中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080405

堆集遊戲解法之探討

學校名稱：臺北市中山區吉林國民小學

作者：	指導老師：
小六 邱韋齊	倪慧喜

關鍵詞：最少步數、行走組合

摘要

本研究從堆集遊戲出發，探討 n 顆棋子移動到終點的最少步數以及行走方法之組合。研究發現當棋子數滿足特定條件時，最少移動步數恰好等於棋子數，並有其特定的走法組合。應用此發現，進一步延伸出更多不同類型的行走組合方法，並找到符合三種不同條件之系列的棋子數，其最少移動步數以及行走方法的組合存在特定的規律，並將棋子數與行走組合公式符號化。最後我們將遊戲規則延伸至可雙向移動，發現無論任何子數，皆能達到最少行走步數，且行走組合與反向行走的子數呈現一定規律。

壹、 研究動機

有一次，我在書上看到一個有關於堆集遊戲的題目，其內容如下：

開始狀態　在 1×7 的方格棋盤中，每一個格子內都有一個棋子，如圖(1-1)。

目的狀態　7 個棋子都走到終點的方格中，如圖(1-2)。

開始狀態

終點	1	2	3	4	5	6	7
	●	●	●	●	●	●	●

圖(1-1)

目的狀態

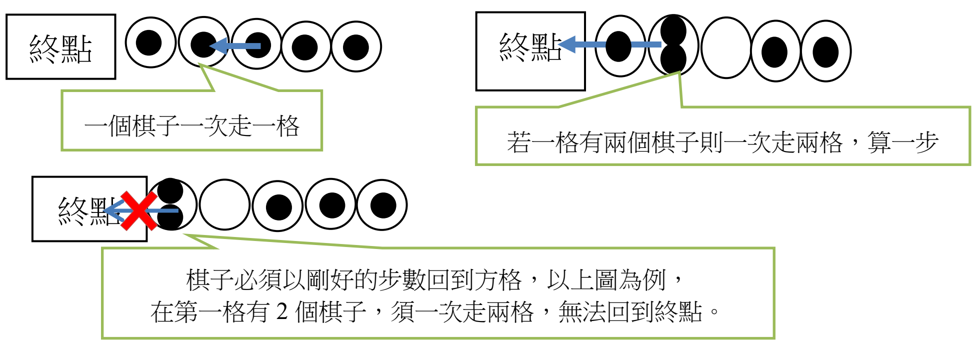
終點	1	2	3	4	5	6	7
●●●●●●●							

圖(1-2)

遊戲規則　1. 每次走的格數必須是該格子中的棋子數。

2. 找出以最少的行走步數，讓 7 個棋子回到最左邊的(終點)方格中。

《遊戲規則圖示》



我們試玩之後發現 1~7 格的最少步數完全找不到任何規律，當棋子數變多時，最少步數竟然減少了！這引起了我的好奇心。剛好在六上數學(康軒版)第十一冊學到「怎樣解題」單元，因此，想要以此為基礎，並藉由這次的科展來深入探討這個問題。

貳、研究目的

在遊戲規則中，由於並未明確規定棋子只能向左(單向)或向左或向右(雙向)移動，因此本研究方向將全面進行探討。

一、棋子只能向左(單向)移動的探討

(一)、在堆集遊戲中，分析堆集的形成條件。

(二)、在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最少步數。

(三)、在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最少步數之走法分析。

二、棋子可以向左或向右(雙向)移動的探討

(一)、在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最少步數與走法分析。

參、　研究設備與器材

紙、筆、電腦、棋子

肆、 研究過程與方法

一、名詞解釋及符號定義

(一) 為了方便起見，我們將棋盤方格由左至右，依序編號為第 1、2、3、4、…格，並以數字代表棋子個數，所以原題的$\boxed{\text{開始狀態}}$，我們以圖(4-1-1)表示。

終點	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	1	1	1	1

圖(4-1-1)

(二) 堆集：指在同一格子中，存在兩個以上的棋子，稱為堆集。其行走格數將等於棋子數。文中所指 m 堆集代表有 m 個棋子在同一方格。

(三) 步數計算：移動一次計算步數一步，若三顆棋子位於同一格，一次移動三格，仍算一步。

(四) 最少步數：n 個棋子全部回到終點所需要的最少步數，我們以 g_n 表示。

(五) ΔS：在 $1\times n$ 的方格棋盤中，其最少步數與棋子總數的差，即 $\Delta S=g_n-n$。

(六) 行走組合：指全部棋子回到終點前所在格子之記錄組合。行走組合紀錄方式如下：

1、當有 m 個棋子時，行走組合可記錄成 $C_1+C_2+\ldots+C_n$，且 $C_1+C_2+C_3\ldots+C_n=m$。

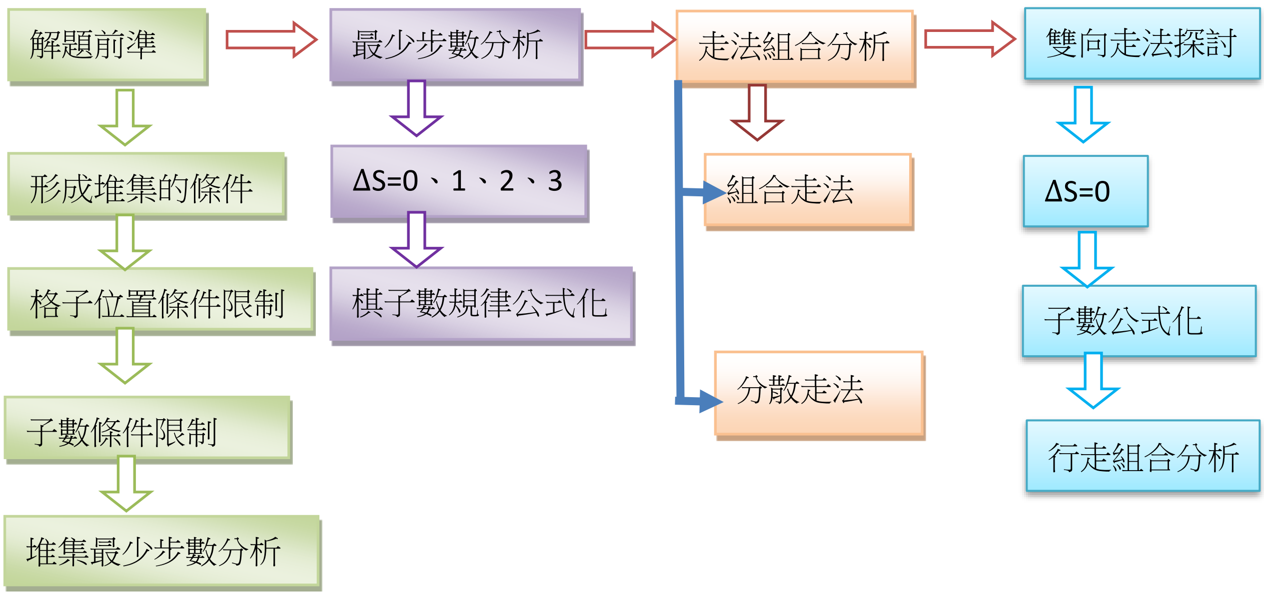
2、當行走過程中，使用較少子數的最少移動步數先移動時，將該使用的子數紀錄在 C_1，C_2 以後的組合紀錄則以回到終點前一步所在的位置或子數進行紀錄。

例如：11 子，前 7 子採 7 子最少移動方法回終點，後 4 子在第 8 格形成堆集後，經過第 4 格回到終點。紀錄為 7+4。

(七) $\boxed{1}$：表示在雙向走法中，$\boxed{1}$左右雙方棋子與之形成一個新堆集。

(八) $\underline{b}$：表示在雙向走法中，有 b 子採往右走的移動方式。未標底線的數字則以往左移動為主。

二、研究架構圖



伍、 研究結果

一、棋子只能向左(單向)移動的探討

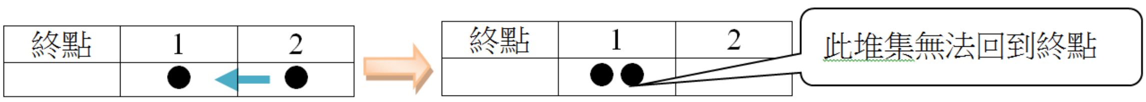
> *研究一：*在堆集遊戲中，分析堆集的形成條件。

由於此遊戲是要讓全部的棋子都能回到最左方的終點處，依照遊戲規則，每次一顆棋子走一格算為一步。在不製造堆集的情況下，1 個棋子須走 1 步，2 個棋子須走 1+2=3 步，3 個棋子須走 1+2+3=6 步，n 個棋子須走 1+2+3+…+n=$\frac{n(n+1)}{2}$步，為行走的最大步數。製造棋子堆集後，可以一次跨越數格，減少行走的次數，達到最少的行走步數。因此，在遊戲開始之前，我們先對堆集的形成條件進行分析。

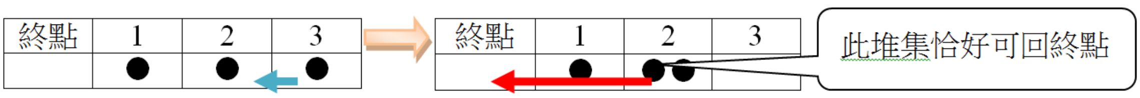
(一) 製造堆集的最少棋子數

1. 在堆集遊戲中，棋子只有一個，無法產生堆集，若增加為兩個以上，則可以產生堆集。
2. 若 2 堆集產生在第 2 格，最少棋子數為 2+1=3；3 堆集產生在第 3 格，最少棋子數為 3+(3-1)=5；4 堆集產生在第 4 格，最少棋子數為 4+(4-1)=9。因此，想要在第 m 格產生 m 堆集，最少棋子數為 m+(m-1)=2m-1 子。進一步來說，若想要在第 a 格(a≥m)製造一個 m 堆集，最少棋子數為 a+(m-1)子。

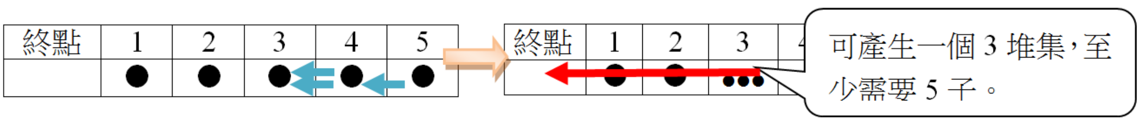
n=2



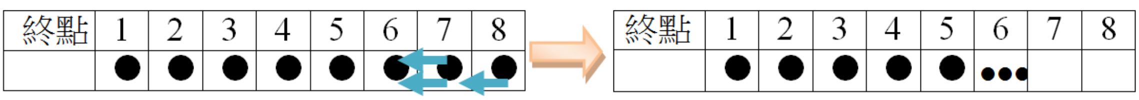
n=3



n=5　　想製造 3 堆集



n=8　　在第 6 格產生一個 3 堆集，至少需要 8 子。



結論 1：在堆集遊戲中， (1)若要在第 m 格產生 m 堆集，其最少棋子數為 2m-1 子。 (2)若要在第 a 格(a≥m)產生 m 堆集，其最少棋子數為 a+(m-1)子。

例如：想要在第 6 格製造一個 3 堆集，則必須要有 6+(3-1)=8 子。

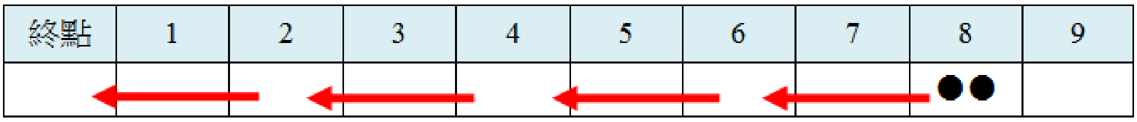
(二) 堆集位置限制

在堆集遊戲中，並不是任何位置產生的堆集都可回到終點。

1. 若 m 堆集產生在第 m 格，則可以一步回到終點。但 m 堆集產生不在第 m 格時，則 m 堆集不一定可以回到終點。例如：產生 2 堆集，僅在第 2 格可回到終點，在第 1、3 格皆無法回到終點；產生 3 堆集，必須位於第 3 格，才能回到終點，在第 1、2、4、5 格皆無法回到終點。因此，若製造 m 堆集，則至少必須位於第 m 格才能回到終點。

2. 當棋子數逐漸增加時，我們可以分為兩種情況再深入討論堆集的位置。

(1) 堆集產生的位置左方之棋子***已完全走回終點***



圖(5-1-1)

由圖(5-1-1)可知，2 堆集產生在第 8 格，以 4 步回到終點；3 堆集產生在第 6 格，以 2 步回到終點。因此，可歸納出：m 堆集產生在第 km 格，則可以 k 步回到終點。

(2) 堆集產生的位置左方之棋子***未完全走回終點***

當 m 堆集的左方格子仍有棋子時，則堆集產生的位置與左邊部分方格的棋子數有關。我們將 2、3 堆集產生的位置及條件限制(堆集左邊部分方格的棋子數)整理成表(5-1-1)。

表(5-1-1)

堆集	產生的位置(第 k 格)	限制條件：(第 i 格，應有棋子數)	回終點的步數	堆集	產生的位置(第 k 格)	限制條件：(第 i 格，應有棋子數)	回終點的步數
2	5	(3，1)	2	3	7	(4，1)	2
	6	(4，2)	2		8	(5，2)	2
	7	(5，3)	2		9	(6，3)	2
	……	……	……		……	……	……
	k	(k-2，k-4)	2		k	(k-3，k-6)	2

從表(5-1-1)中，我們歸納出：當 m 堆集產生在第 k 格時，其限制條件為第 k-m 格的棋子數為 k-2m 子，此時 m 堆集移動 1 步時，可在第 k-m 格形成 k-m 堆集，之後再移動第 2 步即可回終點。

結論 2： 在堆集遊戲中， (1) 當堆集產生的位置之左方格棋子已完全走回終點時，則 m 堆集產生在第 km 格，則可以 k 步回到終點。 (2) 當堆集產生的位置之左方格棋子未完全走回終點時，則當 m 堆集產生在第 k 格，其限制條件為第 k-m 格的棋子數為 k-2m 子，此時 m 堆集 2 步可回終點。

(三) 製造堆集所需要的最少步數

這個遊戲主要是找出讓全部棋子回到終點的最少步數，在過程中可以製造堆集減少移動步數，但製造堆集所需要的移動步數也不可忽視。所以如何用最少步數製造堆集也是值得探討的。

在堆集遊戲的開始狀態中，若要在第 n 格製造一個 2 堆集，則需將棋子從第 n+1 格移動到第 n 格，只需要 1 步即可達成；若要在第 n 格製造 3 堆集，則先在第 n+2 格形成 2 堆集，再將 2 堆集從第 n+2 格移動至第 n 格，需要 1+1=2 步。同理，要製造 4 堆集，需要 3 步。因此，製造 m 堆集，最少需要 m-1 步即可達成。

結論 3： 在堆集遊戲的開始狀態中，若要製造 m 堆集，則最少需要 m-1 步即可達成。

(四) 全部子數回到終點所需最少步數

開始進行研究前我們先分析，不同子數的情況下，回到終點最少步數究竟是多少。

遊戲開始之前，每個格子都有一子，若每一子都能 1 步回到終點，則 n 子需要 n 步。但依規則而言我們知道無法 1 子 1 步回終點，過程中需要製造堆集以減少行走步數。

製造堆集需要多少步數？若兩子移動後形成一個堆集，則右方子最少需往左 1 步；同理，3 子若想移動後形成 1 個堆集，則最右方子需往左移動最少一步，與中間子形成

堆集後，再往左至少一步，才能與最左子形成一個堆集。因此，我們可以推算得知，n 子若要形成一個堆集，最少需要(n-1)步。而形成的堆集還需再至少一步回到終點，因此，n 子的最少移動步數為(n-1)+1=n 步。

結論 4：在堆集遊戲的開始狀態中，若有 n 子，則最少需要 n 步可全部回到終點。

研究二：在 $1\times n$ 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最少步數。

(一) 不同棋子數的最少移動方法

我們實際操作，嘗試找出最少的移動步數。

n=1，很明顯，g_1=1。

終點	1	步數
1	0	1

n=2，很明顯，g_2=3。

終點	1	2	步數
1	0	1	1
1	1	0	2
2	0	0	3

n=3，可在第 2 格產生一個 2 堆集，因此 g_3=3。

終點	1	2	3	步數
1	0	1	1	1
1	0	2	0	2
3	0	0	0	3

n=4，4 子最大僅能形成 2 堆集，且只能在第 2 格，因此 g_4=7。

終點	1	2	3	4
1	0	1	1	1
1	0	2	0	1
3	0	0	0	1
3	0	0	1	0
3	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

n=5，5 子的移動方法，可先形成兩個 2 堆集，因此 g_5=6。

終點	1	2	3	4	5	步數
3	3 子最少移動步數			1	1	3
3	0	0	0	2	0	4
3	0	2	0	0	0	5
5	0	0	0	0	0	6

n=6，6 子最多可形成 3 堆集，因此 g_6=7。

終點	1	2	3	4	5	6	步數
3	3 子最少移動步數			1	1	1	3
3	0	0	3	3 子最少移動步數			6
6	0	0	0	0	0	0	7

n=7，7 子可在第 4 格形成 4 堆集。因此 g_7=7。

終點	1	2	3	4	5	6	7	步數
3	3 子最少移動步數			1	1	1	1	3
3	0	0	0	4	3 子最少移動步數			6
7	0	0	0	0	0	0	0	7

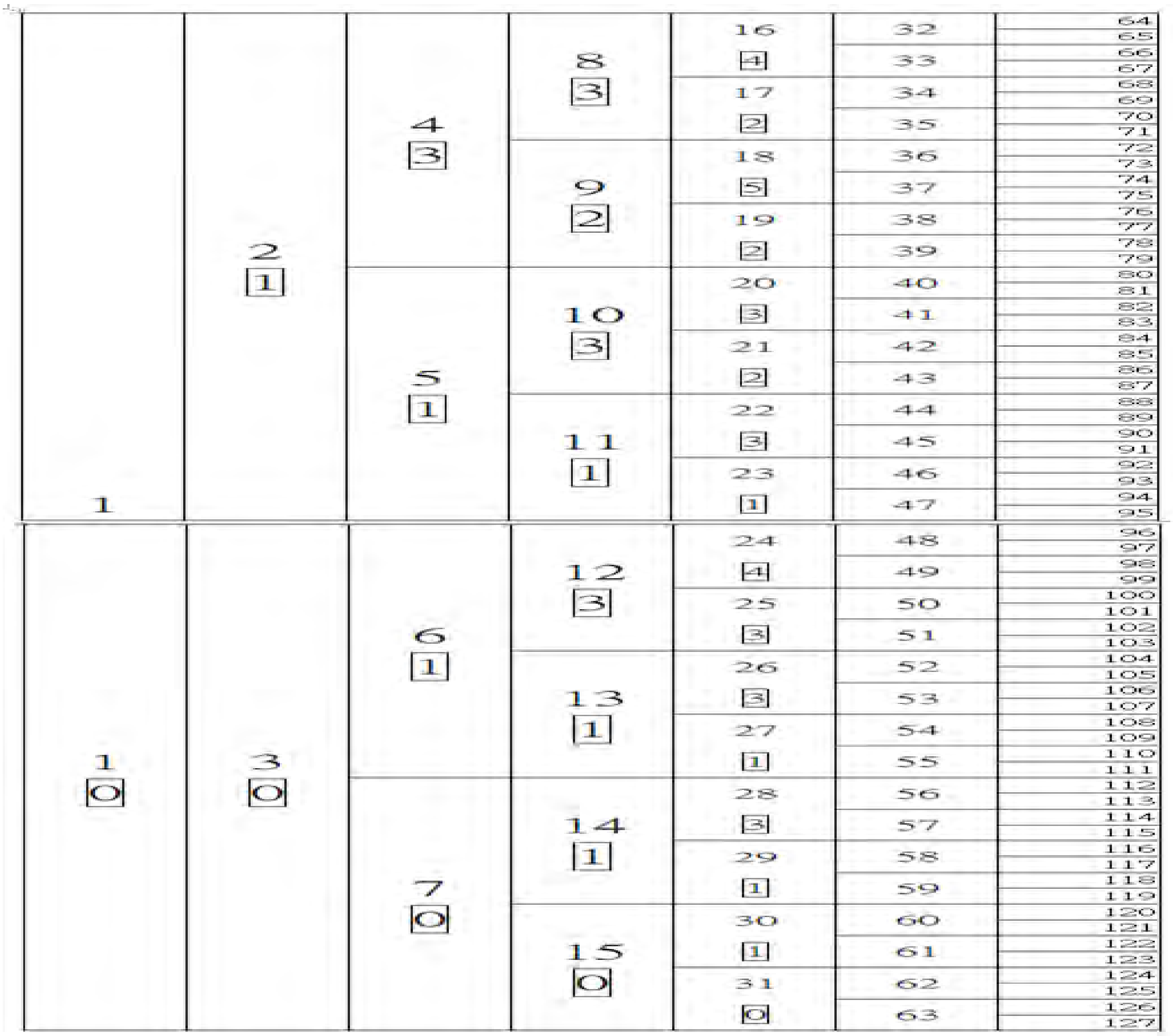
接下來，找出 1～31 子的最少移動步數，並整理成表(5-2-1)。(8～31 子的移動過程詳見工作日誌)

表(5-2-1)

棋子數 n	1	2	3	4	5	6	7	8
最少步數 g_n	1	3	3	7	6	7	7	11
ΔS=g_n－n	+0	+1	+0	+3	+1	+1	+0	+3
行走組合	1	1+1	1+2	3+1	3+2	3+3	3+4	5+3
棋子數 n	9	10	11	12	13	14	15	16
最少步數 g_n	11	13	12	15	14	15	15	20
ΔS=g_n－n	+2	+3	+1	+3	+1	+1	+0	+4
行走組合	2+3+4	5+5	7+4	6+6	7+6	7+7	7+8	11+5
棋子數 n	17	18	19	20	21	22	23	24
最少步數 g_n	19	21	21	23	23	25	24	24
ΔS=g_n－n	+2	+3	+2	+3	+2	+3	+1	+4
行走組合	2+3+4+8	15+3	5+6+8	13+7	11+10	11+11	15+8	13+11
棋子數 n	25	26	27	28	29	30	31	32
最少步數 g_n	28	31	28	31	30	31	31	37
ΔS=g_n－n	+3	+3	+1	+3	+1	+1	+0	+5
行走組合	13+12	13+13	15+12	14+14	15+14	15+15	15+16	23+9

從表(5-2-1)中，我們發現：

1. 隱約觀察到在 n=2 的次方減 1 時，其ΔS=0，其他並無明顯規律。
2. 既然棋子數與 2 的次方有關，因此，我們***轉換觀點來整理數據資料：即 n 以 2 的次方來分段，試著以直立式樹狀圖將不同棋子數及其ΔS 列出，如圖(5-2-1)***，果然發現一些規律。



圖(5-2-1)

(二) 不同棋子數最少移動步數之規律

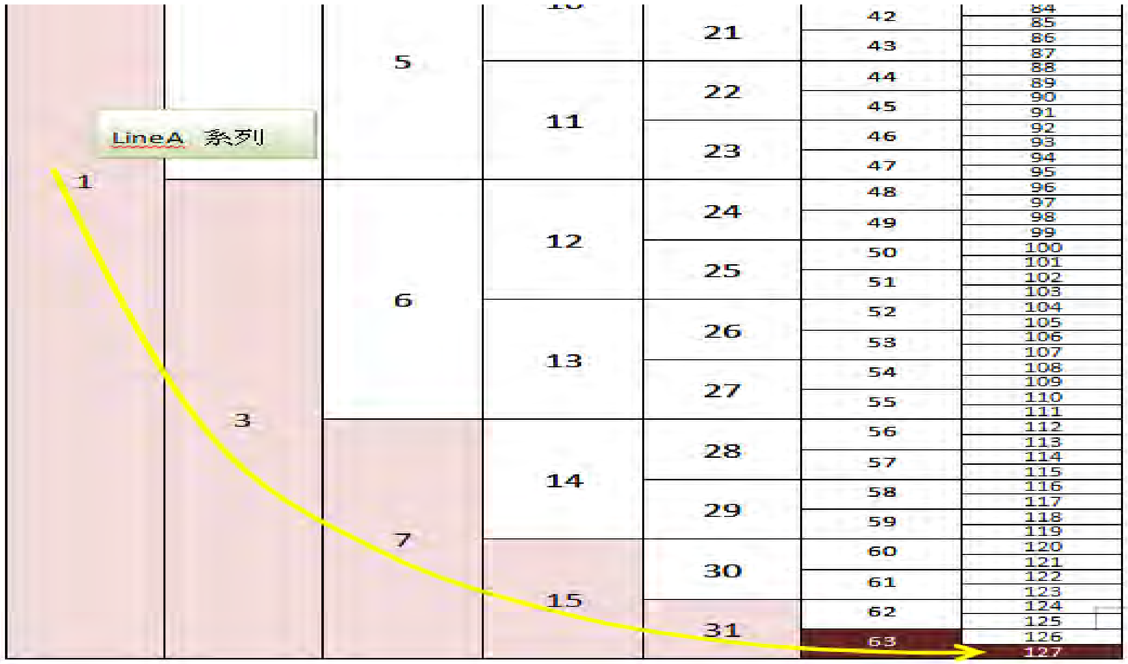
仔細觀察圖(5-2-1)，我們可以發現：相同的ΔS 在圖(5-2-1)的出現位置似乎呈現某種規律。

1. ΔS＝0

ΔS＝0 的棋子數分別為 1、3、7、15、31 子，恰好位於該圖表的最下方位置，於是我們整理出： A_1：$1=2-1=2^1-1$ ；A_2：$3=4-1=2^2-1$ ；A_3：$7=8-1=2^3-1$ ； A_4：$15=16-1=2^4-1$

歸納 A 系列棋子數的規律為 $A_k=2^k-1$ ，如圖(5-2-2)，移動步數=棋子數。

結論 5： 在 $1\times n$ 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，當棋子數 $A_k=2^k-1$ 時有最少步數，且最少移動步數=棋子數 (ΔS＝0)。



圖(5-2-2)

2. $\Delta S=1$

(1) 觀察$\Delta S=1$的棋子數分布位置，可以發現均位於$\Delta S=0$的右上方位置。如圖(5-2-3)標示黃底格子。其棋子數分別為 2、6、14、30，恰好為$\Delta S=0$子數的兩倍，依據前述公式，我們可將之記錄為 $2\times(2^{k}-1)=2^{k+1}-2$......... ***《Line B_1》***。

(2) 而在黃色的$\Delta S=1$的右下方，也出現了$\Delta S=1$的棋子數，如圖(5-2-3)綠色標示。棋子數分別為 5、13、29。依據表格位置，綠色格子恰好為黃色格子中數字之兩倍加一，記錄成：$2\times(2^{k+1}-2)+1=2\times2^{k+1}-4+1=2^{k+2}-3$......... ***《Line B_2》***。

(3) 綠色的$\Delta S=1$的右下方，也出現了$\Delta S=1$的棋子數，圖(5-2-3)標示為藍色。棋子數分別為 11、27、59。依據表格位置，藍色格子恰好為綠色格子中數字之兩倍加一，記錄成：$2\times(2^{k+2}-3)+1=2\times2^{k+2}-6+1=2^{k+3}-5$......... ***《Line B_3》***。

(4) 在藍色格子的右下方，子數 23，標示成紫色。若依據規律，為藍色格子中數字的兩倍加一，記錄成：$2\times(2^{k+3}-5)+1=2\times2^{k+3}-5+1=2^{k+4}-9$......... ***《Line B_4》***。

將上述公式整理後列出，並將藍框中的數字改寫如下：

$2^{k+1}-2$

$2^{k+2}-3$

$2^{k+3}-5$

$2^{k+4}-9$

$2^{k+1}-(2^1-0)$

$2^{k+2}-(2^2-1)$

$2^{k+3}-(2^3-3)$

$2^{k+4}-(2^4-7)$

與Δ= 0棋子數相仿，代入之前公式。

$0=2^0-1$

$1=2^1-1$

$3=2^2-1$

$7=2^3-1$

所以　Line B_1：$2^{k+1}-[2^1-(2^0-1)]$；

Line B_2：$2^{k+2}-[2^2-(2^1-1)]$；

Line B_3：$2^{k+3}-[2^3-(2^2-1)]$；

Line B_4：$2^{k+4}-[2^4-(2^3-1)]$；

由以上 Line B_1～B_4 中，我們再將 B 系列歸納出一個超規則：

當 Line B_v 的棋子數為 $2^{k+v}-[2^v-(2^{v-1}-1)]=2^{k+v}-2\times2^{v-1}+2^{v-1}-1=$ **$2^{k+v}-2^{v-1}-1$** **時**，最少步數的$\Delta S=1$。其中 v 的數字代表該系列第 v 條出現的 Line B，k 代表在這條線上出現順序。

例如：30 出現在 Line B_1，第 4 個出現的數字。

代入公式：$2^{k+v}-2^{v-1}-1=2^{4+1}-2^{1-1}-1=32-1-1=30$。

(5) 在 B 系列，B_1～B_5 中，其第一個數字出現的順序為 2、5、11、23、47，將之改寫成

2$=2^{1+1}-2^{1-1}-1$　；**5**$=2^{2+1}-2^{2-1}-1$；**11**$=2^{3+1}-2^{3-1}-1$；**23**$=2^{4+1}-2^{4-1}-1$；**47**$=2^{5+1}-2^{5-1}-1$

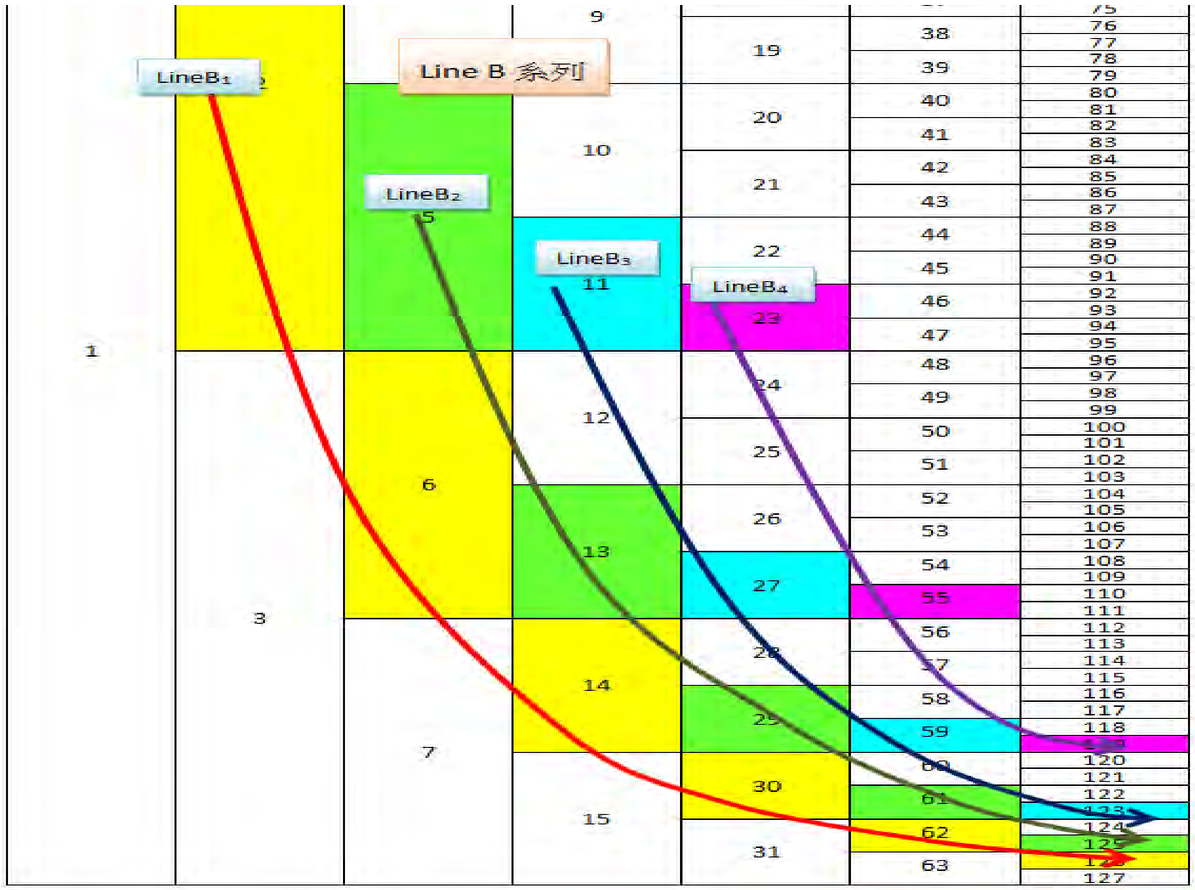
即 Line B 起首數字可歸納為：$2^{v+1}-2^{v-1}-1$。

結論 6：在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，

(1) 當 Line B_v 的棋子數為

$2^{k+v}-2^{v-1}-1$ 時有最少步數，且最少移動步數=棋子數+1　　($\Delta S=1$)。

(2) Line B_v 起首數字可歸納為：$2^{v+1}-2^{v-1}-1$。



圖(5-2-3)

3. $\Delta S = 3$

(1) 黃色格子的右上方，可以發現最少步數的$\Delta S = 3$，標示為有色格子，如圖(5-2-4)。

有色格子的子數恰好為$\Delta S = 1$ 的兩倍。將上述公式帶入

黃色 Line C_1：$2(2^{k+1}-2)=2^{k+2}-4=2^{k+2}-(2^1+2)$

淺藍 Line C_2：$2(2^{k+2}-3)=2^{k+3}-6=2^{k+3}-(2^2+2)$

淺紅 Line C_3：$2(2^{k+3}-5)=2^{k+4}-10=2^{k+4}-(2^3+2)$……

由以上 Line C_1～C_3，我們再將 C 系列歸納出一個超規則：

當 Line C_v 的棋子數為 $2^{k+v+1}-(2^v+2)=2^{k+v+1}-2^v-2$ 時，最少步數的$\Delta S = 3$。

v 代表 Line C 系列中第 v 條出現的線，而 k 值代表該線上第 k 個出現的數字。

例如：26 出現在 Line C_2，第二個出現的數字，代入公式

Line C_v：$2^{k+v+1}-2^v-2=2^{2+2+1}-2^2-2=2^5-4-2=32-6=26$

(2) 另外，在 C 系列 C_1～C_5 中，其第一個數字的出現順序則為 4、10、22、46、94，將之改寫成 **4**=8－4 ；**10**=16－6 ；**22**=32－10 ；**46**=64－18 ；**94**=128－34

Line C_1：$4=2^{1+1+1}-(2^1+2)$、Line C_2：$10=2^{1+2+1}-(2^2+2)$、Line C_3：$22=2^{1+3+1}-(2^3+2)$、

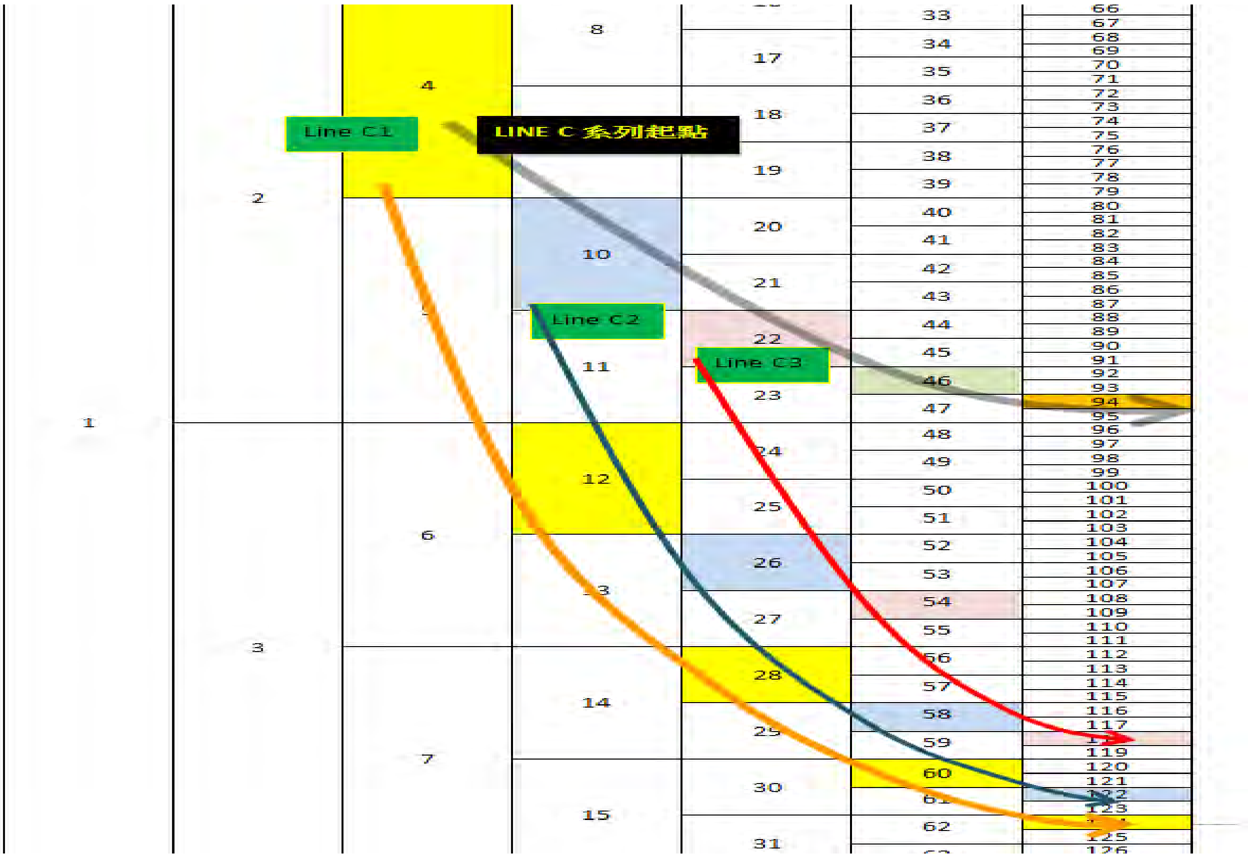
Line C_4：$2^{1+4+1}-(2^4+2)$、Line C_5：$2^{1+5+1}-(2^5+2)$；

即 Line C 起首數字可歸納為：$2^{1+v+1}-(2^v+2)=2^{v+2}-2^v-2$

結論 7：在 $1\times n$ 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，

(1) 當 ***Line C_v 的棋子數為*** $2^{k+v+1}-(2^v+2)=2^{k+v+1}-2^k-2$ 時有最少步數，且最少移動步數=棋子數+3 ($\Delta S=3$)。

(2) Line C_v 起首數字可歸納為：$\boldsymbol{2^{v+2}-2^v-2}$。



圖(5-2-4)

4. $\Delta S=2$

進行實際試走 1-10 子之後，我們發現有一個特殊的步數，就是 9 子的$\Delta S=2$，其餘棋子數的ΔS 不外乎 0、1、3，唯獨 9 子出現了$\Delta S=2$。這引起了我們的好奇心，且 9 子的走法也異於其他子數的走法(走法部分我們會在後面有深入討論)。於是我們繼續嘗試，看是

否能找出同樣為ΔS＝2 的子數。接著發現驚人的規律！

我們發現 9 子的ΔS＝2，接著嘗試後發現 17 子也有同樣的ΔS＝2。接著發現 19 子採類似走法也出現ΔS＝2。於是我們大膽假設，是否 33 子與 39 子也有一樣的結果。果真以類似走法試走後，得到一樣的結果。我們假設是否與 A、B、C 系列有一樣的結果，驗證後發現 35 子的ΔS＝2。於是我們找到一組ΔS＝2 的系列，將之命名為 T 系列。在 T 系列中，我們又發現了至少三個不同的子系列，分別命名為 T_1、T_2、T_3……。

(1) T_1 系列，又分為 $T_{1,1}$、$T_{1,2}$、$T_{1,3}$ 三種，如圖(5-2-5)。以 9 為起首數字，從直立式樹狀圖找到相關聯的數字後，進行改寫與歸納。

①. Line $T_{1,1}$

9$=8+1=2^3+2^1-1$；**19**$=16+3=2^4+2^2-1$；**39**$=32+7=2^5+2^3-1$；**79**$=64+15=2^6+2^4-1$；

Line $T_{1,1}$ 可用 $2^{k+2}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。

②. Line $T_{1,2}$

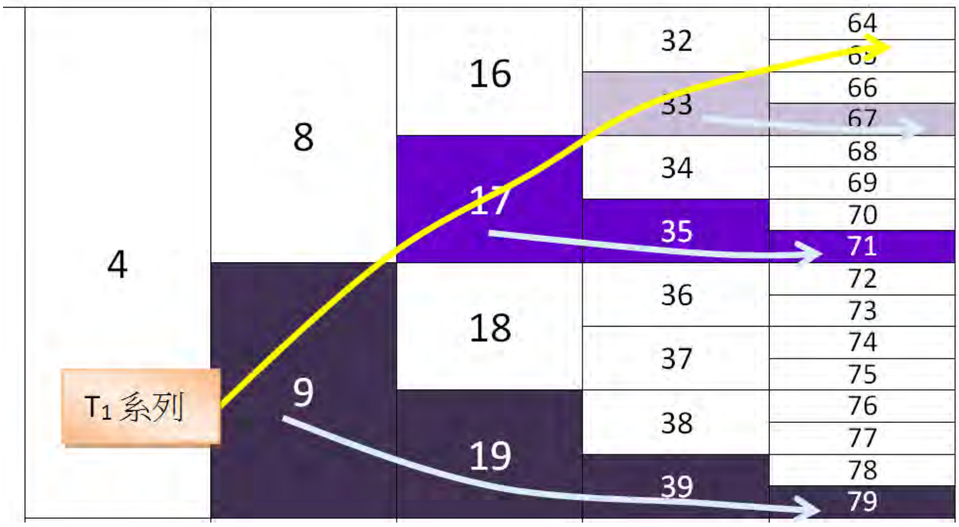
17$=16+1=2^4+2^1-1$；**35**$=32+3=2^5+2^2-1$；**71**$=64+7=2^6+2^3-1$；**143**$=128+15=2^7+2^4-1$；

Line $T_{1,2}$ 可用 $2^{k+3}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。

③. Line $T_{1,3}$

33$=32+1=2^5+2^1-1$；**67**$=64+3=2^6+2^2-1$；**135**$=128+7=2^7+2^3-1$；**271**$=256+15=2^8+2^4-1$；

Line $T_{1,3}$ 可用 $2^{k+4}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。



圖(5-2-5)

(2) T_2 系列，又分為 $T_{2,1}$、$T_{2,2}$、$T_{2,3}$ 三種，如圖(5-2-6)。以 21 為起首數字，進行改寫與歸納。

①. Line $T_{2,1}$

21=16+4+1=$2^4+2^2+2^1-1$；**43**=32+8+1=$2^5+2^3+2^2-1$；

87=64+16+7=$2^6+2^4+2^3-1$　　**175**=128+32+15=$2^7+2^5+2^4-1$；

Line $T_{2,1}$ 可用 $2^{k+3}+2^{k+1}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。

②. Line $T_{2,2}$

37=32+4+1=$2^5+2^2+2^1-1$；**75**=64+8+3=$2^6+2^3+2^2-1$；

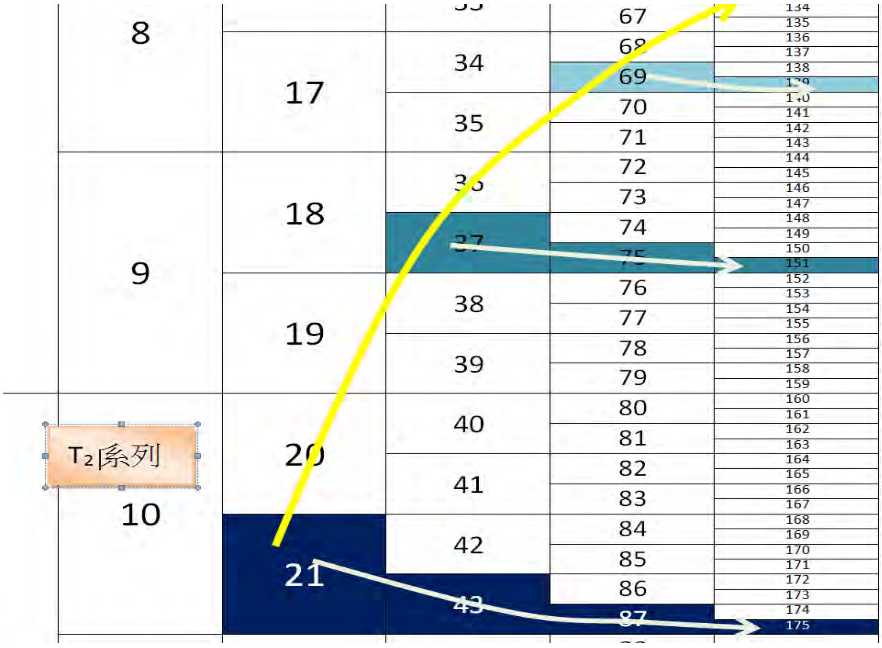
151=128+16+7=$2^7+2^4+2^3-1$；**303**=256+32+15=$2^8+2^5+2^4-1$；

Line $T_{2,2}$ 可用 $2^{k+4}+2^{k+1}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。

③. Line $T_{2,3}$

69=64+4+1=$2^6+2^2+2^1-1$；**139**=128+8+3=$2^7+2^3+2^2-1$；**279**=256+16+7=$2^8+2^4+2^3-1$

Line $T_{2,3}$ 可用 $2^{k+5}+2^{k+1}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。



圖(5-2-6)

(3) T_3 系列，又分為 $T_{3,1}$、$T_{3,2}$、$T_{3,3}$ 三種，如圖(5-2-7)。以 45 為起首數字，進行數字改寫與歸納。

①. Line $T_{3,1}$

45=32+8+4+1=$2^5+2^3+2^2+2^1-1$；　　**91**=64+16+8+3=$2^6+2^3+2^2+2^1-1$；

183=128+32+16+7=$2^7+2^3+2^2+2^1-1$；　　**367**=256+64+32+15=$2^8+2^3+2^2+2^1-1$

Line $T_{3,1}$ 可用 $2^{k+4}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。

②. Line $T_{3,2}$

77=64+8+4+1=$2^6+2^3+2^2+2^1-1$；　　**155**=128+16+8+3=$2^7+2^4+2^3+2^2-1$

311=256+32+16+7=$2^8+2^5+2^4+2^3-1$；　　**623**=512+64+32+15=$2^9+2^6+2^5+2^4-1$

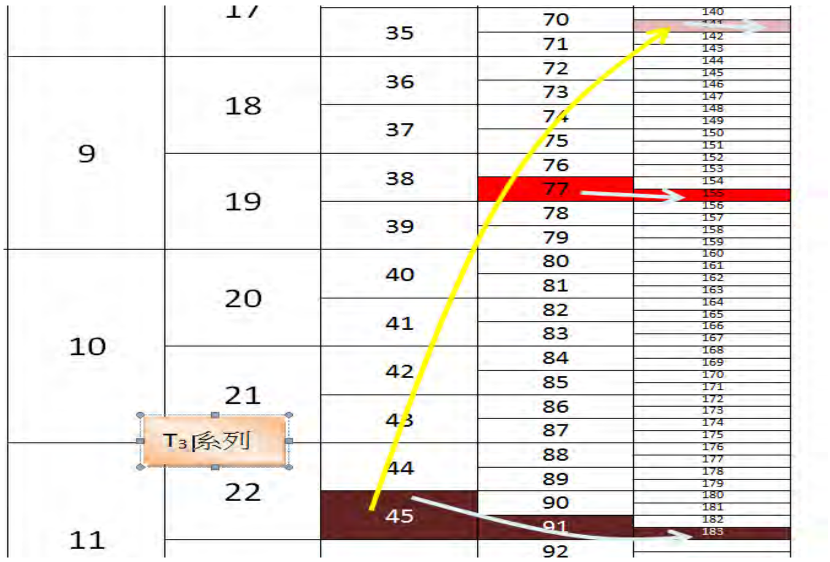
Line $T_{3,2}$ 可用 $2^{k+5}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。

③. Line $T_{3,3}$

141=128+8+4+1=$2^7+2^3+2^2+2^1-1$；　　**283**=256+16+8+3=$2^8+2^4+2^3+2^2-1$

567=512+32+16+7=$2^9+2^5+2^4+2^3-1$；　　**1135**=1024+64+32+15=$2^{10}+2^6+2^5+2^4-1$

Line $T_{3,3}$ 可用 $2^{k+6}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$ 來表示，k 代表第 k 個出現的數字。



圖(5-2-7)

我們再將以上 T_1、T_2、T_3 系列再次整理進行第二次歸納，如表(5-2-2)。

表(5-2-2)

Line $T_{1,1}$：$2^{k+2}+2^k-1$	Line $T_{1,v}$： $2^{k+v+1}+2^k-1$	Line$T_{a,v}$： $2^{k+v+a}+2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\ldots\ldots+2^{k+(a-a)}-1$
Line $T_{1,2}$：$2^{k+3}+2^k-1$		
Line $T_{1,3}$：$2^{k+4}+2^k-1$		

Line $T_{2,1}$：$2^{k+3}+2^{k+1}+2^{k}-1$	Line $T_{2,v}$： $2^{k+v+2}+2^{k+1}+2^{k}-1$	
Line $T_{2,2}$：$2^{k+4}+2^{k+1}+2^{k}-1$		
Line $T_{2,3}$：$2^{k+5}+2^{k+1}+2^{k}-1$		
Line $T_{3,1}$：$2^{k+4}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}-1$	Line $T_{3,v}$： $2^{k+v+3}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}-1$	
Line $T_{3,2}$：$2^{k+5}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}-1$		
Line $T_{3,3}$：$2^{k+6}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}-1$		

(4)T_1 系列起首數字 $T_{1,1}$ **9**$=2^3+2^1-1$ $T_{1,2}$ **17**$=2^4+2^1-1$ $T_{1,3}$ **33**$=2^5+2^1-1$；

可歸納為 $T_{1,v}$ 起首數字 $2^{(v+2)}+2^1-1$

T_2 系列起首數字 $T_{2,1}$ **21**$=2^4+5=2^4+2^2+2^1-1$ $T_{2,2}$ **37**$=2^5+5=2^5+2^2+2^1-1$ $T_{2,3}$ **69**$=2^6+5=2^6+2^2+2^1-1$；**可歸納為 $T_{2,v}$ 起首數字 $2^{(v+3)}+2^2+2^1-1$**

T_3 系列起首數字 $T_{3,1}$ **45**$=2^5+13=2^4+2^3+2^2+2^1-1$ $T_{3,2}$ **77**$=2^6+13=2^4+2^3+2^2+2^1-1$ $T_{3,3}$**141**$=2^7+13=2^7+2^3+2^2+2^1-1$；**可歸納為 $T_{3,v}$ 起首數字 $2^{(v+4)}+2^3+2^2+2^1-1$**

再進行歸納，**$T_{a,v}$ 起首數字 $2^{1+v+a}+2^{1+(a-1)}+2^{1+(a-2)}+\ldots\ldots+2^{1+(a-a)}-1$**

結論 8：在 $1\times n$ 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，

(1) 當棋子數為 Line$T_{a,v}$：$2^{k+v+a}+2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\ldots\ldots+2^{k+(a-a)}-1$ 時有最少步數，且最少移動步數=棋子數+2 ($\Delta S=2$)。

(2) **$T_{a,v}$ 起首數字 $2^{1+v+a}+2^{1+(a-1)}+2^{1+(a-2)}+\ldots\ldots+2^{1+(a-a)}-1$**

研究三：在 $1\times n$ 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最少步數之走法分析。

在進行遊戲後，我們發現這個遊戲要達成最少步數，有幾種行走的方法，分析如下。

(一) 組合走法 ***《只產生兩個堆集》***

在嘗試較多棋子數，我們發現可以運用較少子數的行走方法來解題，也能有效達成最少步數，且能減少解題所需花費的時間。我們將組合走法分為四種進行討論。

1. 完美對稱組合走法

從前述的解題紀錄，我們知道$\Delta S=0$ 的最少子數是一子，即一步回終點。我們仔細

分析當有 3 個棋子時，3 步回終點的方式。

表(5-3-1)

終點	1	2	3	步數
	1	1	1	1
1	0	1	1	2
1	0	2	0	3

表(5-3-1)中的紅框是一個棋子回終點的移動方式，綠框中標示的是第 3 子到第 2 格的移動方式，與紅框中的方式一模一樣，且在第 2 格直接與第 2 子產生一個 2 堆集，恰好能直接回到終點。

我們再看 7 子的移動方式。從表(5-3-2)表中可以發現，1~3 步是 3 子的最少步數移動方法，4~6 步也是第 5 到第 7 子的最少步數移動方法，回到第 4 格後，恰好與第 4 子形成 4 堆集，一步回到終點。

表(5-3-2)

終點	1	2	3	4	5	6	7	步數
	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	2
1	0	2	0	1	1	1	1	3
3	0	0	0	1	1	1	1	4
3	0	0	0	2	0	1	1	5
3	0	0	0	2	0	2	0	6
3	0	0	0	4	0	0	0	7

在該走法當中，棋子數的$\Delta S=0$。***我們將這個行走組合棋子數命名為 NA_k***。

從行走組合來看，可發現當一個棋子時，行走組合為 $NA_1=1$；

3 個棋子，行走組合可寫成 $NA_2=1+1+1=1+(1+1)=1+2=3$；

7 個棋子的行走組合為 $NA_3=3+1+3=NA_1+(1+3)=1+2+4=7$

15 個棋子行走組合為 $NA_4=7+1+7=NA_3+(1+7)=1+2+4+8=15$

下一個棋子數為 $NA_5=NA_4+1+NA_4=1+2+4+8+(1+NA_4)= 1+2+4+8+16=31$

因此，可歸納出 $NA_k=NA_{(k-1)}+1+NA_{(k-1)}$

結論 9：在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，

當棋子移動為完美對稱組合走法時，其行走組合 $NA_k=NA_{(k-1)}+1+NA_{(k-1)}$。

2. 完美不對稱組合走法

這一類組合走法也是將棋子拆解成兩個部分，前後我們都使用ΔS=0 的棋子數，但前後數量並不像完美對稱組合，前後皆相等。後半部分的棋子仍可以在前進時形成一個原地新堆集後再往前，但因前後棋子數量之差異，後半部棋子移動時，會需要多一步才能回到終點。以 11 子走法為例，從表(5-3-3)可以看到，前 7 子、後 3 子最少移動步數，後 3 子回到第 8 格，產生一個 4 堆集後，分兩步回到終點。

表(5-3-3)

終點	1-7	8	9-11	步數
0	7 子最少移動走法	1	3	1-7
7		1	3 子最少移動走法	8-10
11	4 子經過第四格回到終點	4		11-12

同樣非對稱走法也出現在 23 子。從表(5-3-4)也可以看到，採前 15 子與後 7 子，分別以最少移動步數走法，後 7 子回到第 16 格，與第 16 子產生一個 8 堆集後，兩步回到終點。

表(5-3-4)

終點	1-15	16	17-23	步數
0	15 子最少移動走法	1	7	1-15
7		1	7 子最少移動走法	16-22
11	8 子經過第 8 格回到終點	8		23-24

此系列棋子數我們命名為 XNB_v。經觀察後我們發現 XNB_v 的組合為

3+1+1、7+1+3、15+1+7、31+1+15 等，頭尾數字恰好皆為 NA_k，可改寫為

5 個棋子行走組合為 $XNB_1=NA_2+1+NA_1$；

11 個棋子行走組合為 $XNB_2=NA_3+1+NA_2$；

23 個棋子行走組合為 $XNB_3=NA_4+1+NA_3$；

下一個出現的棋子數行走組合為 $XNB_4=NA_5+1+NA_4=31+1+15=47$，

因此可歸納出 $\mathbf{XNB_v=NA_{(k+1)}+1+NA_k}$

> ***結論 10***：在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，
>
> 當棋子移動為完美不對稱組合走法時，其行走組合 **$XNB_v=NA_{(k+1)}+1+NA_k$** 。

3. 直接組合走法

直接組合走法顧名思義就是直接將棋子數拆解成兩部分，表(5-3-5)6 子的行走方法可以看到，使用這兩部分棋子數的最少移動走法之組合，未加任何改變。如 3+3、5+5、6+6 等等。

表(5-3-5)

終點	1	2	3	4	5	6	步數
	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	2
1	0	2	0	1	1	1	3
3	0	0	0	1	1	1	4
3	0	0	1	0	1	1	4
3	0	0	1	0	2	0	5
3	0	0	3	0	0	0	6

此種組合之特點是前後子數相等，與第一種完美對稱組合之不同，在於這種組合並沒有在兩組棋子中間產生一個新堆集。其移動最少步數可依照其組合的棋子數之ΔS 進行推算。

(1) 左右兩側棋子數之ΔS=0

若左右棋子數之ΔS=0，左方 n 子回到終點之ΔS=0，第(n+1)~2n 子回到第 n 格也是ΔS=0。之後還必須多一步將(n+1)~2n 子從第 n 格移回終點，故ΔS=1。這種行走組合出現在 Line B 上，***我們將棋子數命名為 YNB_k***，其行走組合為 **$YNB_k=NA_k+NA_k$** 。

(2) 左右兩側棋子數之ΔS=1

若左右子數之ΔS=1，前 n 子回到終點之ΔS=1，第(n+1)~2n 子回到第 n 格也是ΔS=1。之後還必須多一步將(n+1)~2n 子從第 n 格移回終點，故ΔS=1+1+1=3。

4 個棋子的行走組合為 4=2+2，2 為 $LineB_1$ 第一個數字

10 個棋子的行走組合為 10=5+5，5 為 $LineB_2$ 第一個數字

26 個棋子的行走組合為 26=13+13，13 為 $LineB_2$ 第二個數字

該走法的棋子數均為 B 系列子數的兩倍，我們將全部 B 系列子數命名為 NB，這一

系列棋子數皆出現在 C 系列，***我們將子數命名為 NC***，其行走組合 **NC=2NB**

結論 11：在 $1\times n$ 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，

當棋子移動為直接組合走法時，其行走組合有兩種，分別為

$YNB_k=NA_k+NA_k$ 或 **NC=2NB** 。

4. 組合變形走法

(1) 有些子數無法完美拆解，只能採用變形的組合走法。以 13 子為例，表(5-3-6)中所示，前 7 子採最少步數移動走法，後 6 子若採先前走法將會停在第 7 格，無法回到終點，因此必須改變走法，使後 6 子能停留在第六格，方能回到終點。

表(5-3-6)

終點	1-7							8	9	10	11	12	13	步數
0	7 子最少移動方法							1	1	1	1	1	1	1-7
7	1	2	3	4	5	6	7							
7								1	1	1	3 子最少移動方法			8-10
7								1	1	4				11
7								2		4				12-13
13						6								14

27 子也是採變形走法，前 15 子採最少移動步數回到終點後，後 12 子分為(1+3)+(1+7)兩部分往前走，經過第 12 格後回到終點。

表(5-3-6)

終點	1-15	16-19	20-27	步數
0	15 子最少移動步數	4	7	1-15
15		17-19　3 子最少移動步數回到第 16 格，產生一個 4 堆集後，回到第 12 格	7	16-19
15			21-27　7 子最少移動步數回到第 20 格，產生一個 8 堆集，回到第 12 格。	20-27
27	第 12 格有 12 子，1 步回到終點			28

(2) 採組合變形走法的行走組合的子數有：13、27、29 等。其中 13、29 位於 Line B_2 上，

分析其上數字的行走組合可得：

① Line B_2 的行走組合

5= $3+(1+1)=(2^2-1)+[1+(2^1-1)]$

13= $7+(1+1)+(1+3)=(2^3-1)+[1+(2^1-1)]+[1+(2^2-1)]$

29=$15+(1+1)+(1+3)+(1+7)=(2^4-1)+[1+(2^1-1)]+[1+(2^2-1)]+[1+(2^3-1)]$

② Line B_3 的行走組合

27 子位於 Line B_3 上，我們也分析其上的數字行走組合：

11=$7+(1+3)=(2^3-1)+[1+(2^2-1)]$

27=$15+(1+3)+(1+7)=(2^4-1)+[1+(2^2-1)]+[1+(2^3-1)]$；下一個出現數字為

59=$31+(1+3)+(1+7)+(1+15)=(2^5-1)+[1+(2^2-1)]+[1+(2^3-1)]+[1+(2^4-1)]$

③ Line B_4 的行走組合

23=$15+(1+7)=(2^4-1)+[1+(2^3-1)]$

55=$31+(1+7)+(1+15)=(2^5-1)+[1+(2^3-1)]+[1+(2^4-1)]$

119=$63+(1+7)+(1+15)+(1+31)=(2^6-1)+[1+(2^3-1)]+[1+(2^4-1)]+[1+(2^5-1)]$

④ Line B_5 的行走組合

47=$31+(1+15)=(2^5-1)+[1+(2^4-1)]$

111=$64+(1+15)+(1+31)=(2^6-1)+[1+(2^4-1)]+[1+(2^5-1)]$

239=$128+(1+15)+(1+31)+(1+63)=(2^7-1)+[1+(2^4-1)]+[1+(2^5-1)]+[1+(2^6-1)]$

(3) B 系列自 Line B_2 後，起首數字走法均為完美不對稱的走法，但 Line B_2 線上第 2 個出現的數字，皆可以採組合變形走法。***我們將該系列子數命名為 ZNB_v***，k 表該 ZNB_v 中第 k 個出現的數，行走組合歸納如下：

$ZNB_2=(2^{k+1}-1)+[1+(2^1-1)]+\ldots\ldots+[1+(2^k-1)]$；

$ZNB_3=(2^{k+2}-1)+[1+(2^2-1)]+\ldots\ldots+[1+(2^{k+1}-1)]$；

$ZNB_4=(2^{k+3}-1)+[1+(2^3-1)]+\ldots\ldots+[1+(2^{k+2}-1)]$；

$ZNB_5=(2^{k+4}-1)+[1+(2^4-1)]+\ldots\ldots+[1+(2^{k+3}-1)]$；

由 ZNB_1~ZNB_5 歸納可得 $ZNB_v=(2^{k+(v-1)}-1)+[1+(2^{v-1}-1)]+\ldots\ldots+[1+(2^{k+(v-2)}-1)]$

(4) 歸納的同時，我們也發現變形組合走法的空格數也隱藏著某些規律。

① 在 Line B_2 時，13=7+6，後 6 子採變形走法，回到第 6 格，前面多了 2 空格；29=15+14，後 14 子也採變形走法，回到第 14 格，前面也多了 2 空格。

② Line B_3 中，27=15+12，同理，後 12 子回到第 12 格，前面多了 4 空格；59=31+28，前面也多 4 個空格。

③ Line B_4 中，55=31+24，後 24 子須回到第 24 格，因此前面多了 8 空格。我們往後推算 Line B_5 第二個數字為 111=63+48，前面多了 16 空格。

結論 12：在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，當棋子移動為組合變形走法時，其行走組合 ***ZNB***$_v$=$(2^{k+(v-1)}-1)+[1+(2^{v-1}-1)]+\ldots\ldots+[1+(2^{k+(v-2)}-1)]$，

前方空格數為 $2^{(v-1)}$格

(二) 分散走法　　***《產生三個以上的堆集》***

1. 除了應用較少棋子數的走法來組合外，我們還發現了一種分散式的走法，可以降低組合走法後的步數，達到更少的移動步數。

例如：9 子的移動方法，若將棋子數拆解後採組合走法，無論哪一種最少步數皆為 12 步。但採分散走法則能再減少一步，降低為 11 步。如圖(5-3-1)

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9	步數
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	2
2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	3
2	0	0	1	1	2	0	1	1	1	4
2	0	0	3	1	0	0	1	1	1	5
5	0	0	3	1	0	0	1	1	1	6
5	0	0	0	1	0	0	2	0	1	7
5	0	0	0	1	0	0	2	1	0	8
5	0	0	0	1	0	0	3	0	0	9
5	0	0	0	4	0	0	0	0	0	10
9	0	0	0		0	0	0	0	0	11

圖(5-3-1)

2. 後續解題，我們又陸陸續續發現許多可採分散走法的子數。如 17 子，若採組合走法，需要花費 20 步。我們改採分散走法，走法如圖(5-3-2)，可 19 步回到終點。

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	步數
5	9 子前 6 步走法						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6
5	0	0	0	1	0	0	1	8	1	1	9 子後 7 子走法							14
13	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	15
13	0	0	1	1	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	16
13	0	0	3	1	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	17
13	0	0	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	18
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	19

圖(5-3-2)

仔細觀察採分散走法的子數，皆為$\Delta S=2$，而走法也隱含著規律。

3. 我們將分散走法的組合列出。棋子在移動過程中產生堆集，在回到終點的前一步所產生的堆集數字相加，分散走法的第一組數字，表示採該數字最少步數走法先回終點。如 79=23+24+32，第一組數字 23，採前述 23 子的最少移動走法。

(1) T_1 系列：

①. $T_{1,1}$ 的行走組合

9$=2+3+4=(2^1+2^0-1)+(2^1+2^0)+2^2$；　**19**$=5+6+8=(2^2+2^1-1)+(2^2+2^1)+2^3$；

39$=11+12+16=(2^3+2^2-1)+(2^3+2^2)+2^4$；　**79**$=23+24+32=(2^4+2^3-1)+(2^4+2^3)+2^5$；

從上述算式中可歸納第 k 個數的行走組合為：$\boldsymbol{(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}}$

②. $T_{1,2}$ 的行走組合

17$=2+3+4+8=(2^1+2^0-1)+(2^1+2^0)+2^2+2^3$；**35**$=5+6+8+16=(2^2+2^1-1)+(2^2+2^1)+2^3+2^4$；

71$=11+12+16+32=(2^3+2^2-1)+(2^3+2^2)+2^4+2^5$；**43**$=23+24+32+64=(2^4+2^3-1)+(2^4+2^3)+2^5+2^6$。

從上述算式中可歸納第 k 個數的行走組合為：$\boldsymbol{(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}+2^{k+2}}$

③. $T_{1,3}$ 的行走組合

33$=2+3+4+8+16=(2^1+2^0-1)+(2^1+2^0)+2^2+2^3+2^4$；

67$=5+6+8+16+32=(2^2+2^1-1)+(2^2+2^1)+2^3+2^4+2^5$；

135$=11+12+16+32+64=(2^3+2^2-1)+(2^3+2^2)+2^4+2^5+2^6$；

271$=23+24+32+64+128=(2^4+2^3-1)+(2^4+2^3)+2^5+2^6+2^7$；

從上述算式中可歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k}+2^{k-1})+2^{k+1}+2^{k+2}+2^{k+3}$

(2) T_2 系列：

①. $T_{2,1}$ 的行走組合

21=6+7+8=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^3$

43=13+14+16=$(2^3+2^2+2^1-1)+(2^3+2^2+2^1)+2^4$

87=27+28+32=$(2^4+2^3+2^2-1)+(2^4+2^3+2^2)+2^5$

175=55+56+64=$(2^5+2^4+2^3-1)+(2^5+2^4+2^3)+2^6$

從上述算式中可歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+2}$

②. $T_{2,2}$ 的行走組合

37=6+7+8+16=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^3+2^4$

75=13+14+16+32=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^4+2^5$

151=27+28+32+64=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^5+2^6$

303=55+56+64+128=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^6+2^7$

從上述算式中可歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+2}+2^{k+3}$

③. $T_{2,3}$ 的行走組合

69=6+7+8+16+32=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^3+2^4+2^5$

139=13+14+16+32+64=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^5+2^6$

279=27+28+32+64+128=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^5+2^6+2^7$

559=55+56+64+128+256=$(2^2+2^1+2^0-1)+(2^2+2^1+2^0)+2^6+2^7+2^8$

歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+2}+2^{k+3}+2^{k+4}$

(3) T_3 系列：

①. $T_{3,1}$ 的行走組合

45=14+15+16=$(2^3+2^2+2^1+2^0-1)+(2^3+2^2+2^1+2^0)+2^4$

91=29+30+32=$(2^4+2^3+2^2+2^1-1)+(2^4+2^3+2^2+2^1)+2^5$

183=59+60+64=$(2^5+2^4+2^3+2^2-1)+(2^5+2^4+2^3+2^2)+2^6$

367=119+120+128=$(2^6+2^5+2^4+2^3-1)+(2^6+2^5+2^4+2^3)+2^7$

歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+3}$

②. $T_{3,2}$ 的行走組合

77$=14+15+16+32=(2^3+2^2+2^1+2^0-1)+(2^3+2^2+2^1+2^0)+2^4+2^5$

155$=29+30+32+64=(2^4+2^3+2^2+2^1-1)+(2^4+2^3+2^2+2^1)+2^5+2^6$

311$=59+60+64+128=(2^5+2^4+2^3+2^2-1)+(2^5+2^4+2^3+2^2)+2^6+2^7$

623$=119+120+128+256=(2^6+2^5+2^4+2^3-1)+(2^6+2^5+2^4+2^3)+2^7+2^8$

歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+3}+2^{k+4}$

③. $T_{3,3}$ 的行走組合

141$=14+15+16+32+64=(2^3+2^2+2^1+2^0-1)+(2^3+2^2+2^1+2^0)+2^4+2^5+2^6$

283$=29+30+32+64+128=(2^4+2^3+2^2+2^1-1)+(2^4+2^3+2^2+2^1)+2^5+2^6+2^7$

567$=59+60+64+128+256=(2^5+2^4+2^3+2^2-1)+(2^5+2^4+2^3+2^2)+2^6+2^7+2^8$

1135$=119+120+128+256+512=(2^6+2^5+2^4+2^3-1)+(2^6+2^5+2^4+2^3)+2^7+2^8+2^9$

歸納第 k 個數的行走組合為：$(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+3}+2^{k+4}+2^{k+5}$

我們將三個子系列的行走組合再次整理，歸納成表(5-3-7)

表(5-3-7)

<table>
<tr><td>Line $T_{1,1}$：
$(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}$</td><td rowspan="3">Line $T_{1,v}$：
$(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})$
$+2^{k+1}+\ldots+2^{k+v}$</td><td rowspan="5">Line$T_{a,v}$：
$(2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\ldots+2^k+2^{k-1}-1)$
$+(2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\ldots+2^k+2^{k-1})$
$+2^{k+v}+\ldots+2^{k+(v+a-1)}$</td></tr>
<tr><td>Line $T_{1,2}$：
$(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}+2^{k+2}$</td></tr>
<tr><td>Line $T_{1,3}$：
$(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}+2^{k+2}+2^{k+3}$</td></tr>
<tr><td>Line $T_{2,1}$：
$(2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+2}$</td><td rowspan="2">Line $T_{2,v}$：</td></tr>
<tr><td>Line $T_{2,2}$：
$(2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+2}+2^{k+3}$</td></tr>
</table>

Line $T_{2,3}$： $(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+2}+2^{k+3}$ $+$ 2^{k+4}	$(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)$ $+(2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})$ $+2^{k+2}...+2^{k+(v+1)}$	
Line $T_{3,1}$： $(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)$ $+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})+2^{k+3}$		
Line $T_{3,2}$： $(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})$ $+2^{k+3}+2^{k+4}$	Line $T_{3,v}$： $(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)$ $+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})$ $+2^{k+3}+...+2^{k+(v+2)}$	
Line $T_{3,3}$： $(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^{k}+2^{k-1})$ $+$ $2^{k+3}+2^{k+4}+2^{k+5}$		

另外，在 T 系列中，行走組合的組數與數線的出現順序有關。第一條線的行走組合可分為三組，第二條線的行走組合可分為四組，第三條線的行走組合可分為五組。可知，第 V 條線的行走組合可分為(V+2)組。

結論 13：在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，當棋子移動為分散走法時，

(1)其行走組合 **Line$T_{a,v}$：$(2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+...+2^{k}+2^{k-1}-1)+(2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+...+2^{k}+2^{k-1})$**

$$+2^{k+v}+...+2^{k+(v+a-1)}$$

(2) **Line$T_{a,v}$** 的行走組合可分為**(V+2)**組

二、棋子可以向左或向右(雙向)移動的探討

> ***研究四：*** 在$1 \times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下(棋子可向左或向右移動)，探討棋子移動的最少步數與走法分析。

之前探討遊戲規則全部的棋子都必須往左方移動至終點方格，接下來我們想探討如果可以往右方移動，是否有可能改變最少步數呢？進行試走後發現：1-31 子的最少移動步數之ΔS皆為 0。行走過程紀錄如下：

n=1，g_1=1。不需雙向移動。

n=2，g_2=2。行走組合為 $\underline{1}+\boxed{1}$

終點	1	2	步數
0	0	2	1
2	0	2	2

n=3，g_3=3。不需雙向移動。

n=4，g_4=4。行走組合為 $1+\underline{1}+\boxed{1}+1$

終點	1	2	3	4	步數
1	0	1	1	1	1
1	0	0	2	1	2
1	0	0	3	0	3
4	0	0	0	0	4

n=5， g_5=5。行走組合為 $1+\underline{2}+\boxed{1}+1$

終點	1	2	3	4	5	步數
1	0	1	1	1	1	1
1	0	2	0	1	1	2
1	0	0	0	3	1	3
1	0	0	0	4	0	4
5	0	0	0	0	0	5

n=6，g_6=6。行走組合為 $1+\underline{3}+\boxed{1}+1$

終點	1	2	3	4	5	6	步數
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	2	1	2
1	0	0	2	0	1	1	3
1	0	0	0	0	4	1	4
1	0	0	0	0	5	0	5
6	0	0	0	0	0	0	6

n=7，g_7=7。不需雙向移動

接下來，找出 1～32 子的最少移動步數及其行走組合，並整理成表(5-4-1)。(8～32 子移動過程詳見工作日誌)

表(5-4-1)

棋子數 n	最少步數 g_n	行走組合	棋子數 n	最少步數 g_n	行走組合
1	1	不需雙向移動	17	17	$7+\underline{2}+\boxed{1}+7$
2	2	$\underline{1}+\boxed{1}$	18	18	$7+\underline{3}+\boxed{1}+7$
3	3	不需雙向移動	19	19	$7+\underline{4}+\boxed{1}+7$
4	4	$1+\underline{1}+\boxed{1}+1$	20	20	$7+\underline{5}+\boxed{1}+7$
5	5	$1+\underline{2}+\boxed{1}+1$	21	21	$7+\underline{6}+\boxed{1}+7$
6	6	$1+\underline{3}+\boxed{1}+1$	22	22	$7+\underline{7}+\boxed{1}+7$
7	7	不需雙向移動	23	23	$7+\underline{8}+\boxed{1}+7$
8	8	$3+\underline{1}+\boxed{1}+3$	24	24	$7+\underline{9}+\boxed{1}+7$
9	9	$3+\underline{2}+\boxed{1}+3$	25	25	$7+\underline{10}+\boxed{1}+7$
10	10	$3+\underline{3}+\boxed{1}+3$	26	26	$7+\underline{11}+\boxed{1}+7$
11	11	$3+\underline{4}+\boxed{1}+3$	27	27	$7+\underline{12}+\boxed{1}+7$
12	12	$3+\underline{5}+\boxed{1}+3$	28	28	$7+\underline{13}+\boxed{1}+7$
13	13	$3+\underline{6}+\boxed{1}+3$	29	29	$7+\underline{14}+\boxed{1}+7$
14	14	$3+\underline{7}+\boxed{1}+3$	30	30	$7+\underline{15}+\boxed{1}+7$
15	15	不需雙向移動	31	31	不需雙向移動
16	16	$7+\underline{1}+\boxed{1}+7$	32	32	$15+\underline{1}+\boxed{1}+15$

從表(5-4-1)中，我們發現：在棋子可以向左或向右移動時

(一) 棋子數 n=棋子移動的最少步數 g_n (即$\Delta S = 0$)。

(二) 從以上的記錄，棋子數 n 的行走組合可歸納

n 的行走組合為$(2^{a-1}-1)+\underline{b}+\boxed{1}+(2^{a-1}-1)$，其中 $a \geq 1$，$b=0,1,2,3,\ldots,2^a-1$，b 代表回頭的棋子數。

行走步數可分為兩段來計算，第一段為$(2^{a-1}-1)$，依照之前的研究結果可知其$\Delta S = 0$。

第二段 $\underline{b}+\boxed{1}+(2^{a-1}-1)$可在第$(2^{a-1}+b)$格形成堆集後，一步回終點。

結論 14：在$1\times n$的方格棋盤中，滿足遊戲規則下(棋子可向左或向右移動)，

(1) 棋子數 n=棋子移動的最少步數 g_n (即$\Delta S=0$)。

(2) n 的行走組合為$(2^{a-1}-1)+\underline{b}+1+(2^{a-1}-1)$，

其中 $a\geq 1$，$b=0,1,2,3,\ldots,2^a-1$，b 代表回頭的棋子數。

陸、討論與結論

一、這次的研究中，在不同子數的情況下，嘗試各種走法後，找到棋子移動的最少步數，再應用這結果去推論更大子數的最少移動步數。一開始無法發現規律，透過改變觀點，以直立式樹狀圖的方法將數字排列後，可以發現相同行走步數的棋子數在樹狀圖的排列位置有特定規律。仔細觀察數字，以 2 為底數改寫，發現指數的變化有其規律，透過觀察歸納後，將棋子數以公式表示。

二、在研究過程中，我發現特定的子數有相同的行走組合，也可以得到相同的最少移動步數。因此，只要能發現行走組合的類型，就能快速推論出相同行走組合的全部子數。

三、在研究中我發現耐心與細心非常重要，當子數越來越大時，必須仔細思考可能的移動方法或是可能的組合走法。另外，如何能清晰且精簡地紀錄研究歷程，也相當重要。

四、未來發展方向：

(一) 這次研究中，雖然已經發現了四個不同系統的棋子數在行走步數與組合上的規律，但仍然還有些棋子數無法放進這些規律，是未來可以努力的方向。

(二) 從變形走法中我們也發現，棋子前面的空格數也會影響行走步數，未來也可以進一步變化為當棋盤數與棋子數不相等時，最少移動步數的探討。

柒、參考資料及其他

一、程崇海。(1987)。**玩石子學數學**。台北市，台北市立師範專科學校。

二、康軒文教事業（2015）。國小數學課本第 11 冊第 6 單元怎樣解題。新北市，康軒。

【評語】080405

1. 本研究主題在探討堆集遊戲的解法，作者從 1x7 的方格棋盤延伸至 1xn 的方格棋盤延伸，嘗試以樹狀圖的表徵方式，發現棋子數在樹狀圖的排列位置之特定規律，是一個需要耐心與細心探究的研究。
2. 透過研究架構圖的清楚呈現，有助於理解整個研究的探究方向與內容。
3. 研究成果豐富，且除了遊戲之外的其他可能應用性，有再深思並輔以口頭分享，有助於提高與創造本研究的價值。

作品海報

壹、研究動機

有一次，我在書上看到一個有關於堆集遊戲的題目，其內容如下：

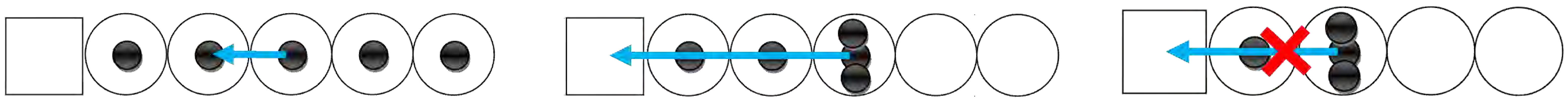
開始狀態　在方格棋盤中，每一個格子內都有一個棋子

終點	1	2	3	4	5	6	7
	●	●	●	●	●	●	●

目的狀態　7個棋子都走到終點的方格中。

終點	1	2	3	4	5	6	7
●●●●●●●							

遊戲規則　1. 每次走的格數必須是該格子中的棋子數。
2. 找出以最少的行走步數，讓7個棋子回到最左邊的(終點)方格中。



貳、研究目的

一、棋子只能向左(單向)移動的探討

(一)在堆集遊戲中，分析堆集的形成條件。
(二)在 1xn 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下， 探討棋子移 動的最少步數。
(三)在 1xn 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移 動的最少步數之走法分析。

二、棋子可以向左或向右(雙向)移動的探討

(一)在1xn 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移 動的最少步數與走法分析。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、棋子

肆、研究過程與方法

一、名詞解釋及符號定義

(一) 棋盤表示方法

終點	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	1	1	1	1

(二) 堆集：指在同一格子中，存在兩個以上的棋子，稱為堆集。

(三) 步數計算：移動一次計算步數一步，若三顆棋子位於同一格，一次移動三格，仍算一步。

(四) 最少步數：n個棋子回到終點的最少步數，以g_n表示。

(五) ΔS：最少步數與棋子總數的差，即 $\Delta S = g_n - n$。

(六) 行走組合：指全部棋子回到終點前所在格子之記錄組合 。
行走組合紀錄方式如下：
1、當有m個棋子時，行走組合可記錄成$C_1+C_2+\ldots+C_n$，且$C_1+C_2+C_3\ldots+C_n=m$。
2、當行走過程中，使用較少子數的最少移動步數先移動，將該使用的子數紀錄在C_1， C_2以後的組合紀錄則以回到終點前一步所在的位置或子數進行紀錄。

(七) $\boxed{1}$: 表示在雙向走法中，1左右雙方棋子與之形成一個新堆集。

(八) b：表示在雙向走法中，有b子採往右走的移動方式。未標底線的數字則以往左移動為主。

二、研究架構圖

- 解題前準備 → 堆集條件分析 → 位置　子數　最少步數
- 最少步數 → ΔS=0、1、2、3 → 子數公式化
- 行走組合 → 組合走法 → 分散走法
- 雙向走法 → ΔS=0 → 行走組合公式化

伍、研究結果

一、棋子只能向左(單向)移動的探討

研究一：在堆集遊戲中，分析堆集的形成條件。

(一)堆集位置限制

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	0	0	0	0	0	0	2	0

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	1	1	2	1	0	1	1

結論：在堆集遊戲中，
(1) 當堆集產生的位置之左方格棋子已完全走回終點時：則m堆集產生在第km格，則可以k步回到終點。
(2) 當堆集產生的位置之左方格棋子未完全走回終點時：則當m堆集產生在第k格，其限制條件為第k-m格的棋子數為 k-2m子，此時m堆集2步可回終點。

(二) 製造堆集的最少棋子數

在第3格製造3堆集

終點	1	2	3	4	5
	1	1	1	1	1

在第5格製造5堆集

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

在第6格製造3堆集

終點	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1	1	1	1	1	1	1

結論：在堆集遊戲中，
(1)若要在第 m 格產生 m 堆集，其最少棋子數為 2m-1 子。
(2)若要在第 a 格 (a≥m) 產生m堆集， 其最少棋子數為 a+(m-1) 子。

(三) 製造堆集所需要的最少步數

終點	1	2	3	4	5	6	7	步數
0	1	1	1	1	1	2	0	1
0	1	1	1	2	0	2	0	2
0	1	1	1	4	0	0	0	3

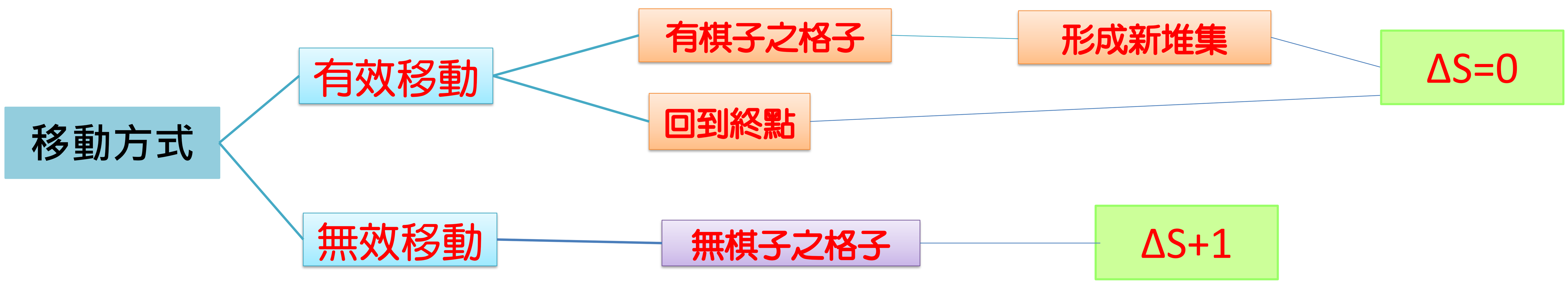
終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	步數
	1	1	1	1	1	1	1	1	2	0	1
	1	1	1	1	1	1	3	1	0	0	2
	1	1	1	4	1	1	0	1	0	0	3

終點	1	2	3	4	5	6	7	步數
0	1	1	1	1	1	2	0	1
0	1	1	1	2	0	2	0	2
0	1	1	1	4	0	0	0	3
4	1	1	1	0	0	0	0	4
4	1	2	0	0	0	0	0	5
6	1	0	0	0	0	0	0	6
7	0	0	0	0	0	0	0	7

結論：在堆集遊戲的開始狀態中，若要製造m堆集，則最少需要m-1步即可達成。

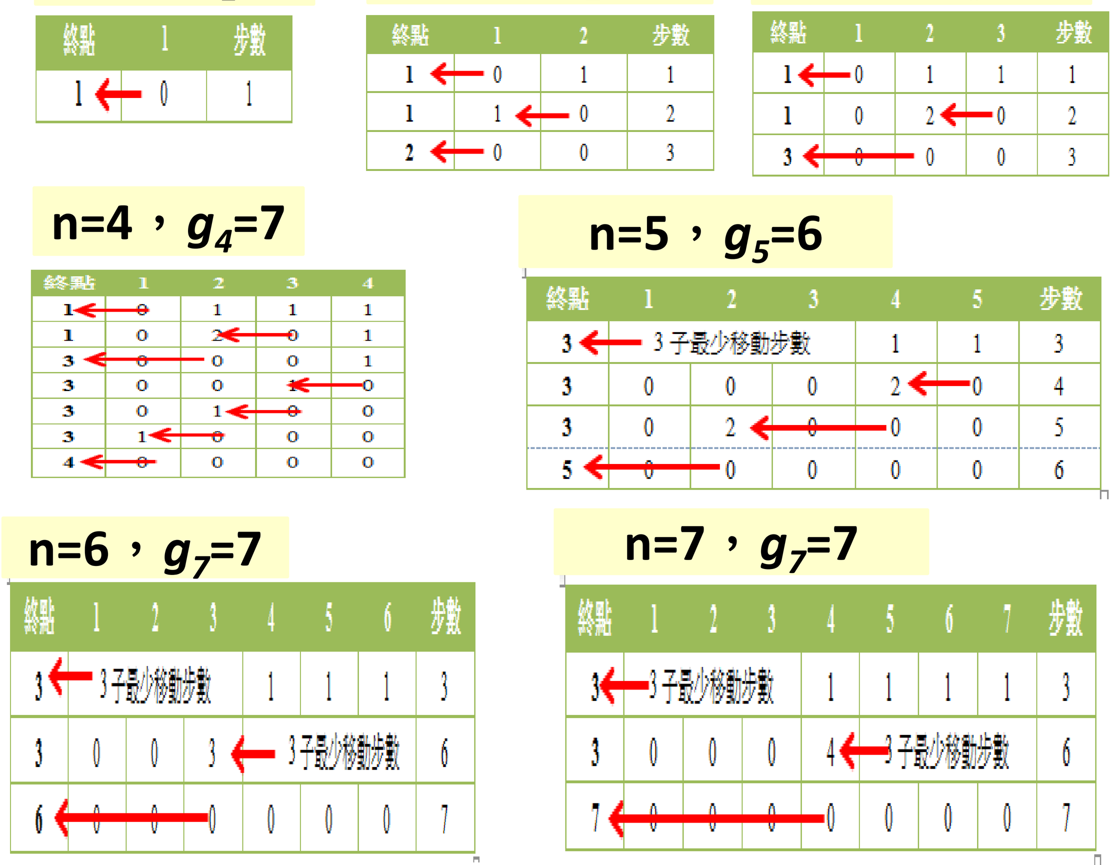
(四) 全部子數回到終點所需最少步數

結論：在堆集遊戲的開始狀態中，若有n子，則最少需要n步才能全部回到終點。

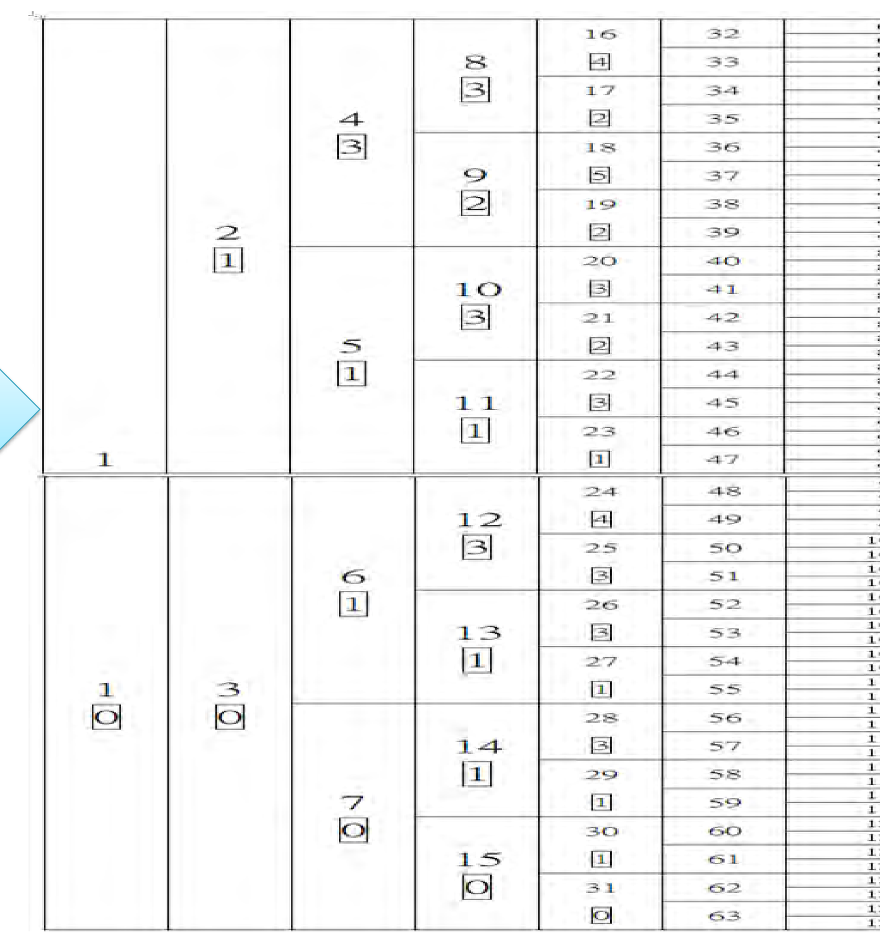


研究二：在 1xn 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最少步數。

n=1，g_1=1　n=2，g_2=3　n=3，g_3=3　n=4，g_4=7　n=5，g_5=6　n=6，g_7=7　n=7，g_7=7

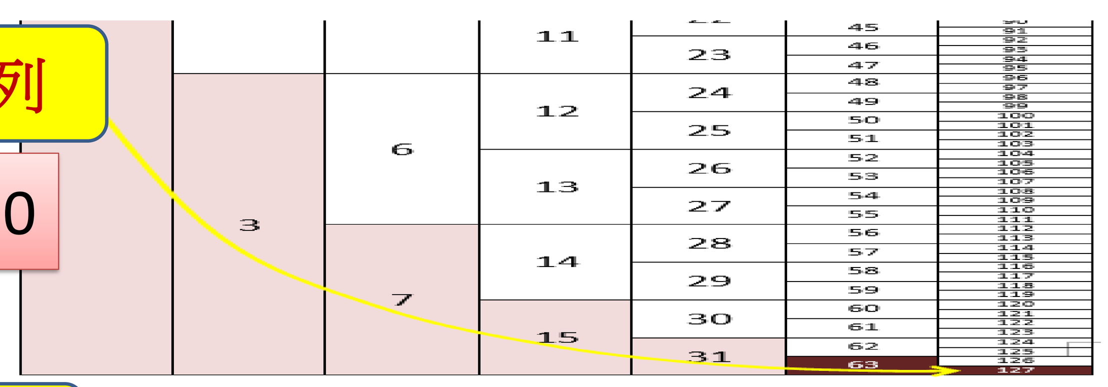


棋子數 n	1	2	3	4	5	6	7	8
最少步數 g_n	1	3	3	7	6	7	7	11
ΔS=g_n－n	+0	+1	+0	+3	+1	+1	+0	+3
行走組合	1	1+1	1+2	3+1	3+2	3+3	3+4	5+3
棋子數 n	9	10	11	12	13	14	15	16
最少步數 g_n	11	13	12	15	14	15	15	20
ΔS=g_n－n	+2	+3	+1	+3	+1	+1	+0	+4
行走組合	2+3+4	5+5	7+4	6+6	7+6	7+7	7+8	11+5
棋子數 n	17	18	19	20	21	22	23	24
最少步數 g_n	19	21	21	23	23	25	24	24
ΔS=g_n－n	+2	+3	+2	+3	+2	+3	+1	+4
行走組合	2+3+4+8	15+3	5+6+8	13+7	11+10	11+11	15+8	13+11
棋子數 n	25	26	27	28	29	30	31	32
最少步數 g_n	28	31	28	31	30	31	31	37
ΔS=g_n－n	+3	+3	+1	+3	+1	+1	+0	+5
行走組合	13+12	13+13	15+12	14+14	15+14	15+15	15+16	23+9



A系列

ΔS＝0



ΔS＝0的棋子數分別為1、3、7、15、31子，

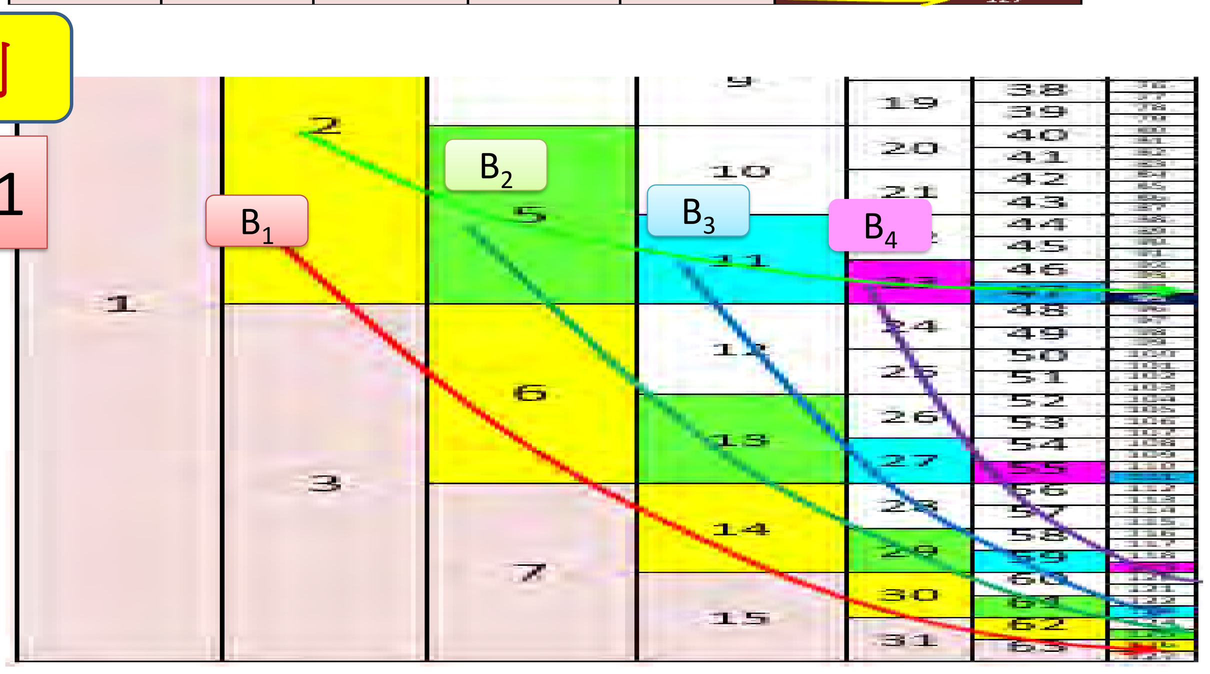
$A_1=1=2-1=2^1-1$ ；　$A_2=3=4-1=2^2-1$ ；　$A_3=7=8-1=2^3-1$ ；　$A_4=15=16-1=2^4-1$ ；

可以發現　$A_k=2^k-1$

結論 ：A系列棋子數的規律為$A_k=2^k-1$ ，ΔS＝0，最少移動步數＝棋子數。

B系列

ΔS＝1



(1)黃底 $B_{1,k}=2\times(2^k-1)=2^{k+1}-2$

(2)綠底 $B_{2,k}=2\times(2^{k+1}-2)+1=2\times2^{k+1}-4+1=2^{k+2}-3$

(3)藍底 $B_{3,k}=2\times(2^{k+2}-3)+1=2\times2^{k+2}-6+1=2^{k+3}-5$

(4)紫底 $B_{4,k}=2\times(2^{k+3}-5)+1=2\times2^{k+3}-5+1=2^{k+4}-9$

將上述公式整理後列出如下：

$B_{1,k}=2^{k+1}-2$　$B_{2,k}=2^{k+2}-3$　$B_{3,k}=2^{k+3}-5$　$B_{4,k}=2^{k+4}-9$

$2^{k+1}-(2^1-0)$　$2^{k+2}-(2^2-1)$　$2^{k+3}-(2^3-3)$　$2^{k+4}-(2^4-7)$

代入

$0=2^0-1$　$1=2^1-1$　$3=2^2-1$　$7=2^3-1$

$B_{1,k}=2^{k+1}-[2^1-(2^0-1)]$；$B_{2,k}=2^{k+2}-[2^2-(2^1-1)]$；$B_{3,k}=2^{k+3}-[2^3-(2^2-1)]$；$B_{4,k}=2^{k+4}-[2^4-(2^3-1)]$；

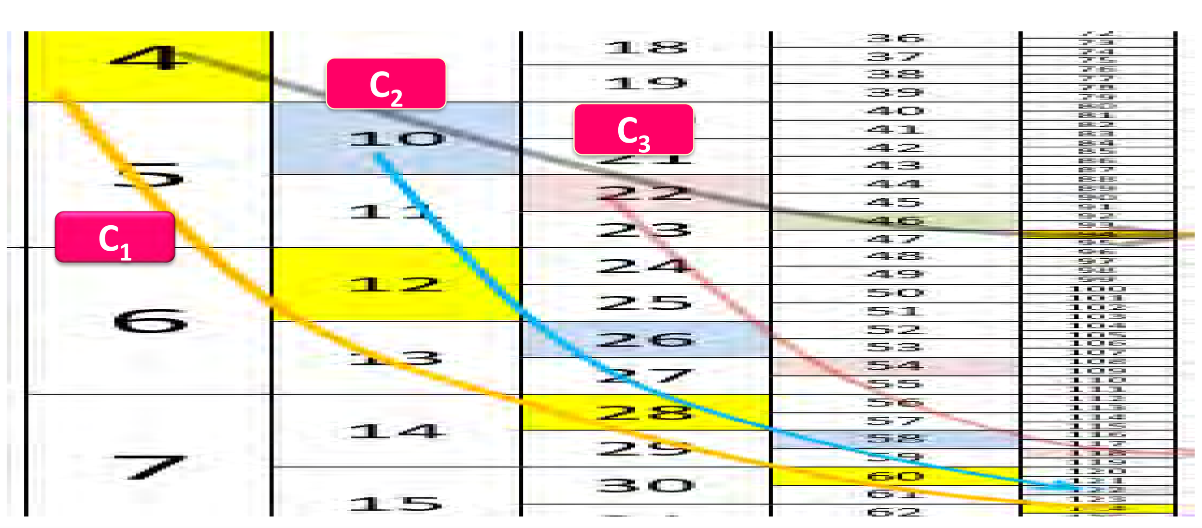
可以發現　$B_{v,k}=2^{k+v}-2^{v-1}-1$

結論：(1) $B_{v,k}=2^{k+v}-2^{v-1}-1$，ΔS＝1，v、k代表第v條線上第k個出現的數字。

(2) 當k=1，$B_{v,1}=2^{v+1}-2^{v-1}-1$ ，為B系列起首數字的規律。

C系列

ΔS＝3



(1)黃色 4、12、28、60

$C_{1,k}=2(2^{k+1}-2)=2^{k+2}-4=2^{k+2}-(2^1+2)$

(2)淺藍 10、26、58

$C_{2,k}=2(2^{k+2}-3)=2^{k+3}-6=2^{k+3}-(2^2+2)$

(3)淺紅 22、54、118

$C_{3,k}=2(2^{k+3}-5)=2^{k+4}-10=2^{k+4}-(2^3+2)$

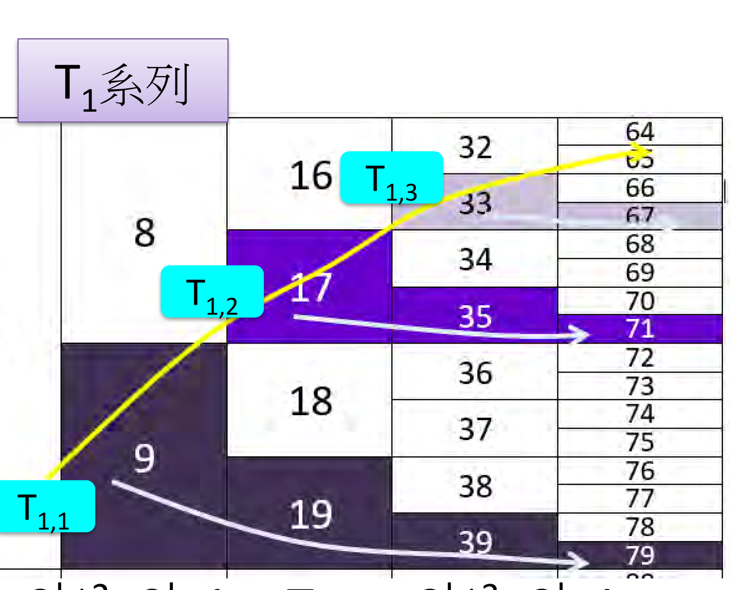
可以發現　$C_{v,k}=2(2^{k+v}-5)=2^{k+(v+1)}-10=2^{k+(v+1)}-(2^v+2)$

結論：(1) $C_{v,k}=2^{k+v+1}-2^v-2$，ΔS＝3， v、k代表第v條線上第k個出現的數字。

(2) 當k=1，C系列起首數字 $C_{v,1}=2^{v+2}-2^v-2$。

T系列

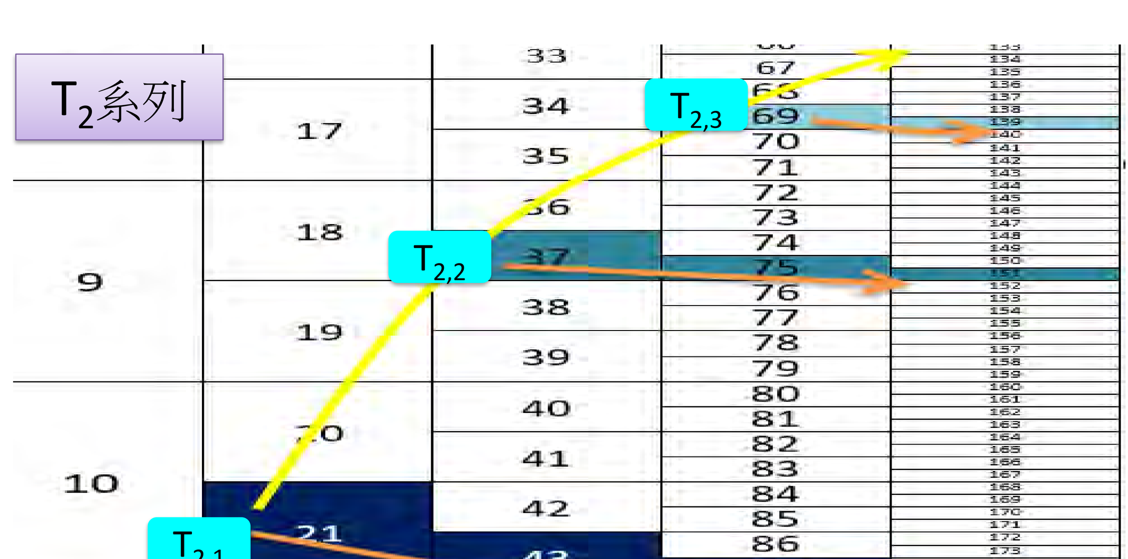
ΔS＝2



$T_{1,1,k}=2^{k+2}+2^k-1$；$T_{1,2,k}=2^{k+3}+2^k-1$

$T_{1,3,k}=2^{k+4}+2^k-1$；

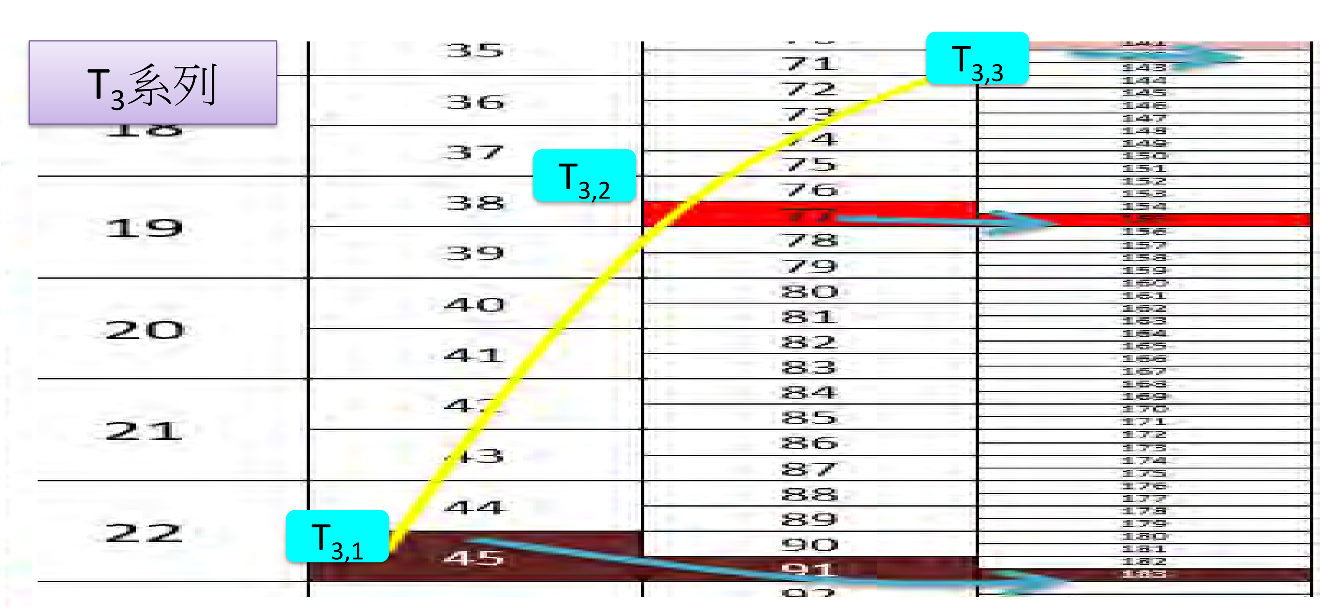
$T_{1,v,k}=2^{k+v+1}+2^k-1$



$T_{2,1,k}=2^{k+3}+2^{k+1}+2^k-1$；$T_{2,2,k}=2^{k+4}+2^{k+1}+2^k-1$

$T_{2,3,k}=2^{k+5}+2^{k+1}+2^k-1$；

$T_{2,v,k}=2^{k+v+2}+2^{k+1}+2^k-1$



$T_{3,1,k}=2^{k+4}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$；$T_{3,2,k}=2^{k+5}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$

$T_{3,3,k}=2^{k+6}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$；

$T_{3,v,k}=2^{k+v+3}+2^{k+2}+2^{k+1}+2^k-1$

結論 ：(1) $T_{a,v,k}=2^{k+v+a}+2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\dots\dots+2^{k+(a-a)}-1$時，ΔS＝2，a、v、k代表第a子系列中第v條線上第k個出現的數字。

(2) 當k=1，$T_{a,v,1}=2^{v+a+1}+2^a+2^{(a-1)}+2^{(a-2)}\dots\dots+2^1-1$ ，為T系列的起首數字。

研究三：在 1xn 的方格棋盤中，滿足遊戲規則下，探討棋子移動的最 少步數之走法分析。

組合走法--由兩個堆集所組成的走法

完美對稱

終點	1	2	3	步數
1	0	1	1	1
1	0	2	0	2
3	0	0	0	3

終點	1-3	4	5-7
3	3 子最少走法	1	3
3	0	4	3 子最少走法
7	0	0	0

終點	1-7	8	9-15	步數
7	7子最少移動走法	1	7子最少移動走法	1-7
15		8		8-10

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17-31	步數
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16	15 走法	15
0	1	1	1	1	1	1	1	8	7子走法							16	0	22
0	1	1	1	4	3子走法			0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	25
0	1	2	0	0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	26
31	1	2	0	4	0			8	0	0	0	0	0	0	0	16	0	31

結論 ：完美對稱行走組合棋子數命名為A_k。$A_{k+1}=A_k+1+A_k$，k ≥1。

完美不對稱

終點	1-7	8	9-11	步數
0	7 子最少移動走法	1	3	1-7
7		1	3 子最少移動走法	8-10
11	4 子經過第四格回到終點	4		11-12

終點	1-15	16	17-23	步數
0	15 子最少移動走法	1	7	1-15
7		1	7 子最少移動走法	16-22
11	8 子經過第 8 格回到終點	8		23-24

結論 ：完美不對稱棋子數命名為$B_{v,1}$。$B_{v,1}=A_k+1+A_{(k-1)}$ ，v≥2，且v=k。

直接組合

子數命名為$B_{1,k}$

位於B系列

終點	1-3	4-6	步數
3	3 子最少移動走法		1-3
3	(停在第 3 格)	3 子最少移動走法	4-6
6			7

ΔS=0　ΔS=0

子數命名為$C_{v,k}$

位於C系列

終點	1-5	6-10	步數
5	5 子最少移動走法		1-6
5	(停在第 5 格)	5 子最少移動走法	7-12
10			13

ΔS=1　ΔS=1

結論 ：直接組合的行走組合 $B_{1,k}=A_k+A_k$ ， k ≥1；$C_{v,k}=2B_{v,k}$， v、k ≥1。

組合變形

13=7+6

終點	1-7				8-13					步數
7	7子最少步數移動走法									7
7	1-5	6	7	8	9	10	11	12	13	7
7	0	0	0	1	1	1	1	1	1	7
7	0	0	0	1	1	4	3子走法			10
7	0	0	0	2	0	4	0	0	0	11
7	0	6	0	0	0	0	0	0	0	13
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14

27=15+12

終點	15										16-27	步數
15	15子走法											15
15	1-11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21-27	15
15	0	0	0	0	0	1	1	1	1	8	7子走法	22
15	0	0	0	0	0	4	3子走法			8	0	25
15	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28

55=31+24

終點	1-31										32-55			步數
31	31子走法													31
	1-23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33-39	40	41-55	31
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	16	15子走法	46
										8	7子走法	16	0	53
														55
														56

出現在$B_{v,k}$，v、K皆≧2。$B_{2,k}=(2^{k+1}-1)+2^1+2^{2+\dots+}2^k$；$B_{3,k}=(2^{k+2}-1)+2^2+2^3+\dots+2^{k+1}$；

$B_{4,k}=(2^{k+3}-1)+2^2+2^3+\dots+2^{k+1}+2^{k+2}$

由$B_{2,k}$~$B_{5,k}$歸納可得　$B_{v,k}=(2^{k+(v-1)}-1)+2^{v-1}+2^v+2^{V+1}\dots+2^{K+(v-2)}$，v、k≧2。

在$B_{2,k}$時，2空格；$B_{3,k}$ 4空格；$B_{4,k}$ 8空格；推算$B_{5,2}$為111=63+48，前面多了16空格。

結論：組合變形的行走組合為 $B_{v,k}=(2^{k+(v-1)}-1)+2^{v-1}+2^v+2^{V+1}\dots+2^{K+(v-2)}$；前方的空格數為$2^{(v-1)}$格。

由三個以上堆集所組成的走法

分散走法

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9	步數
2	2子走法		1	1	1	1	1	1	1	3
2	0	0	1	1	2	0	1	1	1	4
2	0	0	3	1	0	0	1	1	1	5
5	0	0	0	1	0	0	1	1	1	6
5	0	0	0	1	0	0	3	2子走法		9
5	0	0	0	4	0	0	0	0	0	10
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11

終點	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	步數
2	2子走法		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
5	0	0	3	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6
9	0	0	0	4	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	10
9	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	1	0	0	1	1	1	13
9	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	1	0	0	3	0	0	16
9	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19

T_1系列示例

$T_{1,1,1}$ 9=2+3+4；　$T_{1,1,2}$ 19=5+6+8；　$T_{1,1,3}$ 39=11+12+16；

$T_{1,2,1}$ 17=2+3+4+8；　$T_{1,2,2}$2=35=5+6+8+16；　$T_{1,2,3}$ =71=11+12+16+32；

$T_{1,3,1}$ =33=2+3+4+8+16　$T_{1,3,2}$ =67=5+6+8+16+32；　$T_{1,3,3}$ =135=11+12+16+32+64；

T_2、T_3 系列同理，得出以下歸納公式

T_1系列

$T_{1,1,k}=(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}$

$T_{1,2,k}=(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}+2^{k+2}$

$T_{1,3,k}=(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}+2^{k+2}+2^{k+3}$

T2系列

$T_{2,1,k}=(2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+2}$

$T_{2,2,k}=(2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+2}$

$T_{2,3,k}=(2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+2}+2^{k+3}+2^{k+4}$

T3系列

$T_{3,1,k}=(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+3}$

$T_{3,2,k}=(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+3}+2^{k+4}$

$T_{3,3,k}=(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+3}+2^{k+4}+2^{k+5}$

Ta系列

$T_{1,v,k}=(2^k+2^{k-1}-1)+(2^k+2^{k-1})+2^{k+1}+\dots+2^{k+v}$

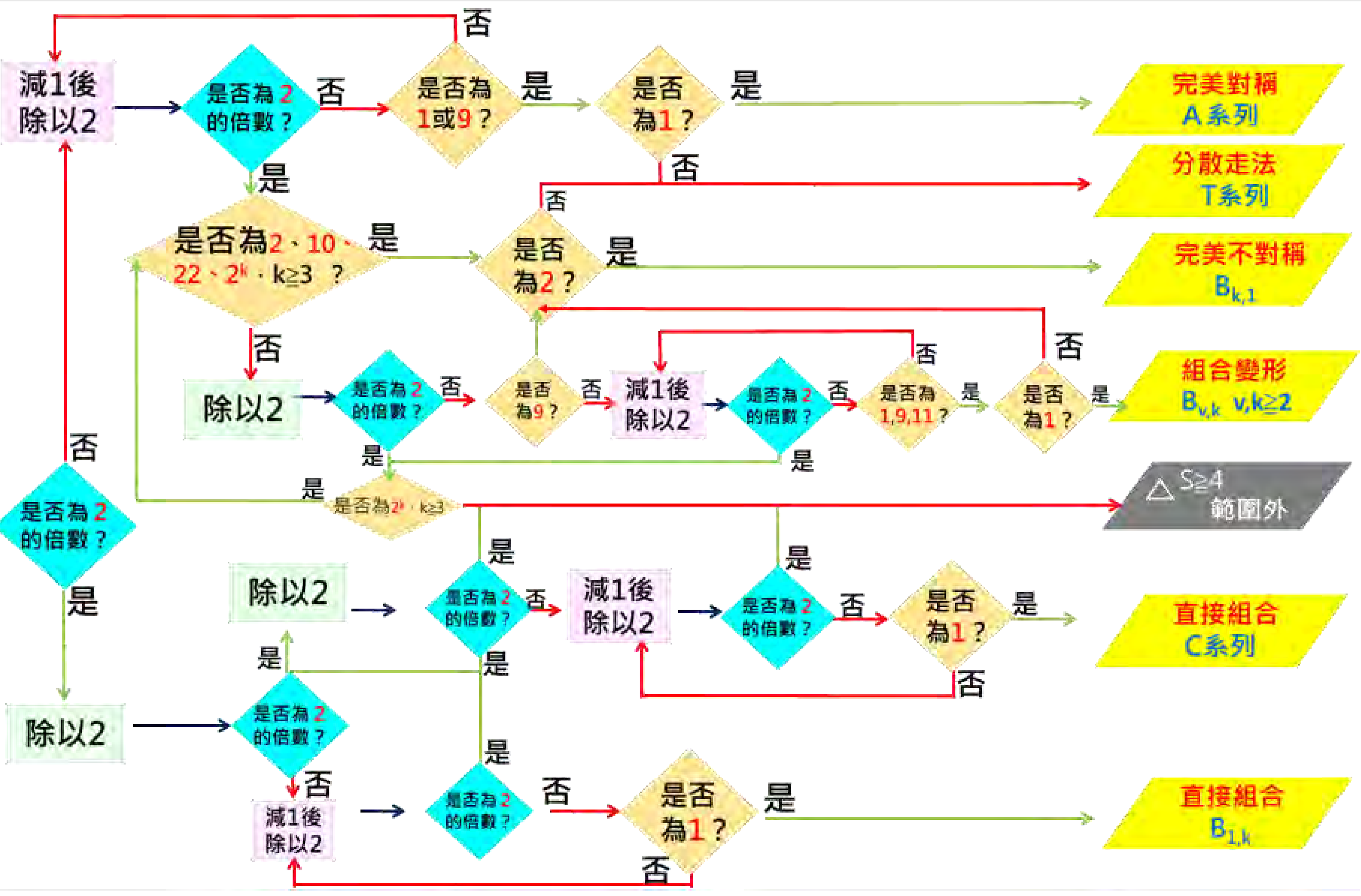
$T_{2,v,k}=(2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+2}\dots+2^{k+(v+1)}$

$T_{3,v,k}=(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+2}+2^{k+1}+2^k+2^{k-1})+2^{k+3}+\dots+2^{k+(v+2)}$

結論：$T_{a,v,k}$：$(2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\dots+2^k+2^{k-1}-1)+(2^{k+(a-1)}+2^{k+(a-2)}+\dots+2^k+2^{k-1})+2^{k+a}+\dots+2^{k+(v+a-1)}$

a、v、k代表在第a個子系列中第v條線第k個出現的數字，第v條線的行走組合可分為(v+2)組。

單向走法之解題流程圖



單向走法之ΔS與走法關係

二、棋子可以向左向右(雙向)移動的探討

研究四：在 1xn的方格棋盤中，滿足遊戲規則下(棋子可向左或向右移動)，探討棋子移動的最少步數與走法分析。

n=1，g_1=1。不需雙向移動。

n=2，g_2=2=1+1。

終點	1	2	步數
0	0	2	1
2	0	2	2

n=3，g_3=3。不需雙向移動。

n=4，g_4=4=1+1+1+1

終點	1	2	3	4	步數
1	0	1	1	1	1
1	0	0	2	1	2
1	0	0	3	0	3
4	0	0	0	0	4

n=5，g_5=5=1+2+1+1

終點	1	2	3	4	5	6	步數
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	2	1	2
1	0	0	2	0	1	1	3
1	0	0	0	0	4	1	4
1	0	0	0	0	5	0	5
6	0	0	0	0	0	0	6

n=6，g_6=6=1+3+1+1

終點	1	2	3	4	5	步數
1	0	1	1	1	1	1
1	0	2	0	1	1	2
1	0	0	0	3	1	3
1	0	0	0	4	0	4
5	0	0	0	0	0	5

n=7，g_7=7。不需雙向移動。

ΔS = 0

棋子數 n	ΔS = 0	行走組合	棋子數 n	ΔS = 0	行走組合
1	1	不需雙向移動	17	17	7+2+1+7
2	2	1+1	18	18	7+3+1+7
3	3	不需雙向移動	19	19	7+4+1+7
4	4	1+1+1+1	20	20	7+5+1+7
5	5	1+2+1+1	21	21	7+6+1+7
6	6	1+3+1+1	22	22	7+7+1+7
7	7	不需雙向移動	23	23	7+8+1+7
8	8	3+1+1+3	24	24	7+9+1+7
9	9	3+2+1+3	25	25	7+10+1+7
10	10	3+3+1+3	26	26	7+11+1+7
11	11	3+4+1+3	27	27	7+12+1+7
12	12	3+5+1+3	28	28	7+13+1+7
13	13	3+6+1+3	29	29	7+14+1+7
14	14	3+7+1+3	30	30	7+15+1+7
15	15	不需雙向移動	31	31	不需雙向移動
16	16	7+1+1+7	32	32	15+1+1+15

結論：在棋子可以向左或向右移動時，棋子數n=棋子移動的最少步數g_n (即ΔS = 0)。
棋子數n的行走組合$(2^{a-1}-1)+b+1+(2^{a-1}-1)$，其中a≧1，b=0,1,2,3,...,$2^a$-1，b代表回頭的棋子數。

陸、討論與結論

一、這次的研究中，嘗試各種走法後，找到不同棋子數移動的最少步數，再**應用這結果去推論更大子數的最少移動步數**。並以直立式樹狀圖的方法將數字排列後，以2為底數改寫，指數的變化有規律，透過觀察歸納，將棋子數以公式表示。

二、在研究過程中，特定的子數有相同的行走組合，可得到相同的最少移動步數。因此，只要能**發現行走組合的類型，就能快速推論出相同行走組合的全部子數**。

三、未來發展方向：

(一) 雖然已經發現了四個不同系統的棋子數在行走步數與組合上的規律，但**ΔS ≥ 4的棋子數仍然無法找到規律。**

(二) 從變形走法中發現，棋子前面的空格數也會影響行走步數，當**棋盤數與棋子數不相等時，最少移動步數的探討。**

柒、參考資料

程崇海。（1987）。**玩石子學數學**。台北市，台北市立師範專科學校。

康軒文教事業（2015）。國小數學課本第 11 冊第 6 單元怎樣解題。新北市，康軒。