中華民國第58屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

團隊合作獎

080403

老師能公平一點分配我的工作嗎?

學校名稱：苗栗縣頭份市建國國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳裕達	劉昕育
小六 張恩睿	劉惠萌
小六 許祐愷	
小六 葛志中	
小六 吳育儒	

關鍵詞：公平分配、等比數列、公平理論

摘要

公平分配是日常生活中很重要的概念。本研究是利用數學的概念探討公平分配工作的標準，及在此標準之下如何分配工作？並深入探討增加人數、物品數量後，它的搬運策略，以及如何達到最短工作路徑的條件。我們最後的公平分配的標準是：一、行走相等的距離，二、負重時行走相等的距離，並以此標準探討工作分配的方法、運送方法及其規律和數學一般式。最後再找出公平分配的方法以解決兩組同學不同的看法。

壹、研究動機、確立問題：

我們在上資優班課程的時候，老師說要請我們幫忙搬重物，一共7名學生、9個重物。每人搬完一物後，大家面面相覷，「誰要搬最後兩物？搬了，大家的工作量就不相等，這不公平啊！」大家心裡這樣想著。老師在旁邊說：「你們就這麼計較，哪好！把剛才的重物再搬回來，等你們想到公平的方法及符合最短路徑要求再搬吧！」。最後我們請求老師說我們先搬完，回去後再好好討論、研究，於是我們就這樣開始我們科展之途。首先 將問題一般化「有P個人要搬T個相同的物體(大小、形狀、重量都相同），從A點搬到B點，距離R公尺。問如何走？如何分配工作量？才能達到公平及最短路徑的要求。」

貳、研究目的：

一、如何找出公平分配的標準？

二、探討在不同標準下如何公平分配工作量？

三、如何簡化問題、找出規律、找出公式，並將公式一般化，進一步證明其正確性？

四、如何找出公平分配的方法？

參、研究方法：簡化問題、利用圖表分析、歸納、推理、證明。

肆、定義符號：

R：代表單程的距離

P：代表工作人數

T：代表物品的數量

S_i：代表有P人時，將R分割成S_1、S_2、S_3、S_4………S_p

M：代表每個人走完幾個R，r：代表剩餘物品的數量

如果T>P時，T÷P=M………r

T＝PM＋r

W_P^T：代表在T物P人時，每人平均工作量

W_r：工作量的一般式，當T>P

W_x：工作量的一般式，當T<P

最短路徑的定義：由起點執行工作到終點的最短距離。工作結束後行走的距離就是多餘的路徑。另外的條件限制每人每次只能搬一個物品

伍、研究過程：

一、探討問題、找出標準

「有 P 個人要搬 T 個相同的物體(大小、形狀、重量都相同），從 A 點搬到 B 點，距離 R 公尺。問如何走？如何分配工作量？才能達到公平及最短路徑的要求。」

（一）簡化問題：先由兩人三物開始。

甲組學生提出的標準：

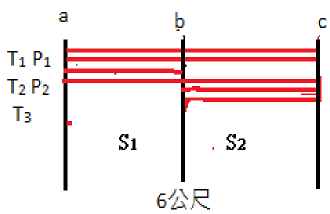
甲組學生認為只要兩人走的路程一樣長，就是公平，且沒有多餘的路程就是最短路徑。

探討路徑規畫與公平標準與最短路徑的關係

路徑規畫影響到每個人的工作量和公平性及是否符合最短路徑的條件。所以它是解決問題的第一步

我們只以 2 人 2 間格，2 人 3 間格，2 人 4 間格為例，加以比較說明。

1、2 人 2 間格



P_1 將 T_1 由 a 帶至 c，再回 a 將 T_3 帶至 b，交給 P_2。

P_2 將 T_3 由 a 帶至 c，再回 b 將 T_3 帶至 c。

P_1 走的距離 $=R+2S_1+S_2$，

P_2 走的距離 $=R+2S_2$，

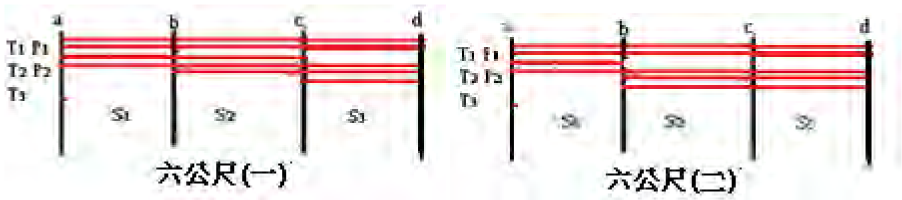
P_1 走的距離 $=P_2$ 走的距離，$R+2S_1+S_2=R+2S_2$，所以 $S_2=2S_1$，又

$S_1+S_2=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{3}\times R$ ， $S_2=\frac{2}{3}\times R$

P_1 的 $W_2^3=2R+\frac{1}{3}R=\frac{7}{3}R$，$P_2$ 的 $W_2^3=R+\frac{2}{3}R\times 2=\frac{7}{3}R$

所以 P_1，P_2 的工作量都相等，所以達到公平的要求，且沒有多餘的路徑也符合最短路徑的條件。

2、 2 人 3 間格



圖一中，P_1 走的距離 $=R+2S_1+2S_2+S_3$，P_2 走的距離 $=R+S_2+2S_3$，

$2S_1+2S_2+S_3=S_2+2S_3 \Rightarrow 2S_1+S_2=S_3$ 又 $S_1+S_2+S_3=R$

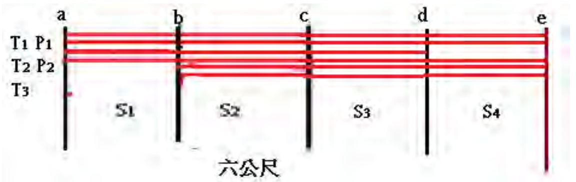
P_1 的 $W_2^3=2R+S_1+S_2=2R+R-S_3$，上一個 2 人 2 間格的結果

P_1 的 $W_2^3=2R+\frac{1}{3}R$，所以，$R-S_3\leq\frac{1}{3}R$（最短路徑條件）

$\Rightarrow S_3 \geq \frac{2}{3}R \Rightarrow S_1 + S_2 \leq \frac{1}{3}R$ 又 $2S_1 + S_2 = S_3$，顯然矛盾。

圖二的情形與圖一相同，只是 P_1，P_2 對調。

3、 2 人 4 間格



由圖中可知

P_1 走的距離$=R+2S_1+2S_2+2S_3+S_4$

P_2 走的距離$=R+2S_2+2S_3+2S_4$

P_1 走的距離$=P_2$ 走的距離，$R+2S_1+2S_2+2S_3+S_4=R+2S_2+2S_3+2S_4$，整理後 $S_4=2S_1$，所以 $W_2^3=2R+S_1+S_2+S_3$，又 $S_1+S_2+S_3=R-S_4$，代入 $W_2^3=3R-S_4$，同理，但(三) 的W_2^3要小於、等於(一) W_2^3才有意義(最短路徑要求)。

$3R-S_4 \leq 14 \Rightarrow 18-S_4 \leq 14 \Rightarrow S_4 \geq 4$，$S_1 \geq 2$，$S_1+S_4 \geq 6$ 但 $S_1+S_2+S_3+S_4=6$，矛盾。所以分割間格越多，搬運的路徑就越長，就不符合最短路徑要求。之後我就以第一種路徑規畫法來規劃搬運的路徑。

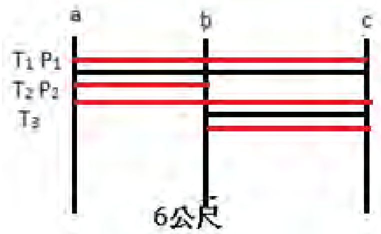
乙組同學的解法

乙組學生認為，只要兩人搬運物品(負重)的路程一樣長就是公平，沒有多餘的路程就是最短路徑，且不搬運物體， 不能算工作量。

探討路徑規畫與公平標準與最短路徑的關係

1、 2 人 2 間格

說明：圖形中的紅線表示搬運物品的路徑，黑線表示空手行走的路徑



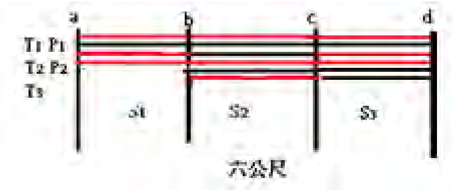
由圖可知

P_1 搬運物體的距離$=R+S_1$

P_2 搬運物體的距離$=R+S_2$，

所以 $S_1=\frac{1}{2}R$ ，$S_2=\frac{1}{2}R$，P_1 的$W_2^3=\frac{3}{2}R$ ，P_2 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_1，P_2 的 W 都相等，所以達到公平的要求，且沒有多餘的路徑也符合最短路徑的條件。

2、 2 人 3 間格



P_1 將 T_1 由 a 帶至 d，再回 a 將 T_3 帶至 b，交給 P_2，空手走至 c。P_2 將 T_3 由 a 帶至 c，再回 b 將 T_3 帶至 c 交給 P_1 代至 d。

P_1 搬運物體的距離$=R+S_1+S_3$

P_2 搬運物體的距離$=R+S_2$

所以，$S_1+S_3=S_2=\frac{1}{2}R$，P_1 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_2 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_1，P_2 的工作量都相等，所以達到公平的要求。但就行走的距離來說，他與甲組 2、3 間格數的情形一樣，不符合最短路徑要求。

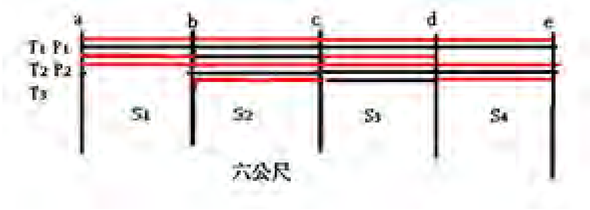
3、 2 人 4 間格

由圖可知

P_1 搬運的距離$=R+S_1+S_3$

P_2 搬運的距離$=R+S_2+S_4$

因為 P_1 搬運的距離＝P_2 搬運的距離，所以 $S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}R$，$P_1$ 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_2 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_1，P_2 的工作量都相等，所以達到公平的要求。但就行走的距離來說，他與甲組 2、3 間格數的情形一樣，不符合最短路徑要求。之後我就以第一種路徑規畫法來研究後續研究。



二、深究問題：

我們就分行走路程與搬運物品的路程(負重)兩種標準，先討論將人數、物品數增加，以探討計算工作量的計算否有規律性？是否可以寫成數學一般式？

(一)以行走路程為工作量的標準

我們先探討物品數量大於搬運人數

定義：$r=T-P$

1、當 r=1 的情形

(1)2 人 3 物的情形：如前所探討

結果一 $W_2^3=2R+S_1 \Rightarrow S_1=\frac{1}{3}R \Rightarrow W_2^3=2R+\frac{1}{3}R=\frac{7}{3}R$

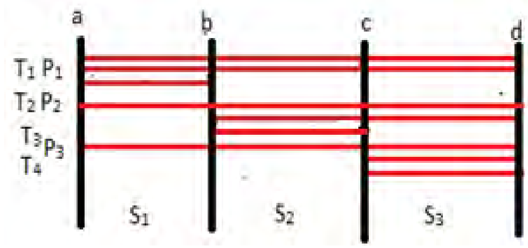
(2)3 人 4 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

P_1 走的距離$=R+2S_1+S_2+S_3$

P_2 走的距離$=R+2S_2+S_3$

P_3 走的距離$=R+2S_3$



因為他們工作量相等，所以，$R+2S_1+S_2+S_3=R+2S_2+S_3=R+2S_3$ 且 $S_1+S_2+S_3=R$。

整理後我們發現

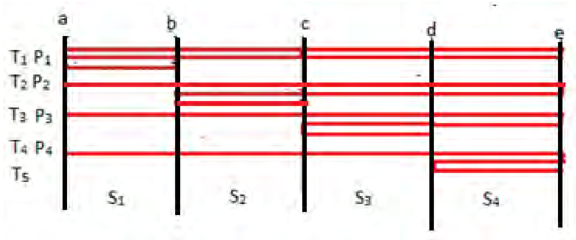
$2S_1=S_2$ ， $2S_2=S_3 \Rightarrow S_3=2S_2=4S_1$ 代入 R 式

$S_1+2S_1+4S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{7}R$ ， $S_2=\frac{2}{7}R$ ， $S_3=\frac{4}{7}R$

結果二 $W_3^4W_1 = 2\ R+S_1 = 2R+\frac{1}{7}\ R = \frac{15}{7}\ R$

(3)4 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知



P_1走的距離$=R+2\ S_1+S_2+S_3+S_4$

P_2走的距離$=R+2S_2+S_3+S_4$

P_3走的距離$=R+2S_3+S_4$

P_4走的距離$=R+2\ S_4$

且 $S_1+S_2+S_3+S_4 = R$，因為他們工作量相等，所以，$R+2\ S_1+S_2+S_3+S_4 = R+2S_2+S_3+S_4 = R+2S_3+S_4= R+2\ S_4$

$\Rightarrow\ 2\ S_1+S_2+S_3+S_4 = 2S_2+S_3+S_4 = 2S_3+S_4 = 2\ S_4$

整理後，可得

$2S_1 = S_2$ 代入上式 $\Rightarrow\ 4\ S_1+S_3+S_4=2S_3+S_4 \Rightarrow S_3 = 4\ S_1$

代入上式 $\Rightarrow S_4 = 8\ S_1$　代入 R 式

$S_1+S_2+S_3+S_4 = R \quad S_1+2S_1+4S_1+8S_1 = R \quad S_1 = \frac{1}{15}\ R$

結果三$W_4^5 = 2R+\frac{1}{15}\ R = \frac{31}{15}\ R$

分析

人數與物品數	公式
2 人 3 物	$S_1+2S_1=R$
3 人 4 物 時	$S_1+2S_1+4S_1=R$
4 人 5 物	$S_1+2S_1+4S_1+8S_1=R$
P 人 P+1 物	$S_1+2S_1+4S_1+8S_1+16\ S_1\cdots\cdots2^{p-1}S_1=R$

將公式化簡

$S_1(1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{p-1}) = R$

$(1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{p-1})$是一個等比數列

設 N 是它的和，$1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{p-1}=N$

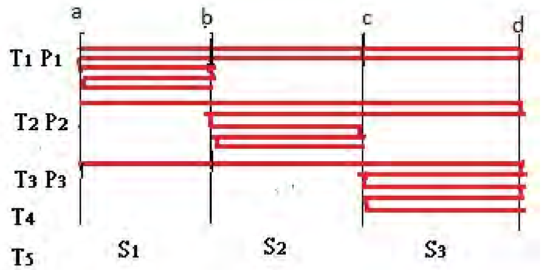
$2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{p-1}+2^p=2N$，兩式相減

$2^p-1=N \Rightarrow (\ 2^p-1\ )\ S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{(2^p-1)}\ R$

所以我們發現 $W_{r=1}$ 的一般式 $= 2RM+\frac{1}{(2^p-1)}R \quad (M=1)$

2、當 r=2 的情形

(1)3 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=R＋4 S_1＋S_2＋S_3，

P_2 走的距離=R＋4S_2＋S_3

P_3 走的距離=R＋4S_3

因為他們工作量相等，所以，R＋4 S_1＋S_2＋S_3= R＋4S_2＋S_3= R＋4S_3 且 S_1＋S_2＋S_3=R

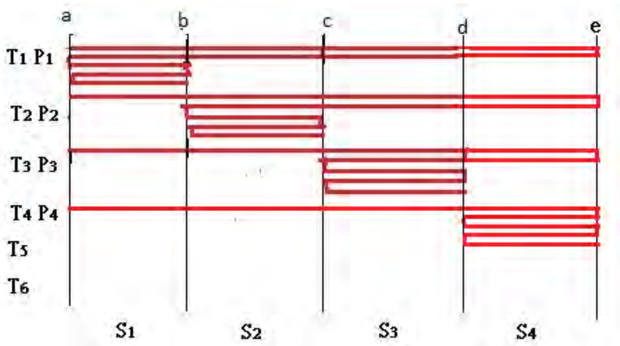
整理後我們發現

$$4S_1=3S_2 \ ，\ 4S_2=3S_3 \ \Rightarrow S_2=\frac{4}{3}S_1 \Rightarrow S_3=\frac{4}{3}S_2=\frac{16}{9}S_1$$

$$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1=R \ \Rightarrow \ S_1=\frac{1}{7}R \ ，\ S_2=\frac{2}{7}R \ ，S_3=\frac{4}{7}R$$

結果四 $W_3^5=2R+3S_1=2R+\frac{27}{37}R=\frac{101}{37}R$

(2) 4 人 6 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=R＋4 S_1＋S_2＋S_3＋S_4

P_2 走的距離=R＋4S_2＋S_3＋S_4，

P_3 走的距離=R＋4S_3＋S_4

P_4 走的距離=R＋4S_4

因為他們工作量相等，所以，R＋4 S_1＋S_2＋S_3＋S_4＝R＋4S_2＋S_3＋S_4＝ R＋4S_3＋S_4＝R＋4S_4 且 S_1＋S_2＋S_3＋S_4=R，整理後我們發現

$$4S_1=3S_2 \ ，\ 4S_2=3S_3 \ ，\ 4S_3=3S_4 \ \Rightarrow \ S_2=\frac{4}{3}S_1 \ \Rightarrow$$

$$S_3=\frac{16}{9}S_1 \Rightarrow S_4=\frac{64}{27}S_1$$

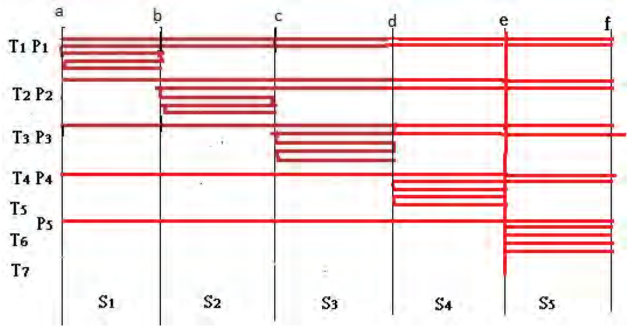
$$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{27}{175}R \ ，\ S_2=\frac{36}{175}R \ ，$$

$$S_3=\frac{48}{175}R \ ，\ S_4=\frac{64}{175}R$$

結果五 $W_4^6=2R+3S_1=2R+\frac{81}{175}R=\frac{431}{175}R$

(3)5 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知



P_1 走的距離=$R+4\ S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

P_2 走的距離=$R+4S_2+S_3+S_4+S_5$

P_3 走的距離=$R+4S_3+S_4+S_5$

P_4 走的距離=$R+4S_4+S_5$，

P_5 走的距離=$R+4S_5$，因為他們工作量相等，所以，

$R+4\ S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R+4S_2+S_3+S_4+S_5=R+4S_3+S_4+S_5=R+4S_4+S_5=R+4S_5$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R$

整理後我們發現

$4S_1=3S_2$ ，$4S_2=3S_3$ ，$4S_3=3S_4$ $\Rightarrow$ $S_2=\frac{4}{3}S_1$ $\Rightarrow$

$S_3=\frac{16}{9}S_1$ $\Rightarrow$ $S_4=\frac{64}{27}S_1$ $\Rightarrow$ $S_5=\frac{256}{81}S_1$

$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1+\frac{256}{81}S_1=R$ $\Rightarrow$ $S_1=\frac{81}{781}R$ ，$S_2=\frac{108}{781}R$ ，

$S_3=\frac{144}{781}R$ ，$S_4=\frac{192}{781}R$ ，$S_5=\frac{256}{781}R$

結果六 $W_5^7=2R+3S_1=2R+\frac{243}{781}R=\frac{1805}{781}R$

分析

人數與物品數	公式
3 人 5 物	$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1=R$
4 人 6 物	$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1=R$
5 人 7 物	$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1+\frac{256}{81}S_1=R$
P 人 P+2 物	【$1+\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^3+(\frac{4}{3})^4+\cdots\cdots(\frac{4}{3})^{P-1}$】$S_1=R$

將公式化簡

設 $N=$【$1+\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^3+(\frac{4}{3})^4+\cdots\cdots(\frac{4}{3})^{P-1}$】

$\frac{4}{3}N=$【$\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^3+(\frac{4}{3})^4+\cdots\cdots+(\frac{4}{3})^{P}$】

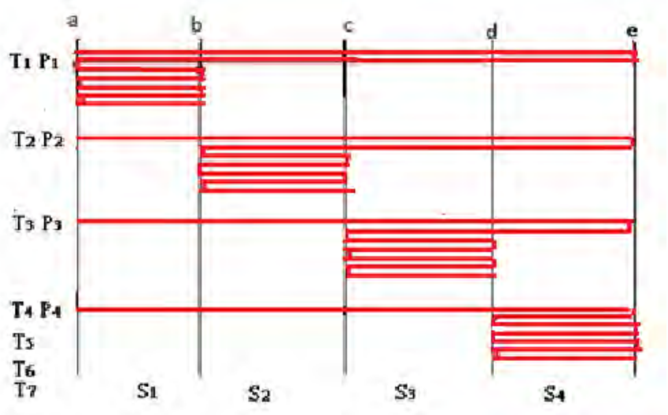
兩式相減 $\frac{1}{3}N=(\frac{4}{3})^P-1$ ⇒$N=3\times$【$(\frac{4}{3})^P-1$】

$3\times$【$(\frac{4}{3})^P-1$】$S_1=R$ $S_1=\frac{1}{3}\times\frac{R}{(\frac{4}{3})^P-1}$

所以我們發現 $W_{r=2}$ 的一般式$=2RM+3S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{4}{3})^P-1}$ $(M=1)$

3、當 r=3 的情形

(1) 4 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1走的距離$=R+6S_1+S_2+S_3+S_4$

P_2走的距離$=R+6S_2+S_3+S_4$

P_3走的距離$=R+6S_3+S_4$

P_4走的距離$=R+6S_4$

因為他們工作量相等，所以，$R+6S_1+S_2+S_3+S_4=R+6S_2+S_3+S_4=R+6S_3+S_4=R+6S_4$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4=R$

整理後我們發現

$6S_1=5S_2$ ，$6S_2=5S_3$ ，$6S_3=5S_4$

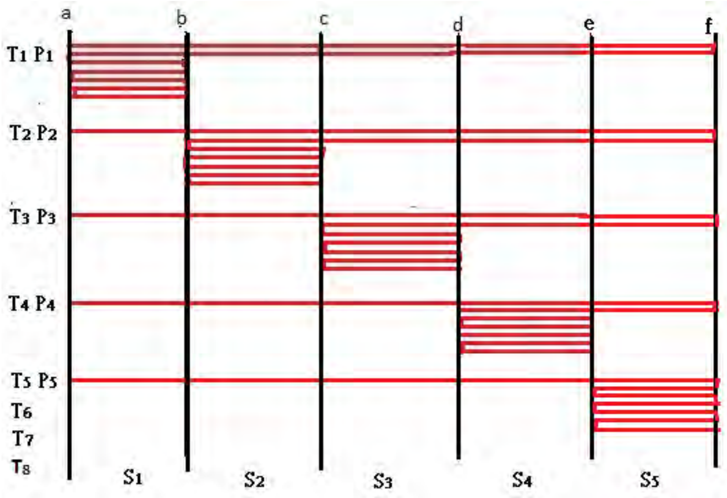
$S_2=\frac{6}{5}S_1$ ⇒ $S_3=\frac{36}{25}S_1$ ⇒ $S_4=\frac{216}{125}S_1$

$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1=R$

$S_1=\frac{125}{671}R$ ⇒ $S_2=\frac{150}{671}R$ ⇒ $S_3=\frac{180}{671}R$ ⇒ $S_4=\frac{216}{671}$

結果七 $W_4^7=2R+5S_1=2R+\frac{125}{671}R=\frac{1967}{671}R$

(2) 5 人 8 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離$=R+6S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

P_2 走的距離$=R+6S_2+S_3+S_4+S_5$

P_3 走的距離$=R+6S_3+S_4+S_5$

P_4 走的距離$=R+6S_4+S_5$

P_5 走的距離$=R+6S_5$

因為他們工作量相等，所以，$R+6S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R+6S_2+S_3+S_4+S_5=R+6S_3+S_4+S_5=R+6S_4+S_5=R+6S_5$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R$

整理後我們發現

$6S_1=5S_2$ ， $6S_2=5S_3$ ， $6S_3=5S_4$ ， $6S_4=5S_5$ ⇨ $S_2=\frac{6}{5}S_1$ ⇨

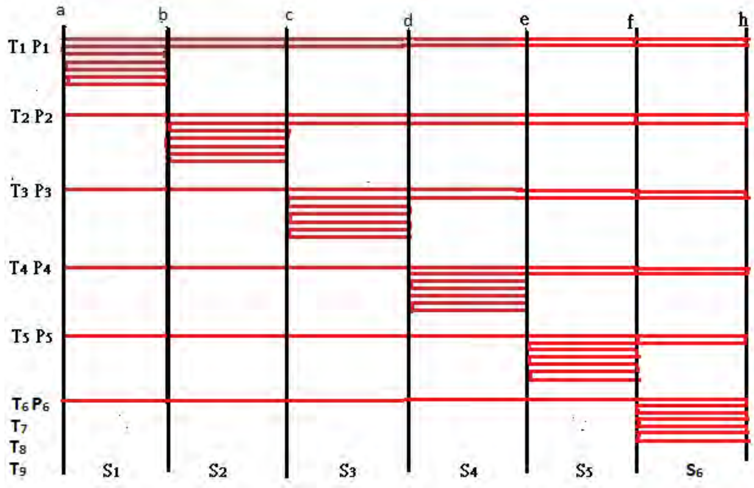
$S_3=\frac{36}{25}S_1$ ⇨ $S_4=\frac{216}{125}S_1$ ⇨ $S_5=\frac{1296}{625}S_1$

$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1=R$ ， $S_1=\frac{625}{4651}R$ ⇨

$S_2=\frac{750}{4651}R$ ⇨ $S_3=\frac{1500}{4651}R$ ⇨ $S_4=\frac{1800}{4651}$ ⇨ $S_5=\frac{2160}{4651}$

結果八 $W_5^8=2R+5S_1=2R+\frac{3125}{4651}R=\frac{12427}{4651}R$

(3) 6 人 9 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=R＋6 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$，P_2 走的距離=R＋6$S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$，P_3 走的距離=R＋6$S_3+S_4+S_5+S_6$，P_4 走的距離=R＋6$S_4+S_5+S_6$，P_5 走的距離=R＋6S_5+S_6，P_6 走的距離=R＋6S_6，因為他們工作量相等，所以，$R+6\ S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=R+6S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=R+6S_3+S_4+S_5+S_6=R+6S_4+S_5+S_6=R+6S_5+S_6=R+6S_6$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R$。

整理後我們發現

$6S_1=5S_2$，$6S_2=5S_3$，$6S_3=5S_4$，$6S_4=5S_5$，$6S_5=5S_6$

$\Rightarrow\ S_2=\frac{6}{5}S_1\ \Rightarrow\ S_3=\frac{36}{25}S_1\ \Rightarrow\ S_4=\frac{216}{125}S_1\ \Rightarrow$

$S_5=\frac{1296}{625}S_1\ \Rightarrow\ S_6=\frac{7776}{3125}S_1$

$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1+\frac{7776}{3125}S_1=R$

$S_1=\frac{3125}{31031}R\ \Rightarrow\ S_2=\frac{3750}{31031}R\ \Rightarrow\ S_3=\frac{4500}{31031}R\ \Rightarrow\ S_4=\frac{5400}{31031}$

$\Rightarrow\ S_5=\frac{6480}{31031}R\ \Rightarrow\ S_6=\frac{7776}{31031}R_1$

結果九 $W_6^9=2\ R+5S_1=2\ R+\frac{3125}{31031}R=\frac{77687}{31031}R$

分析

人數與物品數	公式
4 人 7 物	$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1=R$
5 人 8 物	$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1=R$
6 人 9 物	$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1+\frac{7776}{3125}S_1=R$
P 人 P+3 物	$【1+\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P-1}】S_1=R$

將公式化簡

$$【1+\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P-1}】S_1=R$$

設 $N=【1+\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P-1}】$

$$\frac{6}{5}\times N=【\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P}】$$

兩式相減 $\frac{1}{5}N=(\frac{6}{5})^P-1 \Rightarrow N=5\times【(\frac{6}{5})^P-1】$

$5\times【(\frac{6}{5})^P-1】S_1=R \quad S_1=\frac{1}{5}\times\frac{R}{(\frac{6}{5})^P-1}$ 所以我們發現

$W_{r=3}$ 的一般式 $=2RM+5S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{6}{5})^P-1}$ (M=1)

找出規律並將公式一般化

物品數－人數	公式
r=1	$2RM+S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{2}{1})^P-1}$
r=2	$2RM+3S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{4}{3})^P-1}$
r=3	$2RM+5S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{6}{5})^P-1}$
. .	. .
r=r	$2RM+(2r-1)S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^P-1}$

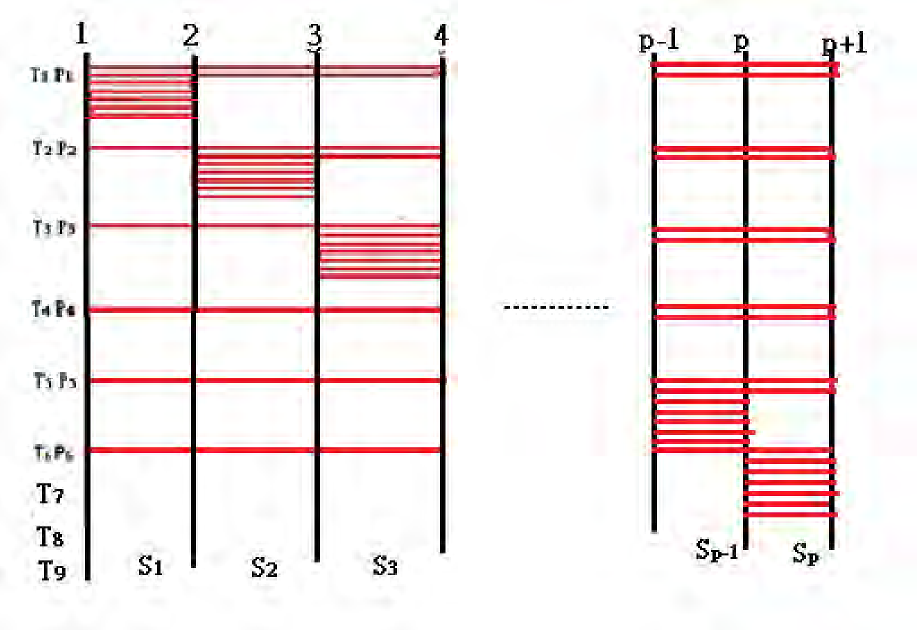
從上面公式可以發現規律性在$(\frac{2}{1})^{P}$、$(\frac{4}{3})^{P}$、$(\frac{6}{5})^{P}$………

我可以預測W_4是 $(\frac{8}{7})^{P}$，W_5是 $(\frac{10}{9})^{P}$，W_6是$(\frac{12}{11})^{P}$……………

Wr的分子是２ｒ，分母是２ｒ−１。我們預測Ｗｒ 的一般式為

$$Wr=2RM+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^{P}-1}=2R[\frac{T}{P}]+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^{P}-1}$$

證明



由圖形中可知，Ｗｒ$=W_{P}^{T}$，圖形中一定有Ｐ+１條分割線，Ｐ個間格。Ｔ個物品經過運送Ｍ次後，剩下ｒ個物品，因為Ｔ＞ Ｐ時，T÷P=M………r。剩下的物品是先回後送，再交給下一位接送者，所以，$2r\ S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p=2r\ S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots+S_p=2r\ S_3+S_4+S_5+\cdots\cdots+S_p=2r\ S_4+S_5+S_6\cdots\cdots+S_p=\cdots\cdots\cdots\cdots=2r\ S_p$

化簡後得

$2r\ S_1=(2r-1)\ S_2$，$2r\ S_2=(2r-1)\ S_3$，$2r\ S_3=(2r-1)\ S_4$，$2r\ S_4=(2r-1)S_5$，……………………$2r\ S_{p-1}=(2r-1)\ S_p$

整理後得

$S_2=\frac{2r}{2r-1}S_1$ ， $S_3=\frac{2r}{2r-1}S_2$ ， $S_4=\frac{2r}{2r-1}S_3$ ，

$S_5=\frac{2r}{2r-1}S_4$ ………………，$S_p=\frac{2r}{2r-1}S_{p-1}$

$S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots+S_p=R$

$$S_1+\frac{2r}{2r-1}S_1+(\frac{2r}{2r-1})^2S_1+(\frac{2r}{2r-1})^3S_1+\cdots\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p-1}S_1=R$$

$$[1+\frac{2r}{2r-1}+(\frac{2r}{2r-1})^2+(\frac{2r}{2r-1})^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p-1}]\ S_1=R$$

令 $N=[1+\frac{2r}{2r-1}+(\frac{2r}{2r-1})^2+(\frac{2r}{2r-1})^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p-1}]$

$$\frac{2r}{2r-1}N=[\frac{2r}{2r-1}+(\frac{2r}{2r-1})^2+(\frac{2r}{2r-1})^3+(\frac{2r}{2r-1})^4\cdots\cdots\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^p]$$

兩式相減

$(\frac{2r}{2r-1}-1)N=(\frac{2r}{2r-1})^p-1$ 化簡⇒ $\frac{1}{2r-1}N=(\frac{2r}{2r-1})^p-1$

$N=(2r-1)[(\frac{2r}{2r-1})^p-1]$， $S_1N=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{(2r-1)}\times\frac{R}{[(\frac{2r}{2r-1})^p-1]}$

因為每個人的工作量相等，所我們取 P_1 的工作量

$W\ r=2RM+(2r-1)\times\frac{1}{(2r-1)}\times\frac{R}{[(\frac{2r}{2r-1})^p-1]}=2RM+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^p-1}$ 得證

我們探討物品數量小於搬運人數

定義：$x = P - T$

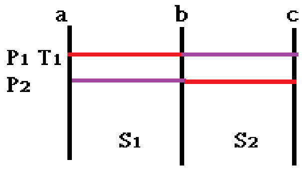
1、當 x=1 的情形

(1) 2 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

P_1、 P_2 的搬運路程都等於 R，

$W_2^1=R$，但是 P_1 必須多走 S_2，這就不符合最短路徑標準。



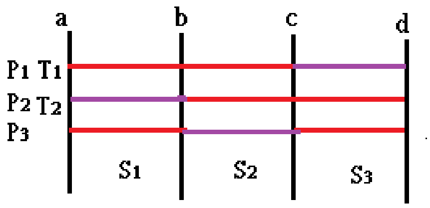
(2) 3 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

P_1、 P_2、P_3 的搬運路程都等於 R，

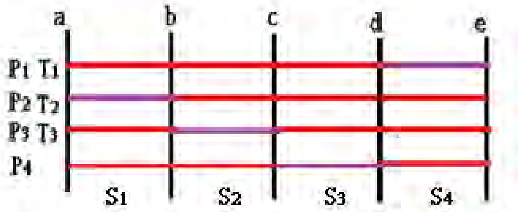
$W_3^2=R$，但是 P_1 必須多走 S_3，

這就不符合最短路徑標準。



(3) 4 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理 $W_4^3=R$，但是 P_1 必須多走 S_4，這就不符合最短路徑標準。



分析

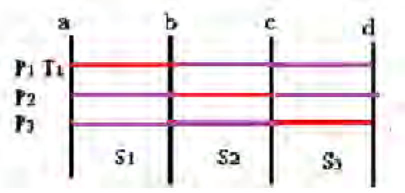
$W_2^1=R$ ， $W_3^2=R$ ， $W_4^3=R$

所以我們發現 $W_{x=1}$ 的一般式 = R

2、當 x=2 的情形

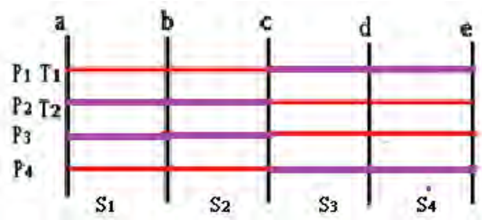
（1）3 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理 W_3^1= R，但是 P_1 必須多走 S_2+S_3，P_2 必須多走 S_3，這就不符合最短路徑標準。



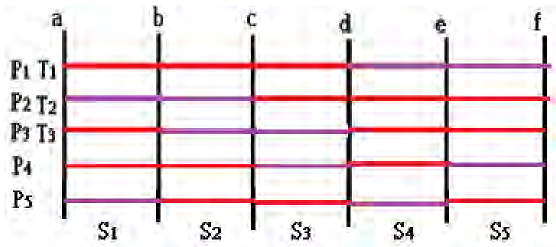
（2）4 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理 W_4^2= R，但是 P_1 必須多走 S_3+S_4，P_4 必須多走 S_3+S_4，這就不符合最短路徑標準。



（3）5 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理 W_5^3=R，但是，P_1 必須多走 S_4+S_5，P_4 必須多走 S_5，這就不符合最短路徑標準。



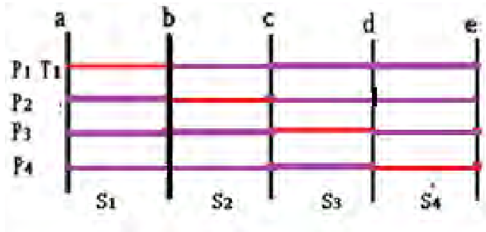
分析

W_3^1=R　　W_4^2= R

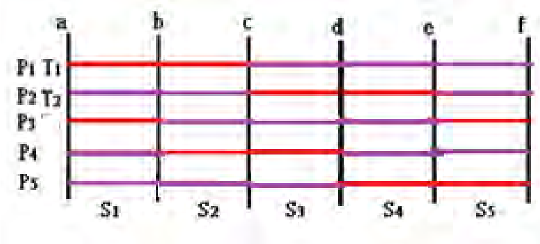
W_5^3= R　所以我們發現 $W_{x=2}$ 的一般式 =R

3、當 x=3 的情形

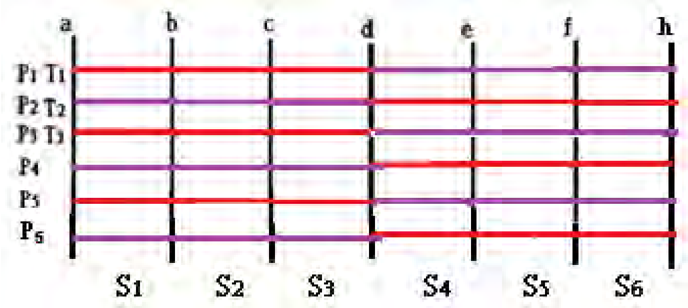
（1）4 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



（2）5 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



（3）6 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理 $W_4^1=R$ ， $W_5^2=R$ ， $W_6^3=R$

所以我們發現 $W_{x=3}$ 的一般式 =R

找出規律並將公式一般化

人數與物品數	公式
x＝1	$W_{x=1}$ 的一般式 =R
x＝2	$W_{x=2}$ 的一般式 =R
x＝3	$W_{x=3}$ 的一般式 =R
. .	. .
x＝x	W_x 的一般式 =R

證明

當 P 人 T 物時，因為 T<P，又每人工作量相等表示行走距離也相等，所以每人的 W_x 的一般式 =R

(二)以搬運貨物(負重)的過程為工作量的標準

我們先探討物品數量大於搬運人數

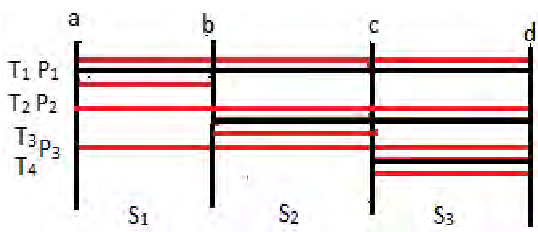
1、當 r=1 的情形

(1)2 人 3 物的情形：如前所探討

$$W_2^3=R+\frac{1}{2}R=\frac{3}{2}R$$

(2)3 人 4 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知與(一)途徑的規劃情形完全一樣，不同處是回程空手時不算工作量。因為



$P_1 = P_2 = P_3$，所以 $S_1 = S_2$

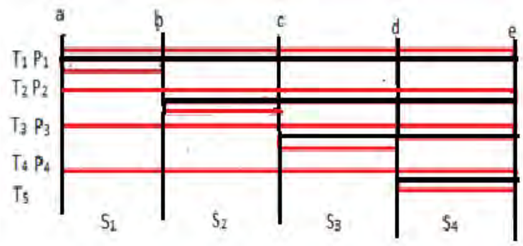
$= S_3 \Rightarrow W_3^4 = R + \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}R$

(3)4 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

同理　$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

所以　$W_4^5 = R + \frac{1}{4}R = \frac{5}{4}R$



分析

人數與物品數	公式
2 人 3 物	$W_2^3 = \frac{3}{2}R$
3 人 4 物	$W_3^4 = \frac{4}{3}R$
4 人 5 物	$W_4^5 = \frac{5}{4}R$
P 人 T 物	$W_{r=1} = \frac{P+1}{P}R$

2、當 r=2 的情形

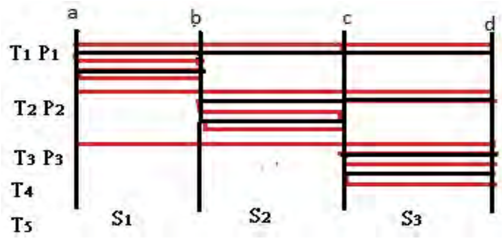
(1)3 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

因為 $P_1 = P_2 = P_3$，所以 S_1

$= S_2 = S_3 \Rightarrow W_3^5 = R + \frac{2}{3}R =$

$\frac{5}{3}R$



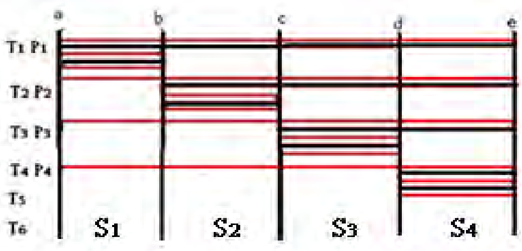
(2)4 人 6 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

與(1)同理　，

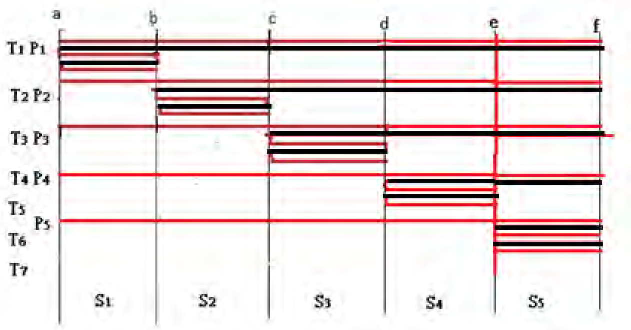
$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

所以 $W_4^6 = R + \frac{2}{4}R = \frac{6}{4}R$



(3)5 人 7 物的情形：

以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$，所以，$W_5^7=R+\frac{2}{5}R=\frac{7}{5}R$

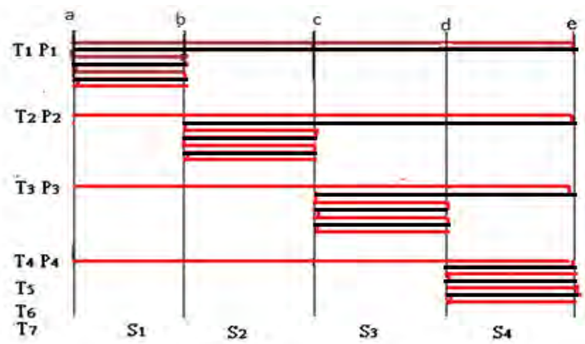
分析

R

人數與物品數	公式
3 人 5 物	$W_3^5=\frac{5}{3}R$
4 人 6 物	$W_4^6=\frac{6}{4}R$
5 人 7 物	$W_5^7=\frac{7}{5}R$
P 人 T 物	$W_{r=2}=\frac{P+2}{P}R$

3、當 r=3 的情形

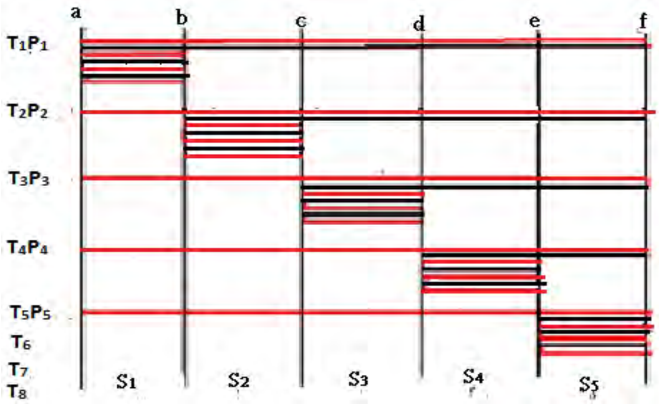
(1)4 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

同理，所以 $S_1=S_2=S_3=S_4 \Rightarrow W_4^7=R+\frac{3}{4}R=\frac{7}{4}R$

(2)5 人 8 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

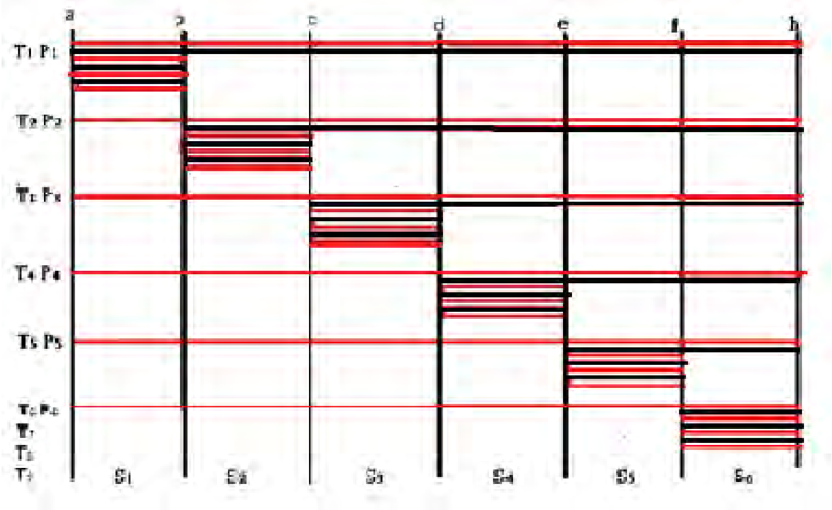


由圖中可知

同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$

所以，$W_5^8=R+\frac{3}{5}R=\frac{8}{5}R$

(3)6 人 9 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖由圖中可知



同理，$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$　所以　$W_6^9=R+\frac{3}{6}R=\frac{9}{6}R$

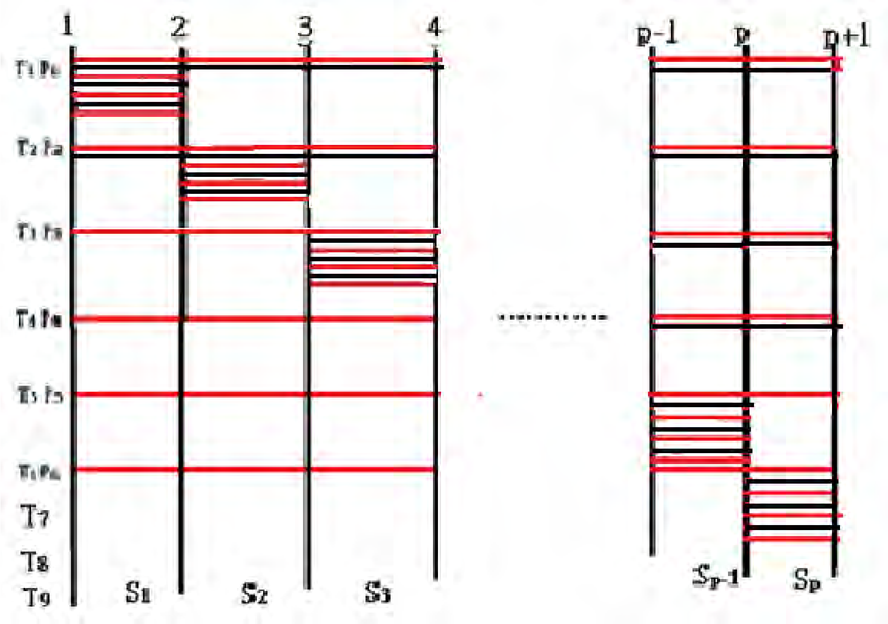
分析

人數與物品數	公式
4 人 7 物	$W_4^7=\frac{7}{4}R$
5 人 8 物	$W_5^8=\frac{8}{5}R$
6 人 9 物	$W_6^9=\frac{9}{6}R$
P 人 T 物	$W_{r=3}=\frac{P+3}{P}\ R$

找出規律並將公式一般化

人數與物品數	公式
4 人 7 物	$W_4^7=\frac{7}{4}R$
5 人 8 物	$W_5^8=\frac{8}{5}R$
6 人 9 物	$W_6^9=\frac{9}{6}R$
P 人 T 物	$W_{r=3}=\frac{P+3}{P}\ R$

證明



由圖形中可知，$Wr=W_P^T$，圖形中一定有 P+1 條分割線，P 個間格。T 個物品經過運送 M 次後，剩下 r 個物品，因為 T＞ P 時，T÷P=M………r。剩下的物品是先回後送，再交給下一位接送者。但回程不算工作量，所以，$rS_1=rS_2=rS_3=rS_4=$ ……………$rS_{p-1}=rS_p$， $S_1=S_2=S_3=S_4=$……… $S_{p-1}=S_p$，因為每個人的工作量相等，所我們取 P_1 的工作量

P_1 的 $Wr=RM+\frac{r}{P}R$，得證

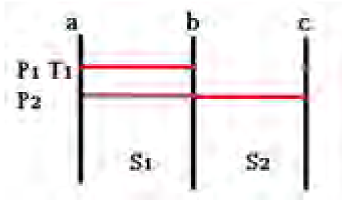
我們探討物品數量小於搬運人數

定義：x = P －T

1、當 x=1 的情形

(1) 2 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

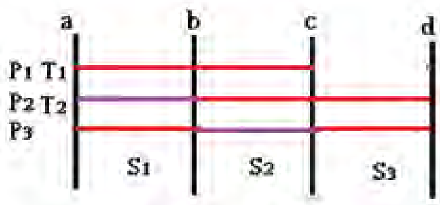


P_1 的 $W_2^1=S_1$，P_2 的 $W_2^1=S_2$，因為 P_1 的 $W_2^1=P_2$ 的 W_2^1，

所以 $S_1=S_2$ 且 $S_1+S_2=R$，$W_2^1=\frac{1}{2}R$，符合最短路徑標準。

(2) 3 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知



P_1 的 $W_3^2=S_1+S_2$

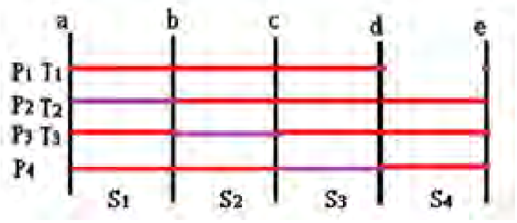
P_2 的 $W_3^2=S_2+S_3$

P_3 的 $W_3^2=S_1+S_3$

且 $S_1+S_2+S_3=R \Rightarrow S_1=S_2=S_3 \Rightarrow$

$W_3^2=\frac{2}{3}R$，符合最短路徑標準。

(3) 4 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



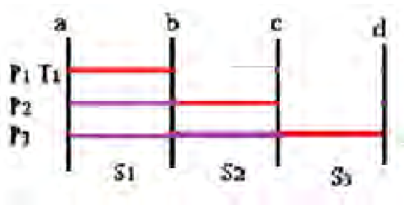
同理　$S_1=S_2=S_3=S_4 \Rightarrow W_4^3=\frac{3}{4}R$，符合最短路徑標準。

分析

人數與物品數	公式
2 人 1 物	$W_2^1=\frac{1}{2}R$
3 人 2 物	$W_3^2=\frac{2}{3}R$
4 人 3 物	$W_4^3=\frac{3}{4}R$
P 人 T 物	$W_{x=1}=\frac{P-1}{P}R$

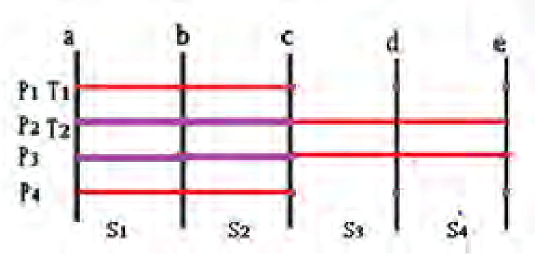
2、當 x=2 的情形

(1) 3 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



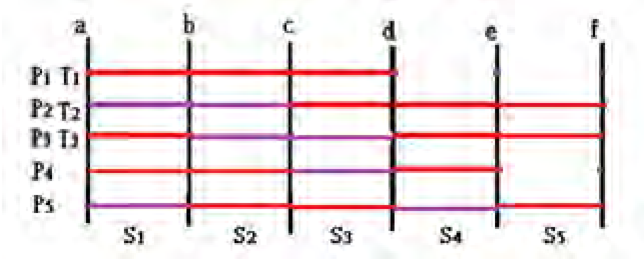
同理，　$S_1=S_2=S_3$　$W_3^1=\frac{1}{3}R$，符合最短路徑標準。

(2) 4 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4$　$W_4^2=\frac{2}{4}R$，符合最短路徑標準。

(3) 5 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



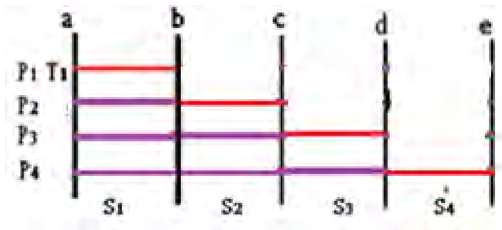
同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$　$W_5^3=\frac{3}{5}R$，符合最短路徑標準。

分析

人數與物品數	公式
3 人 1 物	$W_3^1=\frac{1}{3}R$
4 人 2 物	$W_4^2=\frac{2}{4}R$
5 人 3 物	$W_5^3=\frac{3}{5}R$
P 人 T 物	$W_{x=2}=\frac{P-2}{P}R$

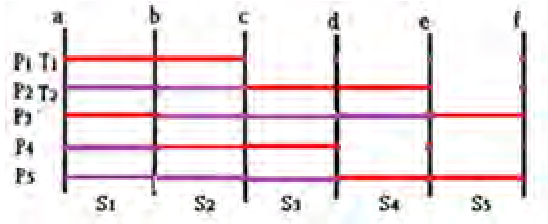
3、當 x=3 的情形

(1) 4 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



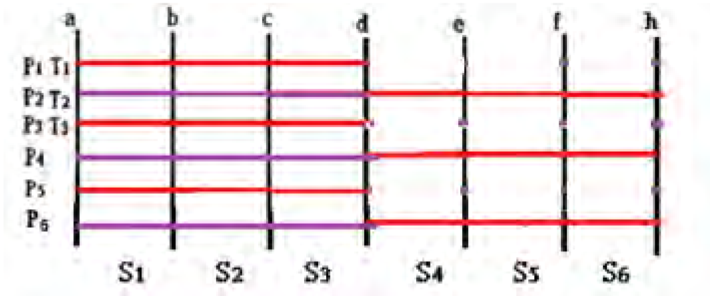
同理　$S_1=S_2=S_3=S_4$　$W_4^1=\frac{1}{4}R$

(2) 5 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$　$W_5^2=\frac{2}{5}R$

(3) 6 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$　$W_6^3=\frac{3}{6}R$

分析

人數與物品數	公式
4 人 1 物	$W_4^1=\frac{1}{4}R$
5 人 2 物	$W_5^2=\frac{2}{5}R$
6 人 3 物	$W_6^3=\frac{3}{6}R$
P 人 T 物	$W_{x=3}=\frac{P-3}{P}R$

找出規律並預測 Wr 的一般式

物品數－人數	公式
x=1	$W_{x=1}=\frac{P-1}{P}R$
x=2	$W_{x=2}=\frac{P-2}{P}R$
x=3	$W_{x=3}=\frac{P-3}{P}R$
. .	. .
x=x	$W_x=\frac{P-X}{P}R=\frac{T}{P}R$

證明

當 P 人 T 物時，因為 T<P，又每人工作量相等，表示物品總移動距離÷人數＝每人平均搬運物品的距離，所以每人的 $W_x=\frac{T}{P}R$ 得證。

問題爭議

兩組同學都按他們的標準平均分配每人工作量時，但是乙組同學認為甲組行走的距離雖然相等，但搬運物品(負重)的路程不同，所以不能稱之公平。甲組同學認為乙組同學搬運物品(負重)的路程相同，但分配中，空手走的路程長度不一樣，所以也不能稱之為公平。如何解決這個問題呢？

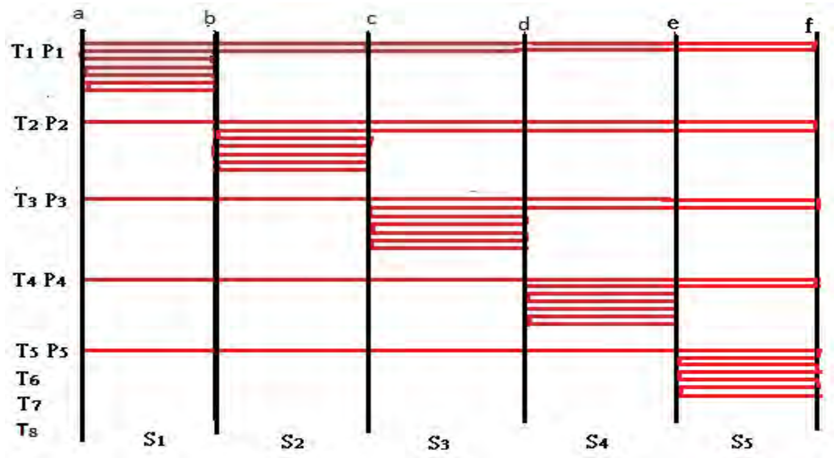
三、找出公平分配的方法

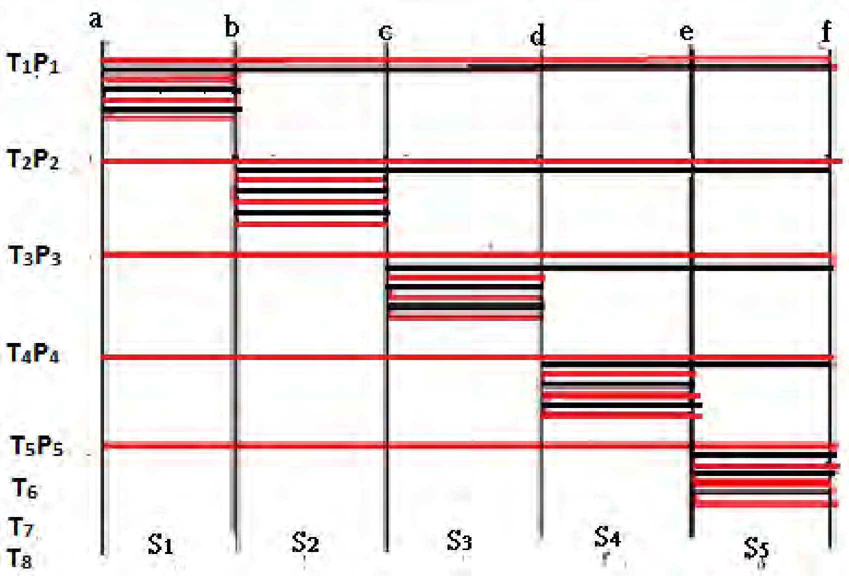
(一)想法一：輪調

物品數量大於人數時(T>P)

方法：以 5 人 8 物為例，不管以甲組同學的標準－行走的路程或乙組同學的標準－搬運物品的路程，只要 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 五人五次輪換工作崗位，$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5$。每人每個位置都輪一次，每人搬運物品的距離及空手移動的距離就會相等。符合兩組同學的要求，達 到他們所定義的「公平」。如下圖所示。

結論：採用<u>輪調</u>方法的前提一定是<u>總物品數是 T×P 的倍數</u>。假如原先的題目，限定一次輪回搬完，那就無法同時達到他們所定的「公平」標準了。



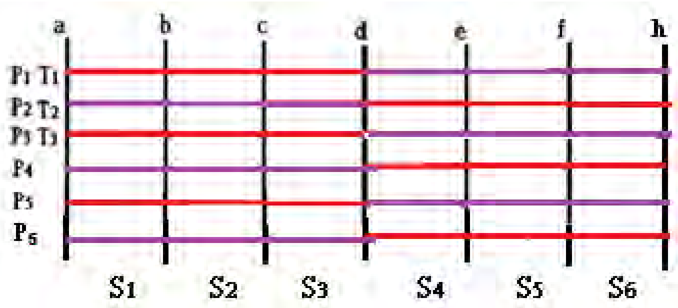


物品數量小於人數時(T<P)

1、以甲組同學的標準：行走的路程

W_x 的一般式 ＝R，每個人的搬運物品的路程及行走的路程都相等，

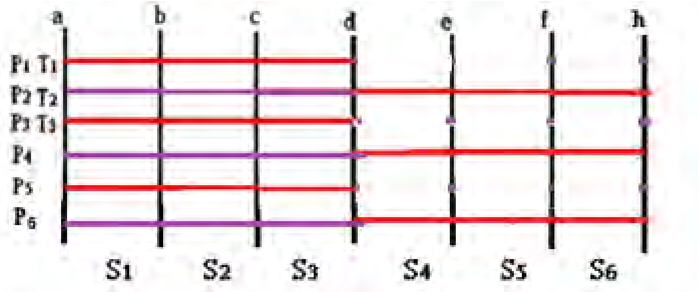
就沒有公不公平的爭議也不需輪調。



2、以乙組同學的標準：搬運物品的路程

方法一：只要放棄最短路徑的要求，情形就可以比照甲組同學方式，
也沒有爭議，也不需輪調。

方法二：輪調方法，原理同上。



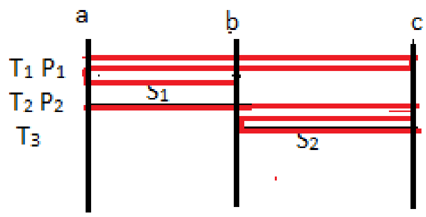
想法二：報酬

上面說明使用輪調的方法是有條件的，如果不符合條件者我就想出用報酬或金錢的方法解決問題。

物品數量大於人數時(T＞P)

1、以甲組同學的標準：行走的路程

方法：搬運物品(負重)時，給予較多的報酬，空手移動時，給予較少的報酬。假設搬運物品(負重)時，給予的報酬為 A，空手移動時，給予的報酬為 B。以 2 人 3 物為例：



P_1搬運物品(負重)的距離＝ $\frac{4}{3}R$

P_2搬運物品(負重)的距離＝ $\frac{5}{3}R$

P_1空手移動的距離＝R　　P_2空手移動的距離＝$\frac{2}{3}R$

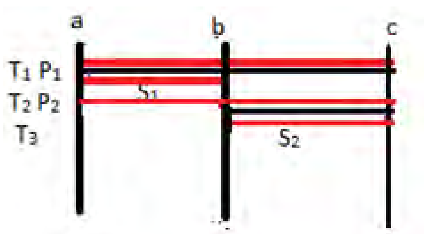
P_1的報酬＝$\frac{4}{3}R\times A+R\times B$　　P_2的報酬＝$\frac{2}{3}R\times A+\frac{5}{3}R\times B$

至於怎麼定 A、B 之間的比例，就決定 P_1、P_2對公平的感受了。

2、以乙組同學的標準：搬運物品的路程

方法：(1)原則上，乙組同學認為空手移動的距離不算工作量，不應該給予報酬，所以就無法用達到公平的目的。

(2)如果放寬標準，給予報酬，如甲組同學看法。假設搬運物品(負重)時，給予的報酬為 A，空手移動時，給予的報酬為 B。以 2 人 3 物為例：



P_1搬運物品(負重)的距離＝ $\frac{3}{2}$R

P_2搬運物品(負重)的距離＝ $\frac{3}{2}$R

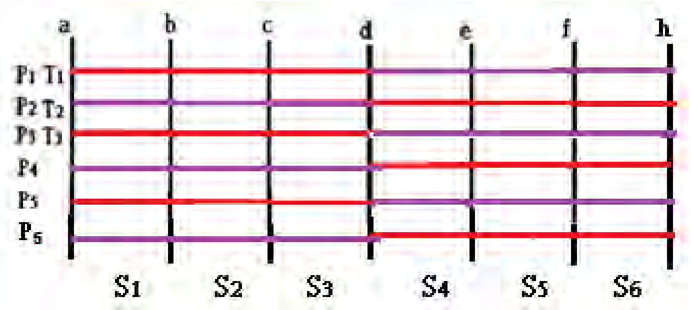
P_1空手移動的距離＝R，P_2空手移動的距離＝$\frac{1}{2}$ R

P_1的報酬＝$\frac{3}{2}$R×A＋R×B，P_2的報酬＝$\frac{3}{2}$R×A＋$\frac{1}{2}$R×B

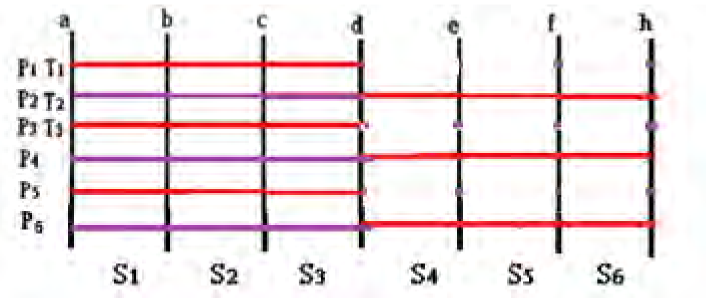
物品數量小於人數時(T＜P)

1、以甲組同學的標準：行走的路程

W_x 的一般式 ＝R，每個人的搬運物品的路程及行走的路程都相等，如果同上也使用報酬或金錢的方法，一樣可以達到公平的目的。



2、以乙組同學的標準：搬運物品的路程



同上之情形一樣。以 3 物 6 人為例，P_1、P_3、P_5 的報酬＝$\frac{1}{2}$R×A，P_2、P_4、P_6的報酬＝$\frac{1}{2}$R×A＋$\frac{1}{2}$R×B

至於怎麼定 A、B 之間的比例，就決定眾人對公平的感受了。

陸、結論：

一、我們對公平分配下了兩個明確的標準：（一）工作時每個人行走的距離相等。（二）工作時每個人搬運物品(負重)的距離相等。

二、在搬運的路徑規畫上，間格數都必須規劃成是人數 1 倍時，才能規劃出最短路徑。但是在以每個人行走的距離的標準下，當物品數小於人數時，無法規劃出最短路徑。

三、在以每個人行走的距離的標準時，當物品數大於人數時，公平分配每人工作量的 $W_r=2R[\frac{T}{P}]+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^{P}-1}$。當物品數小於人數時，公平分配每人工作量的 $W_x=R$。

四、在以每個人搬運物品(負重）的標準時，當物品數大於人數時，公平分配每人工作量的 $W_r=R[\frac{T}{P}]+\frac{r}{P}R$。當物品數小於人數時，公平分配每人工作量的 $W_x=\frac{P-X}{P}R=\frac{T}{P}R$。

五、當物品數大於人數時，在每個人行走的距離相等的定義下，第一個人和第二個人的交接點的距離，第二個人和第三個人的交接點的距離，依次下去，是一個等比數列，首項是第一段距離 S_1，公比是$(\frac{2r}{2r-1})$。在每個人搬運物品(負重）的距離相等的定義下，第一個人和第二個人的交接點的距離，第二個人和第三個人的交接點的距離，依次下去，是一個等差數列，首項是第一段距離 $S_1=\frac{1}{P}R$，公差是 $\frac{1}{P}R$。

六、當物品數小於人數時，在兩種標準下，第一個人和第二個人的交接點的距離，第二個人和第三個人的交接點的距離，依次下去，也是一個等差數列，首項是第一段距離 $S_1=\frac{1}{P}R$，公差是 $\frac{1}{P}R$。

七、不管哪一種標準下，表面看起來都公平，但不是負重距離不同，就是空手行走距離不同。因此我們提出一個解決兩個要求的方法：輪調。人員輪調完一次後，總行走距離及總負重距離就會相等，達到真正公平要求。但在實務上，希望輪調時間能短一點。所以人數、物品數量平分若干組後數值能小一點，讓工作的人能在短時間輪調完一次。這樣比較符合人性、公平性、可行性。但如果要一輪搬完，那此種方法就行不通。

八、第二個達到公平的方法，就是搬運物品時給的報酬或金錢較多，空手時給的報酬或金錢較少，利用報酬或金錢多少達到公平的目的。這個方法就一體適用，較符合社會實際的狀況。雖然大家都能認同此種方法，但是每個人對合理的報酬期望值不一定相同，所以大家對此方法的「公平」性的認知會有落差。

柒、心得與展望：

原先我們認為這是一個很簡單的數學平分問題，當我們發生爭議的時候，也一直認為可以用數學的方法解決。但是當同時要符合各項條件時(搬運物品的距離、空手移動的距離、最短路徑)，就會遇到無法同時兼顧的困難，尤其是一輪完成。雖然我們提出幾種方法解決問題，像輪調、報酬，也許還有其他的方法。最根本癥結在公平方法雖然可以量化處理，但公平的感覺，不一定每個人都有一樣的標準。後來我們研究由美國心理學家約翰·斯塔希·亞當斯（John Stacey Adams）於 1965 年提出公平理論，主張人們受激勵的動因來自人與人間的相互比較。比較的標準即投入與回報，運用在工作上，所謂投入泛指員工的付出的心力、時間、工作品質與成效等，而回報係指員工從工作得到的一切代價，例如薪水、獎金、尊重和肯定等包含在五大需求層次的滿足。員工會將自己對工作的投入相對於所得到的回報比例與其他人做主觀性的比較，作為公平或正義與否的基準。比較對象可能是自己的同事、家人、朋友或別家公司做相同職務的人等，依據比較後的知覺結果，調整自己的行為，以尋求一個公平的平衡點，讓自己的回報除以投入約當於他人的回報除以投入。因此從公平理論得知「公平」可能只是主觀的感覺，也可能是客觀的事實，並非是數學解題這麼單純(引用亞當斯的公平理論部分內容)。

展望我們將來，可以將研究問題擴展到企業成本分析，如何建立合理薪資的研究層面，讓現在社會上的勞資爭議能少一點。是不是可以用數學及電腦程式，公平、公開展現給勞資雙方合理討論出薪資的標準。以及研究造成台灣低薪的原因和解決之道，這是我們將來努力的目標。

捌、參考資料：

國小數學科各種版本　　康軒出版社　　南一出版社　　翰林出版社

國中數學科各種版本　　康軒出版社　　南一出版社　　翰林出版社

維基百科　　亞當斯的公平理論　　http://wiki.mbalib.com/zh-tw/

理性與感性:談公平理論　　出自《經理人雜誌》

https://www.managertoday.com.tw/glossary/view/33

平均還是平等？不同工作情境下的 分配公平感知　　孫情　龍長權　陳安濤

西南大學心理學部　　https://image.hanspub.org/Html/9-1130749_18385.htm

【評語】080403

1. 從自身的生活經驗出發，嘗試利用數學的概念探討「公平」分配工作的標準，是一個有趣的研究主題!

2. 作者先將現實生活的問題轉化成數學問題，從定義符號、簡化問題開始，進而將之一般化，然後有效的利用線段圖表徵來協助抽象思考、列式、與分析，有系統地從實例中，循序漸進地進行討論，並通過團隊的合作來尋求問題的解答，值得鼓勵。

作品海報

老師能公平一點分配我的工作嗎？

摘要

公平分配是日常生活中很重要的概念。本研究是利用數學的概念探討公平分配工作的標準，及在此標準之下如何分配工作？並深入探討增加人數、物品數量後，它的搬運策略，以及如何達到最短工作路徑的條件。我們最後的公平分配的標準是：一、行走相等的距離，二、負重時行走相等的距離，並以此標準探討工作分配的方法、運送方法及其規律和數學一般式。最後再找出公平分配的方法以解決兩組同學不同的看法。

壹、研究動機、確立問題：

我們在上資優班課程的時候，老師說要請我們幫忙搬重物，一共 7 名學生、9 個重物。每人搬完一物後，大家面面相覷，「誰要搬最後兩物？搬了，大家的工作量就不相等，這不公平啊！」大家心裡這樣想著。老師在旁邊說：「你們就這麼計較，哪好！把剛才的重物再搬回來，等你們想到公平的方法及符合最短路徑要求再搬吧！」。最後我們請求老師說我們先搬完，回去後再好好討論、研究，於是我們就這樣開始我們科展之途。首先 將問題一般化「有 P 個人要搬 T 個相同的物體(大小、形狀、重量都相同)，從 A 點搬到 B 點，距離 R 公尺。問如何走？如何分配工作量？才能達到公平及最短路徑的要求。」

貳、研究目的：

一、如何找出公平分配的標準？

二、探討在不同標準下如何公平分配工作量？

三、如何簡化問題、找出規律、找出公式，並將公式一般化，進一步證明其正確性？

四、如何找出公平分配的方法？

參、研究方法：簡化問題、利用圖表分析、歸納、推理、證明。

肆、定義符號：

R：代表單程的距離

P：代表工作人數

T：代表物品的數量

S_i：代表有 P 人時，將 R 分割成 S_1、S_2、S_3、S_4………S_n

M：代表每個人走完幾個 R，r：代表剩餘物品的數量

如果 T>P 時，T÷P=M………r

T=PM+r

W_P^T：代表在 T 物 P 人時，每人平均工作量

W_r：工作量的一般式，當 T>P

W_T：工作量的一般式，當 T<P

最短路徑的定義：由起點執行工作到終點的最短距離。工作結束後行走的距離就是多餘的路徑。另外的條件限制每人每次只能搬一個物品

伍、研究過程：

一、探討問題、找出標準

「有 P 個人要搬 T 個相同的物體(大小、形狀、重量都相同)，從 A 點搬到 B 點，距離 R 公尺。問如何走？如何分配工作量？才能達到公平及最短路徑的要求。」

(一) 簡化問題：先由兩人三物開始。

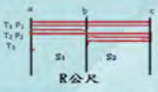
甲組學生提出公平的標準：

甲組學生認為只要兩人走的路程一樣長，就是公平，且沒有多餘的路程就是最短路徑。

探討路徑規畫與公平標準與最短路徑的關係

路徑規畫影響到每個人的工作量和公平性及是否符合最短路徑的條件。所以它是解決問題的第一步，我們只以 2 人 2 間格，2 人 3 間格，2 人 4 間格為例，加以比較說明。

1、2 人 2 間格



R公尺

P_1 將 T_1 由 a 帶至 c，再回 a 將 T_3 帶至 b，交給 P_2。

P_2 將 T_2 由 a 帶至 c，再回 b 將 T_3 帶至 c。

P_1 走的距離=$R+2S_1+S_2$，

P_2 走的距離=$R+2S_2$，

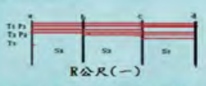
P_1 走的距離=P_2 走的距離，$R+2S_1+S_2=R+2S_2$，所以 $S_2=2S_1$，又

$S_1+S_2=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{3}\times R$，$S_2=\frac{2}{3}\times R$

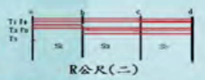
P_1 的 $W_2^3=2R+\frac{1}{3}R=\frac{7}{3}R$，$P_2$ 的 $W_2^3=R+\frac{2}{3}R\times 2=\frac{7}{3}R$

所以 P_1，P_2 的工作量都相等，所以達到公平的要求，且沒有多餘的路徑也符合最短路徑的條件。

2、2 人 3 間格



R公尺(一)



R公尺(二)

圖一中，P_1 走的距離=$R+2S_1+2S_2+S_3$，P_2 走的距離=$R+S_2+2S_3$，

$2S_1+2S_2+S_3=S_2+2S_3 \Rightarrow 2S_1+S_2=S_3$ 又 $S_1+S_2+S_3=R$

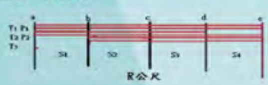
P_1 的 $W_2^3=2R+S_1+S_2=2R+R-S_3$，上一個 2 人 2 間格的結果

P_1 的 $W_2^3=2R+\frac{1}{3}R$，所以，$R-S_3\le\frac{1}{3}R$（最短路徑條件）

$\Rightarrow S_3\ge\frac{2}{3}R \Rightarrow S_1+S_2\le\frac{1}{3}R$ 又 $2S_1+S_2=S_3$，顯然矛盾。

圖二的情形與圖一相同，只是 P_1，P_2 對調。

3、2 人 4 間格



R公尺

由圖中可知

P_1 走的距離=$R+2S_1+2S_2+2S_3+S_4$

P_2 走的距離=$R+2S_2+2S_3+2S_4$

P_1 走的距離=P_2 走的距離，$R+2S_1+2S_2+2S_3+S_4=R+2S_2+2S_3+2S_4$，整理後 $S_4=2S_1$，所以 $W_2^3=2R+S_1+S_2+S_3$，又 $S_1+S_2+S_3=R-S_4$，代入 $W_2^3=3R-S_4$，同理，但(三)的 W_2^3 要小於、等於(一) W_2^3 才有意義(最短路徑要求)。

$3R-S_4\le 2R+\frac{1}{3}R \Rightarrow S_4\ge\frac{2}{3}R \Rightarrow$ 又 $S_4=2S_1$，但 $S_1+S_2+S_3+S_4=R$，

顯然矛盾。所以分割間格越多，搬運的路徑就越長，就不符合最短路徑要求。之後我就以第一種路徑規畫法來規劃搬運的路徑。

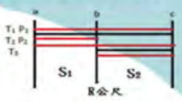
乙組同學提出的公平標準

乙組學生認為，只要兩人搬運物品(負重)的路程一樣長就是公平，沒有多餘的路程就是最短路徑，且不搬運物體，不能算工作量。

探討路徑規畫與公平標準與最短路徑的關係

1、2 人 2 間格

說明：圖形中的紅線表示搬運物品的路徑，黑線表示空手行走的路徑



R公尺

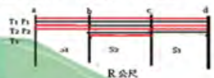
由圖可知

P_1 搬運物體的距離=$R+S_1$

P_2 搬運物體的距離=$R+S_2$，

所以 $S_1=\frac{1}{2}R$，$S_2=\frac{1}{2}R$，P_1 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_2 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_1，P_2 的 W 都相等，所以達到公平的要求，且沒有多餘的路徑也符合最短路徑的條件。但就行走的距離來說，$P_1=2R+\frac{1}{2}R$，$P_2=R+2S_2$。

2、2 人 3 間格



R公尺

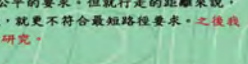
P_1 將 T_1 由 a 帶至 d，再回 a 將 T_3 帶至 b，交給 P_2，空手走至 c。P_2 將 T_2 由 a 帶至 c，再回 b 將 T_3 帶至 c 交給 P_1 代至 d。

P_1 搬運物體的距離=$R+S_1+S_3$

P_2 搬運物體的距離=$R+S_2$

所以，$S_1+S_3=S_2=\frac{1}{2}R$，P_1 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_2 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_1，P_2 的工作量都相等，所以達到公平的要求。但就行走的距離來說，$P_1=3R$，$P_2=R+2S_1+S_3$，他與乙組 2 人 2 間格的情形比較，就不符合最短路徑要求。

3、2 人 4 間格



R公尺

由圖可知

P_1 搬運的距離=$R+S_1+S_3$

P_2 搬運的距離=$R+S_2+S_4$

因為 P_1 搬運的距離=P_2 搬運的距離，所以 $S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}R$，$P_1$ 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，P_2 的 $W_2^3=\frac{3}{2}R$，

P_1，P_2 的工作量都相等，所以達到公平的要求。但就行走的距離來說，他與乙組 2 人 2 間格數的情形比較，就更不符合最短路徑要求。之後我就以第一種路徑規畫法來研究後續研究。

二、深究問題：

我們就分行走路程與搬運物品的路程(負重)兩種標準，先討論將人數、物品數增加，以探討計算工作量的計算否有規律性？是否可以寫成數學一般式？

(一)以行走路程為工作量的標準

我們先探討物品數量大於搬運人數

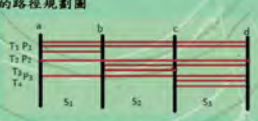
定義：r =T−P

1、當 r=1 的情形

(1)2 人 3 物的情形：如前所探討

結果一 $W_2^3=2R+S_1 \Rightarrow S_1=\frac{1}{3}R \Rightarrow W_2^3=2R+\frac{1}{3}R=\frac{7}{3}R$

(2)3 人 4 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=$R+2S_1+S_2+S_3$

P_2 走的距離=$R+2S_2+S_3$

P_3 走的距離=$R+2S_3$

因為他們工作量相等，所以，$R+2S_1+S_2+S_3=R+2S_2+S_3=R+2S_3$ 且 $S_1+S_2+S_3=R$。

整理後我們發現 $2S_1=S_2$，$2S_2=S_3 \Rightarrow S_3=2S_2=4S_1$

代入 R 式 $S_1+2S_1+4S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{7}R$，$S_2=\frac{2}{7}R$，$S_3=\frac{4}{7}R$

結果二 $W_3^4 W_1=2R+S_1=2R+\frac{1}{7}R=\frac{15}{7}R$

(3)4 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

P_1 走的距離=$R+2S_1+S_2+S_3+S_4$

P_2 走的距離=$R+2S_2+S_3+S_4$

P_3 走的距離=$R+2S_3+S_4$

P_4 走的距離=$R+2S_4$

且 $S_1+S_2+S_3+S_4=R$，因為他們工作量相等，所以，$R+2S_1+S_2+S_3+S_4=R+2S_2+S_3+S_4=R+2S_3+S_4=R+2S_4$

$\Rightarrow 2S_1+S_2+S_3+S_4=2S_2+S_3+S_4=2S_3+S_4=2S_4$

整理後，可得

$2S_1=S_2$ 代入上式 $\Rightarrow 4S_1+S_3+S_4=2S_3+S_4 \Rightarrow S_3=4S_1$

代入上式 $\Rightarrow S_4=8S_1$ 代入 R 式

$S_1+S_2+S_3+S_4=R$ $S_1+2S_1+4S_1+8S_1=R$ $S_1=\frac{1}{15}R$

$S_1=\frac{1}{15}R$，$S_2=\frac{2}{15}R$，$S_3=\frac{4}{15}R$，$S_4=\frac{8}{15}R$

結果三 $W_4^5=2R+\frac{1}{15}R=\frac{31}{15}R$

分析

人數與物品數	公式
2 人 3 物	$S_1+2S_1=R$
3 人 4 物 時	$S_1+2S_1+4S_1=R$
4 人 5 物	$S_1+2S_1+4S_1+8S_1=R$
P 人 P+1 物	$S_1+2S_1+4S_1+8S_1+16S_1\cdots\cdots 2^{P-1}S_1=R$

將公式化簡

$S_1(1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{P-1})=R$

$(1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{P-1})$ 是一個等比數列

設 N 是它的和，$1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{P-1}=N$

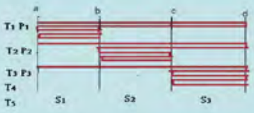
$2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{P-1}+2^P=2N$，兩式相減

$2^P-1=N \Rightarrow (2^P-1)S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{(2^P-1)}R$

所以我們發現 $W_{r=1}$ 的一般式 = $2RM+\frac{1}{(2^P-1)}R$ (M=1)

2、當 r=2 的情形

(1)3 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=$R+4S_1+S_2+S_3$，

P_2 走的距離=$R+4S_2+S_3$

P_3 走的距離=$R+4S_3$

因為他們工作量相等，所以，$R+4S_1+S_2+S_3=R+4S_2+S_3=R+4S_3$ 且 $S_1+S_2+S_3=R$

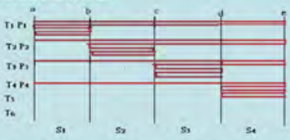
整理後我們發現

$4S_1=3S_2$，$4S_2=3S_3 \Rightarrow S_2=\frac{4}{3}S_1 \Rightarrow S_3=\frac{4}{3}S_2=\frac{16}{9}S_1$

$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{9}{37}R$，$S_2=\frac{12}{37}R$，$S_3=\frac{16}{37}R$

結果四 $W_3^5=2R+3S_1=2R+\frac{27}{37}R=\frac{101}{37}R$

(2) 4 人 6 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=$R+4S_1+S_2+S_3+S_4$

P_2 走的距離=$R+4S_2+S_3+S_4$，

P_3 走的距離=$R+4S_3+S_4$

P_4 走的距離=$R+4S_4$

因為他們工作量相等，所以，$R+4S_1+S_2+S_3+S_4=R+4S_2+S_3+S_4=R+4S_3+S_4=R+4S_4$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4=R$，整理後我們發現

$4S_1=3S_2$，$4S_2=3S_3$，$4S_3=3S_4 \Rightarrow S_2=\frac{4}{3}S_1 \Rightarrow$

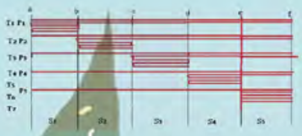
$S_3=\frac{16}{9}S_1 \Rightarrow S_4=\frac{64}{27}S_1$

$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{27}{175}R$，$S_2=\frac{36}{175}R$，

$S_3=\frac{48}{175}R$，$S_4=\frac{64}{175}R$

結果五 $W_4^6=2R+3S_1=2R+\frac{81}{175}R=\frac{431}{175}R$

(3)5 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=$R+4S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

P_2 走的距離=$R+4S_2+S_3+S_4+S_5$

P_3 走的距離=$R+4S_3+S_4+S_5$

P_4 走的距離=$R+4S_4+S_5$，

P_5 走的距離=$R+4S_5$，因為他們工作量相等，所以，$R+4S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R+4S_2+S_3+S_4+S_5=R+4S_3+S_4+S_5=R+4S_4+S_5=R+4S_5$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R$

整理後我們發現

$4S_1=3S_2$，$4S_2=3S_3$，$4S_3=3S_4 \Rightarrow S_2=\frac{4}{3}S_1 \Rightarrow$

$S_3=\frac{16}{9}S_1 \Rightarrow S_4=\frac{64}{27}S_1 \Rightarrow S_5=\frac{256}{81}S_1$

$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1+\frac{256}{81}S_1=R \Rightarrow S_1=\frac{81}{781}R$，$S_2=\frac{108}{781}R$，

$S_3=\frac{144}{781}R$，$S_4=\frac{192}{781}R$，$S_5=\frac{256}{781}R$

結果六 $W_5^7=2R+3S_1=2R+\frac{243}{781}R=\frac{1805}{781}R$

分析

人數與物品數	公式
3 人 5 物	$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1=R$
4 人 6 物	$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1=R$
5 人 7 物	$S_1+\frac{4}{3}S_1+\frac{16}{9}S_1+\frac{64}{27}S_1+\frac{256}{81}S_1=R$
P 人 P+2 物	$[1+\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^3+(\frac{4}{3})^4+\cdots\cdots(\frac{4}{3})^{P-1}]S_1=R$

將公式化簡

設 $N=[1+\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^3+(\frac{4}{3})^4+\cdots\cdots(\frac{4}{3})^{P-1}]$

$\frac{4}{3}N=[\frac{4}{3}+(\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3})^3+(\frac{4}{3})^4+\cdots\cdots+(\frac{4}{3})^P]$

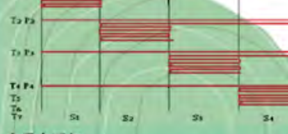
兩式相減 $\frac{1}{3}N=(\frac{4}{3})^P-1 \Rightarrow N=3\times[(\frac{4}{3})^P-1]$

$3\times[(\frac{4}{3})^P-1]S_1=R$ $S_1=\frac{1}{3}\times\frac{R}{(\frac{4}{3})^P-1}$

所以我們發現 $W_{r=2}$ 的一般式=$2RM+3S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{4}{3})^P-1}$ (M=1)

3、當 r=3 的情形

(1) 4 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離=$R+6S_1+S_2+S_3+S_4$

P_2 走的距離=$R+6S_2+S_3+S_4$

P_3 走的距離=$R+6S_3+S_4$

P_4 走的距離=$R+6S_4$

因為他們工作量相等，所以，$R+6S_1+S_2+S_3+S_4=R+6S_2+S_3+S_4=R+6S_3+S_4=R+6S_4$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4=R$

整理後我們發現

$6S_1=5S_2$，$6S_2=5S_3$，$6S_3=5S_4$

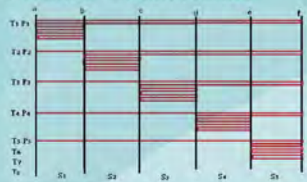
$S_2=\frac{6}{5}S_1 \Rightarrow S_3=\frac{36}{25}S_1 \Rightarrow S_4=\frac{216}{125}S_1$

$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1=R$

$S_1=\frac{125}{671}R \Rightarrow S_2=\frac{150}{671}R \Rightarrow S_3=\frac{180}{671}R \Rightarrow S_4=\frac{216}{671}$

結果七 $W_4^7=2R+5S_1=2R+\frac{125}{671}R=\frac{1967}{671}R$

(2) 5 人 8 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離 $=R+6(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5)$

P_2 走的距離 $=R+6S_2+S_3+S_4+S_5$

P_3 走的距離 $=R+6S_3+S_4+S_5$

P_4 走的距離 $=R+6S_4+S_5$

P_5 走的距離 $=R+6S_5$

因為他們工作量相等，所以，$R+6(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5)=R+6S_2+S_3+S_4+S_5=R+6S_3+S_4+S_5=R+6S_4+S_5=R+6S_5$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R$

整理後我們發現

$6S_1=5S_2$，$6S_2=5S_3$，$6S_3=5S_4$，$6S_4=5S_5 \Rightarrow S_2=\frac{6}{5}S_1 \Rightarrow$

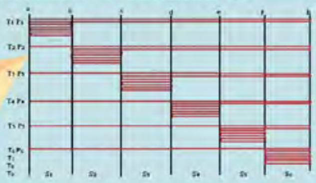
$S_3=\frac{36}{25}S_1 \Rightarrow S_4=\frac{216}{125}S_1 \Rightarrow S_5=\frac{1296}{625}S_1$

$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1=R$，$S_1=\frac{625}{4651}R \Rightarrow$

$S_2=\frac{750}{4651}R \Rightarrow S_3=\frac{1500}{4651}R \Rightarrow S_4=\frac{1800}{4651} \Rightarrow S_5=\frac{2160}{4651}$

結果八 $W_5^8=2R+5S_1=2R+\frac{3125}{4651}R=\frac{12427}{4651}R$

(3) 6 人 9 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



由圖中可知

P_1 走的距離 $=R+6(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6)$，$P_2$ 走的距離 $=R+6S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$，P_3 走的距離 $=R+6S_3+S_4+S_5+S_6$，P_4 走的距離 $=R+6S_4+S_5+S_6$，P_5 走的距離 $=R+6S_5+S_6$，P_6 走的距離 $=R+6S_6$，因為他們工作量相等，所以，$R+6(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6)=R+6S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=R+6S_3+S_4+S_5+S_6=R+6S_4+S_5+S_6=R+6S_5+S_6=R+6S_6$ 且 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=R$。

整理後我們發現

$6S_1=5S_2$，$6S_2=5S_3$，$6S_3=5S_4$，$6S_4=5S_5$，$6S_5=5S_6$

$\Rightarrow S_2=\frac{6}{5}S_1 \Rightarrow S_3=\frac{36}{25}S_1 \Rightarrow S_4=\frac{216}{125}S_1 \Rightarrow$

$S_5=\frac{1296}{625}S_1 \Rightarrow S_6=\frac{7776}{3125}S_1$

$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1+\frac{7776}{3125}S_1=R$

$S_1=\frac{3125}{31031}R \Rightarrow S_2=\frac{3750}{31031}R \Rightarrow S_3=\frac{4500}{31031}R \Rightarrow S_4=\frac{5400}{31031}$

$\Rightarrow S_5=\frac{6480}{31031}R \Rightarrow S_6=\frac{7776}{31031}R$

結果九 $W_6^9=2R+5S_1=2R+\frac{3125}{31031}R=\frac{77607}{31031}R$

分析

人數與物品數	公式
4 人 7 物	$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1=R$
5 人 8 物	$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1=R$
6 人 9 物	$S_1+\frac{6}{5}S_1+\frac{36}{25}S_1+\frac{216}{125}S_1+\frac{1296}{625}S_1+\frac{7776}{3125}S_1=R$
P 人 P+3 物	$[1+\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P-1}]S_1=R$

將公式化簡

$[1+\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P-1}]S_1=R$

設 $N=[1+\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P-1}]$

$\frac{6}{5}\times N=[\frac{6}{5}+(\frac{6}{5})^2+(\frac{6}{5})^3+(\frac{6}{5})^4+\cdots\cdots(\frac{6}{5})^{P}]$

兩式相減 $\frac{1}{5}N=(\frac{6}{5})^P-1 \Rightarrow N=5\times[(\frac{6}{5})^P-1]$

$5\times[(\frac{6}{5})^P-1]S_1=R$　$S_1=\frac{1}{5}\times\frac{R}{(\frac{6}{5})^P-1}$　所以我們發現

$W_{r=3}$ 的一般式 $=2RM+5S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{6}{5})^P-1}$ (M=1)

找出規律並將公式一般化

物品數－人數	公式
T－P=1	$2RM+S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{2}{1})^P-1}$
T－P=2	$2RM+3S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{4}{3})^P-1}$
T－P=3	$2RM+5S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{6}{5})^P-1}$
. .	. .
T－P=r	$2RM+(2r-1)S_1=2RM+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^P-1}$ (M=1)

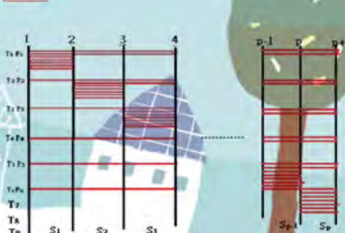
從上面公式可以發現規律性在 $(\frac{2}{1})^P$、$(\frac{4}{3})^P$、$(\frac{6}{5})^P\cdots\cdots$

我可以預測 W_4 是 $(\frac{8}{7})^P$，W_5 是 $(\frac{10}{9})^P$，W_6 是 $(\frac{12}{11})^P\cdots\cdots$

Wr 的分子是 2r，分母是 2r－1。我們預測 W r 的一般式為

$W_r=2RM+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^P-1}=2R[\frac{T}{P}]+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^P-1}$

證明



由圖形中可知，$W_r=W_P^T$，圖形中一定有 P+1 條分割線，P 個間格，T 個物品經過運送 M 次後，剩下 r 個物品，因為 T＞P 時，$T\div P=M\cdots\cdots r$，剩下的物品是先回後送，再交給下一位接送者，所以，$2r(S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p)=2r(S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots+S_p)=2r(S_3+S_4+S_5+\cdots\cdots+S_p)=2r(S_4+S_5+S_6\cdots\cdots+S_p)=\cdots\cdots=2rS_p$

化簡後得

$2rS_1=(2r-1)S_2$，$2rS_2=(2r-1)S_3$，$2rS_3=(2r-1)S_4$，$2rS_4=(2r-1)S_5$，$\cdots\cdots 2rS_{p-1}=(2r-1)S_p$

整理後得

$S_2=\frac{2r}{2r-1}S_1$，$S_3=\frac{2r}{2r-1}S_2$，$S_4=\frac{2r}{2r-1}S_3$，

$S_5=\frac{2r}{2r-1}S_4\cdots\cdots$，$S_p=\frac{2r}{2r-1}S_{p-1}$

$S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots\cdots+S_p=R$

$S_1+\frac{2r}{2r-1}S_1+(\frac{2r}{2r-1})^2S_1+(\frac{2r}{2r-1})^3S_1+\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p-1}S_1=R$

$[1+\frac{2r}{2r-1}+(\frac{2r}{2r-1})^2+(\frac{2r}{2r-1})^3+\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p-1}]S_1=R$

令 $N=[1+\frac{2r}{2r-1}+(\frac{2r}{2r-1})^2+(\frac{2r}{2r-1})^3+\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p-1}]$

$\frac{2r}{2r-1}N=[\frac{2r}{2r-1}+(\frac{2r}{2r-1})^2+(\frac{2r}{2r-1})^3+(\frac{2r}{2r-1})^4\cdots\cdots+(\frac{2r}{2r-1})^{p}]$

兩式相減

$(\frac{2r}{2r-1}-1)N=(\frac{2r}{2r-1})^p-1$　化簡 $\Rightarrow \frac{1}{2r-1}N=(\frac{2r}{2r-1})^p-1$

$N=(2r-1)[(\frac{2r}{2r-1})^p-1]$，$S_1N=R \Rightarrow S_1=\frac{1}{(2r-1)}\times\frac{R}{[(\frac{2r}{2r-1})^p-1]}$

因為每個人的工作量相等，所我們取 P_1 的工作量

$W_r=2RM+(2r-1)\times\frac{1}{(2r-1)}\times\frac{R}{[(\frac{2r}{2r-1})^p-1]}=2RM+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^p-1}$　得證

我們探討物品數量小於搬運人數

定義：x = P －T

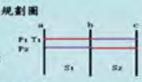
1、當 x=1 的情形

(1) 2 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

P_1、P_2 的搬運路程都等於 R，

$W_2^1=R$，但是 P_1 必須多走 S_2，這就不符合最短路徑標準。

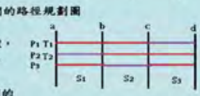


(2) 3 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

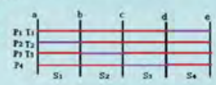
P_1、P_2、P_3 的搬運路程都等於 R，

$W_3^2=R$，但是 P_1 必須多走 S_3，這就不符合最短路徑標準。



(3) 4 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理　$W_4^3=R$，但是 P_1 必須多走 S_4，這就不符合最短路徑標準。



分析

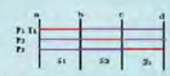
$W_2^1=R$，$W_3^2=R$，$W_4^3=R$

所以我們發現　$W_{x=1}$ 的一般式 $=R$

2、當 x=2 的情形

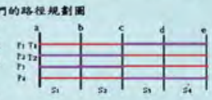
(1) 3 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理　$W_3^1=R$，但是 P_1 必須多走 S_2+S_3，P_2 必須多走 S_3，這就不符合最短路徑標準。



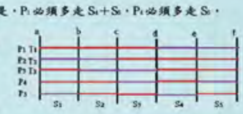
(2) 4 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理　$W_4^2=R$，但是 P_1 必須多走 S_3+S_4，P_2 必須多走 S_3+S_4，這就不符合最短路徑標準。



(3) 5 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

同理　$W_5^3=R$，但是，P_1 必須多走 S_4+S_5，P_2 必須多走 S_5，這就不符合最短路徑標準。



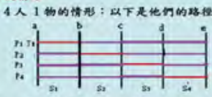
分析

$W_3^1=R$　$W_4^2=R$

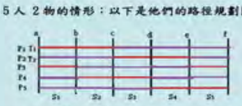
$W_5^3=R$　所以我們發現　$W_{x=2}$ 的一般式 $=R$

3、當 x=3 的情形

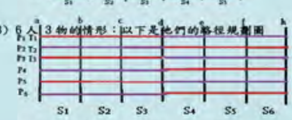
(1) 4 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



(2) 5 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



(3) 6 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理 $W_4^1=R$，$W_5^2=R$，$W_6^3=R$

所以我們發現　$W_{x=3}$ 的一般式 $=R$

找出規律並將公式一般化

人數－物品數	公式
P－T=1	$W_{x=1}$ 的一般式 $=R$
P－T=2	$W_{x=2}$ 的一般式 $=R$
P－T=3	$W_{x=3}$ 的一般式 $=R$
. .	. .
P－T=x	W_x 的一般式 $=R$

證明

當 P 人 T 物時，因為 T<P，又每人工作量相等表示行走距離也相等，，所以每個人的 W_x 的一般式都必須是 R

(二)以搬運貨物(負重)的過程為工作量的標準

我們先探討物品數量大於搬運人數

1、當 r=1 的情形

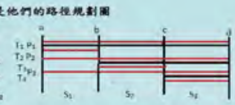
(1)2 人 3 物的情形：如前所探討

$W_2^3=R+\frac{1}{2}R=\frac{3}{2}R$

(2)3 人 4 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

與(一)途徑的規劃情形完全一樣，不同處是回程空手時不算工作量，因為 $P_1=P_2=P_3$，所以 $S_1=S_2=S_3 \Rightarrow W_3^4=R+\frac{1}{3}R=\frac{4}{3}R$

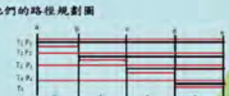


(3)4 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

同理　$S_1=S_2=S_3=S_4$

所以　$W_4^5=R+\frac{1}{4}R=\frac{5}{4}R$



分析

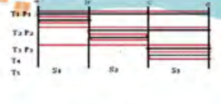
人數與物品數	公式
2 人 3 物	$W_2^3=\frac{3}{2}R$
3 人 4 物	$W_3^4=\frac{4}{3}R$
4 人 5 物	$W_4^5=\frac{5}{4}R$
P 人 T 物	$W_{r=1}=\frac{P+1}{P}R$

2、當 r=2 的情形

(1)3 人 5 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

因為 $P_1=P_2=P_3$，所以 $S_1=S_2=S_3$，$W_3^5=R+\frac{2}{3}R=\frac{5}{3}R$

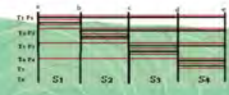


(2)4 人 6 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

與(1)同理，$S_1=S_2=S_3=S_4$

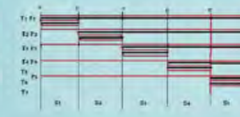
所以 $W_4^6=R+\frac{2}{4}R=\frac{6}{4}R$



(3)5 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$，所以，$W_5^7=R+\frac{2}{5}R=\frac{7}{5}R$



分析

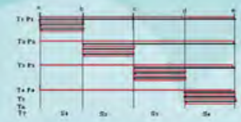
人數與物品數	公式
3 人 5 物	$W_3^5=\frac{5}{3}R$
4 人 6 物	$W_4^6=\frac{6}{4}R$
5 人 7 物	$W_5^7=\frac{7}{5}R$
P 人 T 物	$W_{r=2}=\frac{P+2}{P}R$

3、當 r=3 的情形

(1)4 人 7 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

同理，所以 $S_1=S_2=S_3=S_4 \Rightarrow W_4^7=R+\frac{3}{4}R=\frac{7}{4}R$

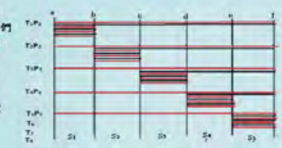


(2)5 人 8 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

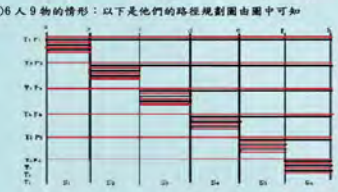
由圖中可知

同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$

所以，$W_5^8=R+\frac{3}{5}R=\frac{8}{5}R$



(3)6 人 9 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖由圖中可知



同理，$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$　所以　$W_6^9=R+\frac{3}{6}R=\frac{9}{6}R$

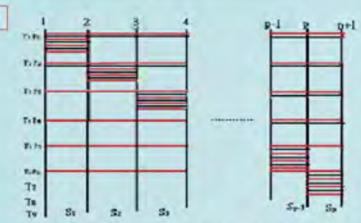
分析

人數與物品數	公式
4 人 7 物	$W_4^7=\frac{7}{4}R$
5 人 8 物	$W_5^8=\frac{8}{5}R$
6 人 9 物	$W_6^9=\frac{9}{6}R$
P 人 T 物	$W_{r=3}=\frac{P+3}{P}R$

找出規律並將公式一般化

人數－物品數	公式
P－T=1	$W_{r=1}=\frac{P+1}{P}R$
P－T=2	$W_{r=2}=\frac{P+2}{P}R$
P－T=3	$W_{r=3}=\frac{P+3}{P}R$
P－T=r	$W_r=\frac{P+r}{P}R$　(M=1)

證明



由圖形中可知，$W_r=W_P^T$，圖形中一定有 P+1 條分割線，P 個間格，T 個物品經過運送 M 次後，剩下 r 個物品，因為 T＞P 時，$T\div P=M\cdots\cdots r$，剩下的物品是先回後送，再交給下一位接送者，但回程不算工作量，所以，$rS_1=rS_2=rS_3=rS_4=\cdots\cdots rS_{p-1}=rS_p$，$S_1=S_2=S_3=S_4=\cdots\cdots S_{p-1}=S_p$，因為每個人的工作量相等，所我們取 P_1 的工作量

P_1 的 $W_r=RM+\frac{r}{P}R$，得證

我們探討物品數量小於搬運人數

定義：x = P －T

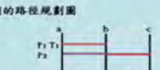
1、當 x=1 的情形

(1) 2 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

P_1 的 $W_2^1=S_1$，P_2 的 $W_2^1=S_2$，因為 P_1 的 $W_2^1=P_2$ 的 W_2^1，

所以 $S_1=S_2$ 且 $S_1+S_2=R$，$W_2^1=\frac{1}{2}R$，符合最短路徑標準。



(2) 3 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

由圖中可知

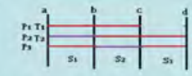
P_1 的 $W_3^2=S_1+S_2$

P_2 的 $W_3^2=S_1+S_3$

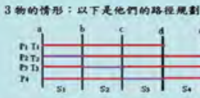
P_3 的 $W_3^2=S_2+S_3$

且 $S_1+S_2+S_3=R \Rightarrow S_1=S_2=S_3 \Rightarrow$

$W_3^2=\frac{2}{3}R$，符合最短路徑標準。



(3) 4 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4 \Rightarrow W_4^3=\frac{3}{4}R$，符合最短路徑標準。

分析

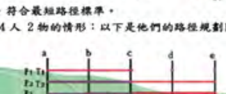
人數與物品數	公式
2 人 1 物	$W_2^1=\frac{1}{2}R$
3 人 2 物	$W_3^2=\frac{2}{3}R$
4 人 3 物	$W_4^3=\frac{3}{4}R$
P 人 T 物	$W_{x=1}=\frac{P-1}{P}R$

2、當 x=2 的情形

(1) 3 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖

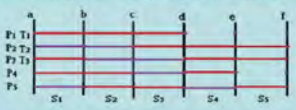
同理，$S_1=S_2=S_3$ $W_3^1=\frac{1}{3}R$，符合最短路徑標準。

(2) 4 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4$　$W_4^2=\frac{2}{4}R$，符合最短路徑標準。

(3) 5 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



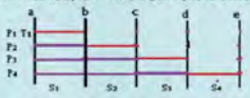
同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$　$W_5^3=\frac{3}{5}R$，符合最短路徑標準。

分析

人數與物品數	公式
3 人 1 物	$W_3^1=\frac{1}{3}R$
4 人 2 物	$W_4^2=\frac{2}{4}R$
5 人 3 物	$W_5^3=\frac{3}{5}R$
P 人 T 物	$W_{x=2}=\frac{P-2}{P}R$

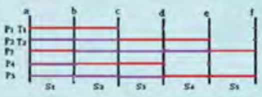
3、當 x=3 的情形

(1) 4 人 1 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



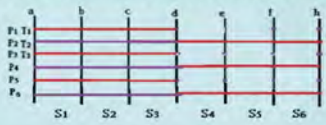
同理　$S_1=S_2=S_3=S_4$　$W_4^1=\frac{1}{4}R$

(2) 5 人 2 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$　$W_5^2=\frac{2}{5}R$

(3) 6 人 3 物的情形：以下是他們的路徑規劃圖



同理　$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$　$W_6^3=\frac{3}{6}R$

分析

人數與物品數	公式
4 人 1 物	$W_4^1=\frac{1}{4}R$
5 人 2 物	$W_5^2=\frac{2}{5}R$
6 人 3 物	$W_6^3=\frac{3}{6}R$
P 人 T 物	$W_{x=3}=\frac{P-3}{P}R$

找出規律並預測 W_x 的一般式

人數－物品數	公式
P－T＝1	$W_{x=1}=\frac{P-1}{P}R$
P－T＝2	$W_{x=2}=\frac{P-2}{P}R$
P－T＝3	$W_{x=3}=\frac{P-3}{P}R$
⋮	⋮
P－T＝x	$W_x=\frac{P-X}{P}R=\frac{T}{P}R$

證明

當 P 人 T 物時，因為 T<P，又每人工作量相等，表示物品總移動距離÷人數＝每人平均搬運物品的距離，所以每人的 $W_x=\frac{T}{P}R$ 得證。

問題爭議

兩組同學都按他們的標準平均分配每人工作量時，但是乙組同學認為甲組行走的距離雖然相等，但搬運物品(負重)的路程不同，所以不能稱之公平。甲組同學認為乙組同學搬運物品(負重)的路程相同，但分配中，空手走的路程長度不一樣，所以也不能稱之為公平。如何解決這個問題呢？

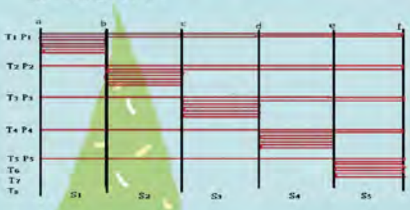
三、找出公平分配的方法

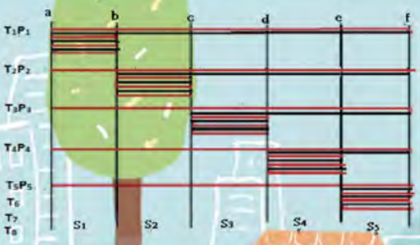
(一)想法一：輪調

物品數量大於人數時(T>P)

方法：以 5 人 8 物為例，不管以甲組同學的標準－行走的路程或乙組同學的標準－搬運物品的路程，只要 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 五人五次輪換工作崗位，$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_4 \Rightarrow P_5$。每人每個位置都輪一次，每人搬運物品的距離及空手移動的距離就會相等。符合兩組同學的要求，達到他們所定義的「公平」。如下圖所示。

結論：採用輪調方法的前提一定是總物品數是 T×P 的倍數。假如原先的題目，限定一次輪回搬完，那就無法同時達到他們所定的「公平」標準了。

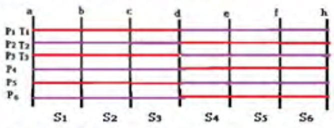




物品數量小於人數時(T<P)

1、以甲組同學的標準：行走的路程

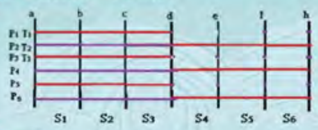
W_x 的一般式 ＝R，每個人的搬運物品的路程及行走的路程都相等，就沒有公不公平的爭議也不需輪調。



2、以乙組同學的標準：搬運物品的路程

方法一：只要放棄最短路徑的要求，情形就可以比照甲組同學方式，也沒有爭議，也不需輪調。

方法二：輪調方法，原理同上。



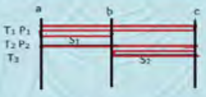
想法二：報酬

上面說明使用輪調的方法是有條件的，如果不符合條件者我就想出用報酬或金錢的方法解決問題。

物品數量大於人數時(T>P)

1、以甲組同學的標準：行走的路程

方法：搬運物品(負重)時，給予較多的報酬，空手移動時，給予較少的報酬。假設搬運物品(負重)時，給予的報酬為 A，空手移動時，給予的報酬為 B。以 2 人 3 物為例：



P_1 搬運物品(負重)的距離＝$\frac{4}{3}R$

P_2 搬運物品(負重)的距離＝$\frac{5}{3}R$

P_1 空手移動的距離＝R　　P_2 空手移動的距離＝$\frac{2}{3}R$

P_1 的報酬＝$\frac{4}{3}R\times A+R\times B$　　P_2 的報酬＝$\frac{2}{3}R\times A+\frac{5}{3}R\times B$

至於怎麼定 A、B 之間的比例，就決定 P_1、P_2 對公平的感受了。

2、以乙組同學的標準：搬運物品的路程

方法：(1)原則上，乙組同學認為空手移動的距離不算工作量，不應該給予報酬，所以就無法用達到公平的目的。

(2)如果放寬標準，給予報酬，如甲組同學看法。假設搬運物品(負重)時，給予的報酬為 A，空手移動時，給予的報酬為 B。以 2 人 3 物為例：

P_1 搬運物品(負重)的距離＝$\frac{3}{2}R$

P_2 搬運物品(負重)的距離＝$\frac{3}{2}R$

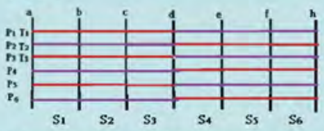
P_1 空手移動的距離＝R，P_2 空手移動的距離＝$\frac{1}{2}R$

P_1 的報酬＝$\frac{3}{2}R\times A+R\times B$，$P_2$ 的報酬＝$\frac{3}{2}R\times A+\frac{1}{2}R\times B$

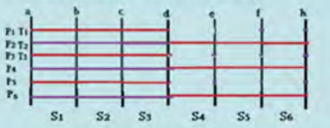
物品數量小於人數時(T<P)

1、以甲組同學的標準：行走的路程

W_x 的一般式 ＝R，每個人的搬運物品的路程及行走的路程都相等，如果同上也使用報酬或金錢的方法，一樣可以達到公平的目的。



2、以乙組同學的標準：搬運物品的路程



同上之情形一樣。以 3 物 6 人為例，P_1、P_3、P_5 的報酬＝$\frac{1}{2}R\times A$，P_2、P_4、P_6 的報酬＝$\frac{1}{2}R\times A+\frac{1}{2}R\times B$，

至於怎麼定 A、B 之間的比例，就決定眾人對公平的感受了。

陸、結論

一、我們對公平分配下了兩個明確的標準：(一) 工作時每個人行走的距離相等。(二) 工作時每個人搬運物品(負重)的距離相等。

二、在搬運的路徑規畫上，間格數都必須規劃成是人數 1 倍時，才能規劃出最短路徑。但是在以每個人行走的距離的標準下，當物品數小於人數時，無法規劃出最短路徑。

三、在以每個人行走的距離的標準時，當物品數大於人數時，公平分配每人工作量的 $W_T=2R[\frac{T}{P}]+\frac{R}{(\frac{2r}{2r-1})^P-1}$。當物品數小於人數時，公平分配每人工作量的 $W_x=R$。

四、在以每個人搬運物品(負重) 的標準時，當物品數大於人數時，公平分配每人工作量的 $W_T=R[\frac{T}{P}]+\frac{r}{P}R$。當物品數小於人數時，公平分配每人工作量的 $W_x=\frac{P-X}{P}R=\frac{T}{P}R$。

五、當物品數大於人數時，在每個人行走的距離相等的定義下，第一個人和第二個人的交接點的距離，第二個人和第三個人的交接點的距離，依次下去，是一個等比數列，首項是第一段距離 S_1，公比是$(\frac{2r}{2r-1})$。在每個人搬運物品(負重)的距離相等的定義下，第一個人和第二個人的交接點的距離，第二個人和第三個人的交接點的距離，依次下去，是一個等差數列，首項是第一段距離 $S_1=\frac{1}{P}R$，公差是 $\frac{1}{P}R$。

六、當物品數小於人數時，在兩種標準下，第一個人和第二個人的交接點的距離，第二個人和第三個人的交接點的距離，依次下去，也是一個等差數列，首項是第一段距離 $S_1=\frac{1}{P}R$，公差是 $\frac{1}{P}R$。

七、不管哪一種標準下，表面看起來都公平，但不是負重距離不同，就是空手行走距離不同。因此我們提出一個解決兩個要求的方法：輪調。人員輪調完一次後，總行走距離及總負重距離就會相等，達到真正公平要求。但在實務上，希望輪調時間能短一點。所以人數、物品數量平分若干組後數值能小一點，讓工作的人能在短時間輪調完一次。這樣比較符合人性、公平性、可行性。但如果要一輪搬完，那此種方法就行不通。

八、第二個達到公平的方法，就是搬運物品時給的報酬或金錢較多，空手時給的報酬或金錢較少，利用報酬或金錢多少達到公平的目的。這個方法就一體適用，較符合社會實際的狀況。雖然大家都能認同此種方法，但是每個人對合理的報酬期望值不一定相同，所以大家對此方法的「公平」性，在認知上會有落差。

柒、心得與展望：

原先我們認為這是一個很簡單的數學平分問題，當我們發生爭議的時候，也一直認為可以用數學的方法解決。但是當同時要符合各項條件時(搬運物品的距離、空手移動的距離、最短路徑)，就會遇到無法同時兼顧的困難，尤其是一輪完成。雖然我們提出幾種方法解決問題，像輪調、報酬，也許還有其他的方法。最根本癥結在公平方法雖然可以量化處理，但公平的感覺，不一定每個人都有一樣的標準。後來我們研究由美國心理學家約翰·斯塔希·亞當斯 (John Stacey Adams) 於 1965 年提出公平理論，主張人們受激勵的動因來自人與人間的相互比較。比較的標準即投入與回報，運用在工作上，所謂投入泛指員工的付出的心力、時間、工作品質與成效等，而回報係指員工從工作得到的一切代價，例如薪水、獎金、尊重和肯定等包含在五大需求層次的滿足。員工會將自己對工作的投入相對於所得到的回報比例與其他人做主觀性的比較，作為公平或正義與否的基準。比較對象可能是自己的同事、家人、朋友或別家公司做相同職務的人等，依據比較後的知覺結果，調整自己的行為，以尋求一個公平的平衡點，讓自己的回報除以投入約當於他人的回報除以投入。因此從公平理論得知「公平」可能只是主觀的感覺，也可能是客觀的事實，並非是數學解題這麼單純(引用亞當斯的公平理論部分內容)。

展望我們將來，可以將研究問題擴展到企業成本分析，如何建立合理薪資的研究層面，讓現在社會上的勞資爭議能少一點。是不是可以用數學及電腦程式，公平、公開展現給勞資雙方合理討論出薪資的標準。以及研究造成台灣低薪的原因和解決之道，這是我們將來努力的目標。

捌、參考資料

國小數學科各種版本　　康軒出版社　　南一出版社　　翰林出版社

國中數學科各種版本　　康軒出版社　　南一出版社　　翰林出版社

維基百科　　亞當斯的公平理論　　http://wiki.mbalib.com/zh-tw/

理性與感性:談公平理論　　出自《經理人雜誌》
https://www.managertoday.com.tw/glossary/view/33

平均還是平等？不同工作情境下的 分配公平感知　　孫情　龍長權　陳安濤
西南大學心理學部　　https://image.hanspub.org/Html/9-1130749_18385.htm