

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

080404

考拉茲猜想

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學(附設國小)

作者： 小六 陳佑怡 小六 洪詠筠 小六 陳宥靜	指導老師： 陳品竹
---	------------------

關鍵詞：角谷猜想、考拉茲猜想、 $3n+1$

摘要：

考拉茲猜想是一個橫跨近九十年的數學難題：任何一個自然數，奇數須乘以 3 加 1，偶數須除以 2，依照這個規則不斷重複運算，所有自然數終將變成 1。因為經運算後，偶數將變小，奇數會變大，直觀上奇數會比偶數更不容易收斂到 1。我們發現有許多連續數字會有同步現象，這表示，數對裡的奇數具有和相鄰偶數一樣的考拉茲運算次數，同時，只要我們找到一個符合考拉茲猜想的奇數，就相當於找到了無限多個同樣符合的奇數。

壹、研究動機：

考拉茲猜想有許多共同的名稱，因為有許多數學家作過相同的研究。被稱之為考拉茲猜想是因為在西元 1930 年，德國大學學生考拉茲曾經研究過這個猜想；被稱為角谷猜想則是因為西元 1960 年時日本人角谷靜夫也作過相同的研究。運算規則是：在自然數中，遇到奇數就乘以 3 加 1，遇到偶數就除以 2，依照這個方式不停計算下去，最終都能變成 1。[1]

這個是一個到目前為止都還沒有被完全解決的數學猜想。得知考拉茲猜想後，我們覺得十分神奇，決定作進一步的研究。

我們將 1 到 1000 所有自然數的考拉茲運算過程製表整理，嘗試從中觀察出特別的規律，意外地發現有許多連續數字會在計算到特定步驟時，變成同一個數字，我們稱為同步現象。而且，具有相同性質的同步數對，往往會在一定的間隔數後重複出現。由於連續數字必定是 $(2n, 2n + 1)$ 的形式，我們發現：這些奇數具有和相鄰偶數一樣的考拉茲運算次數，並且只要我們找到一個符合考拉茲猜想的奇數，就同時找到了無限多個同樣符合的奇數。

貳、研究目的：

遵循考拉茲猜想的規則，證明全部或是具有某些特定性質的數字，皆符合考拉茲猜想。我們著重的方向在：找出特定算次之後會變成 2^n 之奇數的一般形式；以及同步數對必然符合考拉茲猜想的可能性。

參、研究設備及器材：

紙筆，電腦，大腦，以及渴望知識與真理的心。

肆、研究過程及方法：

一、推測考拉茲猜想的正確性

首先我們用 Excel 寫出一個簡單的計算程式，測試一下 1~1000 的整數是否皆符合考拉茲猜想，並利用這些數據資料做進一步的分析。

用 Excel 寫出程式碼(程式碼： $=IF(MOD(B2, 2)=0, B2/2, IF(B2=1, 1, 3*B2+1))$)。這個程式可以讓我們更快速的驗證考拉茲猜想。我們不意外地發現，1~1000 的整數皆符合，下圖為我們表格的部分截圖：

算次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	10	2	16	3	22	4	28	5	34	6	40	7	46
2			5	1	8	10	11	2	14	16	17	3	20	22	23
3			16		4	5	34	1	7	8	52	10	10	11	70
4			8		2	16	17		22	4	26	5	5	34	35
5			4		1	8	52		11	2	13	16	16	17	106
6			2			4	26		34	1	40	8	8	52	53
7			1			2	13		17		20	4	4	26	160
8						1	40		52		10	2	2	13	80
9							20		26		5	1	1	40	40
10							10		13		16			20	20
11							5		40		8			10	10
12							16		20		4			5	5
13							8		10		2			16	16
14							4		5		1			8	8
15							2		16					4	4
16							1		8					2	2
17									4					1	1
18									2						
19									1						

每個整數最後收斂到 1 的過程，看似不具有任何規律。我們嘗試觀察並分析每一個整數的收斂過程，希望能找出特定的性質。

首先，我們將奇數乘以 3 加 1 的運算設定為「+」，表示經過運算後數字會變大；將偶數除以 2 設為「-」，表示經過運算後數字會變小，然後將這兩個符號連結到每一筆運算上。接著，我們以「Diff」表示變大與變小次數的差，經過 Excel 計算，發現「-」的次數必定會大於「+」的次數。這符合我們的直覺。

+	0	0	2	0	1	2	5	0	6	1	4	2	2	5	5
-	0	1	5	2	4	6	11	3	13	5	10	7	7	12	12
Diff	0	1	3	2	3	4	6	3	7	4	6	5	5	7	7
Ratio	M	M	2.50	M	4.00	3.00	2.20	M	2.17	5.00	2.50	3.50	3.50	2.40	2.40
算次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
2			-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	-
3			+		-	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+
4			-		-	+	-		+	-	-	-	-	+	-
5			-		-	-	+		-	-	-	+	+	-	+
6			-		-	-	-		+	-	+	-	-	+	-
7			-			-	-		-		-	-	-	-	+
8						-	+		+		-	-	-	-	-
9							-		-		-	-	-	+	-
10							-		-		+			-	-
11							-		+		-			-	-
12							+		-		-			-	-
13							-		-		-			+	+
14							-		-		-			-	-
15							-		+					-	-
16							-		-					-	-
17									-					-	-
18									-						

因為每個奇數乘以 3 加 1 後皆變為偶數，而偶數除以 2 後也有可能依然是偶數。因此我們知道考拉茲運算的過程中，數字變小的次數必定不小於數字變大的次數。當變大和變小次數的差距達到一定程度，所有的數字應該就皆會向收斂的方向前進。在上方的表格中，我們將「-」的次數除以「+」的次數，記錄為「Ratio」。2ⁿ因為只會變小，Ratio 分母為 0，我們記錄為 M。我們將 1~1000 的考拉茲運算中，數字的最大與最小 Ratio 做了整理如下：

數字	Ratio	數字	Ratio
27	1.7073	80	8
871	1.7077	84	8
31	1.718	85	8
41	1.725	160	9
54	1.7317	168	9
55	1.7317	170	9
47	1.7368	320	10
73	1.7381	336	10
703	1.7419	340	10
62	1.7436	341	10
63	1.7436	640	11
97	1.7442	672	11
937	1.746	680	11
		682	11

算出來最小的結果是 1.71，最大的結果則是 11。這表示 1~1000 的數字經過考拉茲運算，變小的次數至少是變大次數的 1.71 倍，最高則甚至達到 11 倍。然而，具備最大或最小 Ratio 的數字之間，看起來並沒有明顯的關連。

我們試著用數學算式來表達 Ratio 的意義。上面的現象告訴我們，一個數字每「+」一次，就會「-」至少 1.71 次。進行這樣的循環一次，一個數字會變成：

$$\left(\frac{3x+1}{2^{1.71}}\right) \quad \leftarrow \text{這表示} x \text{是先「+」再「-」}$$

或者

$$\left(3 * \frac{x}{2^{1.71}} + 1\right) \quad \leftarrow \text{這表示} x \text{是先「-」再「+」}$$

因為 $2^{1.71} = 3.271608 > 3$ ，假如上述的循環各進行多次，數值皆必將變小收斂。雖然這並不是精確的算式，只是一個近似值，透過這樣的描述，我們可以猜測：假如考拉茲猜想是正確的，那麼任何一個數字的考拉茲運算過程中，「-」的次數除以「+」的次數應該不可以小於 $\log_2 3 = 1.584963$ 。這樣會使得每一循環運算後得到的數字，都比運算前的數字來得小；隨著運算次數增加，就會愈來愈靠近 1。

二、直觀上符合考拉茲猜想的數字

(一) 2^n 必然符合考拉茲猜想，因為在計算至 1 之前，永遠是偶數。

(二) 假設有一個奇數，在經過一次乘以 3 加 1 的考拉茲運算之後變成 2^n ，這個數字也是必然符合。我們先嘗試用不同的方法，歸納出這個數字的型態，然後決定哪一種方法適合我們去驗證其他數字。

1. 二進位法

(1) 2^n 的二進位表示法是 1 後面有 n 個 0。除以 2 就少一個 0。因此經過 n 次考拉茲運算之後會變成 1。

(2) 我們觀察到，如果一個數字 x 的二進位形式為 101010...101 (必是奇位數，例如 p 位)，則

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 11*101010...101+1 \\ &= 101010...1010+101010...101+1 \\ &= 1111111...111+1=1000000...000 \text{ (} p+2 \text{ 位數，也就是 } p+1 \text{ 個 0)} = 2^{p+1} \end{aligned}$$

所得值的二進位形式必是 1 的後面有偶數個 0，也就是十進位形式的 2 的偶數次方。

2. 數學歸納法

假如 $3x + 1 = 2^n$ ，那麼 $x = \frac{2^n - 1}{3}$ 。

但是並非所有的 n 都符合，因為 x 必須是整數。由於 x 的二進位形式為 101010...101，由上面的結論，我們猜測當 $n = 2m$ 時，經運算可得整數 x ，這樣就得到了這種奇數的一般型態。

假如 $n = 2m$ ，則 $x = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \frac{(2^m + 1)(2^m - 1)}{3}$ 。因為 $(2^m + 1)(2^m - 1)$ 是連續奇數，而連續奇數必然有其中一個是 3 的倍數，因此 $(2^m + 1)(2^m - 1)$ 可以被 3 整除，所得的 x 確實是整數。

我們也可以進一步以數學歸納法確認：

當 $m = 1$ 時， $x = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \frac{2^2 - 1}{3} = 1$ ，整數的假設成立。

假設當 $m = k$ 時亦成立，即 $x = \frac{2^{2k} - 1}{3}$ 為整數。那麼當 $m = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned} x &= \frac{2^{2(k+1)} - 1}{3} \\ &= \frac{4 * 2^{2k} - 1}{3} \\ &= \frac{3 * 2^{2k} + 2^{2k} - 1}{3} \end{aligned}$$

$$= 2^{2k} + \frac{2^{2k} - 1}{3} = 2^{2k} + x$$

所得也是整數，因此所有的 $x = \frac{2^{2m}-1}{3}$ 均為整數，得證。而這個數就是符合考拉茲猜想的奇數。利用幾何級數展開，我們也可以將 x 的形式改寫如下：

$$x = \frac{2^{2m}-1}{3}$$

$$= \frac{(2^2-1)*(1+2^2+2^4+2^6+\dots+2^{2(m-1)})}{3}$$

$$x = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2(m-1)}$$

符合上述情況的自然數包括 5, 21, 85, ...等。

(三) 依據上面的方法，我們試著找出經過三次考拉茲運算之後變成 2^n 的奇數形式，這三次運算過程為：奇數→偶數→奇數→ 2^n 。

x	奇	
$3x + 1$	偶	+
$\frac{3x + 1}{2}$	奇	-
2^n	偶	+

我們由(二)得知， $\frac{3x+1}{2}$ 的二進位形式應是 101010...101，那麼繼續整理下去可得

$$3x + 1 = 101010 \dots 101\underline{0}$$

$$3x = 101010 \dots 101010\underline{1001}$$

因為這個數必須是 3 的倍數，我們須檢驗其二進位形式的規律性。其中末四位數 1001 是 9 的二進位形式，這已經是 3 的倍數，所以我們必須檢驗的是前面的位數。

$$101001 = 32 + 9 = 41 \quad \rightarrow \text{不符合}$$

$$10101001 = 128 + 32 + 9 = 169 \quad \rightarrow \text{不符合}$$

$$1010101001 = 512 + 128 + 32 + 9 = 681 \quad \rightarrow \text{符合}$$

也就是說，101010 是最小的 3 的倍數，換算回十進位是 42。根據這些規律，我們可以整理出 x 的十進位形式如下：

$$3x = \underline{101010101010} \dots \underline{1010101001}$$

$$=9 + 42 * 2^4 + 42 * 2^{10} + 42 * 2^{16} + \dots$$

$$=9 + 42 * 2^4 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$$

$$x = 3 + 14 * 2^4 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$$

符合上述情況的自然數包括 3,227,14563, …等。

(四) 同樣地，我們試著找出經過四次考拉茲運算之後變成 2^n 的奇數形式，這四次運算過程為：奇數→偶數→偶數→奇數→ 2^n 。

x	奇	
$3x + 1$	偶	+
$\frac{3x + 1}{2}$	偶	-
$\frac{3x + 1}{4}$	奇	-
2^n	偶	+

我們由(二)得知， $\frac{3x+1}{4}$ 的二進位形式應是 101010...101，那麼繼續整理下去可得

$$3x + 1 = 101010 \dots 101\underline{00}$$

$$3x = 101010 \dots 101010\underline{011}$$

由(三)得知 101010 是最小的 3 的倍數，也就是十進位的 42。因此我們可以整理出 x 的十進位形式如下：

$$3x = \underline{101010101010} \dots \underline{101010001}$$

$$=3 + 42 * 2^3 + 42 * 2^9 + 42 * 2^{15} + \dots$$

$$=3 + 42 * 2^3 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$$

$$x = 1 + 14 * 2^3 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$$

符合上述情況的自然數包括 113, 7169, 458753, …等。

(五) 我們每找到一個符合考拉茲猜想的數字，就等同於找到無限多個；因為只要我們將這個數字乘以 2 的任何正整數次方，都必定符合考拉茲猜想。

(六) 2^n 出於直觀，而特定算次後變成 2^n 的奇數則是特別的例子，我們所使用的方法雖然能找出這些數字的一般式，但具有這種特性的數字只是全部自然數的一小部分。我們希望可以驗證更多數字，於是決定換一個方法，重新觀察 1~1000 的考拉茲計算過程。

三、兩個連續整數的同步現象

我們觀察後製作出從 1 到 1000 的考拉茲計算表。我們發現一個有趣的現象。

- (一) 某些連續成對的數字，會在進行相同次數的運算之後，變成同一個數字，然後同步收斂到 1。
- (二) 這些成對的數字組，（幾乎）都是偶數然後奇數($2n, 2n + 1$)，鮮少有奇數然後偶數($2n + 1, 2n + 2$)的狀況。
- (三) 成對同步的數字組具有週期性，會在相同的間隔之後，重複出現成對同步的現象。這讓我們好奇其中的數學規律是什麼，以及從中是否可以找出某些必然符合考拉茲猜想的數字性質。

例如，連續數字若從第 3 列開始同步，到下一組數的間隔會是 6 欄。從不同的計算列開始同步的數字，間距也隨之不同，但往往是固定數字。我們找到最小的一組是 4 乘以 3 和 4 乘以 3 加 1，依照我們的這個算法，下一組就是 4 乘以 5 和 4 乘以 5 加 1，以此類推。

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
6	40	7	46	8	52	9	58	10	64
3	20	22	23	4	26	28	29	5	32
10	10	11	70	2	13	14	88	16	16
5	5	34	35	1	40	7	44	8	8
16	16	17	106		20	22	22	4	4
8	8	52	53		10	11	11	2	2
4	4	26	160		5	34	34	1	1
2	2	13	80		16	17	17		
1	1	40	40		8	52	52		

若從第 3 列開始同步的連續數字，連續數字會先偶數再奇數。假設連續數字中的偶數為 x ，奇數為 $x + 1$ 。這組數對的考拉茲運算過程，偶數必然是依序「-」、「-」、「+」，而奇數必然是依序「+」、「-」、「-」。 x 和 $x + 1$ 經過三次考拉茲運算後，會在第 3 列都變成 $\frac{3}{4}x + 1$ ，然後同步朝著收斂的方向至 1。由於 $\frac{x}{4}$ 必須是整數，而且 x 會在連續兩次除以 2 之後變成奇數，我們歸納出 x 的形式應為 4 乘以任意奇數；亦即這組數對的形式為 $(4k, 4k + 1)$ ，其中 k 為奇數。

	x	$x + 1$	
—	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
—	$\frac{x}{4}$	$\frac{3}{2}x + 2$	—

+	$\frac{3}{4}x + 1$	$\frac{3}{4}x + 1$	-
---	--------------------	--------------------	---

假設 $x = 4 * (2n + 1)$ ，則 x 和 $x + 1$ 在運算過程中的奇偶變化整理如下：

偶	$8n + 4$	$8n + 5$	奇
偶	$4n + 2$	$24n + 16$	偶
奇	$2n + 1$	$12n + 8$	偶
偶	$6n + 4$	$6n + 4$	偶

從第 5 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 18，之後的 x 會等於 16 的倍數加上 18。

	x	$x + 1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-
-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
-	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
+	$\frac{9}{8}x + \frac{7}{4}$	$\frac{9}{8}x + \frac{7}{4}$	-

由於 x 在第二步時變成奇數，我們先假設 $x = 2 * (2n + 1)$ ，來觀察看看 n 具有什麼性質。

偶	$4n + 2$	$4n + 3$	奇
奇	$2n + 1$	$12n + 10$	偶
偶	$6n + 4$	$6n + 5$	奇
偶	$3n + 2$	$18n + 16$	偶
奇	$\frac{3}{2}n + 1$	$9n + 8$	偶
偶	$\frac{9}{2}n + 4$	$\frac{9}{2}n + 4$	偶

在上表中，我們觀察到兩個現象：

1. 如果要滿足 $\frac{3}{2}n + 1$ 等於奇數，那麼 n 必須是 4 的倍數。寫成 $n = 4q$ 則初始數字 $4n + 2$ 應該等於 $16q + 2$ 。這就說明了為什麼這類型的數對是每隔 16 重複一次。

2. 第 5 列同步的數對，會在第 2 列變成連續數對 $(6n + 4, 6n + 5)$ ，這組數對將會在之後的第 3 列開始同步。也就是說，新的連續數對是一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對，其中 k 是奇數。

也可以用純代數的方法來驗證上面的觀察。我們將連續數對裡偶數的考拉茲運算整理出來，其中的奇數分別設為 l 和 k 。

偶	$x = 2l$
奇	l
偶	$3l + 1 = 2^2k$
偶	$2k$
奇	k
偶	$3k + 1$

將 l 往後運算，並將 k 往前逆推，會在之間的偶數形成恆等式。

$$3l + 1 = 2^2k$$

$$\rightarrow l = \frac{2^2k-1}{3}$$

$$\rightarrow x = 2l = \frac{2^3k-2}{3}$$

我們可以由上述的條件，推導出 $k = 6q + 1$ ，同樣可以得到 $x = 16q + 2$ 。

從第 7 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 22，之後的 x 會等於 32 的倍數加上 22。

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-
-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
+	$\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
-	$\frac{9}{8}x + \frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}x + \frac{23}{2}$	+
-	$\frac{9}{16}x + \frac{5}{8}$	$\frac{27}{8}x + \frac{23}{4}$	-
+	$\frac{27}{16}x + \frac{23}{8}$	$\frac{27}{16}x + \frac{23}{8}$	-

由於 x 在第二步時變成奇數，我們同樣先假設 $x = 2 * (2n + 1)$ ，來觀察看看 n 具有什麼性質。

偶	$4n + 2$	$4n + 3$	奇
奇	$2n + 1$	$12n + 10$	偶
偶	$6n + 4$	$6n + 5$	奇
奇	$3n + 2$	$18n + 16$	偶
偶	$9n + 7$	$9n + 8$	奇
偶	$\frac{9}{2}n + \frac{7}{2}$	$27n + 25$	偶
奇	$\frac{9}{4}n + \frac{7}{4}$	$\frac{27}{2}n + \frac{25}{2}$	奇
偶	$\frac{27}{4}n + \frac{25}{4}$	$\frac{27}{4}n + \frac{25}{4}$	偶

在上表中，我們觀察到兩個現象：

1. 如果要滿足 $\frac{9}{4}n + \frac{7}{4}$ 等於奇數，那麼

$$\frac{9}{4}n + \frac{7}{4} = 2p + 1 \rightarrow 9n + 7 = 8p + 4 \rightarrow 9n + 3 = 8p$$

這裡 $9n + 3$ 必須是 8 的倍數，滿足這個條件最小的 n 是 5，之後 $n=5+8q$ 。 q 每增加 1， n 就增加 8， $4n + 2$ 就增加了 32。這就說明了為什麼這類型的數對是每隔 32 重複一次。

2. 第 7 列同步的數對，會在第 4 列變成連續數對 $(9n + 7, 9n + 8)$ ，這組數對將會在之後的第 3 列開始同步。也就是說，新的連續數對是一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對，其中 k 是奇數。

從第 9 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 14，之後的 x 會等於 64 的倍數加上 14。如果 $x = 4n + 2$ ，那麼 $n=3+16q$ 。

	x	$x + 1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-
-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
+	$\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
-	$\frac{9}{8}x + \frac{5}{4}$	$\frac{27}{4}x + \frac{23}{2}$	+

+	$\frac{27}{8}x + \frac{19}{4}$	$\frac{27}{8}x + \frac{23}{4}$	-
-	$\frac{27}{16}x + \frac{19}{8}$	$\frac{81}{8}x + \frac{73}{4}$	+
-	$\frac{27}{32}x + \frac{19}{16}$	$\frac{81}{16}x + \frac{73}{8}$	-
+	$\frac{81}{32}x + \frac{73}{16}$	$\frac{81}{32}x + \frac{73}{16}$	-

從第 11 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 94，之後的 x 會等於 128 的倍數加上 94。如果 $x = 4n + 2$ ，那麼 $n=23+32q$

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-
-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
+	$\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
-	$\frac{9}{8}x + \frac{5}{4}$	$\frac{27}{4}x + \frac{23}{2}$	+
+	$\frac{27}{8}x + \frac{19}{4}$	$\frac{27}{8}x + \frac{23}{4}$	-
-	$\frac{27}{16}x + \frac{19}{8}$	$\frac{81}{8}x + \frac{73}{4}$	+
+	$\frac{81}{16}x + \frac{65}{8}$	$\frac{81}{16}x + \frac{73}{8}$	-
-	$\frac{81}{32}x + \frac{65}{16}$	$\frac{243}{16}x + \frac{227}{8}$	+
-	$\frac{81}{32}x + \frac{65}{16}$	$\frac{243}{32}x + \frac{227}{16}$	-
+	$\frac{243}{64}x + \frac{227}{32}$	$\frac{243}{64}x + \frac{227}{32}$	-

從第 13 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 62，之後的 x 會等於 256 的倍數

加上 62。如果 $x = 4n + 2$ ，那麼 $n=15+64q$

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}x + 2$	-
-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
+	$\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
-	$\frac{9}{8}x + \frac{5}{4}$	$\frac{27}{4}x + \frac{23}{2}$	+
+	$\frac{27}{8}x + \frac{19}{4}$	$\frac{27}{8}x + \frac{23}{4}$	-
-	$\frac{27}{16}x + \frac{19}{8}$	$\frac{81}{8}x + \frac{73}{4}$	+
+	$\frac{81}{16}x + \frac{65}{8}$	$\frac{81}{16}x + \frac{73}{8}$	-
-	$\frac{81}{32}x + \frac{65}{16}$	$\frac{243}{16}x + \frac{227}{8}$	+
+	$\frac{243}{32}x + \frac{211}{16}$	$\frac{243}{32}x + \frac{227}{16}$	-
-	$\frac{243}{64}x + \frac{211}{32}$	$\frac{729}{32}x + \frac{697}{16}$	+
-	$\frac{243}{128}x + \frac{211}{64}$	$\frac{729}{64}x + \frac{697}{32}$	-
+	$\frac{729}{128}x + \frac{697}{64}$	$\frac{729}{128}x + \frac{697}{64}$	-

從第 15 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 382，之後的 x 會等於 512 的倍數加上。如果 $x = 4n + 2$ ，那麼 $n=95+128q$

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-

-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
+	$\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
-	$\frac{9}{8}x + \frac{5}{4}$	$\frac{27}{4}x + \frac{23}{2}$	+
+	$\frac{27}{8}x + \frac{19}{4}$	$\frac{27}{8}x + \frac{23}{4}$	-
-	$\frac{27}{16}x + \frac{19}{8}$	$\frac{81}{8}x + \frac{73}{4}$	+
+	$\frac{81}{16}x + \frac{65}{8}$	$\frac{81}{16}x + \frac{73}{8}$	-
-	$\frac{81}{32}x + \frac{65}{16}$	$\frac{243}{16}x + \frac{227}{8}$	+
+	$\frac{243}{32}x + \frac{211}{16}$	$\frac{243}{32}x + \frac{227}{16}$	-
-	$\frac{243}{64}x + \frac{211}{32}$	$\frac{729}{32}x + \frac{697}{16}$	+
+	$\frac{729}{64}x + \frac{665}{32}$	$\frac{729}{64}x + \frac{697}{32}$	-
-	$\frac{729}{128}x + \frac{665}{64}$	$\frac{2187}{64}x + \frac{2123}{32}$	+
+	$\frac{2187}{128}x + \frac{2059}{64}$	$\frac{2187}{128}x + \frac{2123}{64}$	-
-	$\frac{2187}{256}x + \frac{2059}{128}$	$\frac{6561}{128}x + \frac{6433}{64}$	+
-	$\frac{2187}{512}x + \frac{2059}{256}$	$\frac{6561}{256}x + \frac{6433}{128}$	-
+	$\frac{6561}{512}x + \frac{6433}{256}$	$\frac{6561}{512}x + \frac{6433}{256}$	-

從第 17 列開始同步的連續數字：我們發現的第 1 個 x 是 254，之後的 x 會等於 1024 的倍數加上 254。如果 $x = 4n + 2$ ，那麼 $n = 63 + 256q$

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-

-	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}x + 7$	+
+	$\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}x + \frac{7}{2}$	-
-	$\frac{9}{8}x + \frac{5}{4}$	$\frac{27}{4}x + \frac{23}{2}$	+
+	$\frac{27}{8}x + \frac{19}{4}$	$\frac{27}{8}x + \frac{23}{4}$	-
-	$\frac{27}{16}x + \frac{19}{8}$	$\frac{81}{8}x + \frac{73}{4}$	+
+	$\frac{81}{16}x + \frac{65}{8}$	$\frac{81}{16}x + \frac{73}{8}$	-
-	$\frac{81}{32}x + \frac{65}{16}$	$\frac{243}{16}x + \frac{227}{8}$	+
+	$\frac{243}{32}x + \frac{211}{16}$	$\frac{243}{32}x + \frac{227}{16}$	-
-	$\frac{243}{64}x + \frac{211}{32}$	$\frac{729}{32}x + \frac{697}{16}$	+
+	$\frac{729}{64}x + \frac{665}{32}$	$\frac{729}{64}x + \frac{697}{32}$	-
-	$\frac{729}{128}x + \frac{665}{64}$	$\frac{2187}{64}x + \frac{2123}{32}$	+
+	$\frac{2187}{128}x + \frac{2059}{64}$	$\frac{2187}{128}x + \frac{2123}{64}$	-
-	$\frac{2187}{256}x + \frac{2059}{128}$	$\frac{6561}{128}x + \frac{6433}{64}$	+
-	$\frac{2187}{512}x + \frac{2059}{256}$	$\frac{6561}{256}x + \frac{6433}{128}$	-
+	$\frac{6561}{512}x + \frac{6433}{256}$	$\frac{6561}{512}x + \frac{6433}{256}$	-

觀察上列各表格，我們整理出來的發現如下：

第 5 列開始同步的數對，會在第 2 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 16 個數字重複一次。

第 7 列開始同步的數對，會在第 4 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 32 個數字重複一次。

第 9 列開始同步的數對，會在第 6 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 64 個數字重複一次。

第 11 列開始同步的數對，會在第 8 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 128 個數字重複一次。

第 13 列開始同步的數對，會在第 10 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 256 個數字重複一次。

第 15 列開始同步的數對，會在第 12 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 512 個數字重複一次。

第 17 列開始同步的數對，會在第 14 列變成一組 $(4k, 4k + 1)$ 的數對， k 為奇數；
這個類型的數對每 1024 個數字重複一次。

我們也進一步發現，這些數對其實每隔兩列二列就會變成一組新的連續數對。也就是說，
一組 $(2n, 2n + 1)$ 的連續數對(其中 n 為奇數)，經過兩次考拉茲運算，就會成為新的一組連續
數對；而新數對中的偶數將會決定接下來是否會發生同步。如果每次獲得的新數對，其偶數
的形式都是 2^p * 奇數，則這樣的步驟將繼續重複，直到偶數變成 4^p * 奇數；如果新數對的偶數為
 2^p * 奇數，其中 $p \geq 3$ ，則不會產生同步。

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-

(四) 我們將上列 1~1000 數字中所發現的連續整數的同步情況，彙整成下表：

同步算次	同步公式	重複間隔	同步時的數字變化
3	$\frac{3}{4}x + 1$	8	變小
5	$\frac{9}{8}x + \frac{7}{4}$	16	變大
7	$\frac{27}{16}x + \frac{23}{8}$	32	變大
9	$\frac{81}{32}x + \frac{73}{16}$	64	變大
11	$\frac{243}{64}x + \frac{227}{32}$	128	變大
13	$\frac{729}{128}x + \frac{697}{64}$	256	變大
17	$\frac{6561}{512}x + \frac{6433}{256}$	1024	變大

由上面這張表，我們歸納出幾個重要的發現：

1. 從第 3 列開始同步的數對，在同步時變成了一個比原來還要小的偶數，而這個偶數接下來將除以 2，直到變成一個更小的奇數。依據九章數學網站討論區關於角谷猜想的討論，若能證明任何一個奇數經角谷運算後只要能找到一個比自己小的奇數，這個奇數必然符合

猜想[2]。假如這個論點是正確的，那麼所有在第 3 列同步的數對，也就是形式為 $(4k, 4k + 1)$ ，其中 k 為奇數的數對，都將符合此猜想。

- 第 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 列開始同步的數對，雖然在同步的階段成為比原來更大的數字，但最終必會回歸 $(4k, 4k + 1)$ ，其中 k 為奇數的形式。假如 $(4k, 4k + 1)$ 符合，則這些數對也一定符合。
- 假如第 1, 2 點的論述正確，我們等於證明了有將近一半的正整數都符合考拉茲猜想，因為第 3 列開始同步的 $(4k, 4k + 1)$ 這個數對的集合，就涵蓋了 $\frac{1}{4}$ 的正整數；第 5 列開始同步的數對涵蓋了 $\frac{1}{8}$ ，以此類推。因此第 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 列開始同步的數對總共涵蓋了

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}\right) * Total = \frac{255}{512} * Total。$$

- 若已知一個奇數 k 符合猜想，那麼另一個奇數 $4k + 1$ 也必然符合。這是因為偶數 $4k$ 在經過兩次運算之後變成 k ，所以符合猜想；又由於 $(4k, 4k + 1)$ 有同步現象，因此 $4k + 1$ 也會符合猜想。我們整理出 < 100 的奇數，藉由這個方法，扣除重複的數字，利用 49 個奇數，我們可以找出其他符合猜想的 68 個奇數(68 組數對)。

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	
12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	
13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93	101	
52	84	116	148	180	212	244	276	308	340	372	404	
53	85	117	149	181	213	245	277	309	341	373	405	
212	340	468	596	724	852	980						
213	341	469	597	725	853	981						
852												
853												
27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	
108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	
109	117	125	133	141	149	157	165	173	181	189	197	
436	468	500	532	564	596	628	660	692	724	756	788	
437	469	501	533	565	597	629	661	693	725	757	789	
51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	
204	212	220	228	236	244	252	260	268	276	284	292	
205	213	221	229	237	245	253	261	269	277	285	293	
820	852	884	916	948	980							
821	853	885	917	949	981							
75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
300	308	316	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
301	309	317	325	333	341	349	357	365	373	381	389	397

- 上述數對乘以 2^n 所得到的新數字，同樣符合考拉茲猜想，並且會在增加 n 個算次之後開始同步。這就是為什麼有些非連續數字會同步的原因；它們其實是連續數字的 2^n 倍所形成的新數對。

伍、研究結果：

一、依據我們所作的研究，將 1~1000 中依循我們所找出的各種規律而符合考拉茲猜想的整數整理如下；其中有遇到重複的數字，就以橫線槓去：

規則	一般式	數字
2^n	2^n	2,4,8,16,32,64,128,256,512
一步到 2^n	$\frac{2^{2m} - 1}{3}$	5,21,85,341
三步到 2^n	$3 + 14 * 2^4 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$	3, 227
四步到 2^n	$1 + 14 * 2^3 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$	113
第 3 列同步 奇數	$4k + 1$	13, 21 ,29,37,45,53,61,69,77, 85 ,93, 101,109,117,125,133,141,149,157, 165,173,181,189,197,205,213,221, 229,237,245,253,261,269,277,285, 293,301,309,317,325,333, 341 ,349, 357,365,373,381,389,397,405,413, 421,429,437,445,453,461,469,477, 485,493,501,509,517,525,533,541, 549,557,565,573,581,589,597,605, 613,621,629,637,645,653,661,669, 677,685,693,701,709,717,725,733, 741,749,757,765,773,781,789,797, 805,813,821,829,837,845,853,861, 869,877,885,893,901,909,917,925, 933,941,949,957,965,973,981,989, 997.
第 5 列同步 奇數	$16q + 3$	19,35,51,67,83,99,115,131,147,163, 179,195,211, 227 ,243,259,275,291, 307,323,339,355,371,387,403,419, 435,451,467,483,499,515,531,547, 563,579,595,611,627,643,659.

第 7 列同步 奇數	$32q + 23$	23,55,87,119,151,183,215,247,279, 311,343,375,407,439.
第 9 列同步奇數	$64q + 15$	15,79,143,207,271.
第 11 列同步奇數	$128q + 95$	95
第 13 列同步奇數	$256q + 63$	63
第 15 列同步奇數	$512q + 383$	-
第 17 列同步奇數	$1024q + 255$	-

上表的歸納方式整理如下：

- (一) 在第 3 列同步的欄位中，以粗體標註的 $4k + 1$ 數字，表示所用的奇數 n 是透過實際計算確認會收斂到 1 的數字，並非經由同步延伸得來。我們所使用的、以計算而非以同步延伸所得的奇數 k 如下：
- 7,9,11,13,15,17,19,23,25,27,31,33,35,39,41,43,47,49,51,55,57,59,63,65,67,71,73,75,79,
81,83,87,89,91,95,97,99,103,105,107,111,115,119,121,123,127,129,131,135,137,139,
143,145,147,151,153,155,159,161,163,167,169,171,175,177,179,183,185,187,191,193,
195,199,201, 203,207,209,211,215,217,219,223,225,231,233,235,239,241,243,247,249.
- (二) 第 5,7,9,11,13,15,17 列同步的欄位中，只有當其運算所得出的 $(4k, 4k + 1)$ 數對小於 1000 時，才會列出計數；並以粗體標註與實際計算所得奇數相同的數字，這部分不列為發現。
- (三) 如果 $4k + 1$ 收斂，那麼 $4k$ 也必然收斂，同時 $k * 2^m$ 也都將符合。在這張表中我們專注於分析奇數的狀況，並不列出偶數。

二、我們將 1~1000 的所有整數製表，並將符合發現的數字剔除，整理出表格如下圖。

- (一) 在 500 個奇數中，透過計算確認的奇數有 91 個，我們以規則得到的奇數有 160 個。
- (二) 在 500 個偶數中，扣除未證明奇數的 2^m 倍之後所得的其他偶數，就都是符合猜想的偶數，其中包括了滿足 2^n 規則的 9 個數字。這些偶數共有 429 個。
- (三) 綜合上面兩點，從 91 個計算確認的奇數出發，以我們所發現的規則作延伸，共解決了 1~1000 之中 589 個數字。

1					7		9		11		13		15		17		19	
		23		25		27			31		33		35				39	
41		43				47		49		51			55		57		59	
		63		65		67			71		73		75				79	
81		83				87		89		91			95		97		99	
		103		105		107			111				115				119	
121		123				127		129		131			135		137		139	
		143		145		147			151		153		155				159	
161		163				167		169		171			175		177		179	
		183		185		187			191		193		195				199	
201		203				207		209		211			215		217		219	
		223		225					231		233		235				239	
241		243				247		249		251			255		257			
		263		265		267					273							
281		283				287		289					295		297		299	
		303		305							313		315				319	
321						327		329		331			335		337			
				345		347				351		353					359	
361		363				367		369							377		379	
		383		385						391		393		395			399	
401								409		411			415		417			
		423		425		427				431		433						
441		443				447		449					455		457		459	
		463		465						471		473		475			479	
481						487		489		491			495		497			
	502	503		505		507			510	511		513	514				519	
521		523			526	527		529	530				534	535		537		539
		543		545	546					551		553		555				559
561	562				566	567		569		571			574	575		577	578	
		583		585		587			590	591		593	594				598	599
601		603			606	607		609	610					615		617		619
		623		625	626					630	631		633		635		638	639
641	642					647		649		651			654	655		657	658	
	662	663		665		667			670	671		673	674	675				679
681		683				687		689	690	691			694	695		697		699
	702	703		705	706	707				711		713		715			718	719
721	722	723			726	727		729		731			734	735		737	738	739
		743		745		747				751		753	754	755			758	759
761		763			766	767		769	770	771				775		777		779
	782	783		785	786	787			790	791		793		795			798	799
801	802	803				807		809		811				815		817	818	819
	822	823		825		827			830	831		833	834	835				839
841		843			846	847		849	850	851			854	855		857		859
	862	863		865	866	867				871		873		875				879
881	882	883			886	887		889		891			894	895		897	898	899
		903		905		907			910	911		913	914	915			918	919
921		923			926	927		929	930	931				935		937		939
	942	943		945	946	947			950	951		953		955			958	959
961	962	963				967		969		971			974	975		977	978	979
	982	983		985		987			990	991		993	994	995				999

陸、研究問題與討論：

- 一、在研究的過程中，我們嘗試使用二進位的方法研究，雖然學到了 3 的倍數的二進位模式，但對於其他數字的二進位形式，我們尚未掌握到推廣驗證考拉茲猜想的方法。
- 二、除了我們所觀察到的、不斷轉換成新的連續數對最後變成同步運算的數對之外，其實還存在著其他形式的同步數對，只是數量不多，我們尚未找到明顯的規律性。
- 三、任何偶數在考拉茲運算的過程中，都會除以 2、變小直到變成奇數為止；因此奇數實際上是這個題目中真正需要處理的問題。如果能證明在考拉茲運算的過程中，一個奇數會變成比自己更小的奇數，就必然符合猜想，那麼我們所發現的同步現象，實際上已經驗證了相當部分的正整數符合猜想。

柒、結論：

- 一、 2^n 必然符合考拉茲猜想。
- 二、經過一次、三次、四次運算後變成 2^n 的奇數也能符合考拉茲猜想，我們找出了數學的一般式。這樣的正整數也有無限多個，只是分布得更散，在 1~1000 的數字裡只有 7 個。
- 三、若 q 是符合考拉茲猜想的任意奇數，則由同步現象可知：奇數 $4q + 1$ 也會符合猜想。同步現象可以幫助我們往外拓展，找到更多符合猜想的奇數。
- 四、上述所有數字的 2^n 倍同樣符合考拉茲猜想。
- 五、一個奇數 q 在考拉茲運算的過程中，如果會變成一個比自己更小的奇數，那麼 q 必然符合猜想；假如上面這句話是正確的，則我們所發現的同步現象可以驗證將近一半的正整數都能符合考拉茲猜想。

捌、參考資料及其他：

- [1] 維基百科—考拉茲猜想：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%80%83%E6%8B%89%E5%85%B9%E7%8C%9C%E6%83%B3>
- [2] 九章數學討論區一角谷猜想
http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=2210&forum=1&1

【評語】 080404

1. 以一個橫跨數十年的數學難題「考拉茲猜想」作為探究主題，頗具企圖心與挑戰性。
2. 作者利用了二進位法、數學歸納法、以及從兩個整數的同步現象等，歸納出一些規律，解決了 1~1000 中的 589 個整數。
3. 惟過去關於此主題已有許多相關的探討，而本研究的發現仍有侷限性，相較於之前的研究，本研究與前人不同之處應予以點明，方能更加凸顯本研究之價值與獨特性。

摘要

考拉茲猜想是一個橫跨近九十年的數學難題：任何一個自然數，奇數須乘以3加1，偶數須除以2，依照這個規則不斷重複運算，所有自然數最終將變成1。因為經運算後，偶數將變小，奇數會變大，直觀上奇數會比偶數更不容易收斂到1。我們發現有許多連續數字會有同步現象，這表示，數對裡的奇數具有和相鄰偶數一樣的考拉茲運算次數，同時，只要我們找到一個符合考拉茲猜想的奇數，就相當於找到了無限多個同樣符合的奇數。

壹、研究動機

考拉茲猜想有許多共同的名稱，因為有許多數學家作過相同的研究。西元1930年，德國大學學生考拉茲研究了這個問題，故稱為考拉茲猜想；被稱為角谷猜想則是因為1960年時日本人角谷靜夫也作過相同研究。這是一個到目前為止都還沒有被完全解決的數學猜想。我們覺得十分神奇，決定作進一步的研究。

我們將1到1000所有自然數的考拉茲運算過程製表整理，嘗試從中觀察出特別的規律，意外地發現有許多連續數字會在計算到特定步驟時，變成同一個數字，我們稱為同步現象。而且，具有相同性質的同步數對，往往會在一定的間隔數後重複出現。由於連續數字必定是 $(2n, 2n + 1)$ 的形式，我們發現：這些奇數具有和相鄰偶數一樣的考拉茲運算次數，並且只要我們找到一個符合考拉茲猜想的奇數，就同時找到了無限多個同樣符合的奇數。

貳、研究目的

遵循考拉茲猜想的規則，證明全部或是具有某些特定性質的數字，皆符合考拉茲猜想。我們著重的方向在：找出特定算次之後會變成 2^n 之奇數的一般形式；以及同步數對必然符合考拉茲猜想的可能性。

參、研究設備及器材

電腦、紙筆、大腦，以及渴望知識與真理的心。

肆、研究過程及方法

一、推測考拉茲猜想的正確性

首先我們用Excel寫出一個計算程式，測試了1~1000的所有數字是否符合考拉茲猜想，並利用這些數據資料做進一步的分析。我們不意外地發現，1到1000的所有整數全部都符合，以下為我們表格的部分截圖：

算次	2	3	4	5	6	7
1	1	10	2	16	3	22
2		5	1	8	10	11
3		16		4	5	34
4		8		2	16	17
5		4		1	8	52
6		2			4	26
7		1			2	13
8					1	40
9						20
10						10
11						5
12						16
13						8
14						4
15						2
16						1

每個整數最後收斂到1的過程，看似不具有任何規律。於是我們嘗試觀察並分析每一個整數的收斂過程，希望能找出特定的性質。

首先，我們將奇數乘以3加1的運算設定為「+」，表示經運算後數字變大；將偶數除以2設為「-」，表示經運算後數字變小，然後將這兩個符號連結到每一筆運算上。接著，我們以「Diff」表示變大與變小次數的差，經過Excel計算，發現「-」的次數必定會大於「+」的次數。這符合我們的直覺。

算次	1	2	3	4	5
1		-	+	-	+
2			-	-	-
3			+		-
4			-		-
5			-		-
6			-		
7			-		
+	0	0	2	0	1
-	0	1	5	2	4
Diff	0	1	3	2	3
Ratio	M	M	2.50	M	4.00

因為每個奇數乘以3加1後皆會變成偶數，而偶數除以2後也有可能依然是偶數，所以我們得知考拉茲運算的過程中，數字變小的次數必定不小於數字變大的次數。當變大和變小次數的差距達到一定程度，所有的數字應該就都會向收斂的方向前進。

在上方的表格中，我們將「-」的次數除以「+」的次數，記錄為「Ratio」。2ⁿ因為只會變小，Ratio分母為0，我們記錄為m。我們將1~1000的考拉茲運算中，數字的最小與最大Ratio做了整理如下：

數字	Ratio	數字	Ratio
27	1.7073	80	8
871	1.7077	84	8
31	1.718	85	8
41	1.725	160	9
54	1.7317	168	9
55	1.7317	170	9
47	1.7368	320	10
73	1.7381	336	10
703	1.7419	340	10
62	1.7436	341	10
63	1.7436	640	11
97	1.7442	672	11
937	1.746	680	11
		682	11

算出來最小的結果是1.71，最大的結果則是11。這表示1~1000的數字經過考拉茲運算，變小的次數至少是變大次數的1.71倍，最高則甚至達到11倍。然而，具備最大或最小Ratio的數字之間，看起來並沒有明顯的關連。

我們試著用數學算式來表達Ratio的意義。上面的現象告訴我們，一個數字每「+」一次，就會「-」至少1.71次。進行這樣的循環一次，一個數字會變成：

$$\left(\frac{3x+1}{2^{1.71}}\right) \leftarrow \text{這表示} x \text{是先「+」再「-」}$$

或者

$$(3 * \frac{x}{2^{1.71}} + 1) \leftarrow \text{這表示} x \text{是先「-」再「+」}$$

因為 $2^{1.71}=3.271608>3$ ，假如上述的循環各進行多次，數值皆必將變小收斂。雖然這並不是精確的算式，只是一個近似值，透過這樣的描述，我們可以猜測：假如考拉茲猜想是正確的，那麼任何一個數字的考拉茲運算過程中，「-」的次數除以「+」的次數應該不可以小於 $\log_2 3=1.584963$ 。這將會使得每次循環運算後得到的數字，都比運算前的數字還小；隨著運算次數增加而愈來愈靠近1。

二、直觀上符合考拉茲猜想的數字

- (一) 2^n 必然符合考拉茲猜想，因為在計算至1之前，永遠是偶數。
- (二) 假設有一個奇數，在經過幾次運算之後變成 2^n ，這個數字也是必然符合。我們嘗試用不同的方法，歸納出這個數字的型態。

1. 二進位法

將 $x = \frac{2^n - 1}{3}$ 換成二進位，會是 101010...101 (1 的後面 $n-2$ 位)。

例如 $x = \frac{2^{10} - 1}{3}$ ，那麼

$$3x + 1 = 11 * 101010101 + 1$$

$$= 10000000000 \text{ (這時將二進位換回十進位)} = 2^{10}$$

2. 數學歸納法

假如 $3x + 1 = 2^n$ ，那麼 $x = \frac{2^n - 1}{3}$ 。但是並非所有的 n 都符合，因為 x 必須是整數。由於 x 的二進位形式為 101010...101，由上面的結論，我們猜測當 $n = 2m$ 時，經運算可得整數 x ，這樣就得到了這種奇數的一般型態。假如 $n = 2m$ ，則 $x = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \frac{(2^m + 1)(2^m - 1)}{3}$ 。因為 $(2^m + 1)(2^m - 1)$ 是連續奇數，而連續奇數必然有其中一個是 3 的倍數，因此 $(2^m + 1)(2^m - 1)$ 可以被 3 整除，所得的 x 確實是整數。

我們也可以進一步以數學歸納法確認：

當 $m=1$ 時， $x = \frac{2^{2m} - 1}{3} = \frac{2^2 - 1}{3} = 1$ ，整數的假設成立。

假設當 $m = k$ 時亦成立，即 $x = \frac{2^{2k} - 1}{3}$ 為整數。那麼當 $m = k+1$ 時，

$$x = \frac{2^{2(k+1)} - 1}{3} = \frac{4 * 2^{2k} - 1}{3} = \frac{3 * 2^{2k} + 2^{2k} - 1}{3} = 2^{2k} + \frac{2^{2k} - 1}{3}$$

所得也是整數，因此所有的 $x = \frac{2^{2m} - 1}{3}$ 均為整數，得證。而這個數就是符合考拉茲猜想的奇數。

3. 下表中，我們接著嘗試以二進位法找出經過三次、四次運算後變成 2^n 的奇數形式。

x	奇		三次運算變成 2^n ：
$3x + 1$	偶	+	$3x + 1 = 101010 \dots 1010$
$\frac{3x + 1}{2}$	奇	-	$3x = 101010 \dots 1010101001$ (101010=最小的 3 的倍數=42) $= 9 + 42 * 2^4 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$ $x = 3 + 14 * 2^4 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$ 符合此情況的自然數包括 3, 227, 14563, ... 等。
2^n	偶	+	
x	奇		四次運算變成 2^n ：
$3x + 1$	偶	+	$3x + 1 = 101010 \dots 10100$
$\frac{3x + 1}{2}$	偶	-	$3x = 101010 \dots 101010011$ (101010=最小的 3 的倍數=42) $= 3 + 42 * 2^3 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$ $x = 1 + 14 * 2^3 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$ 符合此情況的自然數包括 113, 7169, 458753, ... 等。
2^n	偶	+	

4. 我們每找到一個符合考拉茲猜想的數字，就等同於找到無限多個；因為只要我們將這個數字乘以 2 的任何正整數次方，都必定符合考拉茲猜想。

三、兩個連續整數的同步現象

我們作出從 1 到 1000 的考拉茲計算表，發現幾個有趣的現象：

- (一) 某些連續成對的數字，會在進行相同次數的運算之後，變成同一個數字，然後同步收斂到 1。這些成對的數字組，（幾乎）必定是 $(2n, 2n + 1)$ ，鮮少有 $(2n - 1, 2n)$ 的狀況。
- (二) 成對同步的數字組，會在特定間隔的行數之後，重複出現成對同步的現象。這讓我們好奇其中的數學規律是什麼，以及從中是否可以找出某些必然符合考拉茲猜想的數字性質。例如，連續數字若從第 3 列開始同步，到下一組數的間隔會是 6 行。

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
6	40	7	46	8	52	9	58	10	64
3	20	22	23	4	26	28	29	5	32
10	10	11	70	2	13	14	88	16	16
5	5	34	35	1	40	7	44	8	8
16	16	17	106		20	22	22	4	4
8	8	52	53		10	11	11	2	2
4	4	26	160		5	34	34	1	1
2	2	13	80		16	17	17		
1	1	40	40		8	52	52		

連續數字若從第 3 列開始同步，一組成對數字和下一組的中間必然間隔 6 行。從不同的計算列開始同步的數字，間距也隨之不同，但往往是固定數字。

從第 3 列開始同步的連續數字，假設其中的偶數為 x ，奇數為 $x+1$ ，那麼這組數對的考拉茲運算過程如下：

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
-	$\frac{x}{4}$	$\frac{3}{2}x + 2$	-
+	$\frac{3}{4}x + 1$	$\frac{3}{4}x + 1$	-

由上面這張表，我們歸納出幾個重要的發現：

- 從第 3 列開始同步的數對，在同步時變成了一個比原來還要小的偶數，而這個偶數接下來將除以 2，直到變成一個更小的奇數。依據九章數學網站討論區關於角谷猜想的討論，若能證明任何一個奇數經角谷運算後只要能找到一個比自己小的奇數，這個奇數必然符合猜想[2]。假如這個論點是正確的，那麼所有在第 3 列同步的數對，也就是形式為 $(4k, 4k + 1)$ ，其中 k 為奇數的數對，都將符合此猜想。
- 第 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 列開始同步的數對，雖然在同步的階段成為比原來更大的數字，但最終必會回歸 $(4k, 4k + 1)$ ，其中 k 為奇數的形式。假如 $(4k, 4k + 1)$ 符合，則這些數對也一定符合。

	x	$x+1$	
-	$\frac{x}{2}$	$3x + 4$	+
+	$\frac{3}{2}x + 1$	$\frac{3}{2}x + 2$	-

- 若已知一個奇數 k 符合猜想，那麼另一個奇數 $4k + 1$ 也必然符合。這是因為偶數 $4k$ 在經過兩次運算之後變成 k ，所以符合猜想；又由於 $(4k, 4k + 1)$ 有同步現象，因此 $4k + 1$ 也會符合猜想。

同步 算次	同步公式	重複 間隔	同步時的 數字變化
3	$\frac{3}{4}x + 1$	8	變小
5	$\frac{9}{8}x + \frac{7}{4}$	16	變大
7	$\frac{27}{16}x + \frac{23}{8}$	32	變大
9	$\frac{81}{32}x + \frac{73}{16}$	64	變大
11	$\frac{243}{64}x + \frac{227}{32}$	128	變大
13	$\frac{729}{128}x + \frac{697}{64}$	256	變大
17	$\frac{6561}{512}x + \frac{6433}{256}$	1024	變大

4. 假如第 1, 2 點的論述正確，我們等於證明了有將近一半的正整數都符合考拉茲猜想，因為第 3 列開始同步的 $(4k, 4k + 1)$ 這個數對的集合，就涵蓋了 $\frac{1}{4}$ 的正整數；第 5 列開始同步的數對涵蓋了 $\frac{1}{8}$ ，以此類推。因此第 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 列開始同步的數對總共涵蓋了 $(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}) * Total = \frac{255}{512} * Total$ 。

伍、研究結果

- 一、依據我們所作的研究，將 1~1000 中依循各種規律而符合考拉茲猜想的整數整理如下：

規則	一般式	數字
2^n	2^n	2,4,8,16,32,64,128, 256,512
一步到 2^n	$\frac{2^{2m} - 1}{3}$	5,21,85,341
三步到 2^n	$3 + 14 * 2^4 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$	3, 227
四步到 2^n	$1 + 14 * 2^3 * (1 + 2^6 + 2^{12} + \dots)$	113
第 3 列同步 奇數	$4k + 1$	13,21,29,37,45... 等 121 個

第 5 列同步 奇數	$16q + 3$	19,35,51,67,83... 等 40 個
第 7 列同步 奇數	$32q + 23$	23,55,87,119,151... 等 14 個
第 9 列同步奇數	$64q + 15$	15,79,143,207,271
第 11 列同步奇數	$128q + 95$	95
第 13 列同步奇數	$256q + 63$	63

- (一) 在 500 個奇數中，透過計算確認的、小於 250 的奇數有 91 個，我們以規則得到的奇數有 160 個。
- (二) 在 500 個偶數中，扣除未證明奇數的 2^m 倍之後所得的其他偶數，就都是符合猜想的偶數，其中包括了滿足 2^n 規則的 9 個數字。這些偶數共有 429 個。
- (三) 綜合上面兩點，以我們所發現的規則，共解決了 1~1000 之中 589 個數字。

陸、研究問題與討論

- 一、在研究的過程中，我們曾經嘗試使用二進位的方法研究，雖然學到了 3 倍數的二進位模式，但其他數字的二進位，我們尚未掌握到驗證考拉茲猜想的方式。
- 二、除了我們所觀察到，不斷轉換成新的連續數對最後變成同步的數對之外，其實還存在其他形式的同步數對；只是數量不多，我們尚未找到明顯的規律性。
- 三、任何偶數在考拉茲運算的過程中，都會除以 2 直到變成奇數為止；因此奇數實際上是這個題目中真正需要處理的問題。我們認為只要能證明在考拉茲運算的過程中，一個奇數會變成比自己更小的奇數，就必然符合猜想；那麼我們所發現的同步現象，實際上已經驗證了相當部分的正整數符合猜想。

柒、結論：

- 一、 2^n 必然符合考拉茲猜想。
- 二、經過一次、三次、四次運算變成 2^n 的奇數也能符合考拉茲猜想，我們找出了數學一般式。
- 三、若 q 是符合考拉茲猜想的任何奇數，則奇數 $4q + 1$ 也會符合。同步現象可以幫助我們往外拓展，找到更多符合猜想的奇數。
- 四、上述所有數字的 2^n 倍同樣符合考拉茲猜想。
- 五、一個奇數 q 在考拉茲運算過程中，如果變成一個比自己更小的奇數，那麼 q 必然符合猜想；假如上面這句話是正確的，那麼我們所發現的各列數同步現象可以驗證一半以上的正整數都能符合考拉茲猜想。

捌、參考資料及其他：

- [1] 維基百科—考拉茲猜想：<https://zh.wikipedia.org/wiki/考拉茲猜想>
- [2] 九章數學討論區—角谷猜想：http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=2210&forum=1&l