

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

佳作

080402

棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
小五 楊皓程	湯雅惠
小五 吳承瀚	黃莘丰
小五 王元峻	
小五 李秉謙	
小六 曾元庠	
小六 楊健志	

關鍵詞：井字棋、翻轉棋盤、遊戲棋譜

摘要

本次的研究主題是由井字棋延伸而成的桌遊 3×3 奇雞連連及 4×4 「棋」蹟連連。我們想要在不同格數棋盤以及不同類型棋子種類的情況下，分析其遊戲邏輯。我們的研究方式是將棋子依照規律，先手放在棋盤上的各種位置，再接著依照當下最好的選擇出棋，我們分析了井字棋、 3×3 奇「雞」連連及 4×4 「棋」蹟連連的各種遊戲局面，以及三種遊戲中不同種棋型的比較，並且找出格數與和局關聯的公式。

壹、研究動機

我們小組想做這個主題，是因為有一次在上課時，老師介紹了這一套有趣的桌遊—奇「雞」連連。奇「雞」連連中，一方只有兩顆大雞，所以無法使用最大的棋連成一條線，會少一顆棋，所以一定會用到中的雞；遊戲規則也有說較大的雞可以吃掉較小的雞，所以當你使用比較大的公雞蓋住對手的公雞，就可以避免對手的公雞連線。後來我們發現類似遊戲— 4×4 「棋」蹟連連，我們想知道在不同棋盤和棋子數量之下，遊戲邏輯有甚麼不同，所以想趁這次的機會，來破解這套有趣又困難的桌遊。

貳、研究目的

- 一、了解 3×3 井字棋的棋譜與勝比和比負之間的關係，並且推論到 4×4 井字棋、 5×5 井字棋……等，找出棋盤格數與遊戲規律之間的關聯性。
- 二、研究 3×3 奇「雞」連連的遊戲局面，分別探討一種棋(動態井字棋)、兩種棋、三種棋的遊戲邏輯。
- 三、研究 4×4 「棋」蹟連連的遊戲局面，分別探討一種棋(動態井字棋)、兩種棋、三種棋、四種棋的遊戲邏輯。
- 四、找出井字棋與奇「雞」連連、「棋」蹟連連的比較點。

參、研究設備及器材

- 一、 3×3 奇「雞」連連、 4×4 「棋」蹟連連(主要研究的遊戲)。
- 二、方格紙、筆(用於筆記，幫助思考)。
- 三、筆電、相機(用於資料整理及彙整)。

肆、研究過程或方法

本節主要分為四個部分，第一部分為名詞解釋，第二部分為井字棋的分析，第三部分為 3×3 奇「雞」連連一種棋(動態井字棋)、兩種棋、三種棋的遊戲局面分析，第四部分為 4×4 「棋」蹟連連一種棋(動態井字棋)、兩種棋、三種棋、四種棋的遊戲局面分析。

一、名詞解釋

(一) 井字棋：

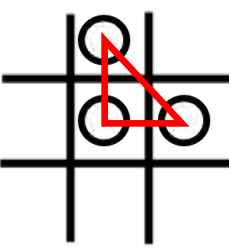
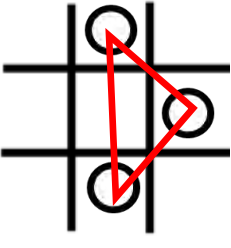
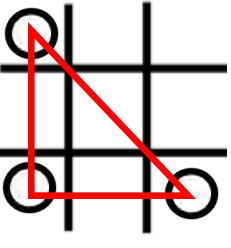
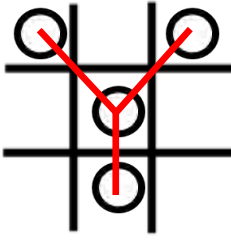
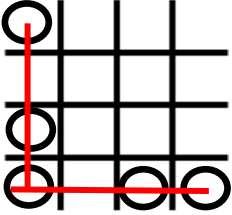
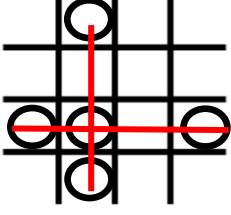
1. 遊戲來源：又稱為井字遊戲、圈圈叉叉、打井遊戲、 $\bigcirc \times$ 棋的稱呼。
2. 規則
 - (1) 畫出一個 3×3 的格子，共九格。
 - (2) 先手在棋盤上選一個地方畫自己的符號 \bigcirc 。
 - (3) 符號彼此不可重疊，後手在棋盤上選一格畫自己的符號 \times 。
 - (4) 輪流畫下符號直到一方的 3 個符號連成一條線。
 - (5) 連成一條線的人就是贏家。

(二) 奇「雞」連連：「奇雞連連 (Gobblet Gobbler)」是 Thierry Denoual 在 2003 年設計的兒童遊戲。奇雞連連由傳統的井字遊戲所改製，除了連線規定依循井字棋的規定外，另外增加了移動棋子及大棋吃小棋的新規則，棋子種類增加為三種大小，每種大小有兩個棋子，較大的棋可以蓋住對方較小的棋，沒被蓋住的公雞可以移動到沒有公雞的空格，被蓋住的公雞不能移動，直到一方的公雞連成一條線。

(三) 「棋」蹟連連：「棋蹟連連 (Gobblet)」是 Thierry Denoual 接續奇雞連連 (Gobblet Gobbler) 後設計的兒童遊戲。棋蹟連連的規則接續井字棋與奇雞連連，棋盤則改為 4×4 ，共 16 格，棋子種類增加為四種大小，每種大小有三個棋子。

(四) 最佳棋步：當敵方下一步不會連線勝利時，攻擊線和防守線最多的位置。當敵方要連線成功時，能擋住敵方的位置。

(五) 雙活路：在井字棋中，只要三個棋子就可以連成一條線，我們發現只要使用三個棋子做成一個等腰直角三角形，就可以創造出兩條準備連線的活路，我們稱為雙活路。 3×3 的棋譜中我們使用小三角形、中三角形、大三角形、Y 字型稱呼雙活路的型態， 4×4 的棋譜中我們使用直角型、交叉型，如下表：

			
小三角形	中三角形	大三角形	Y字型
			
直角型		交叉型	

(六) 翻轉棋盤：使用右轉 90 度、右轉 180 度、右轉 270 度的方式旋轉；翻轉棋盤，由於棋盤是對稱的，所以另外可分垂直反轉與水平翻轉。

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> </table>					1	2	3	4	5	6	7	8	9																																				
1	2	3																																															
4	5	6																																															
7	8	9																																															
右轉 90°	右轉 180°	右轉 270°	垂直翻轉	水平翻轉																																													
<table border="1"> <tr><td>7</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>	7	4	1	8	5	2	9	6	3	<table border="1"> <tr><td>9</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	9	8	7	6	5	4	3	2	1	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>7</td></tr> </table>	3	6	9	2	5	8	1	4	7	<table border="1"> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	7	8	9	4	5	6	1	2	3	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>7</td></tr> </table>	3	2	1	6	5	4	9	8	7
7	4	1																																															
8	5	2																																															
9	6	3																																															
9	8	7																																															
6	5	4																																															
3	2	1																																															
3	6	9																																															
2	5	8																																															
1	4	7																																															
7	8	9																																															
4	5	6																																															
1	2	3																																															
3	2	1																																															
6	5	4																																															
9	8	7																																															

(七) 勝比和比負：先手勝利比雙方平手比先手敗，例如：先手勝利的位位置只有 5 個平手 1 個，先手敗的位置有 2 個，勝比和比負為 5：1：2。

二、分析井字棋

(一) 3×3 井字棋的研究

1. 定義棋盤位置

- (1) 發現 3×3 的棋盤中，棋盤 1 號、3 號、7 號、9 號四個位置在翻轉後相同，統稱為 1 號位置—角落型。
- (2) 發現 3×3 的棋盤中，棋盤 2 號、4 號、6 號、8 號四個位置在翻轉後相同，統稱為 2 號位置—邊線型。

(3) 發現3×3的棋盤中，棋盤5號位置在翻轉後沒有相同的，稱為5號位置—正中型。

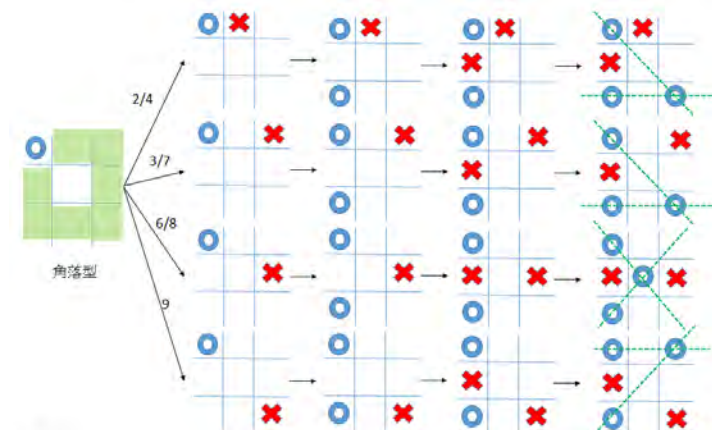


2. 研究過程

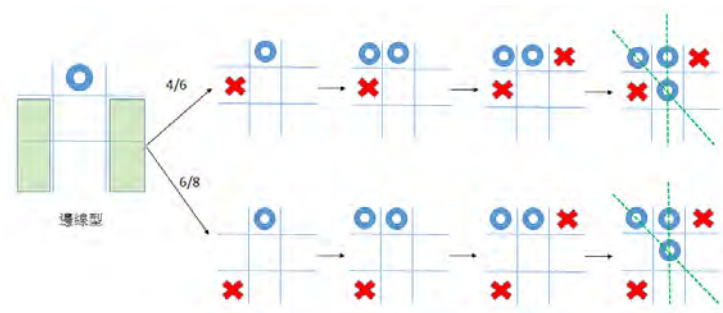
- (1) 先手主要在前述所定義的1號位置—角落型、2號位置—邊線型、5號位置—正中型下O，後手則分別下在所剩的位置，如，當先手下1號，後手下2號、3號、4號、5號、6號、7號、8號、9號位置，各棋步都依照自己最有利的方下棋，統計勝比和比負。
- (2) 黑色的O代表先手下的第一步，紅色的X代表後手下的第一步，藍色的O、X代表雙方第二步及後續最好的棋步選擇。
- (3) 策略的選擇：先手的攻擊要讓後手只能防守，沒有位置選擇權，則必勝，若雙方棋藝精湛且相當，後手最好的情況就是和局，因此後手會努力防守以達成和局。
- (4) 先手下1號位置—角落型、2號位置—邊線型、5號位置—正中型時後手翻轉後的位置如下。

<p>↑先手下1號位置的時候， 後手的位置翻轉之後： 2=4；3=7；6=8；5；9。</p>	<p>↑先手下2號位置的時候， 後手的位置翻轉之後： 1=3；4=6；7=9；5；8。</p>	<p>↑先手下5號位置的時候：1=3=7=9； 2=4=6=8。</p>

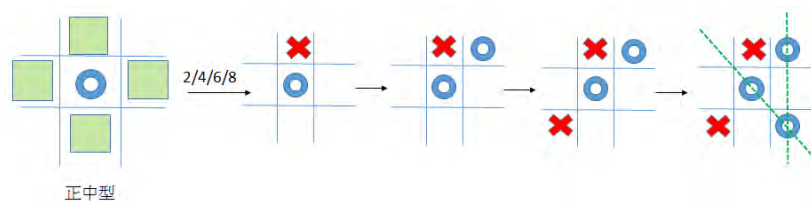
(5) 當後手選擇綠色陰影部分時，先手有4種必贏策略



(6) 當後手選擇綠色陰影部分時，先手有 2 種必贏策略



(7) 當後手選擇綠色陰影部分時，先手有 1 種必贏策略



(8) 發現因為三個棋子連成一線就可以獲勝，如果製造出雙活路及可達到獲勝條件，而先手的位置佔有優勢，因此先手只要創造出雙活路可獲勝，後手因為屬於防守，因此要避免先手創造出雙活路。

(9) 統整 1 號、2 號、5 號三個位置，各棋譜分別的勝比和比負

<p>↑ 先手下 1 號位置一角落型，勝比和比負是 7 : 1 : 0</p>	<p>↑ 先手下 2 號位置一邊線型，勝比和比負是 4 : 4 : 0</p>	<p>↑ 先手下 5 號位置—正中型，勝比和比負是 4 : 4 : 0</p>

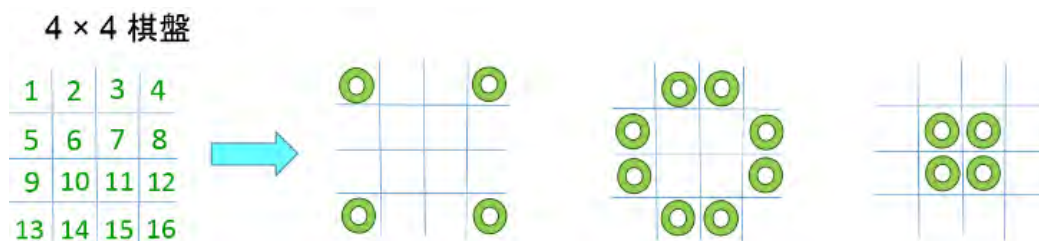
3. 結論

- (1) 井字遊戲沒有必勝的祕訣，先手會獲勝和平手，後手平手或輸。
- (2) 先手第一步要下 1 號位置，勝率最高。
- (3) 先手選角落型可贏的策略最多，勝率也最高。
- (4) 在角落型中，若後手選 5 號位置，則結果就會和局。

(二) 4 × 4 井字棋的研究

1. 定義棋盤位置

- (1) 發現 4×4 的棋盤中，棋盤 1 號、4 號、13 號、16 號四個位置在翻轉後相同，統稱為 1 號位置—角落型。
- (2) 發現 4×4 的棋盤中，棋盤 2 號、3 號、5 號、8 號、9 號、12 號、14 號、15 號四個位置在翻轉後相同，統稱為 2 號位置—邊線型。
- (3) 發現 4×4 的棋盤中，棋盤 6 號、7 號、10 號、11 號位置在翻轉後沒有相同的，稱為 6 號位置—正中型。

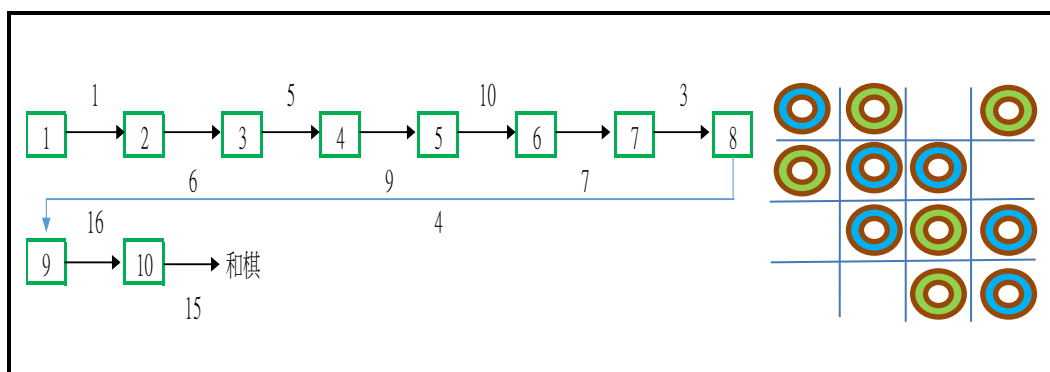


2. 研究過程

- (4) 先手主要在前述所定義的 1 號位置—角落型、2 號位置—邊線型、6 號位置—正中型位置下 O，雙方分別下在所剩的位置依照自己最有利的方式下棋，統計勝比和比負。
- (5) 統整 1 號、2 號、6 號三個位置，各棋譜分別的勝率

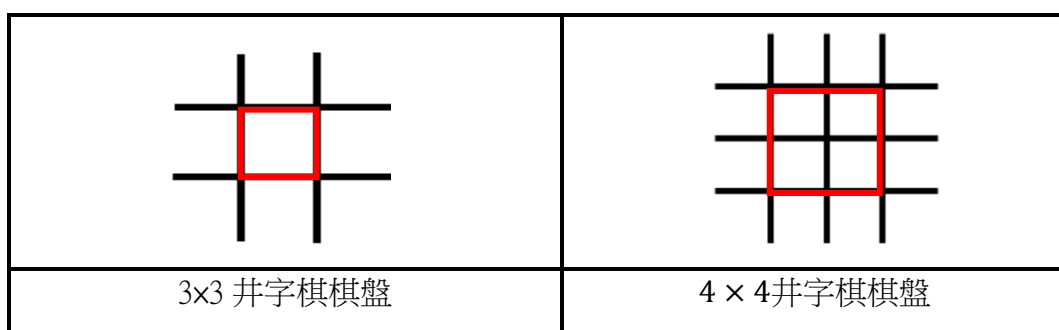
↑ 先手下 1 號位置，藍色為後手下各號位置後呈現平手，勝比和比負為 0 : 15 : 0。	↑ 先手下 2 號位置，藍色為後手下各號位置後呈現平手，勝比和比負為 0 : 15 : 0	↑ 先手下 6 號位置，藍色為後手下各號位置後呈現平手，勝比和比負為 0 : 15 : 0

- (6) 4×4 井字棋平手的棋盤如下：



3. 結論

- (1) 發現因為四個棋子才能連成一線，但是在 4×4 棋盤中，沒有單一個中心點，而是一個田字型的四格。所以無法創造出 3×3 井字棋中的小三角形、中三角形和 Y 字形等雙活路，只能想辦法創造大三角形的雙活路，若是雙方棋步相當，創造大三角型雙活路的難度非常高，因此除非對方失誤，否則很難分勝負。

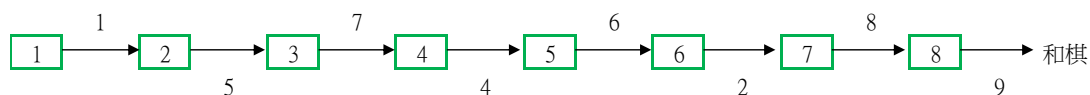


- (2) 4×4 井字遊戲沒有必勝的祕訣，只要雙方無出錯，只有和局，因為當先手下在任一個地方，後手就會想辦法阻止先手連線，重複下去直到和局。

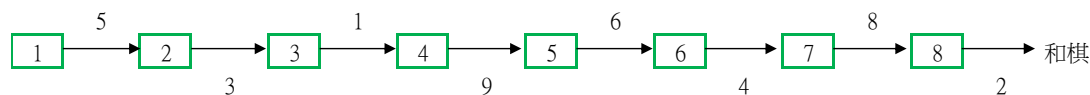
(三) 3×3 井字棋、 4×4 井字棋、 5×5 井字棋、 6×6 井字棋的棋步分析

1. 在 3×3 井字棋中，無論先手選擇角落型、正中型或邊線型，因為研究假設是在雙方的實力相當的情況下，所以後手必定會選擇最佳的棋步位置來應戰。我們發現無論哪種類型，雙方最少下到 8 顆棋時，就會形成和局。

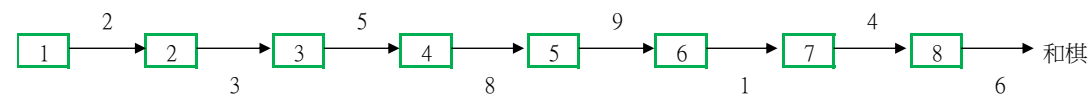
(1) 角落型最快達成和棋的棋譜



(2) 正中型最快達成和棋的棋譜



(3) 邊線型最快達成和棋的棋譜

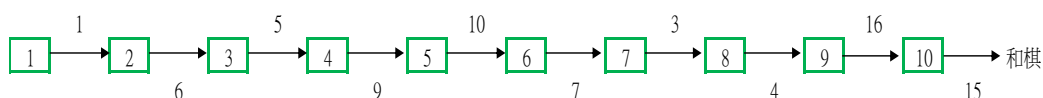


(4) 3×3 井字棋最快達成和棋的步數：8 步

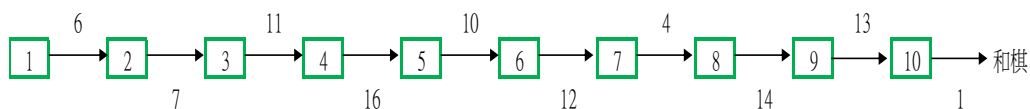
2. 在 4×4 井字棋中，我們嘗試做出各種棋步可能，結果發現雖然結果均為和局，但若任何一方採取較積極攻勢時，總棋步會增加，相反地，若一方

採取守勢為主，每當對方下一顆棋就立刻阻擋，則總棋步會變減少。我們嘗試檢視了 3×3 井字棋的和局狀況，發現除了先手第一步是攻擊，後手最後一步是防守外，其他的棋步幾乎都是攻擊和防守兼具，因此我們運用這樣的觀念提出假設，假設最適當的棋步下法應該是，既能阻擋對方連線，又能替自己創造更多連線機會。結果發現在 4×4 井字棋中，約在 10-12 步之間就會形成和局，假設雙方均是實力相當的高手，雙方最少下到第 10 顆棋時，就會形成和局。

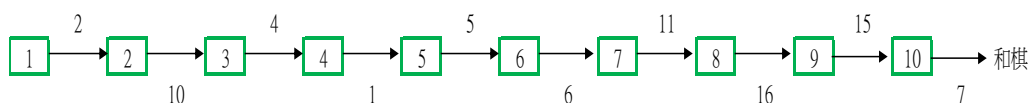
(1) 角落型最快達成和棋的棋譜：先手 1 後手 4 先手 11



(2) 正中型最快達成和棋的棋譜：先手 6 後手 7 先手 11



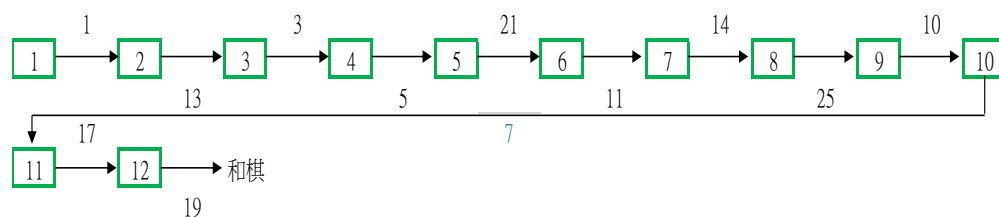
(3) 邊線型最快達成和棋的棋譜：先手 2 後手 10 先手 4



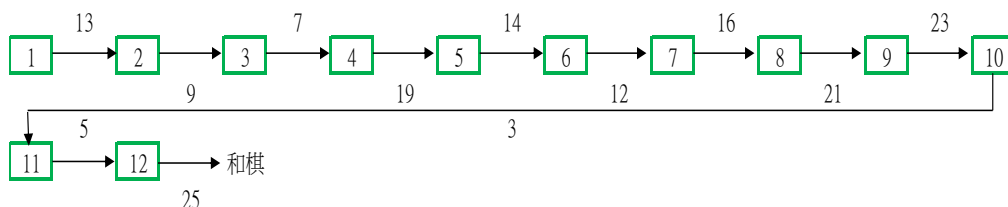
(4) 4×4 井字棋最快達成和棋的步數：10 步

3. 在 5×5 井字棋方面，我們先依照 3×3 井字棋的經驗，一樣秉持著既要阻擋對方連線，同時要替自己創造更多連線機會的下法，發現約在 12-14 步之間就會形成和局，假設雙方均是實力相當的高手，雙方最少下到第 12 顆棋時，就會形成和局。

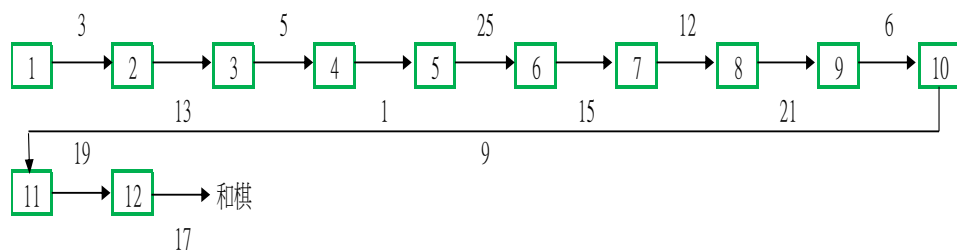
(1) 角落型最快達成和棋的棋譜：先手 1 後手 21 先手 25



(2) 正中型最快達成和棋的棋譜：先手 13 後手 9 先手 7



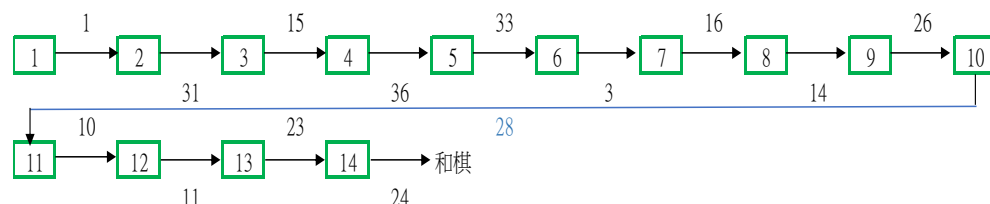
(3) 邊線型最快達成和棋的棋譜：先手 3 後手 13 先手 5



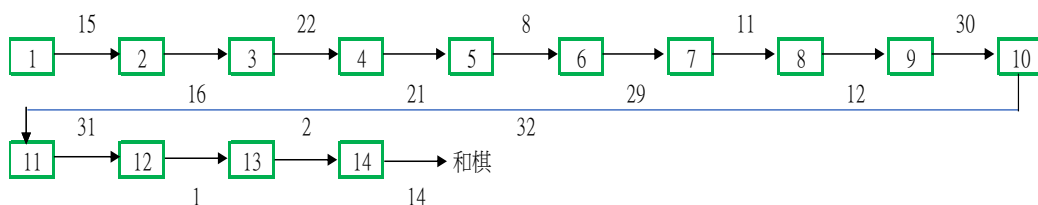
(4) 5×5 井字棋最快達成和棋的步數：12 步

4. 我們依照 4×4 的經驗，試做了一些 6×6 井字棋的棋步，一樣秉持著既要阻擋對方連線，同時要替自己創造更多連線機會的下法，發現約在 14-16 步之間就會形成和局，假設雙方均是實力相當的高手，雙方最少下到第 14 顆棋時，就會形成和局。

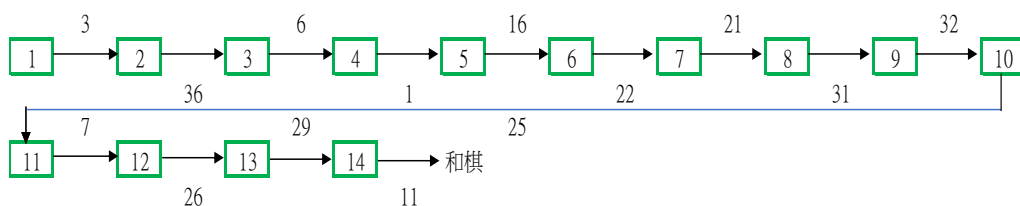
(1) 角落型最快達成和棋的棋譜：先手 1 後手 31 先手 15



(2) 正中型最快達成和棋的棋譜：先手 15 後手 16 先手 22



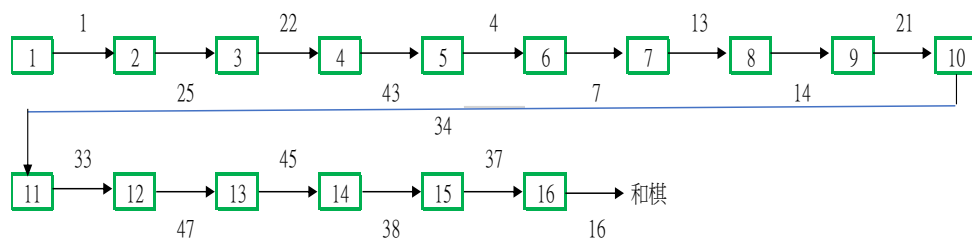
(3) 邊線型最快達成和棋的棋譜：先手 3 後手 36 先手 6



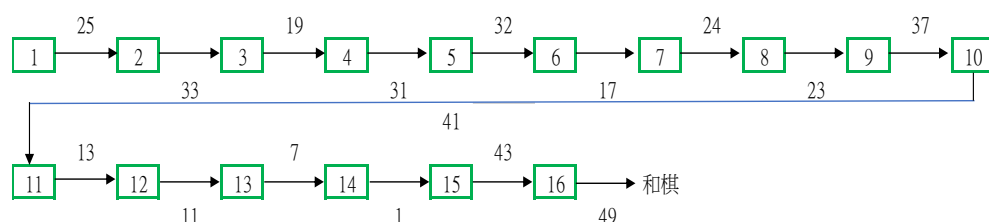
(4) 6×6 井字棋最快達成和棋的步數：14 步

5. 我們依照 3×3 和 5×5 的經驗，分析了 7×7 井字棋的棋步，在既能阻擋對方連線，又能替自己創造更多連線機會的情況下，發現約在 16-19 步之間就會形成和局，假設雙方均是實力相當的高手，雙方最少下到第 16 顆棋時，就會形成和局。

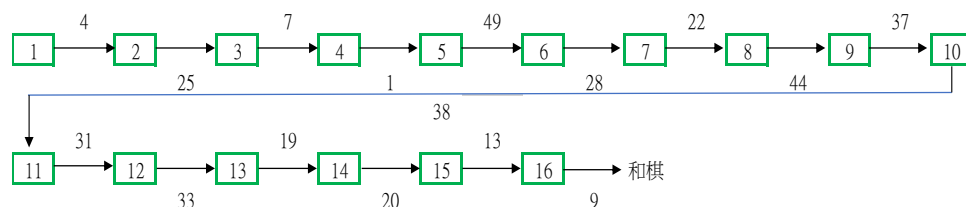
(1) 角落型最快達成和棋的棋譜：先手 1 後手 25 先手 22



(2) 正中型最快達成和棋的棋譜：先手 25 後手 33 先手 19



(3) 邊線型最快達成和棋的棋譜：先手 4 後手 25 先手 7



(4) 7 × 7 井字棋最快達成和棋的步數：16 步

(四) 井字棋的研究發現

1. 只要每一條線都有一個 O 和 X 就一定會有和棋因為當一條線只有一個 O 或一個 X，他就有連線的機會，如果一條線有一個 O 和一個 X 就沒有辦法組成一個連線的機會，所以一定會和局。
2. 連線

格子種類	3 × 3	4 × 4	5 × 5	6 × 6
格數	9	16	25	36
連線數	8 條	10 條	12 條	14 條
圖示				

3. 我們經由研究發現，因為先後手實力相當，均為下棋高手，不會選擇錯誤的棋步，因此無論是 3×3 井字棋、 4×4 井字棋(田字型中心很難創造雙活路)以及 5×5 井字棋(棋盤大小受限，在輪流下棋的過程中很容易使連線受阻)，均會是和局。

4. 依照 3×3 、 4×4 、 5×5 、 6×6 、 7×7 井字棋的格數與最少步數，將其格數放在分母，步數放在分子，可得出數列 $\frac{\text{至少要下滿才會和棋的格數}}{\text{棋盤的總格數}} = \frac{8}{9}$ 、 $\frac{10}{16}$ 、 $\frac{12}{25}$ 、 $\frac{14}{36}$ 、 $\frac{16}{49}$ 。

5. 我們發現分母為井字棋的邊長格數 \times 邊長格數，分子為該棋盤達到和局的最少步數，我們發現最少步數剛好會等於連線數量，因此我們得出一個公

$$\text{式：} \frac{\text{該棋盤達到和局的最少步數}}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{\text{連線數量}}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{\text{邊長格數} + \text{邊長格數} + 2}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{2 \times \text{邊長格數} + 2}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}}$$

，如果使用 n 代表邊長格數，可以得出公式為 $\frac{2 \times n + 2}{n^2}$ 。

6. 依照 3×3 、 4×4 、 5×5 、 6×6 、 7×7 井字棋填滿多少百分比的格子就會平手

井字棋	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
百分比 (%)	88.9%	62.5%	48.0%	38.9%	32.7%

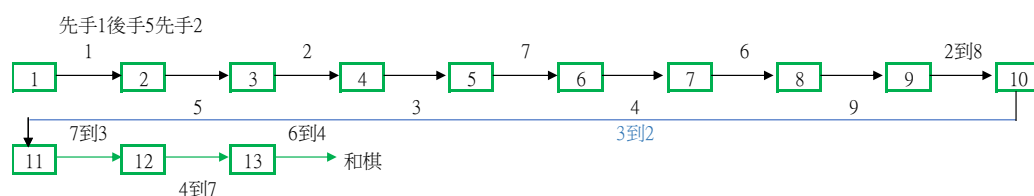
7. 結論

- (1) 只要為先後手實力相當，均為下棋高手，不管棋盤大小，必定平手。
- (2) 棋盤越大，和局機率越高。
- (3) 先手最好的下法是下一號角落型，因為先手勝率為所有之中最高者，但這種想法對現實並沒有極大的優勢，因為當先手下角落型時，一般的人的自然反應是下正中間。

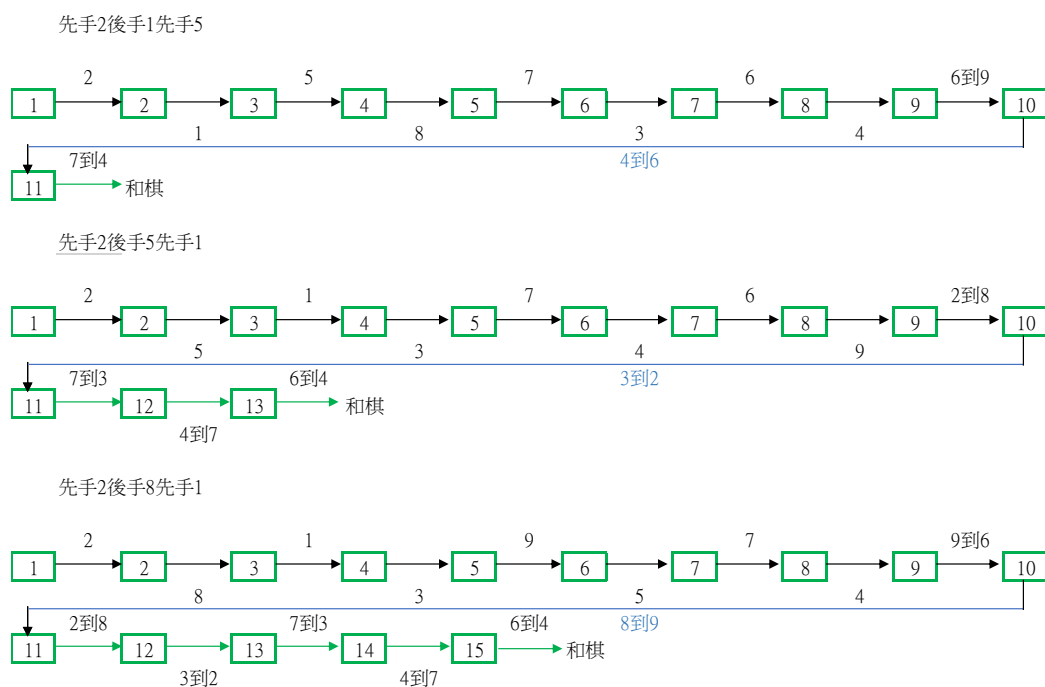
三、分析一種棋、兩種棋、三種棋的 3×3 奇雞連連

(一) 分析一種棋的 3×3 奇雞連連(可移動的井字棋)

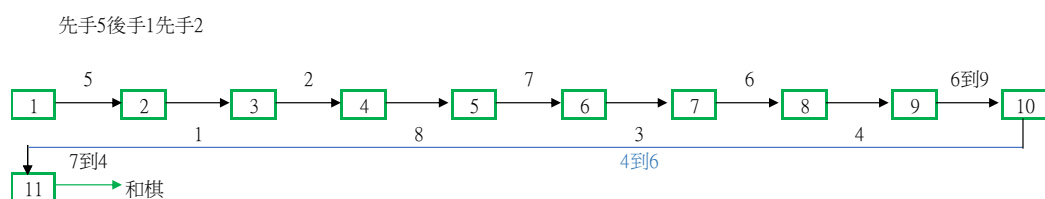
1. 在角落型裡，後手因為棋藝高超，所以只會選擇會平手的正中型，而接下來棋盤就會以 90 度旋轉不斷重複因此在角落型中會和局。



2. 在邊線型裡，後手因為棋藝高超，所以只會選擇會平手的 1、5、7 位置，而接下來棋盤就會以 90 度旋轉不斷重複因此在邊線型中會和局。



3. 在正中型裡，後手因為棋藝高超，所以只會選擇會平手的角落型位置，而接下來棋盤就會以 90° 旋轉不斷重複因此在正中型中會和局。

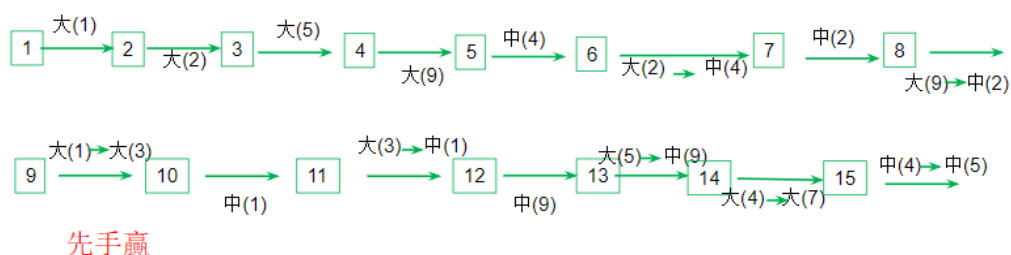


4. 結論：在 3×3 一種棋中，不管雙方下在什麼位置，並在每一步都能攻能防，也沒有出錯，就會平手

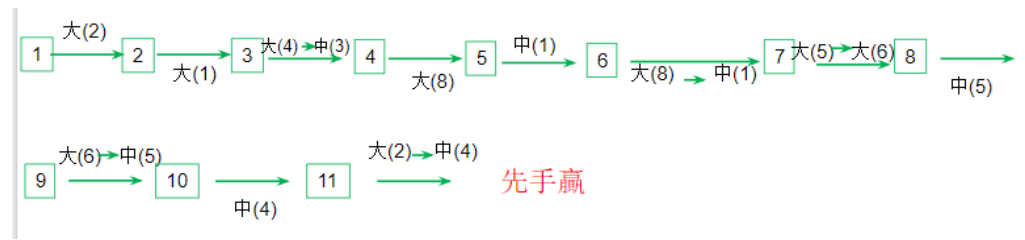
(二) 分析兩種棋的 3×3 奇雞連連

1. 兩種棋的 3×3 奇雞連連的下法

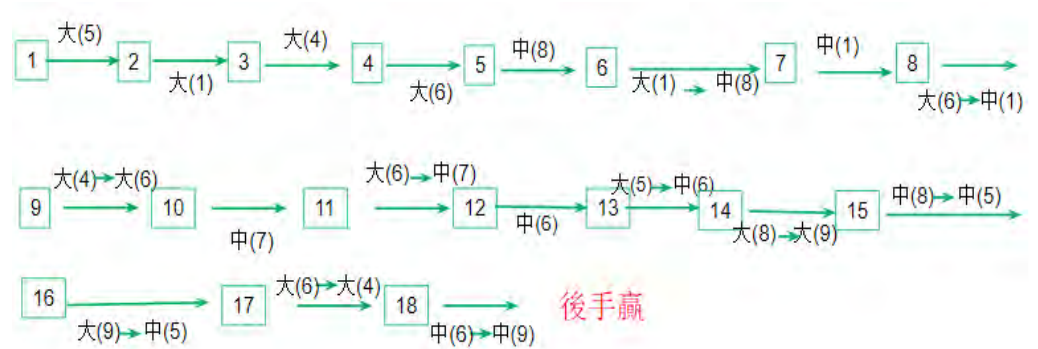
- (1) 假設先手第一步棋位置，與 3×3 井字棋相同，分為 1 號位置—角落型、2 號位置—邊線型、5 號位置—正中型。
- (2) 3×3 奇雞連連第一型：先手下 1 號位置，先手會在第 13 步創造雙活路，以至於讓對手無法阻擋，讓自己獲勝。



- (3) 3 × 3 奇雞連連第二型：先手下 2 號位置，先手會在第 13 步創造雙活路，以至於讓對手無法阻擋，讓自己獲勝。

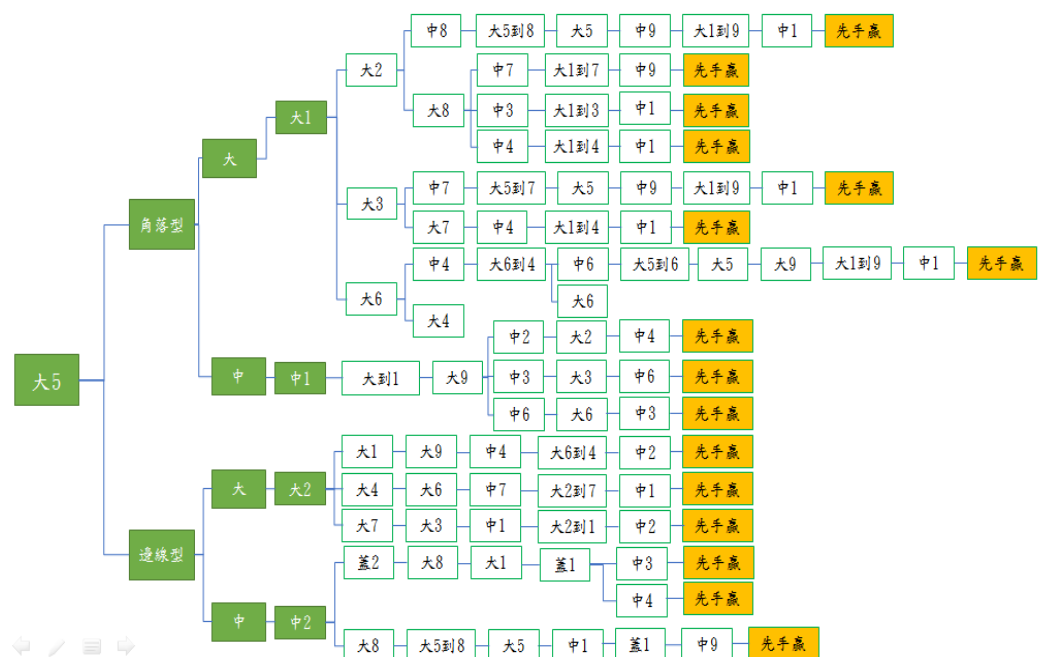


- (4) 3 × 3 奇雞連連第三型：先手下 5 號位置，先手會在第 13 步創造隱形雙活路，以至於讓對手無法阻擋，讓自己獲勝



- (5) 結論：先手下 1、2、5 號位置，因為會優先創造雙活路，以至於讓對手無法阻擋，讓自己獲勝，使得先手必勝。如果有其中一方都不蓋另一方的中棋時，不蓋的那一方必定會輸，因為對方就有「真實」的雙活路，以至於自己無法阻擋。

- (6) 分析兩種棋的 3 × 3 奇雞連連的決策樹



2. 分析兩種棋的3 × 3奇雞連連的遊戲邏輯

(1) 當後手第一個中的要下時，各位置的勝率相同，但第二個中的要下不讓對手蓋掉後可創造線的地方，並要選擇自己移開後可以堵住對手的地方，讓自己獲勝。

(二) 分析三種棋的3 × 3奇雞連連

1. 分析三種棋的3 × 3奇雞連連下法與勝率

(1) 假設先手第一步棋位置，與3 × 3井字棋相同，分為1號位置—角落型、2號位置—邊線型、5號位置—正中型。

(2) 定義線段，黃色現為隱形線，而綠色現為真實線。

(3) 測試1號位置—角落型，我們分析出5種棋路，如下表：

		圖例
<p>↑ 第1條棋路：1綠3黃，後手大雞無法救援，後手輸</p>	<p>↑ 第2條棋路：雙綠共用點大雞，無法解除危機，後手輸。</p>	<p>↑ 第3條棋路：1綠2黃，後手大雞無法救援，後手輸</p>
<p>↑ 第4條棋路：雙綠共用點大雞，無法解除危機，後手輸。</p>	<p>↑ 第5條棋路：雙綠共用點大雞，無法解除危機，後手輸。</p>	

(4) 測試 2 號位置一邊線型，我們分析出 4 種棋路，如下表：

<p style="text-align: center;">後手輸1</p>	<p style="text-align: center;">後手輸2</p>
<p>↑ 第 1 條棋路：1 綠 3 黃，後手大雞無法救援，故後手輸</p>	<p>↑ 第 2 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，故後手輸</p>
<p style="text-align: center;">後手輸3</p> <p style="text-align: center;">後手輸4</p>	
<p>↑ 第 3 條棋路：一綠 雙黃，且共用點為大雞後手大雞無法救援，故後手輸</p>	<p>↑ 第 4 條棋路：雙綠 雙黃，後手大雞無法救援，且放中小雞可被吃，故後手輸</p>

(5) 測試 5 號位置—正中型，我們分析出 2 種棋路，如下表：

<p>↑ 第 1 條棋路：單綠雙黃後手大雞無法救援，且放中小雞可被大雞吃掉，故後手輸。</p>	<p>↑ 第 2 條棋路：雙綠雙黃，後手大雞無法救援，而因雙黃放大雞無法移動。故後手輸。</p>

2. 分析三種棋的 3 × 3 奇雞連連的遊戲邏輯

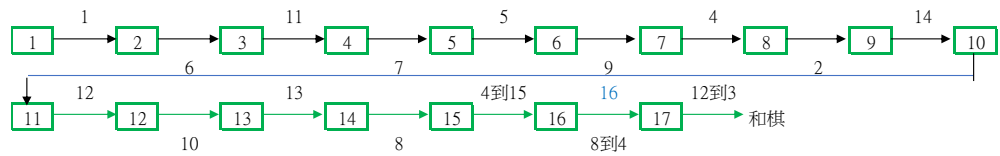
- (1) 井字棋 1 號位置—角落型，第 1 步只能下 5 位置才能平手，奇雞連連 1 號位置—角落型，先手有明顯的優勢，贏的情形有兩種，第一種：雙綠共用點大雞；第二種：1 綠 2 黃，大雞無法移動救援。
- (2) 井字棋 2 號位置—一邊線型，後手第 1 步只能下 1 號位置、3 號位置、5 號位置、8 號位置，才能平手，奇雞連連 2 號位置—一邊線型先手也有明顯的優勢，先手皆獲勝。
- (3) 井字棋 5 號位置—正中型，後手第 1 步只能下 1 號位置、3 號位置、7 號位置、9 號位置才能平手，奇雞連連 5 號位置—正中型先手也有明顯的優勢，先手皆獲勝。
- (4) 三種棋的 3 × 3 奇雞連連也有先手優勢。因為先手會先將兩隻公雞連在一起。當後手用大公雞來擋時，後手的大公雞將無法移動。先手只要再放一隻中公雞便會讓自己多了一條綠線。後手如果放中公雞或小公雞就會被先手的大公雞吃掉，就只能用大公雞來擋。這樣也不可能連成一條線因為先手還有中公雞可以吃掉小公雞，且後手一定要 3 隻公雞才能連成一條線，後手便會輸。

- (5) 先手的第 1 步是下在 5 號位置，因為有最多可以在第二步可以創造一條將會勝利的線，也不會讓對手邊進防守邊進攻。
- (6) 後手最好的五號位置會被占走，所以第 1 步要下在角落邊 (1 號位置、3 號位置、7 號位置、9 號位置)，原因不要讓先手創造雙活線的三角形。
- (7) 先手第二步要下 1 號位置、3 號位置、7 號位置、9 號位置，因為可以創造一條線且下一步就可以創造小直角三角形，後手第二步也一定要擋先手的棋。
- (8) 先手決定位置後必須用大雞製造連線可能性，迫使後手用來阻擋的大雞只能防守，沒有攻擊能力，則先手必勝

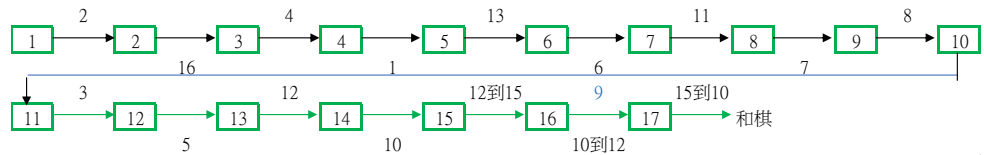
四、分析一種棋、兩種棋、三種棋、四種棋的 4×4 棋蹟連連

(一) 分析一種棋的 4×4 棋蹟連連(可移動的井字棋)

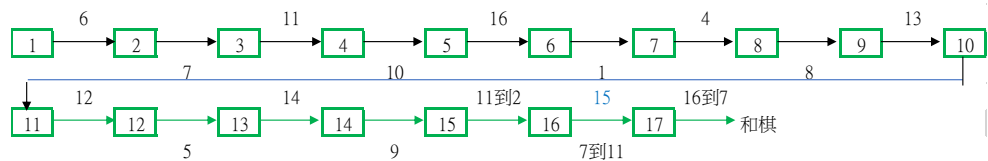
1. 在角落型中：先手 1 後手 6 先手 11。



2. 在邊線型中：先手 2 後手 16 先手 4。



3. 在正中型中：先手 6 後手 7 先手 1。

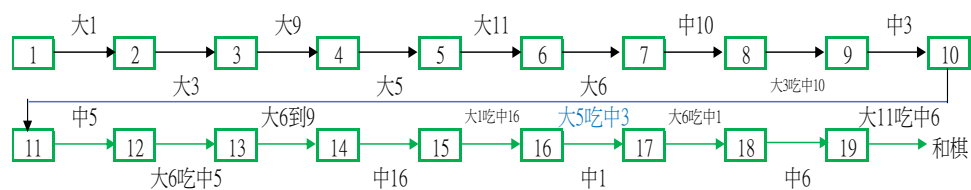


4. 結論：在 4×4 一種棋中，不管雙方下在什麼位置，並在每一步都能攻能防，也沒有出錯，就會平手。

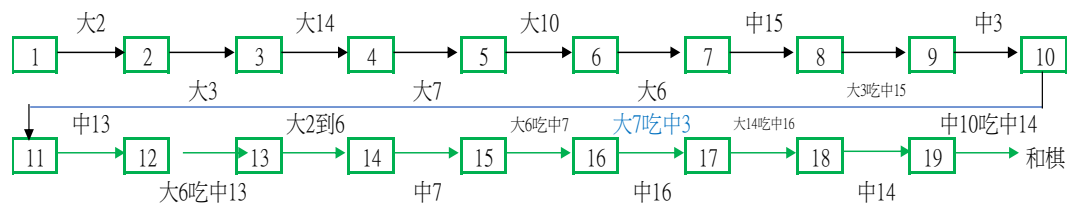
(二) 分析兩種棋的 4×4 棋蹟連連

1. 分析兩種棋的 4×4 棋蹟連連下法與勝率

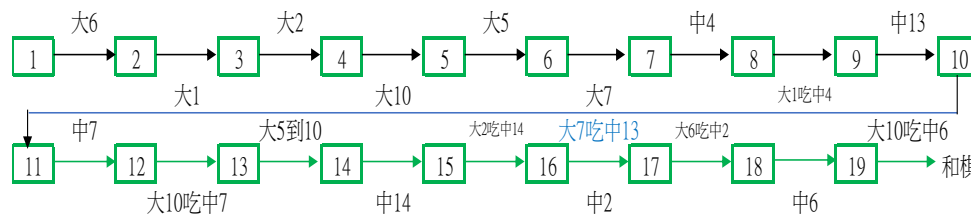
(1) 在角落型中：先手 1 後手 3 先手 9。



(2) 在邊線型中：先手 2 後手 3 先手 14。



(3) 在正中型中：先手 6 後手 1 先手 2。



2. 結論：在 4×4 兩種棋中，不管雙方下在什麼位置，並在每一步都能攻能防，也沒有出錯，就會平手

(1) 平手原因： 4×4 兩種棋的棋蹟連連會平手，因為 4×4 棋盤有 16 格，但是全部只有 12 個棋子，而且在雙方蓋完中棋之後，一方就只剩 3 顆棋，完全不夠連線所需棋數。

(2) 重要關鍵：後手一定要在先手出中棋時用大棋將先手的中棋吃掉，如果沒有吃掉，後手便會輸。

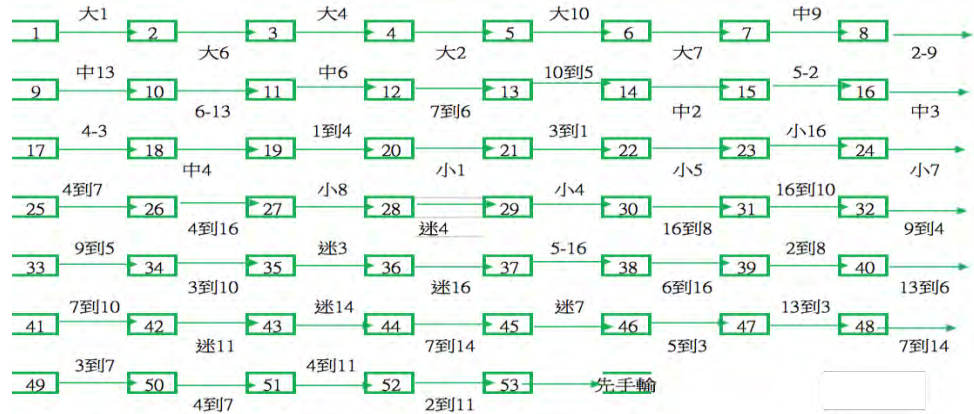
(三) 分析三種棋的 4×4 棋蹟連連

1. 分析三種棋的 4×4 棋蹟連連下法與勝率

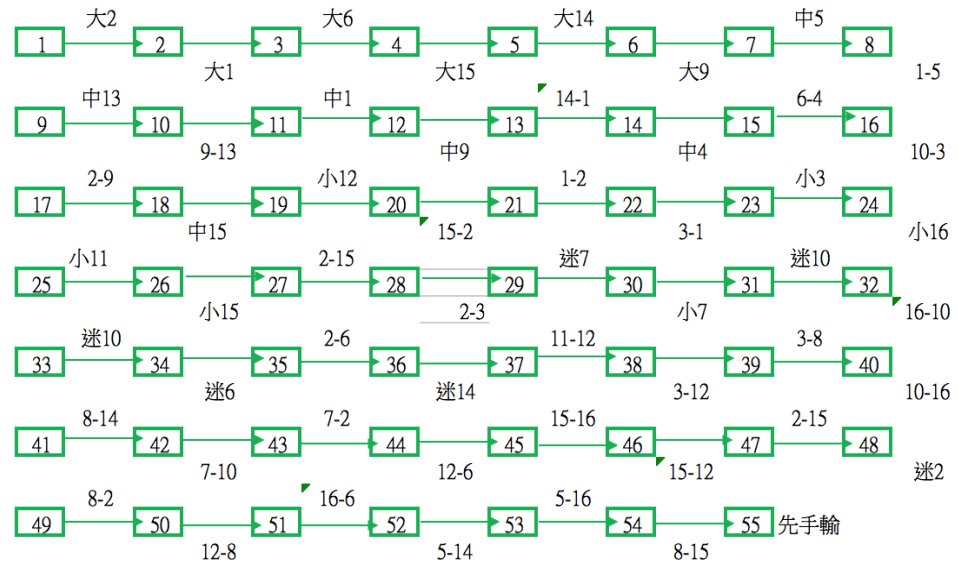
(1) 因為在三種棋的 4×4 棋蹟連連中，不管怎樣一定會和局，因為在 4×4 棋蹟連連中會和局的主要原因是因為棋盤總共有 16 格，但一個人只有九顆棋，而且在下的過程中，最多會被吃掉 5 顆棋所以你擋完別人後，只能創造連線機會，不能連線，所以最後在先手和後手都沒有出錯的情況下，一定會和局，原因如下：

3. 分析四種棋的4 × 4棋蹟連連必勝秘訣

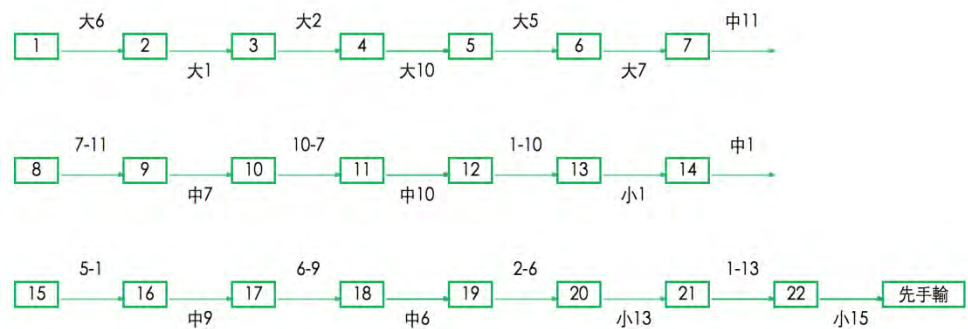
(1) 角落型:先手的大雞都無法移動，不可下其他棋子會被吃掉，後手贏。



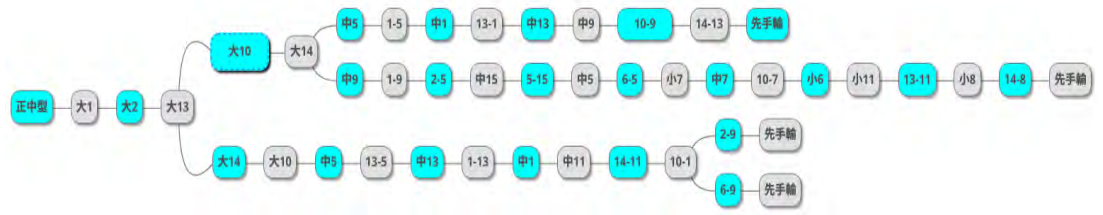
(2) 邊線型：先手的大雞都無法移動，不可下其他棋子會被吃掉，故後手贏。



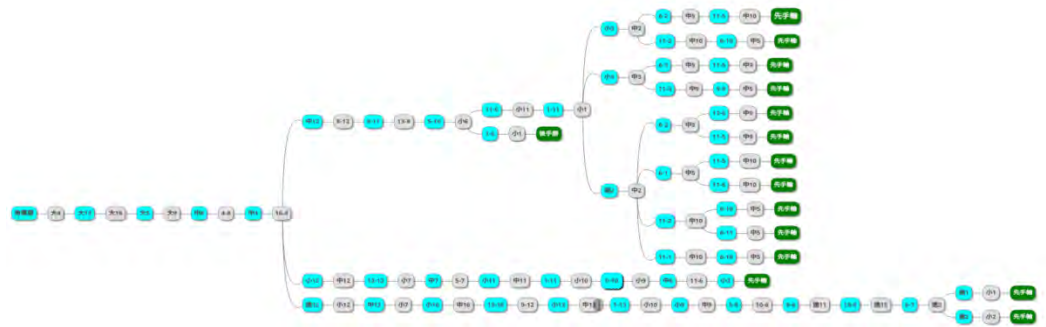
(3) 正中型：先手的大雞都無法移動，不可下其他棋子會被吃掉，故後手贏。



(4) 正中型的決策樹



(5) 角落型的決策樹



伍、研究結果

一、井字棋

- (一) 井字棋沒有必勝的祕訣，只有先手必勝或平手，後手平手或必敗，假設先後手實力相當，均為下棋高手，不會選擇錯誤的棋步，不管棋盤格數多寡，均會是和局。
- (二) 只要棋盤每一條連線中，都有一個 O 和 X 就一定和棋。
- (三) 棋盤越大，和局機率越高。

(四) 公式：
$$\frac{\text{該棋盤達到和局的最少步數}}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{\text{連線數量}}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{\text{邊長格數} + \text{邊長格數} + 2}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{2 \times \text{邊長格數} + 2}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}}$$

如果使用 n 代表邊長格數，可以得出公式為 $\frac{2 \times n + 2}{n^2}$ 。

二、3 × 3 奇雞連連

- (一) 一種棋：角落型 (後手選擇正中型)、邊線型 (後手選擇 1、5、7 位置)、正中型 (後手選擇角落型位置)，後手皆會因為選擇當下最好的棋步，而接下來棋盤就會以 90 度
- (二) 兩種棋：先手因為會優先創造雙活路，讓對手無法阻擋，讓自己獲勝，每個棋步先手均可在第 13 步創造雙活路。
- (三) 三種棋：在 3 × 3 奇雞連連中先手必勝，只要先手先下大雞，便會獲勝。

三、4 × 4 棋蹟連連

- (一) 一種棋：在角落型、邊線型、正中型中，後手不論下在哪裡，都會平手。
- (二) 兩種棋：在角落型、邊線型、正中型中，後手不論下在哪裡，都會造成大棋蓋住對方的中棋，最後產生循環棋步，造成平手。

(三) 三種棋：先手與後手要使用大雞先取得角落四個點，但因為先手可以先使用第三隻大雞連成一條，先手便具有優勢。

(四) 四種棋：在 4×4 奇蹟連連中，先手必輸。

四、 3×3 井字棋和 3×3 奇雞連連的比較

棋譜種類	棋步	先手優勢
3×3 井字棋	<u>角落型</u> 先手 1 號位置，後手 2 (邊線型), 5 號(正中型)位置	△
	<u>邊線型</u> 先手 2 號位置，後手 1 (角落型), 5 號(正中型)位置	△
	<u>正中型</u> 先手 5 號位置，後手 1 (角落型), 2 號(邊線型)位置	△
3×3 奇雞連連 1種棋	<u>角落型</u> 先手 1 號位置，後手 2 (邊線型), 5 號(正中型)位置	○
	<u>邊線型</u> 先手 2 號位置，後手 1 (角落型), 5 號(正中型)位置	○
	<u>正中型</u> 先手 5 號位置，後手 1 (角落型), 2 號(邊線型)位置	○
3×3 奇雞連連 2種棋	<u>角落型</u> 先手 1 號先下大雞，後手 2 (邊線型), 5 號(正中型)位置	○
	<u>邊線型</u> 先手 2 號先下大雞，後手 1 (角落型), 5 號(正中型)位置	○
	<u>正中型</u> 先手 5 號先下大雞，後手 1 (角落型), 2 號(邊線型)位置	○
3×3 奇雞連連 3種棋	<u>角落型</u> 先手 1 號先下大雞，後手 2 (邊線型), 5 號(正中型)位置	×
	<u>邊線型</u> 先手 2 號先下大雞，後手 1 (角落型), 5 號(正中型)位置	×
	<u>正中型</u> 先手 5 號先下大雞，後手 1 (角落型), 2 號(邊線型)位置	×

○代表先手優勢；×代表先手劣勢；△代表和局

五、 4×4 井字棋和 4×4 奇雞連連的比較

	棋步	先手優勢
4×4 井字棋	角落型	△
	邊線型	△
	正中型	△
4×4 一種棋	角落型	△
	邊線型	△
	正中型	△

4x4 棋蹟連連 2 種棋	角落型	△
	邊線型	△
	正中型：先手 11 號位置	○
4x4 棋蹟連連 3 種棋	角落型	△
	邊線型	△
	正中型	△
4x4 棋蹟連連 4 種棋	角落型	×
	邊線型	×
	正中型	×

○代表先手優勢；×代表先手劣勢；△代表和局

六、井字棋和奇雞連連的比較

相同點	相異點	
棋盤	奇雞連連是井字棋進階版。	
先手優勢	棋子種類與數量不同	井字棋一方只有一種棋
		奇雞連連一方有 2-3 種棋
二人玩。	棋子位置可否移動:	井字棋不能移動
		奇雞連連可以移動
連線獲勝。	可否蓋住別人棋子	井字棋不能
		奇雞連連中，相對較大的棋子可以蓋住對方較小的棋子
先後手輪流出棋。	是否會和局	井字棋只有和局的可能。
		奇雞連連絕不會平手
先手攻，後手防。	先後手的區別	井字棋用符號區分先後手
		奇蹟連連用顏色區分先後手
先手下角落型位置時，3×3 井字棋和奇雞連連 3 種棋的勝率都最大。	是否需要記住對方還未使用過的棋子	井字棋不必，先手最多 5 棋，後手 4 棋即結束
		奇雞連連要知道對方剩的棋子來決策

均為動態賽局理論，後手的決策取決於先手的棋路	先手位置選擇類型	井字棋有角落型、邊線型及正中型 3 種選擇
		奇雞連連 2 種棋，先手想贏只有角落型和邊線型可選，但角落型勝率低於後手，選正中型先手必輸
	邊線型必勝策略數量	井字棋的先手選擇 2 號位置，後手若選擇 4、6、7、9 四種任一位置，先手有 2 種必勝策略
		奇雞連連 2 種棋的先手選擇 2 號位置，後手若選擇 1、3、4、6、7、9 任一位置，先手有 3 種必勝策略
	先手選擇角落型的差異	在井字棋中，當先手下在位置 1，而後手下在中央位置 5 時會平手。
		在奇雞連連 3 種棋中沒有和局，當先手下在位置 1，就算後手下在位置 5，先手還是會贏。
	先手選擇正中型	在井字棋中，先手選擇 5 號正中位置，後手若選擇 2、4、6、8 號位置，則先手有 1 種必勝策略
		奇雞連連 2 種棋的先手選擇 5 號正中位置，先手必輸
		奇雞連連 2 種棋的先手選擇 5 號正中位置，若後手選擇 2、4、6、8 號位置，則先手有 2 種必勝策略

陸、討論

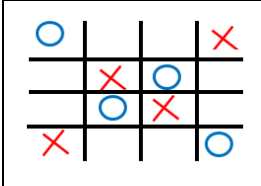
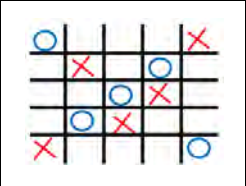
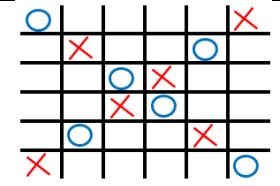
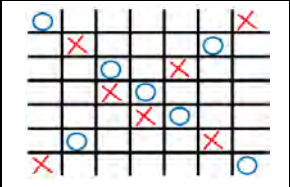
一、在 4x4 井字棋的棋盤中，要將所有的線都創造成廢線總共只要 8 步，為什麼實際玩的時候卻需要 10 步？

(一) 因為步數最少的走法是放棄自己的連線而只有追求和局，但在玩井字棋的時候我們還是會希望能夠盡量連線取得勝利，因此會使用同時能夠攻擊又能夠防守的最佳棋步，而不是讓和局最快發生的走法。

(二) 實際在玩的時候，和局發生所需要用的最少步數會比可以讓棋盤和局的最少步數還要多一些。

(三) 同樣的原因也能用來說明在更大的棋盤上，實際對戰時和局發生的最少步數會比可讓和局發生的最少步數來得多一些。

(四) 在 5×5 的棋盤中，要將所有的線都創造成廢線總共要 10 步但這不是最佳棋步，最佳棋步是 12 步可以攻也可以防。在 6×6 的棋盤中，要將所有的線都創造成廢線總共要 12 步但這不是最佳棋步，最佳棋步是 14 步可以攻也可以防。在 7×7 的棋盤中，要將所有的線都創造成廢線總共要 14 步但這不是最佳棋步，最佳棋步是 16 步可以攻也可以防。

4×4	5×5	6×6	7×7
			

二、為何井字棋容易和局：一方只用一棋就能擋住多條線，使得雙方能在短短幾步 就形成和局，也能夠用比棋盤格子數少的步就形成和局。

(一) 3×3 到 7×7 井字棋，一顆棋可以擋到幾條線：

3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
1~4 條線	1~3 條線	1~4 條線	1~3 條線	1~4 條線

三、為何從 3×3 到 7×7 和局的百分率愈來愈高呢？

(一) 從 3×3 到 7×7 和局的百分率愈來愈高是因為棋盤的格數增加，但一方依然只 要用一顆其就能創造成廢線，所以格子數會比用棋子數來得多，使得和局的百分 率愈來愈高。

(二) 從 3×3 到 7×7 和局的百分率愈來愈高是因為棋盤的格數增加使百分率從高到 低

四、為何井字棋只能平手，但奇雞連連可能可以分出勝負？

(一) 因為奇蹟連連可以蓋別人，且可以創造隱形線，全部的其都下完之後還是可以 移動，故奇蹟連連不一定會平手。

五、為何四種棋的棋蹟連連先手會輸而奇雞連連會贏？

(一) 在 4×4 奇蹟連連中，先手必輸，因為由先手先下中雞，而他的中雞也會先讓 敵對的小雞變得和中雞一樣大，造成後手有 6 隻中雞，根本蓋不完，到了後期 後手變無敵。

(二) 而至於為何 3×3 奇雞連連會贏，是因為 3×3 只要兩顆棋便可製造出一條線

線，但 4×4 要三隻，所以後手一開始就不用浪費棋子來擋。

六、在井字棋、 3×3 一種棋、 4×4 一種棋和兩種棋中的結果都會和局，我們可以如何改變規則，才能讓遊戲分出勝負呢？

(一) 限制遊戲時間，在時間內哪一方棋子連在一起的隱形線最多，該方便獲勝。(n-1顆棋連在一起時算一條隱形線， $n \geq 3$)

(二) 改變下棋方式，例如選擇一次下兩顆棋，或一次下一顆棋但同時可以拿掉對方的一顆棋。

柒、結論

一、井字棋無論先手下在哪，只要雙方都下最好的選擇，一定會平手。

二、井字棋的和局步數，如果使用 n 代表邊長格數，可以得出公式為 $\frac{2 \times n + 2}{n^2}$ 。

三、 3×3 奇雞連連一種棋會平手， 3×3 奇雞連連兩種棋、三種棋的必勝關鍵是創造雙活路，先手必勝。

四、 4×4 棋蹟連連一種棋、兩種棋、三種棋會和局，四種棋先手會輸。

五、發現先手因為選擇最多，可運用的策略最廣，以至於擁有先手優勢。

捌、未來展望

一、立體奇雞連連：四連棋版

(一) 規則如下：

(二) 只要棋的下面沒有棋或是比自己還小，就會往下掉。棋盤為 $3 \times 3 \times 3$ ，當下面的雞移開後，上面的雞便會一起掉到最底層。



二、 3×3 與 4×4 的遊戲雖然只差一格，但是棋盤的組成分析方式不同，如果有機會，希望可以找出有中間一個中樞格子—奇數類型的棋盤格子的規律，以及中間是田字型四格的一偶數類型的棋盤格子的規律。

玖、參考資料及其它

一、魏澹月&黃子綺&林宏峻&黃暉茗(2017)井字代數樂 Retrieved 2017 Nov 15, from www.shs.edu.tw Web site: <http://www.shs.edu.tw/works/essay/2017/11/2017110713082950.pdf>

【評語】 080402

1. 從坊間兩個桌遊出發，嘗試應用數學來尋找遊戲的邏輯，研究主題有趣。
2. 將棋盤區分為角落型、邊線型、以及正中型三類，便於較具系統性的思考與探究，同時輔以圖形分析遊戲路徑，是個不錯的解題策略!
3. 輔以圖文的名詞解釋，使得探究的內容更加清楚具體，是個值得鼓勵的佳作。

研究動機

我們小組想做這個主題，是因為有一次在上課時，老師介紹了井字棋的延伸遊戲——3×3奇雞連連及4×4棋蹟連連，我們想知道在不同棋盤和棋子數量之下，井字棋與奇蹟連連的遊戲邏輯有甚麼不同，所以想趁這次的研究機會，來破解這套有趣又困難的桌遊。

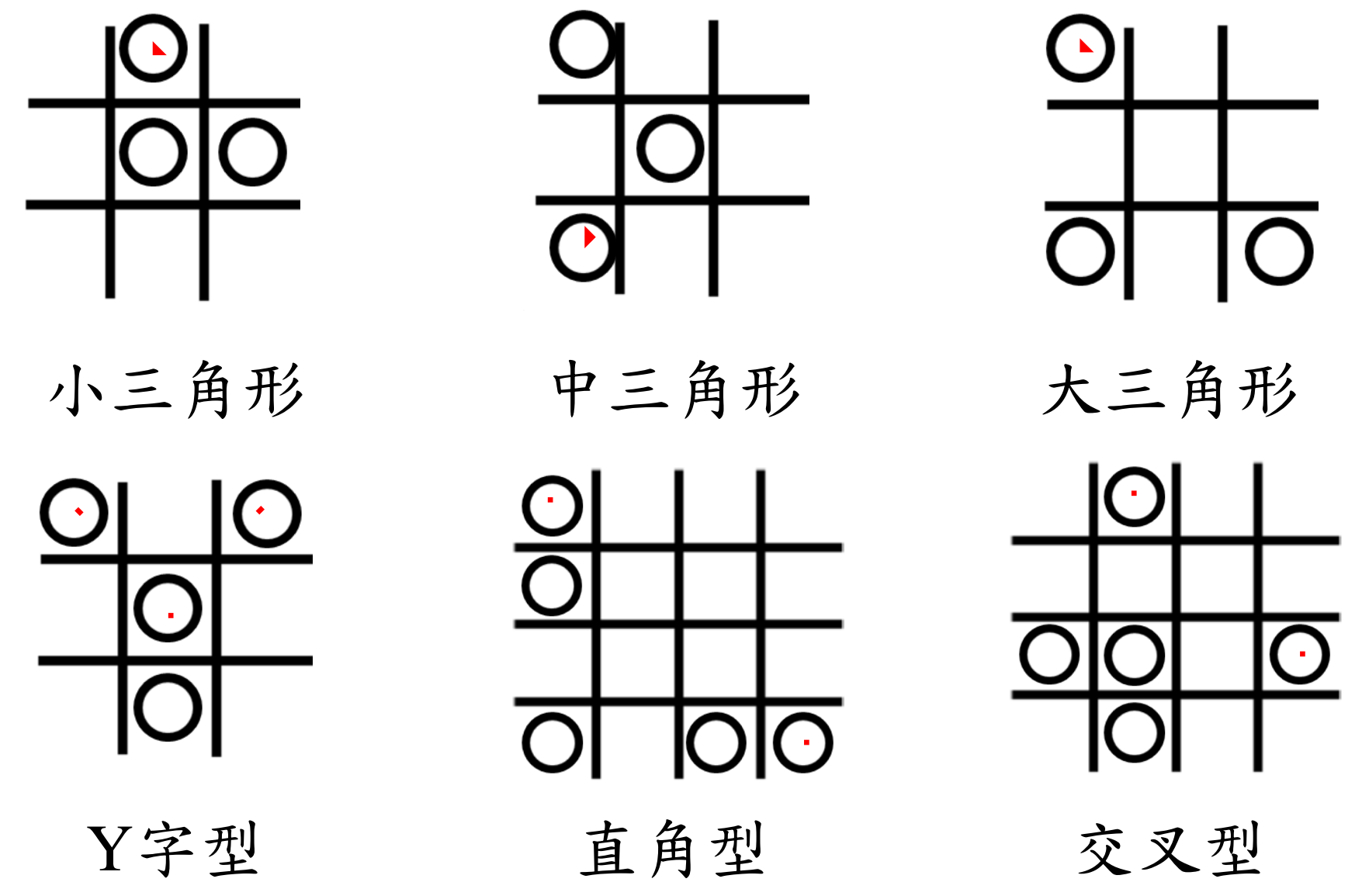
研究目的

- 一、了解3×3井字棋的遊戲邏輯，並且推論到4×4井字棋到7×7井字棋，找出棋盤格數與遊戲規律之間的關聯性。
- 二、研究3×3奇雞連連的遊戲邏輯，分別探討一種棋(動態井字棋)、兩種棋、三種棋的棋步分析。
- 三、研究4×4棋蹟連連的遊戲邏輯，分別探討一種棋(動態井字棋)、兩種棋、三種棋、四種棋的棋步分析。
- 四、比較3×3奇雞連連與4×4棋蹟連連差異，並統整出他們的遊戲策略。

研究方法與過程

一、名詞解釋：

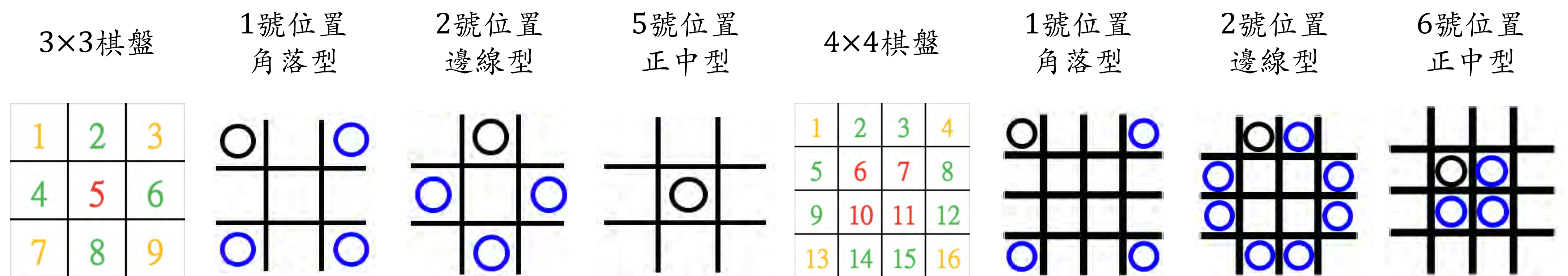
- (一) **最佳棋步**：當敵方下一步不會連線勝利時，攻擊線和防守線最多的位置。當敵方要連線成功時，能擋住敵方的位置。
- (二) **雙活路**：棋盤上有一方同時至少有兩條即將連線成功，且對手無法在下一步就一次阻擋兩條線的棋形。如右圖中所舉出的例子。
- (三) **定義棋盤位置**：我們將棋盤中的格子由左到右、由上到下依序給予編號，這樣能更容易描述每個棋子所在的位置。



- (四) **翻轉棋盤**：由於棋盤是對稱的，我們可以將棋盤右轉90°、右轉180°、右轉270°的方式旋轉，也可以進行垂直或水平的翻轉，我們將這些動作統一稱為翻轉棋盤。

藉由棋盤位置的定義和翻轉棋盤，我們可以將3×3棋盤與4×4棋盤的所有位置分類為角落型、邊線型與正中型三類。

3×3 棋盤		右轉90°	右轉180°	右轉270°	垂直翻轉	水平翻轉
4×4 棋盤		右轉90°	右轉180°	右轉270°	垂直翻轉	水平翻轉



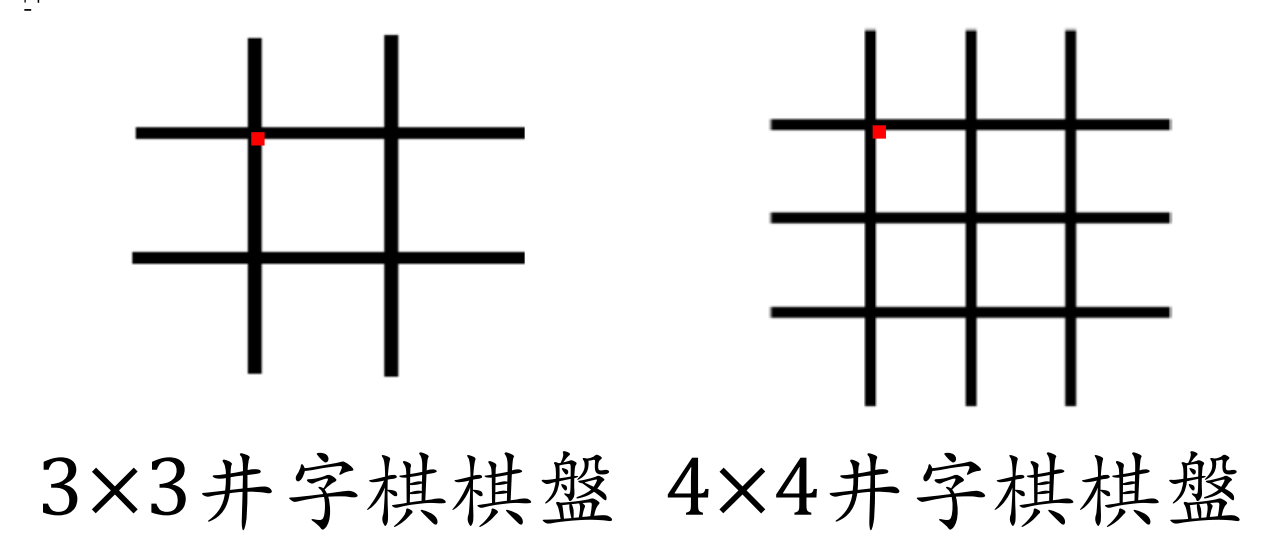
二、井字棋的分析：

- (一) 經過了文獻的探討，我們得知3×3井字棋是個和局遊戲，只要兩個人都不出錯，就一定會和局。因此我們想進一步研究更大的棋盤，以及為什麼井字棋會和局。

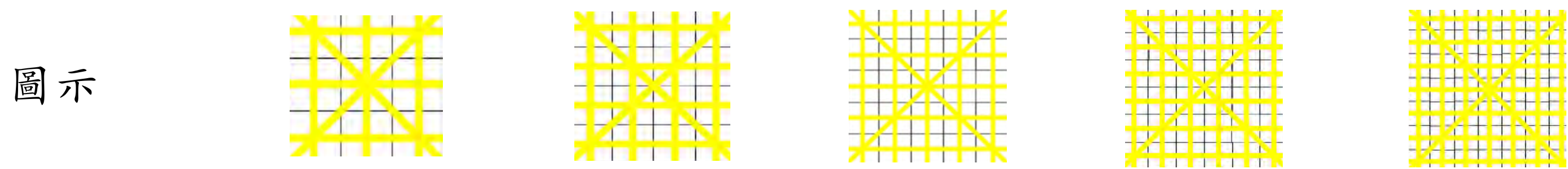
(二) 井字棋的研究結果

- 1、奇數格與偶數格中心位置的不同：奇數格有正中央，但偶數格沒有。
- 2、只要每一條線都有一個O和X就一定會和棋。
- 3、依照3×3到7×7井字棋的格數與和局的最少步數，將棋盤格數放在分母，步數放在分子，可得出數列：

$$\frac{\text{至少要下滿才會和棋的格數}}{\text{棋盤的總格數}} = \frac{8}{9}、\frac{10}{16}、\frac{12}{25}、\frac{14}{36}、\frac{16}{49}$$



棋盤種類	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
格數	9	16	25	36	49
可連線數	8條	10條	12條	14條	16條



平手需要填滿多少百分比

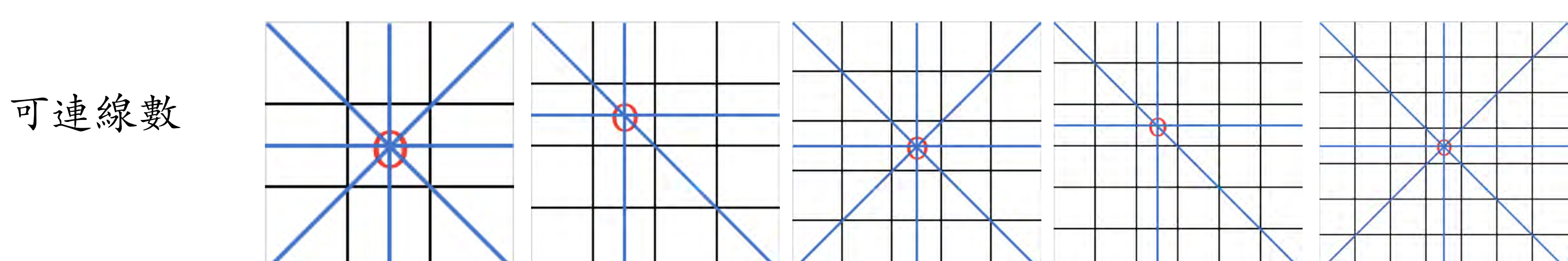
$$\frac{8}{9} = 88.9\% \quad \frac{10}{16} = 62.5\% \quad \frac{12}{25} = 48.0\% \quad \frac{14}{36} = 38.9\% \quad \frac{16}{49} = 32.7\%$$

- 4、我們發現分母為井字棋的邊長格數，分子為該棋盤達到和局的最少步數，我們發現最少步數剛好會等於連線數量，因此我們得出一個公式：

$$\frac{\text{該棋盤達到和局的最少步數}}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{2 \times \text{邊長格數} + 2}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{2 \times n + 2}{n^2} \quad (n \text{ 代表邊長格數, } n \geq 3)$$

- 5、當格子數越來越多的時候，平手所需要填的格子比例越來越低，表示棋盤越大時，即使不特別使用策略，也會越來越容易和局。我們推測是因為當棋盤變大時，放一顆棋子所能創造的連線機會會比不上連線成功所需要的棋子數，因此兩人都越來越不容易完成連線。

棋盤種類	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
連線所需棋數	3	4	5	6	7
可連線數	4條	3條	4條	3條	4條



三、3x3 奇雞連連：

(一)一種棋、兩種棋、三種棋的分析。

奇雞連連	棋子種類與數量	結果	原因
一種棋	大棋各4隻	和局	因為雙方的棋子不會填滿整個棋盤，使得棋子下完後，兩人都只能移動自己的棋子到空格，且這個空格不會讓他有連線的機會。最後棋盤上棋子位置就會出現循環，造成和局。
兩種棋	大棋各2隻 中棋各2隻	先手贏	大棋可以蓋住中棋阻止對方連線，先手會先出完中棋，當所有中棋被都下完及蓋住後，後手必須先移動，使得先手的中棋露出，先手即可創造出雙活路獲得勝利。
三種棋	大棋各2隻 中棋各2隻 小棋各2隻	先手贏	先手會先使用兩顆大棋形成真實線，後手必須使用大棋阻擋，先手使用中棋創造雙活路，使後手無法防守，先手獲勝。

(二) 3x3 奇雞連連三種棋的棋譜

1.分析三種棋的 3x3 奇雞連連下法

- (1) 假設先手第一步棋位置，與井字棋相同，分為1號位置—角落型、2號位置—邊線型、5號位置—正中型。
- (2) 定義線段，黃色線為隱形線，而綠色線為真實線。

(3) 測試 1 號位置—角落型，我們分析出 5 種棋路，如下表：

圖例

↑ 第 1 條棋路：1 綠 3 黃，後手大雞無法救援，後手輸。	↑ 第 2 條棋路：2 綠 共用點大雞，無法解除危機，後手輸。	↑ 第 3 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，後手輸。
↑ 第 4 條棋路：2 綠 共用點大雞無法解除危機，後手輸。	↑ 第 5 條棋路：2 綠 共用點大雞無法解除危機，後手輸。	

(4) 測試 2 號位置—邊線型，我們分析出 4 種棋路，如下表：

↑ 第 1 條棋路：1 綠 3 黃，後手大雞無法救援，故後手輸。	↑ 第 2 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，故後手輸。
↑ 第 3 條棋路：1 綠 2 黃，且共用點為大雞後手大雞無法救援，故後手輸。	↑ 第 4 條棋路：2 綠 2 黃，後手大雞無法救援，且放中小雞可被吃，故後手輸。

(5) 測試 5 號位置—正中型，我們分析出 2 種棋路，如下表：

↑ 第 1 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，且放中小雞可被大雞吃掉，故後手輸。	↑ 第 2 條棋路：2 綠 2 黃，後手大雞無法救援，而因 2 黃放大雞無法移動。故後手輸。

四、4x4 棋蹟連連：

(一)一種棋、兩種棋、三種棋、四種棋的分析。

棋蹟連連	棋子種類與數量	結局	原因
一種棋	大棋各7隻	和局	因為雙方的棋子不會填滿整個棋盤，使得棋子下完後，兩人都只能移動自己的棋子到空格，且這個空格不會讓他有連線的機會。最後棋盤上棋子位置就會出現循環，造成和局。
兩種棋	大棋各3隻 中棋各3隻	和局	一個人有6個棋，大棋可以蓋住中棋阻止對方連線，當所有中棋被都下完及蓋住後，等同於剩下3個棋，雙方皆會下對自己有利的棋步，但是相對於棋盤的邊長格數，棋子數不足以連成線，造成和局。
三種棋	大棋各3隻 中棋各3隻 小棋各3隻	先手贏	後手的大棋都被先手的連線困住，無法移動，因此先手建立了以大棋為交點的隱形雙活路後，使後手無法移動大棋防守，故先手勝。
四種棋	大棋各3隻 中棋各3隻 小棋各3隻 迷你棋各3隻	先手贏	當後手的大棋蓋完先手的中棋後，後手的3顆大棋沒有任何2顆是連在一起的，所以先手會一直創造連線可能性，讓後手大多時間都只能防守。最後先手的總棋數多於後手，且先手還有2顆中棋可以運用，便能創造出以大棋為交點的雙活路，故先手贏。

(二) 4x4 棋蹟連連三種棋的棋譜

1.分析四種棋的 4x4 棋蹟連連下法

- (1) 假設先手第一步棋位置，與井字棋相同，分為1號位置—角落型、2號位置—邊線型、6號位置—正中型。
- (2) 定義線段，黃色線為隱形線，而綠色線為真實線。
- (3) 測試1號位置—角落型，代表性例子如下：

先手1後手4先手13

↑ 第 1 條棋路：1 綠 3 黃，後手大雞無法救援，故後手輸。	↑ 第 2 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，故後手輸。

當後手的大棋蓋完先手的中棋後，後手的 3 顆大棋沒有任何 2 顆是連在一起的，所以先手會一直創造連線可能性讓後手大多時間都只能防守，所以最後先手的總棋數多於後手，且先手還有 2 顆中棋可以用，便能創造出以大棋為交點的雙活路，故先手贏。

(4) 測試 2 號位置—邊線型，代表性例子如下：

↑ 第 1 條棋路：1 綠 3 黃，後手大雞無法救援，故後手輸。	↑ 第 2 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，故後手輸。

先手在第 11 步時便把後手所有的中雞全部吃掉造成後手弱勢，故先手獲得連線上的優勢而勝利。

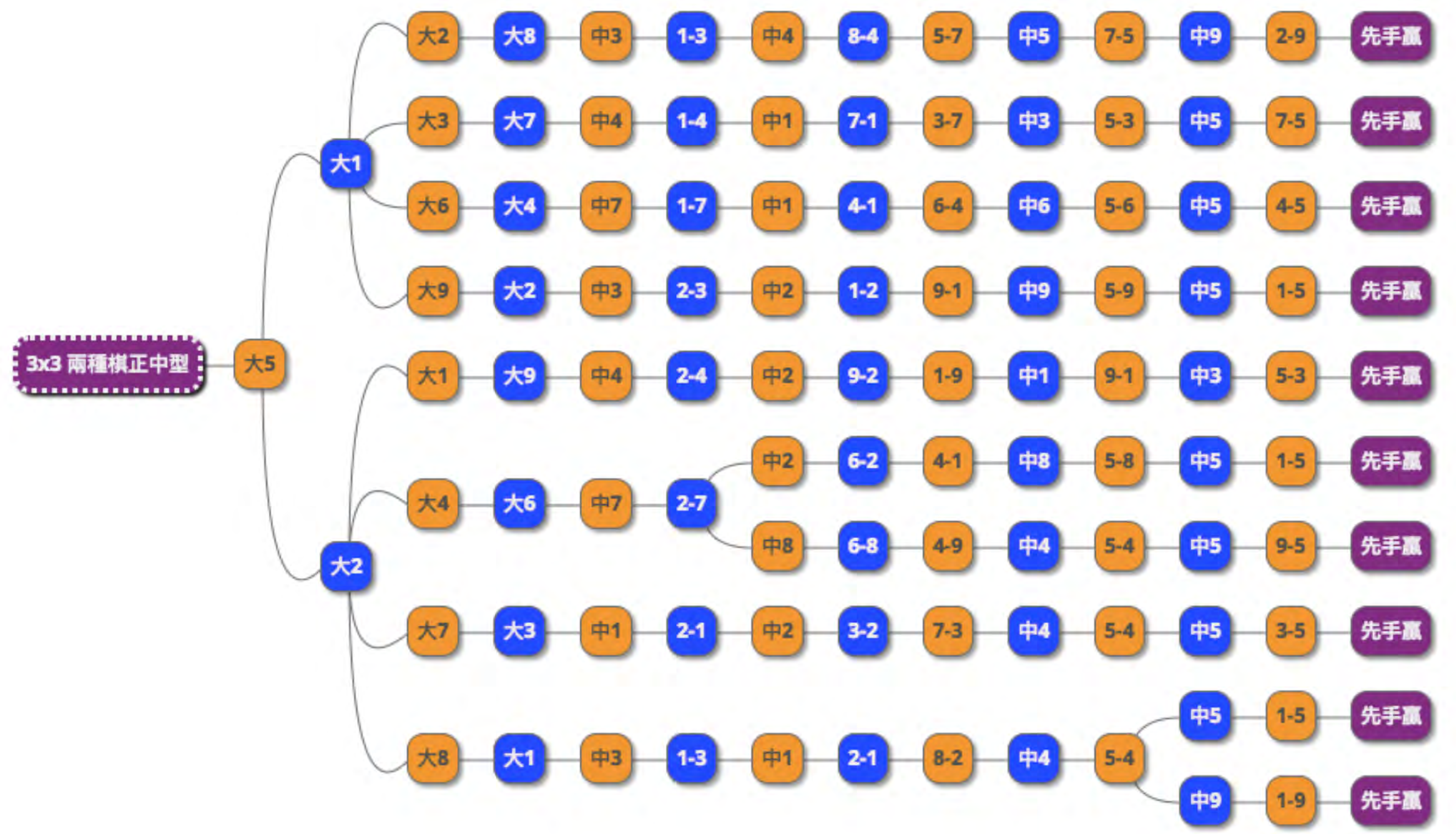
(5) 測試 6 號位置—正中型，代表性例子如下：

↑ 第 1 條棋路：1 綠 2 黃，後手大雞無法救援，且放中小雞可被大雞吃掉，故後手輸。	↑ 第 2 條棋路：2 綠 2 黃，後手大雞無法救援，而因 2 黃放大雞無法移動。故後手輸。

先手會先創造許多隱形連線，導致後手移動防守後，隱形線露出成為真實線，先手連線獲勝。

五、必勝策略與動態賽局理論：

- (一) 我們發現可以將所有棋步統合在一起，做成決策樹，如右圖是3×3奇雞連連正中型的決策樹。
- (二) 透過決策樹，玩家可以更容易看出每一步棋可能導致的結果。
- (三) 而做決定的過程是一據動態賽局理論。無論是先後手都會根據已發生的棋步，來推測對方下一步可能會下的位置，以決定他的最佳棋步，讓自己的獲勝機會可以最大，同時如果有必勝策略的話，也可以透過決策樹，直接看出來要怎麼應對對手的棋步。



六、井字棋、奇雞連連與棋蹟連連的比較：

	井字棋	3×3 奇雞連連	4×4 棋蹟連連
勝負	必定和局	一種棋：和局 兩種棋、三種棋：先手勝	一種棋、兩種棋：和局 三種棋、四種棋：先手勝
勝利技巧	-	先手優先創造雙活路	創造隱形雙活路使對手無法防守 消耗對方的中棋，使他不能連線
中心形狀	-	單格中央	田字型中央
連線機會	-	較多：0~4 條線 有先手優勢	較少：0~3 條線
共同點		可以透過決策樹找出最佳棋步 使用動態賽局理論	

研究結果

一、井字棋：

- (一) 井字棋沒有必勝的祕訣，假設先後手實力相當，均為下棋高手，不會選擇錯誤的棋步，不管棋盤格數多寡，均會是和局。
- (二) 只要棋盤每一條連線中，都有一個O和X就一定和局。
- (三) 和局所需要的步數公式：
$$\frac{\text{該棋盤達到和局的最少步數}}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{2 \times \text{邊長格數} + 2}{\text{邊長格數} \times \text{邊長格數}} = \frac{2 \times n + 2}{n^2}$$
， n 代表邊長格數， $n \geq 3$ 。

二、3×3 奇雞連連：

- (一) 一種棋：在雙方都把棋子下完後，就只能選擇把自己的棋子移到剩下的空格，而接下來棋形就會以翻轉棋盤的形式不斷重複。
- (二) 兩種棋：因先手會優先創造隱形的雙活路，讓對手移動時只能移開大棋，讓自己的中棋露出來形成真實線而獲勝。每個棋步先手均可在第13步創造雙活路。
- (三) 三種棋：只要先手先下大雞，便會獲勝。

三、4×4 棋蹟連連：

- (一) 一種棋：在雙方都把棋子下完後，就只能選擇把自己的棋子移到空格，且這個空格並不會讓任何一人連線成功。而接下來棋形就會以翻轉棋盤的形式不斷重複，形成和局。
- (二) 兩種棋：因為在下棋的過程中，中棋會被大棋蓋住，造成不會有足夠的旗子來連線，形成和局。
- (三) 三種棋、四種棋：先手擁有優先進攻權，後手被迫防守，使得他無法進行連線，或是防守先手中、小棋的棋子被迫移動，使先手的隱形線露出來，讓先手連線成功，因此先手必勝。

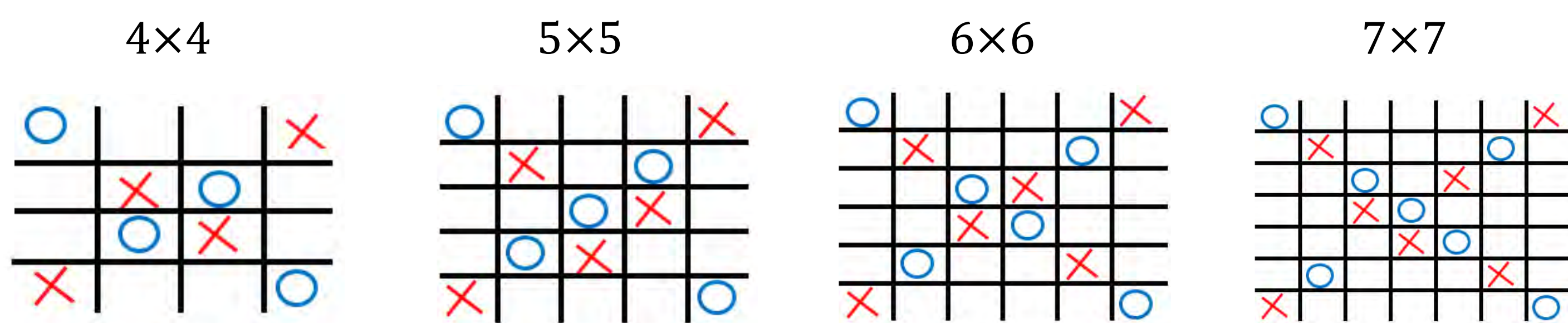
討論

一、為何從3×3到7×7井字棋井字棋越來越容易和局？

- (一) 我們計算了和局所需要的步數佔全部格子的比例，發現當棋盤變大時，和局所需要的格子比例越來越低，表示著即使不特別使用策略，井字棋也越來越容易出現和局。
- (二) 我們發現當井字棋盤變大時，連線成功所需要的棋子數越來越多，可是每一顆棋子能創造的連線機會並沒有變多，表示要連線成功會越來越困難。

二、在4×4井字棋的棋盤中，要將所有的線都創造成廢線總共只要8步，為什麼實際玩的時候卻需要10步？

- (一) 因為步數最少的走法是放棄自己的連線而只有追求和局，但在玩井字棋的時候我們還是會希望能夠盡量連線取得勝利，因此會使用同時能夠攻擊又能夠防守的最佳棋步，而不是讓和局最快發生的走法。
- (二) 同樣的原因也發生在更大的棋盤上，使得實際對戰時和局發生的最少步數會比可讓和局發生的最少步數來得多。



三、在4×4棋蹟連連中，有時仍然會和局，我們可以如何改變規則，才能讓遊戲分出勝負呢？

- (一) 限制遊戲時間，在時間內將棋子連成隱形線最多者，該方獲勝。(n-1顆棋連在一起時算一條隱形線， $n \geq 3$)
- (二) 改變下棋方式，例如選擇一次下兩顆棋，或一次下一顆棋但同時可以拿掉對方的一顆棋。
- (三) 增加棋子的數量，例如將4×4棋蹟連連兩種棋的大棋和中棋個數都變多。

結論

一、井字棋無論先手下在哪，只要雙方都下最好的選擇，一定會和局。

二、井字棋和局所需要的步數，如果使用 n 代表邊長格數，可以得出公式為 $\frac{2 \times n + 2}{n^2}$ ， $n \geq 3$ 。

三、3×3奇雞連連一種棋會平手，3×3奇雞連連兩種棋、三種棋的必勝關鍵是創造雙活路，先手必勝。

四、4×4棋蹟連連中一種棋與兩種棋會和局，更多種棋子時先手有必勝策略。

五、先手在棋子種類與棋子數足夠時，因為優先進攻，只要掌握進攻權，就能擁有先手優勢。

六、均為動態賽局理論，後手的決策取決於先手的棋路。