槍之前可以移動到相鄰的頂點，也可以選擇停在原地不動。

獵人乙在開槍之前不知道兔子甲在哪裡，也不知道兔子甲有沒有移動。如果獵人乙每輪開槍的頂點數要一樣多，聰明的讀者，請問要保證可以獵到兔子甲，每一輪最少要同時對幾個頂點開槍？至少要開槍幾輪？

另一隻兔子丙的窩互相連結的形狀長得像是正八面體骨架。聰明的讀者，請問如果獵人乙要保證可以獵到兔子丙，每一輪最少要同時對幾個頂點開槍？至少要開槍幾輪？

**符號 1.2.**  $S_k$ ： $k$  維度超立方體，依題目 1.1.，每輪  $S_k$  次開槍可以保證抓到兔子。

**符號 1.3.**  $J_k$ ： $k$  維度超立方體，依題目 1.1.，每輪  $S_k$  次開槍布局下，需要  $J_k$  輪。

**符號 1.4.**  $T_n$ ： $2n-1$  維度和  $2n$  維度超立方體的文字字串。

**符號 1.5.**  $|T_n|$ ：計算  $2n-1$  維度和  $2n$  維度超立方體的文字字串  $T_n$  代表的數值。

**例子 1.6.** 若這次開槍，取圖 1.7 中的頂點 13,14,15,16,17,18, 19,20,21,22，共 10 個頂點。暫時安全點為頂點 13,14,15,16,17,18。

保證安全點為頂點 19,20,21,22。

**原則 1.8.** 對暫時安全點，我們必須要擺阻擋點，保證安全點不需要開槍。

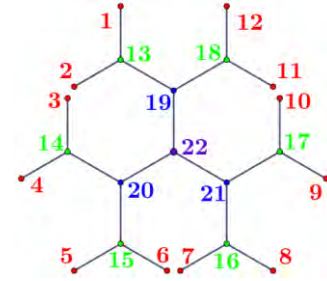


圖 1.7

## 貳、研究目的

本研究的目的，探討正多面體、足球和  $k$  維度超立方體，每輪最少開幾槍，「保證」可以獵到兔子，同時，在保證可以獵到兔子的情況下，需要開槍幾輪？

## 參、研究流程圖



圖 3.1 研究流程圖

## 肆、研究結果

### 一、正多面體與足球

**結果 4.1.1.** 正多面體的結果，如表 4.1.2。

表 4.1.2

正多面體	每輪要多少個開槍點	總共多少輪數	浪費的開槍數
正四面體	4	1	0
正六面體	5	4	1
正八面體	5	2	0
正十二面體	7	10	3
正二十面體	7	6	1

**結果 4.1.2.** 足球，60 個點，90 條線，32 個面，每輪要 11 個開槍點，共 37 輪。

**策略 4.1.3.** 本研究的靈感來自於足球的研究。如圖 4.1.4 的變化。

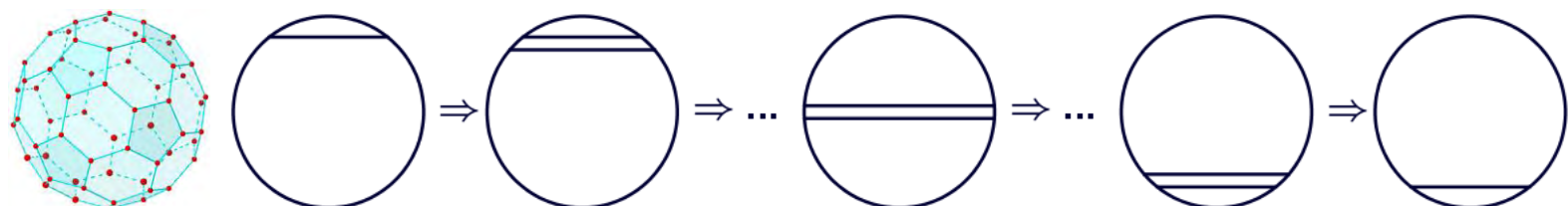
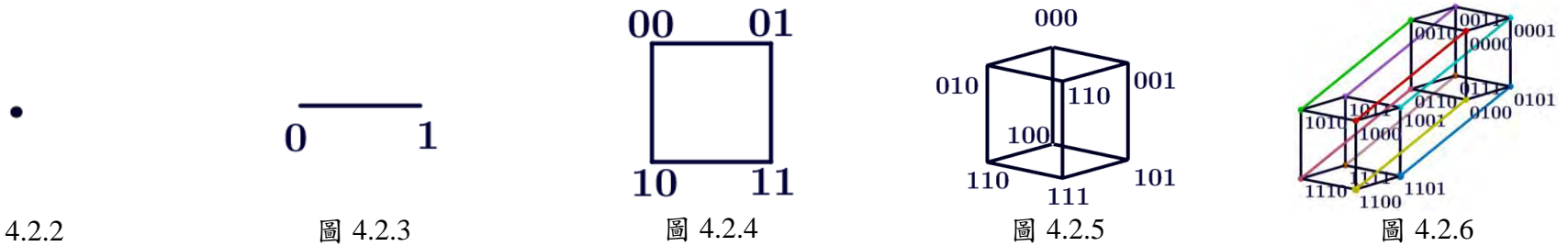


圖 4.1.4

## 二、超立方體的建構

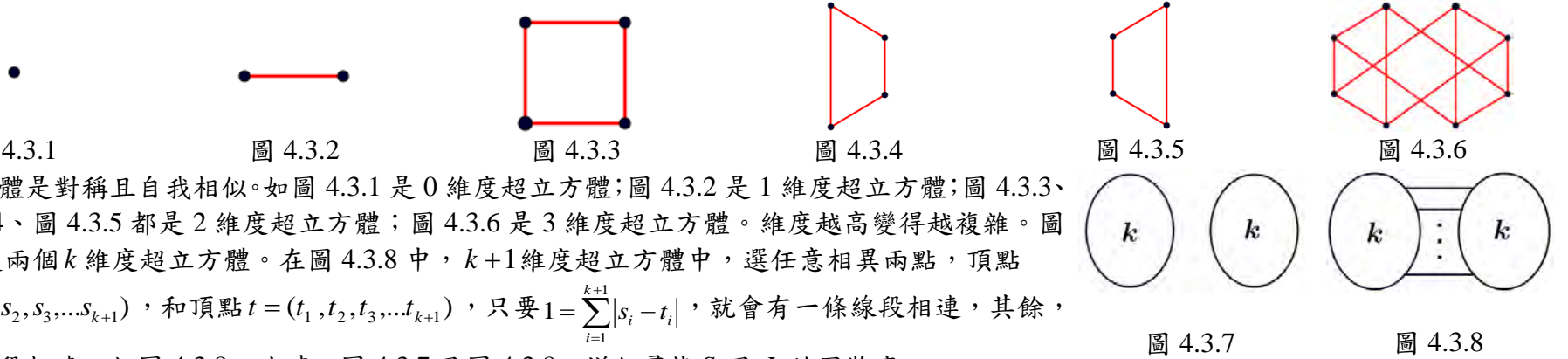
**定義 4.2.1.**  $k$  維度超立方體，有  $2^k$  個頂點，每個頂點有  $k$  個邊，總共有  $k \times 2^{k-1}$  條線段。此時， $k$  為非負整數。如圖 4.2.2 的 0 維、圖 4.2.3 的 1 維、圖 4.2.4 的 2 維、圖 4.2.5 的 3 維及圖 4.2.6 的 4 維。



**性質 4.2.7.** 在  $k$  維度超立方體，任選一點當基準點均相同。

**定義 4.2.8.** 設  $k$  維度超立方體 2 個相異頂點，頂點  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_k)$ ，相異頂點  $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ ，則有  $k$  維度超立方體，任意兩相異頂點距離， $d = \sum_{i=1}^k |u_i - v_i| \leq k \geq 1, \forall 1 \leq i \leq k$ 。

## 三、超立方體的對稱和自我相似與生成



超立方體是對稱且自我相似。如圖 4.3.1 是 0 維度超立方體；圖 4.3.2 是 1 維度超立方體；圖 4.3.3、圖 4.3.4、圖 4.3.5 都是 2 維度超立方體；圖 4.3.6 是 3 維度超立方體。維度越高變得越複雜。圖 4.3.7 是兩個  $k$  維度超立方體。在圖 4.3.8 中， $k+1$  維度超立方體中，選任意相異兩點，頂點  $s = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k+1})$ ，和頂點  $t = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_{k+1})$ ，只要  $1 = \sum_{i=1}^{k+1} |s_i - t_i|$ ，就會有一條線段相連，其餘，沒有線段相連。如圖 4.3.8。此時，圖 4.3.7 及圖 4.3.8，增加尋找  $S_k$  及  $J_k$  的困難度。

## 四、超立方體的一種布局方式

很顯然，0 維度超立方體，阻擋點的數量  $S_0 = 1$ 。

1 維度超立方體，1 條線段，兩個頂點，以直立排列。 $C_{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}^1 = C_1^1 = 1$  及  $|T_{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}| = |T_1| = 1$ 。 $S_1 = C_{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}^1 + |T_{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}| = 1 + 1 = 2$ 。

2 維度超立方體， $C_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}^2 = C_1^2 = 2$ 。 $|T_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}| = |T_1| = 1$ 。 $S_2 = C_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}^2 + |T_{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}| = 2 + 1 = 3$ 。

3 維度超立方體， $C_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}^3 = C_2^3 = 3$ 。 $|T_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}| = |T_2| = |T_1| + 1 = 2$ 。 $\frac{|T_2|}{2} = \frac{2}{2} = 1$ 。 $S_3 = C_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}^3 + |T_{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}| = 3 + 2 = 5$ 。

將 2 個 3 維度超立方體複製成 1 個 4 維度超立方體。此時，成為巴斯卡三角形，取兩個中間數字第二列的 4 和第三列的 6 連接。互作作用，產生相連的線段如圖 4.4.1。在圖 4.4.2 下面一行的紅色點開槍，下面一行藍色點不開槍，則保護上面一行綠色點。接著可以移動開槍點，如圖 4.4.3，下面一行只有一點不開槍如紅色點，5 個紅色點開槍，此時，產生兩個綠點已經被保護。最後，下面一行全部開槍，如圖 4.4.4，此時，可以保護上面的 4 個綠色的點。

如此， $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k \geq C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}^k$ ， $C_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor}^4 = C_2^4 = 6$ 。 $|T_1| - 1 = 0$ 。 $|T_2| = |T_1| - 1 + 2 = (1 - 1) + 2 = 2$ 。 $S_4 = C_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor}^4 + |T_{\lfloor \frac{4}{2} \rfloor}| = 6 + 2 = 8$ 。



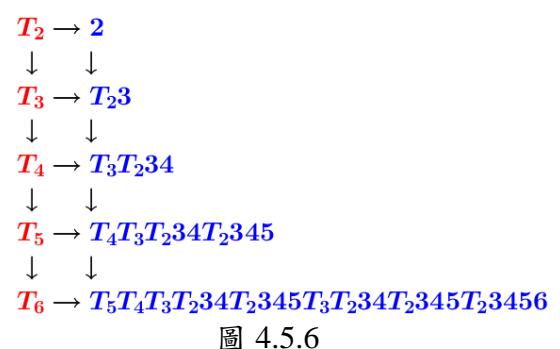
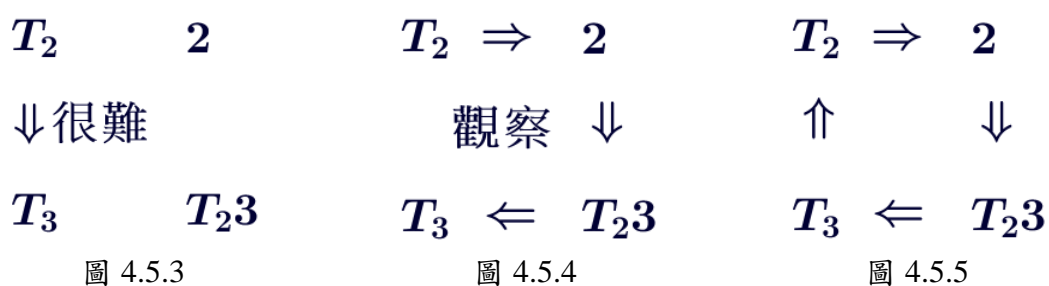
## 五、超立方體每輪開槍布局的一般式

**事實 4.5.1.** 已知  $S_0 = 1, S_1 = 2, S_2 = 3, S_3 = 5, S_4 = 24, S_5 = 44, S_6 = 79$ 。

**性質 4.5.2.** 針對  $k$  維度超立方體，組合數  $C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k = \frac{k!}{(k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)! \times (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)!}$ 。

我們從另一個角度思考，假設  $k$  維度採用組合數及文字字串，則  $k+1$  維度是由 2 個  $k$  維度所構成。如此，計算  $k+1$  維度的  $S_{k+1}$ ，先拆解文字字串，複製兩個文字字串，再組合。請注意， $k$  維度超立方體，文字字串的生成變化。

2 生成  $T_2, 3$ ， $|T_2, 3| = (2-1) + 3 = 4 = |T_3|$ 。想法，如圖 4.5.3、圖 4.5.4 及圖 4.5.5。



如此， $T_n$  生成  $T_{n+1}$ ， $n \geq 2$ ，此時， $T_{n+1} = T_n(n+1)$ ， $(n+1)$  是一個文字字串。(4.5.7.)

$n$  生成  $T_2 345 \dots (n+1)$ 。此時， $n \geq 2$  和  $(n+1)$  都是一個文字字串。(4.5.8.)  
得到表 4.5.9 和表 4.5.10。

表 4.5.9

文字字串	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$
$T_3$	1	0	0	0	0	0	0	0
$T_4$	1	1	0	0	0	0	0	0
$T_5$	2	1	1	0	0	0	0	0
$T_6$	5	2	1	1	0	0	0	0
$T_7$	14	5	2	1	1	0	0	0
$T_8$	42	14	5	2	1	1	0	0
$T_9$	132	42	14	5	2	1	1	0
$T_{10}$	429	132	42	14	5	2	1	1

表 4.5.10

文字字串	3	4	5	6	7	8	9	10
$T_3$	1	0	0	0	0	0	0	0
$T_4$	1	1	0	0	0	0	0	0
$T_5$	2	2	1	0	0	0	0	0
$T_6$	2	2	3	1	0	0	0	0
$T_7$	14	14	9	4	1	0	0	0
$T_8$	42	42	28	14	5	1	0	0
$T_9$	132	132	90	48	20	6	1	0
$T_{10}$	429	429	297	165	75	27	7	1

得到

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 4, T_4 = 9, T_5 = 23, T_6 = 65, T_7 = 197, T_8 = 626, T_9 = 2056, T_{10} = 6918。$$

得到一組數列，(1,2,4,9,23,65,197,626,2056,6918) 輸入數列大全，得到卡特蘭數。如此，

$$|T_n| = \sum_{i=1}^n \frac{C^{2i-2}}{i}。 \quad (4.5.11.)$$

$$S_k = C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k + |T_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}|。 \quad (4.5.12.)$$

## 六、超立方體的輪數問題

已知， $S_0 = 1, J_0 = 1, S_1 = 2, J_1 = 1, S_2 = 3, J_2 = 2, S_3 = 5, J_3 = 4, S_4 = 8, J_4 = 6, S_5 = 14, J_5 = 10$ 。  
設計電腦偵測程式，如表 4.6.1 及表 4.6.2。表 4.6.1 提供每輪的槍數及每輪後的危險點數量，提供給表 4.6.2。

表 4.6.1

每輪槍數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
危險點	8	8	8	8	7	7	6	4	0

表 4.6.2

每輪槍數	總共幾輪	每輪變化										
5	4	7		0	0	0	0	0	7	0	0	0
		6		0	0	0	0	0	0	6	0	0
		4		0	0	0	0	0	0	0	4	0
		0		0	0	0	0	0	0	0	0	0

**事實 4.6.3.** 3 維度超立方體， $S_3 = 5$ ，需要開槍 4 輪。第 1 輪和第 4 輪及第 2 輪和第 3 輪的布局呈對稱。

**事實 4.6.4.** 4 維度超立方體， $S_4 = 8, J_4 = 6$ 。第 1 輪和第 6 輪的布局呈現對稱。第 2 輪和第 5 輪的布局呈現點對稱。  
第 3 輪和第 4 輪的布局呈現點對稱。如圖 4.6.5。綠色代表安全點，黑色代表開槍點。

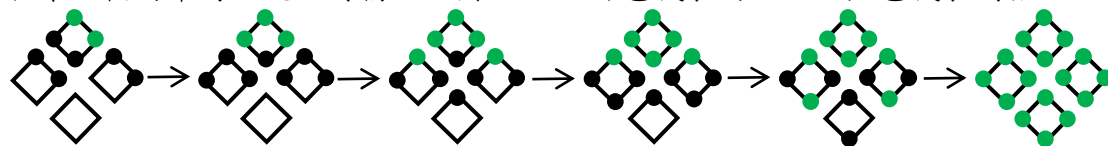


圖 4.6.5

此時，

我們知道  $S_6 = 24, J_6 = 18$ 。將(1, 1, 2, 4, 6, 10, 18) 輸入數列大全，得到 A203175。

得到

**猜想 4.6.7.**  $J_k$  所形成的數列，只有前兩項 1, 1 是奇數，A203175 的第 3 項開始都是偶數。

**猜想 4.6.8.** 對於超立方體的開槍布局，都是呈現線對稱。

**猜想 4.6.9.**  $J_k = J_{k-1} + 2 \times J_{k-3}$ 。

## 伍、未來展望找

我們要朝  $S_k$  和  $J_k$  之間的對射研究。

**猜想 5.1.** 每一個維度都有一個每輪槍數等於下一輪危險點數量的不動點。

## 參考資料

- [1] 游森棚，科學研習月刊，2017 年 8 月 2 日，第 56 卷，第 8 期，第 46 頁。
- [2] 正多面體的定義及對偶，20180119，維基百科。
- [3] 超立方體，20180119，維基百科。
- [4] 數列大全，20180307，A000108。
- [5] 數列大全，20180708，A203175。