

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

佳作

080401

AlphaGo 想什麼?用棋士精神圖解渡河問題

學校名稱：臺南市麻豆區麻豆國民小學

作者：	指導老師：
小六 楊昕懋	謝沛原
小六 李翊禎	李凱名
小六 劉品曜	
小六 王俊逸	

關鍵詞：渡河問題、座標圖、對稱性

摘要

傳教士和土著從左岸搭船(必須有人開船)到右岸，過程中任一岸土著不可比傳教士多，否則土著吃掉傳教士，遊戲失敗。

設計圖解方法，將操作過程轉化成二維座標，題目限制畫成棋盤，並依據條件設定棋子不同走法，以下棋概念探討渡河相關變化題，如改變船的座位、陸地的數量、土著和傳教士的人數……等。

觀察規律並找出「最少步數」與「最佳解法」，將研究成果透過自學程式語法 Processing 寫成可隨變化題快速產生「棋盤樣式」與「棋子提示走法」的輔助研究工具，加速研究歷程及驗證研究成果。

其中，改變物種數量會產生三維座標以上立體棋盤，無法視覺化棋盤輔助思考情況下，效仿 AlphaGo 設計精神，運用運算思維技巧，以現有研究成果為基礎，推論其變化規律。

壹、 研究動機

老師在數學課「怎樣解題」單元，給一個進階題的挑戰「渡河遊戲」，因為一開始我們還不懂規則以及秩序，所以一直導致傳教士被土著生吞了；後來我們搞懂規則後，可以順利過了關。但我們要分享自己如何過關的，步驟卻怎麼說都說不清楚，更別說要記錄下來。

找了許多方法，最後我們設計了一種能成功記載操作步驟的棋盤紀錄方式，卻也激發了想找更多題目測試這個棋盤紀錄法的動機，因此我們開始嘗試改變遊戲的規則，想看看那些變因會影響棋盤紀錄法的使用方式。

而當我們設計了二維平面圖來記錄兩種人在渡河時的變化關係時，我們便思考到如果增加一種人，是否會變成三維立體。如果再增加一種人時，是不是會形成四度空間，似乎無法以圖像化表現。因此我們想從二維平面與三維立體的解題過程中，找到規律，並交由程式驗證並推論到四維以上的圖形來求得渡河問題的最少步數解法。

參考 AlphaGo 打敗人類最強棋手，以及 AlphaGo Zero 打敗 AlphaGo 的經驗。將渡河問題轉化成棋盤與下棋的研究，跳脫 AlphaGo 從棋譜學習勝利的方式，而是 AlphaGo Zero 從遊戲規則探索的方式進行研究。

我們設計的圖解方法已能將任何種類的渡河變化問題轉化成「棋盤樣式」以及「棋子走法」兩個變因。我們要挑戰能清楚的描述任何變化題如何影響這兩個變因，掌握這些規律後便能定義任何變化問題如何影響規律。

我們嘗試用 Processing 軟體寫出可以實現隨題目條件產生「棋盤樣式」並具有「棋子走法」提示的程式，並在不同變化題的操作過程中，使用 Excel 軟體紀錄相關變數與結果的關係，從中找出最少步數解法規律，如此一來可以更有效率找出變化問題的規律。

因此我們希望盡可能的建立我們對變化題的認知，並貢獻研究成果。透過我們設計的「棋盤樣式」與「棋子走法」改變渡河問題的思維，用下棋的方式解題，並能歸納所有變化問題如何影響這兩個變因，做好工人智慧的角色，並嘗試學習寫程式把已知的研究成果轉化成研究輔助工具，加快研究歷程以及驗證研究成果。

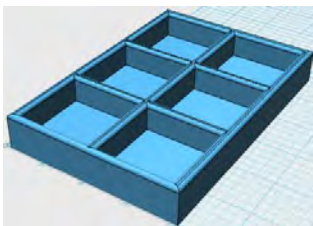
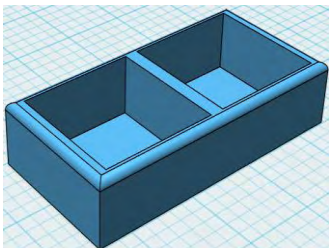
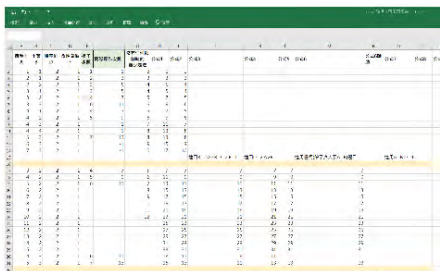
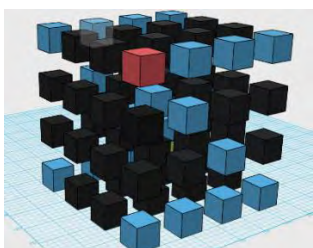
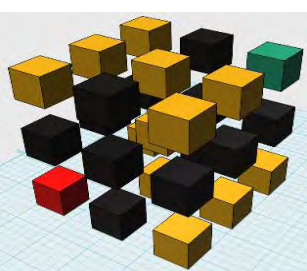
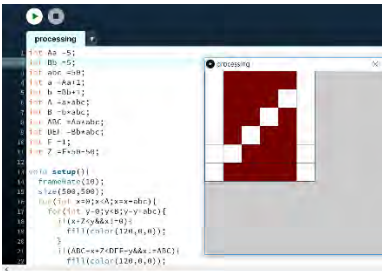
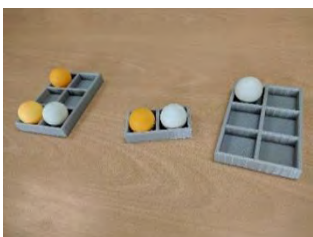
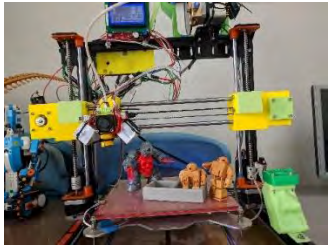
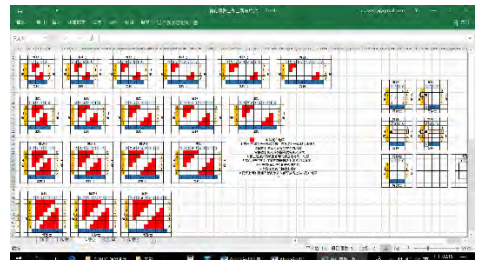
最後，將我們研究成果與小程式提供給未來有編寫程式能力的團隊或未來隨年紀增長而程式技巧提升的我們能建構出「人工智慧」解開三維座標以上的所有渡河問題。

貳、 研究目的

- 一、 設計一款能記錄渡河問題操作過程的解題紀錄方式。
- 二、 以「棋盤樣式」與「棋子走法」分析渡河變化問題。
- 三、 運用程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊。
- 四、 以運算思維推理三維以上的題目類型，並提出渡河解題策略。

參、 研究設備與器材

電腦、印表機、自製方格紙、筆、黑板、Word 軟體、Excel 建立表格及運用公式驗證規律、Processing 程式設計萬用棋盤、自製 3D 模擬渡河遊戲道具、123D Design 繪製立體記錄圖、PowerPoint 繪製研究相關圖形與 3D 印表機、乒乓球。

123D 繪製的自製河岸	123D 繪製的自製船	EXCEL 建立棋子走法驗證
		
123 繪製三維立體記錄圖	123D 立體記錄圖	Processing 設計萬用棋盤
		
3D 實物操作過程示意圖	3D 列印道具輔助思考	初期手動 EXCEL 建立各式棋盤
		

肆、研究過程與結果

一、設計一款能記錄渡河問題操作過程的解題紀錄方式。

(一) 透過二維平面的紀錄表格記載渡河問題操作過程。

透過 X 與 Y 座標建立傳教士與土著的人數組合，記錄成 $(x, y) = (\text{傳教士}, \text{土著})$ ，因此紀錄 (3,3) 時，代表有 3 個傳教士與 3 個土著。

要產生 (x, y) 任一組合的紀錄表格，先建立 $(x + 1) \times (y + 1)$ 尺寸空白表格(圖 1-1)。分別增加 1 格的目的是要能記錄沒有傳教士或沒有土著的情況。以 3 個傳教士與 3 個土著的題目為例，因此 x 的範圍是 0、1、2、3，而 y 的範圍也是 0、1、2、3。

由左下角作為起始點，每一個座標格都代表目的岸(右岸)實際組合狀況。目標是要能到達右上角，意味著所有人數組合都是全員到達目的岸(右岸)的狀況，代表傳教士與土著都順利渡河了(圖 1-2)。

為了更清楚記錄，可稍微擴大表格協助對照用，以左下角為原點，分別往右與往上畫出 0、1、2、3 的座標，水平方向是傳教士的人數座標，往右代表傳教士增加人數到右岸；垂直方向代表土著的人數座標，往上代表土著增加人數到右岸(圖 1-3)。

圖 1-1	圖 1-2	圖 1-3	圖 1-4	圖 1-5	圖 1-6

紀錄(0,0)時，代表目的岸(右岸)沒有任何人(圖 1-4)；而紀錄(2,1)時，代表目的岸(右岸)有 2 個傳教士與 1 個土著(圖 1-5)，卻產生問題，右岸組合是安全的，但起始岸(左岸)會有 1 個傳教士與 2 個土著，造成傷亡。

發現不論右岸或左岸，總人數不變，因此我們設計了雙座標，能一次看出兩岸的人數組合。在同一個表格畫上第二個座標，輔助檢查有無人員傷亡，原始座標以左下角為原點往右與往上延伸，代表傳教士或土著人數在右岸增加；輔助座標以右上角為原點往下或往左延伸，代表代表傳教士或土著人數在左岸增加。如(圖 1-6)的黑點代表右岸為 (3,3) 代表 3 個傳教士與 3 個土著都順利渡河了，而此時左岸為 (0,0) 代表全部已離開。

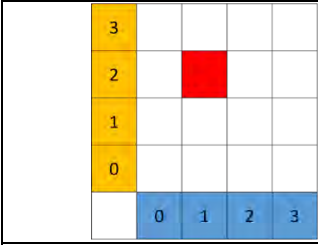
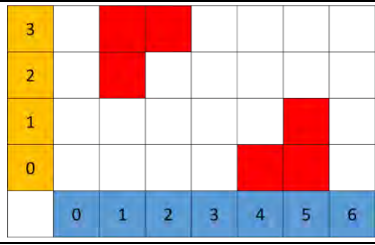
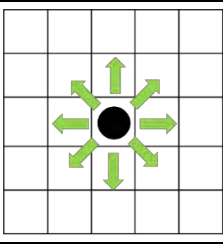
(二) 利用二維平面紀錄表格的解題範例

步驟 1	目的岸(右岸) 0 個土著和 0 個傳教士； 起點岸(左岸) 3 個土著和 3 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
步驟 2	2 個土著坐船到對岸，1 個土著划船回來。 目的岸(右岸) 1 個土著； 起點岸(左岸) 2 個土著和 3 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
步驟 3	2 個土著坐船到對岸，1 個土著划船回來。 目的岸(右岸) 2 個土著和 0 個傳教士； 起點岸(左岸) 1 個土著和 3 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
步驟 4	2 個傳教士坐船到對岸，1 個土著和 1 個傳教士划船回來。 目的岸(右岸) 1 個土著和 1 個傳教士； 起點岸(左岸) 2 個土著和 2 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
步驟 5	2 個傳教士坐船到對岸，1 個土著划船回來。 目的岸(右岸) 0 個土著和 3 個傳教士； 起點岸(左岸) 3 個土著和 0 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
步驟 6	2 個土著坐船到對岸，1 個土著划船回來。 目的岸(右岸) 1 個土著和 3 個傳教士； 起點岸(左岸) 2 個土著和 0 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
步驟 7	2 個土著直接坐船到對岸 目的岸(右岸) 3 個土著和 3 個傳教士； 起點岸(左岸) 0 個土著和 0 個傳教士。	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>土著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td>土著</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>傳教士</td><td></td></tr></table>					傳教士	起點岸座標			3	2	1	0	土著	3				0		2				1	土著	1				2		0				3	目的岸座標	0	1	2	3						傳教士		
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																
				傳教士	起點岸座標																																																																																															
		3	2	1	0																																																																																															
土著	3				0																																																																																															
	2				1																																																																																															
土著	1				2																																																																																															
	0				3																																																																																															
目的岸座標	0	1	2	3																																																																																																
				傳教士																																																																																																

二、以「棋盤樣式」與「棋子走法」分析渡河變化問題。

(一) 轉化渡河問題變成棋盤概念

設計二維平面紀錄表格後，我們就能直接從表格進行規律研究，表格上所有的空格為棋子可以走的路徑點，每一格(路徑點)代表傳教士與土著不同的組合，如果能將題目中會**死亡的組合**標示出來，如 1 個傳教士與 2 個土著(圖 2-1)，是不能使用的路徑點，排除所有禁止的路徑點後，就能設計一個無論如何行進都不會有死傷發生的棋盤，可以安全的探索每一次操作的選擇，因為題目不同，會有不同的影響，我們稱「棋盤樣式」(圖 2-2)。而當我們解題時，目標會從左下角起點慢慢往右上角終點前進，但每一次可以前進的量與位置受題目條件影響，我們稱為「棋子走法」(圖 2-3)。

		
圖 2-1 死亡的組合	圖 2-2 棋盤樣式	圖 2-3 棋子走法

我們發現，無論變化題未來如何改變，終究只會造成這 2 個變因的改變。如此一來，只要能了解變化題如何影響「棋盤樣式」以及「棋子走法」，我們就能像下棋一般研究規律，並且建立棋譜讓使用者可以更容易解開渡河問題以及找到更快的解法，並取代透過實際操作，卻很難記錄每一次選擇的困境。

(二) 透過數學語言產生變化題

用文字語言描述原始問題如下：傳教士 3 個與土著 3 個，然後船 1 艘座位 2 個，陸地 2 岸，要由左岸到右岸，如果土著比傳教士多 1 個，傳教士就會被吃掉。

用數學的語言重新描述這個題目：傳教士 A 個與土著 B 個，然後船 C 艘座位 D 個，陸地 E 岸，要由左岸到右岸，如果土著比傳教士多 F 個（食性關係），傳教士就會被吃掉。

用數學語言的好處是，我們把數字的變成未知數，以後我們如果要討論變化題的時候，就可以直接改變未知數做討論。

(三)「棋盤樣式」的規律

1. 表格大小：

根據變化題的研究，只有 $A \geq B$ 的類型需要討論。

首先 $A = B$ 的類型會形成一個正方形的座標圖，因為兩者人數一樣多(圖 2-4)。

而 $A > B$ 的類型會形成一個長方形，人數比例差距越大，長方形會越狹長(圖 2-5)。

<table><tr><td rowspan="4">土 著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>目的岸 座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td colspan="7">傳教士</td></tr></table>	土 著	3						2						1						0						目的岸 座標	0	1	2	3			傳教士							<table><tr><td rowspan="4">土 著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>目的岸 座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td colspan="7">傳教士</td></tr></table>	土 著	3						2						1						0						目的岸 座標	0	1	2	3	4		傳教士							<table><tr><td rowspan="4">土 著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>目的岸 座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td colspan="8">傳教士</td></tr></table>	土 著	3							2							1							0							目的岸 座標	0	1	2	3	4	5		傳教士								<table><tr><td rowspan="4">土 著</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>目的岸 座標</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td colspan="9">傳教士</td></tr></table>	土 著	3								2								1								0								目的岸 座標	0	1	2	3	4	5	6		傳教士								
土 著		3																																																																																																																																																																															
		2																																																																																																																																																																															
		1																																																																																																																																																																															
	0																																																																																																																																																																																
目的岸 座標	0	1	2	3																																																																																																																																																																													
傳教士																																																																																																																																																																																	
土 著	3																																																																																																																																																																																
	2																																																																																																																																																																																
	1																																																																																																																																																																																
	0																																																																																																																																																																																
目的岸 座標	0	1	2	3	4																																																																																																																																																																												
傳教士																																																																																																																																																																																	
土 著	3																																																																																																																																																																																
	2																																																																																																																																																																																
	1																																																																																																																																																																																
	0																																																																																																																																																																																
目的岸 座標	0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																											
傳教士																																																																																																																																																																																	
土 著	3																																																																																																																																																																																
	2																																																																																																																																																																																
	1																																																																																																																																																																																
	0																																																																																																																																																																																
目的岸 座標	0	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																																										
傳教士																																																																																																																																																																																	
圖 2-4 A = B	圖 2-5-1 A: B = 4: 3	圖 2-5-2 A: B = 5: 3	圖 2-5-3 A: B = 6: 3																																																																																																																																																																														

而快速劃出表格大小及總格子數的方式為 $(A + 1) \times (B + 1)$ ，代表該類型題目，傳教士與土著在右岸上的組合共有 $(A + 1) \times (B + 1)$ 種變化。

2. 死亡地帶：

根據題目要求，只要會有傷亡的地方，不論是在左岸或右岸，都會稱為死亡地帶。

但死亡地帶與食性關係 F 有關，並且是有其規律性。

首先，不論從目的岸(右岸)或起始岸(左岸)來看，只要該岸沒有任何傳教士 $A = 0$ ，就不可能在該岸發生死亡的狀況(圖 2-6、圖 2-7)。

<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3 2 1 0</td><td></td></tr> <tr><td>土</td><td>3</td><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>著</td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>0</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1 2 3</td><td></td></tr> <tr><td>傳教士</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>			傳教士	起點岸座標			3 2 1 0		土	3		0	著	2		1		1		2		0		3	目的岸座標	0	1 2 3		傳教士				<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3 2 1 0</td><td></td></tr> <tr><td>土</td><td>3</td><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>著</td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>0</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1 2 3</td><td></td></tr> <tr><td>傳教士</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>			傳教士	起點岸座標			3 2 1 0		土	3		0	著	2		1		1		2		0		3	目的岸座標	0	1 2 3		傳教士				<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3 2 1 0</td><td></td></tr> <tr><td>土</td><td>3</td><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>著</td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>0</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1 2 3</td><td></td></tr> <tr><td>傳教士</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>			傳教士	起點岸座標			3 2 1 0		土	3		0	著	2		1		1		2		0		3	目的岸座標	0	1 2 3		傳教士				<table border="1"> <tr><td></td><td></td><td>傳教士</td><td>起點岸座標</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3 2 1 0</td><td></td></tr> <tr><td>土</td><td>3</td><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>著</td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>0</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td>目的岸座標</td><td>0</td><td>1 2 3</td><td></td></tr> <tr><td>傳教士</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>			傳教士	起點岸座標			3 2 1 0		土	3		0	著	2		1		1		2		0		3	目的岸座標	0	1 2 3		傳教士			
		傳教士	起點岸座標																																																																																																																																
		3 2 1 0																																																																																																																																	
土	3		0																																																																																																																																
著	2		1																																																																																																																																
	1		2																																																																																																																																
	0		3																																																																																																																																
目的岸座標	0	1 2 3																																																																																																																																	
傳教士																																																																																																																																			
		傳教士	起點岸座標																																																																																																																																
		3 2 1 0																																																																																																																																	
土	3		0																																																																																																																																
著	2		1																																																																																																																																
	1		2																																																																																																																																
	0		3																																																																																																																																
目的岸座標	0	1 2 3																																																																																																																																	
傳教士																																																																																																																																			
		傳教士	起點岸座標																																																																																																																																
		3 2 1 0																																																																																																																																	
土	3		0																																																																																																																																
著	2		1																																																																																																																																
	1		2																																																																																																																																
	0		3																																																																																																																																
目的岸座標	0	1 2 3																																																																																																																																	
傳教士																																																																																																																																			
		傳教士	起點岸座標																																																																																																																																
		3 2 1 0																																																																																																																																	
土	3		0																																																																																																																																
著	2		1																																																																																																																																
	1		2																																																																																																																																
	0		3																																																																																																																																
目的岸座標	0	1 2 3																																																																																																																																	
傳教士																																																																																																																																			
圖 2-6 目的岸 $A = 0$	圖 2-7 起始岸 $A = 0$	圖 2-8 目的岸的死亡地帶	圖 2-9 起始岸的死亡地帶																																																																																																																																

根據原始題目的規定，發現只要該岸傳教士 A 人與土著 B 人的關係呈現 $A \geq B$ ，一定是安全的；反之，只要該岸人數組合是 $A < B$ ，就會出現死亡組合。因此我們可以發現從目的岸(右岸)來看人數組合所產生的死亡地帶會出現一個直角三角形(圖 2-8)；而從起始岸(左岸)來看人數組合所產生的死亡地帶也會出現一個直角三角形(圖 2-9)。這兩個等腰直角三角形的大小相等，以及出現位置對稱，因此死亡地帶具有對稱性。

進一步觀察死亡地帶規律「死亡地帶是直角三角形，且長邊所有點都符合岸上組合 $B - A = F$ 」，必要條件是該岸人數組合「 $A > 0$ 且 $B - A = F$ 」；所以安全的臨界點為 $B - A = F - 1$ 。若根據原始題目的食性關係 $F = 1$ ，就是 $A = B$ 的界線，以目的岸(右岸)為例，為目的岸人數組合為(0,0)、(1,1)、(2,2)、(3,3)的直線(圖 2-10)；以起始岸(左岸)為例，為起始岸人數組合為(0,0)、(1,1)、(2,2)、(3,3)的直線(圖 2-11)。若以 $A = B$ 的題目來看，這兩條直線永遠是同一條線(圖 2-12)，而 $A > B$ 的類型都會有兩直線。

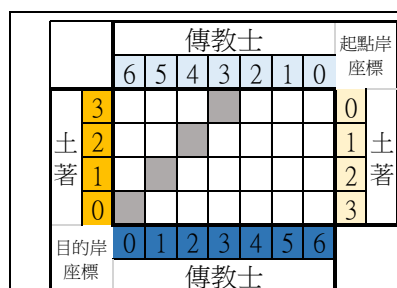


圖 2-10 目的岸人數組合 $A = B$



圖 2-11 起始岸人數組合 $A = B$



圖 2-12 目的岸與起始岸 $A = B$

因此，手繪死亡地帶的快速方法為，找到兩岸 $A = 0$ 的直線，以及找出兩岸 $B - A = F - 1$ 斜線(如果是 $A > B$ 的類型會有兩條， $A = B$ 的類型會有一條)，就能畫分出兩個直角三角形的區域，這兩塊地區就是「死亡地帶」，我們塗上紅色標示為禁止。如下圖

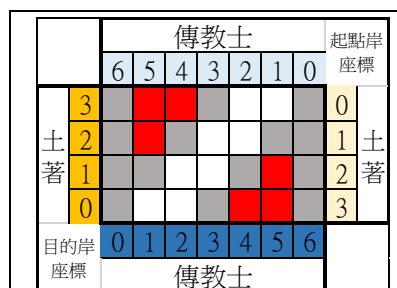


圖 2-13 $A : B = 6 : 3$ 類型

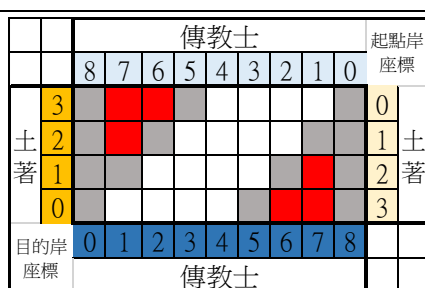


圖 2-14 $A : B = 8 : 3$ 類型

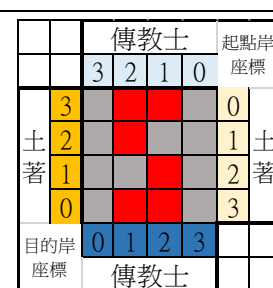


圖 2-15 $A = B$ 類型

從這裡我們可以看出，當土著 B 人數不變時，死亡地帶的大小不變；而傳教士與土著差異越大，也就 $A - B$ 值越高時，2 個死亡地帶距離越來越遠。可以看出棋盤限制變少了，代表遊戲變得更容易。因此， $A - B$ 值越高，解法越多元，成功率越高。



圖 2-16 $A : B = 3 : 3$

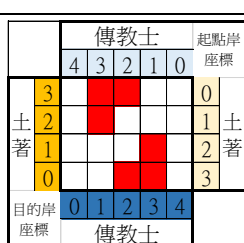


圖 2-17 $A : B = 4 : 3$

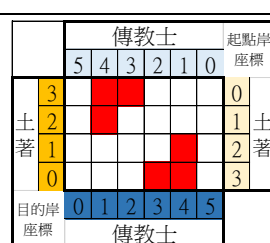


圖 2-18 $A : B = 5 : 3$

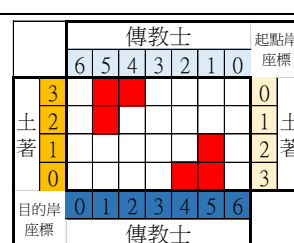


圖 2-19 $A : B = 6 : 3$

(四)「棋子走法」的規律

棋子走法與船座位 D 緊密關聯，船的座位越多代表棋子單次可以移動的步數範圍越大。我們規範紀錄方式為操作去回各 1 次做為一趟並寫上第幾步(圖 2-20)。不將去回分開紀錄的原因在於，船可以靠在兩個不同的岸，因此有 2 種操作過程會記錄在一樣的座標，但是船卻在不同的地方。例如，有可能目的岸(右岸)同樣都是 $A:B = 1:1$ ，但船此時有停靠目的岸(右岸)或起始岸(左岸)這 2 種變化(圖 2-21)。

去回分開紀錄還有一個嚴重的缺點在於，單看座標時，會誤以為某些組合是可行並且有進展的，比方說 $A:B=1:1$ ，但如果船也在目的岸(右岸)，意味著必須要有至少一個人開船回到起始岸(左岸)，因此我們期待目的岸(右岸)能增加人數卻反而會減少。退回到總人數組合比較少的座標(圖 2-21-2)。

<table><tr><td></td><td></td><td colspan="4">傳教士</td><td></td><td>起點岸座標</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td>土</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td>0</td></tr><tr><td>著</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>目的岸座標</td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td colspan="4">傳教士</td><td></td><td></td></tr></table>			傳教士					起點岸座標			3	2	1	0			土	3					6	0	著	2	2					1		1	1	3			5	2		0					4	3	目的岸座標		0	1	2	3					傳教士						
		傳教士					起點岸座標																																																										
		3	2	1	0																																																												
土	3					6	0																																																										
著	2	2					1																																																										
	1	1	3			5	2																																																										
	0					4	3																																																										
目的岸座標		0	1	2	3																																																												
		傳教士																																																															
圖 2-20 A:B=3:3	圖 2-21-1 目的岸(1,1)，船在左岸																																																																

	圖 2-21-2 目的岸(1,1)，船在右岸
--	------------------------

因此我們將去回做為一趟紀錄，並且將船設定在起始岸(左岸)，代表每一次新的操作都可以直接增加不同的人數組合，而這樣每一個座標都會代表獨一無二的棋子步數。代表每一次棋子移動時(每一趟去回的完整思維)，必須要先思考如何把人成功送到對岸，並且思考如何將傳送回到起始岸(左岸)。唯獨最後一次時，可以直接將船靠岸在目的岸(右岸)

以 $A:B = 3:3$ 的原始題目為例，紀錄於表格的步數為 6 步(棋子步數)，但因為最後 1 步直接開船過去並不需要回到起始岸(左岸)，因此如果是紀錄操作船移動的次數的話，是棋子總步數 $\times 2 - 1$ ，所以船移動了 $6 \times 2 - 1 = 11$ 次(操作次數)。

我們將棋子走法的紀錄定義為：

去回完整一趟算 1 步，除了最後一步為成功步，船會在起始岸(右岸)，其餘操作過程船都必須回到起始岸(左岸)。因此，船移動次數 = 總步數 $\times 2 - 1$ 。

依據座標設定，棋子水平方向**往右**代表**增加傳教士**(圖 2-22)；棋子水平方向**往左**代表**減少傳教士**(圖 2-23)；棋子垂直方向**往上**代表**增加土著**(圖 2-24)；棋子垂直方向**往下**代表**減少土著**(圖 2-25)；棋子往右或往上代表增加人；棋子往下或往左代表減少人。

圖 2-22 增加傳教士	圖 2-23 減少傳教士	圖 2-24 增加土著	圖 2-25 減少土著	圖 2-26 增加人	圖 2-27 減少人

以船座位 **$D=2$** 類型來看，棋子一次去回一趟的選擇如(圖 2-28)，黑點為棋子原先所在位置，**綠色代表一趟可以到達的點**。棋子走法是不論現階段位置在哪，都符合規律，一趟能到達的範圍都相同。因此我們可以當作是棋子的走法，如西洋棋的國王可以走九宮格範圍、象棋的馬可以走日字型。未來就能使用棋子的的走法來研究渡河問題。

棋子走法規律可從人數變化的角度來看，由左上到右下為一斜排並呈 45 度，線上所有的 0 點在該岸總人數都是一樣多，只是組合不同(圖 2-29)。往右或往上的方向移動 1 格的斜線上任一點，該岸總人數會比原先斜線上的任一點都要多 1 人。比方說，b1、c2、d3、e4、f5、g6 這幾個點代表右岸的總人數，都會比 a1、b2、c3、d4、e5、f6、g7 這些點的右岸總人數多 1 人(圖 2-30)。依此類推，往上或往右移動 1 格，該岸總人數增加；往下或往左移動，該岸總人數減少。

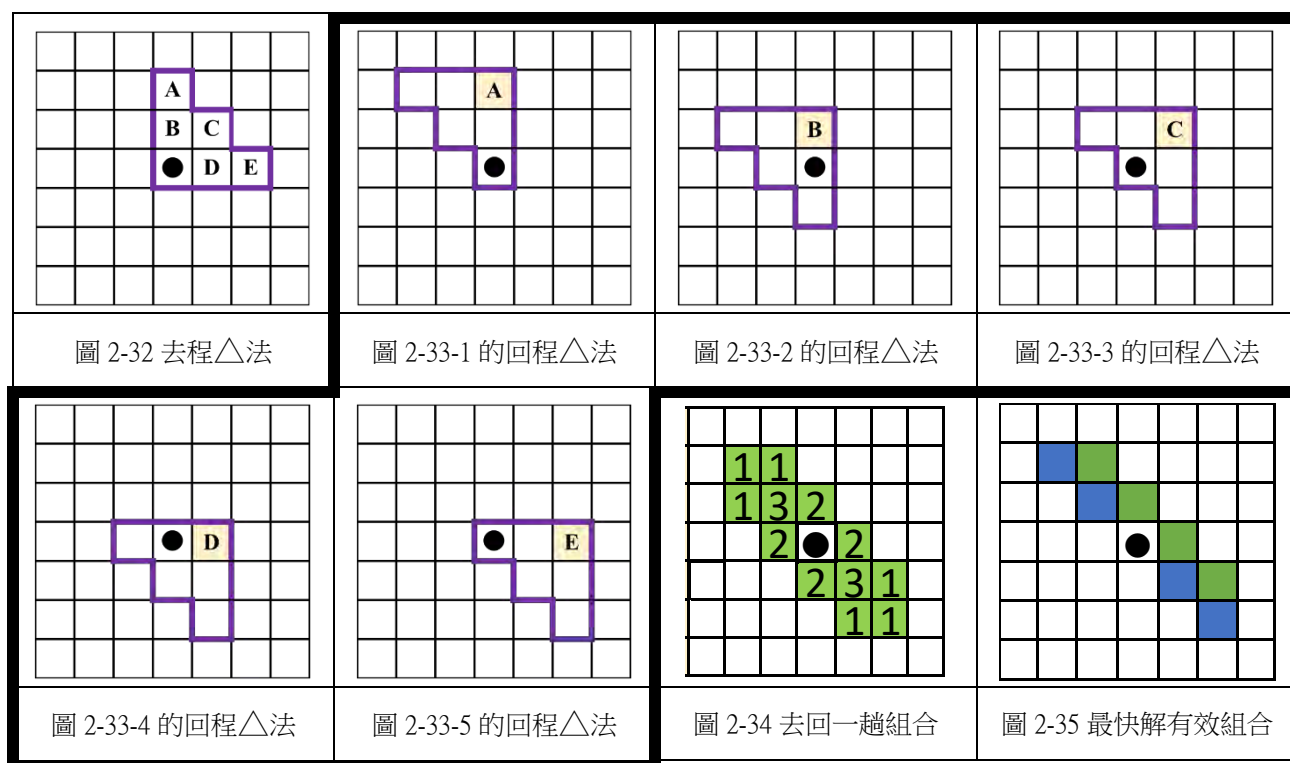
因此船座位 **$D=2$** 類型的棋子有效走法為**每一步要能增加人**，**如不能增加人，至少達到換人效果**，若**減少人不合理**，代表浪費步數(圖 2-31)。

圖 2-28 棋子的走法	圖 2-29 總人數增減規律	圖 2-30 該岸總人數增加	圖 2-31 棋子有效走法

如果將棋子放在已設定好的棋盤上，根據上述的規律，只要努力地往**右上角**移動，並且不落入死亡地帶，以及去回一趟最多平移 $D-1$ 斜排，就能順利找出解法。

棋子實際操作過程，還有一個隱藏資訊，就是我們的紀錄點只記錄去回後的結果，但每一次都有一個潛在的去程，因此我們又設計了一個好用的方式，是△法。如果將所有選擇加上原本的位置，會形成一個等腰直角三角形，故稱為△法。

若船座位 $D=2$ ，全部組合有 A:0 傳教士與 2 土著、B:0 傳教士與 1 土著、C:1 傳教士與 1 土著、D:1 傳教士與 0 土著、E:2 個傳教士與 0 土著…這 5 種。若船由起點岸(左岸)到目的岸(右岸)，代表目的岸(右岸)增加人，根據坐標設定棋子是往上與往右，可以參考圖 2-32 去程△法（直角三角形 90 度角朝右上）。若船由目的岸(右岸)到起點岸(左岸)，代表目的岸(右岸)減少人，根據坐標設定棋子是往下與往左，參考圖 2-33 回程△法（直角三角形 90 度角朝左下）。由於我們紀錄一趟去回才算一步，因此必須先使用一次去程△法，再從最新座標點使用回程△法找到去回一趟後的棋子位置，稱為 1 步。



橙色點代表由**黑點**透過去程前往的最新座標，再從**橙色點**使用回程△法，檢查可以回到哪，完成一趟去回（棋子 1 步）。

因此，棋子 1 步範圍如圖 2-34，數字代表有幾種方法能透過去回一趟動作到達。但我們的研究已知，求最快解時，如果不能增加人，至少要能達到該岸總人數不變但是物種的組合改變的座標點。因此我們更新一趟去回最快解的有效組合為圖 2-35， $D=2$ 類型，棋子 1 步有 8 個，有 4 個可以成功增加人，有 4 個是被迫要換人。

在棋盤上的使用方式為棋子依序利用去程與回程△法前進，並檢查是否落入死亡地帶，如果不會，代表這組合是可行的，並逐步找到終點完成解題。而△法在去程與回程的使用方法只是差別在於方向角度的不同。船的座位數會影響△法的大小。以船的座位數是「2、3、4、5」的變化為例。去程時，最大角(斜邊)朝向右上方(圖 2-36)；回程時，最大角(斜邊)朝向左下角(圖 2-37)

圖 2-36 去程 $D = 2$	圖 2-36 去程 $D = 3$	圖 2-36 去程 $D = 4$	圖 2-36 去程 $D = 5$	圖 2-37 回程 $D = 2$	圖 2-37 回程 $D = 3$	圖 2-37 回程 $D = 4$	圖 2-37 回程 $D = 5$

因此，去回一趟最多可以增加船座位 $D - 1$ 人(要有人開船回來)，而往上↑與往右→都是增加人，往下↓與往左←都是減少人。只要 4 個方向的移動格數將其正負值加起來不大於 $D-1$ 的絕對值，就代表是從上一個位置透過一趟移動最遠可以到達的位置。

(五) 人數組合的對稱性規律

我們發現棋盤具有對稱性，我們定義的對稱性包含「旋轉」(180 度)與「鏡射」(把棋盤翻到背面)。

1. 兩岸人數組合的對稱性

傳教士與土著會有很多不同的人數組合。因為有兩個岸，所以同一種人數組合會在兩個岸各發生一次。思考方式就是在產生新的人數組合時，直接把 2 個岸對調，就能看出人數組合在兩岸具對稱性。

圖 2-38 目的岸人數組合	圖 2-39 起點岸人數組合	圖 2-40 兩岸組合具對稱性

圖 2-41 兩岸的人數組合	圖 2-42 將兩岸對調，同一組合在 2 岸各出現一次

2. 死亡地帶出現的對稱性：

因為同一種人數組合可能會在兩個岸發生，所以有食性關係的人數組合也會在兩個岸發生，所以，同樣的死亡地帶會畫 2 次。所以只要找到其中一岸的死亡地帶，就可以透過對稱性旋轉，完成完整的死亡地帶規畫。



圖 2-43 目的岸組合畫死亡地帶

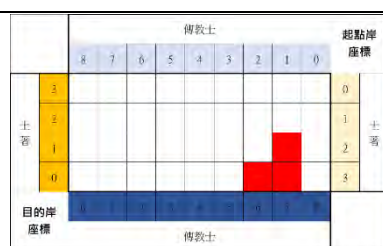


圖 2-44 起點岸組合畫死亡地帶

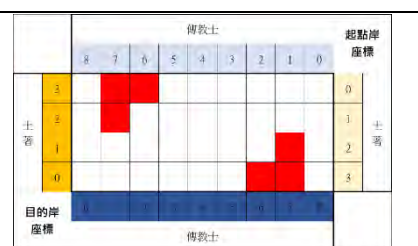


圖 2-45 兩岸死亡地帶成對稱性

(六) 解題技巧的對稱性規律

兩岸人數組合與具食性關係所影響的死亡地帶具有對稱性之外，我們發現解題時，也有對稱性存在。

1. 最佳解的解法對稱性

研究時，我們使用自製的 3D 列印岸與船輔助我們解題，以及使用不同顏色的乒乓球代表傳教士與土著，白色球是傳教士，橘色球是土著，而我們也在兩個岸上貼上白色（代表傳教士的格子）和橘色的紙（代表傳土著的格子）。

一開始，我們是以乒乓球來思考並解題，所以乒乓球是順著從左岸走到右岸；如果我們把思考主體改成格子的話，格子是逆著走回來，每次從左岸到右岸過去一顆乒乓球，也代表一個相同顏色的空格從右岸來到左岸。乒乓球順著走過去，格子逆著走回來，所以乒乓球和格子是對稱出現的。

因此，進行最佳解時，只需要走到一半在使用對稱性就能找到剩下來的解法。乒乓球前半部用乒乓球最佳走法，過程中會自動出現成對的空格前半部最佳走法，；而空格前半部最佳走法透過對稱性原理旋轉後，就是乒乓球後半部的最佳解法。

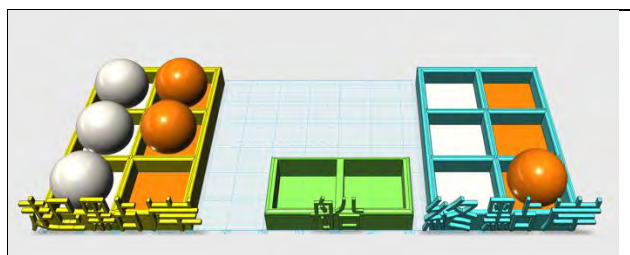


圖 2-46 橘色乒乓球一顆去，橘色空格一個來

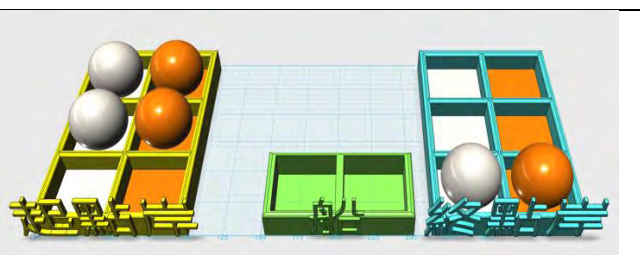


圖 2-47 橘色與白色各一顆去，橘色白色各一格來

2. 潛在去程的對稱性尋找技巧：

透過「乒乓球與空格」的解法對稱性研究發現，也可以運用對稱性找出最佳解在潛在去程。因此，紀錄步數時，以去回一趟後的組合作為紀錄點(等於回程了才紀錄 1 步)，而忽略紀錄的去程人數組合。就沒有任何疑慮了，因為可以透過對稱性找到潛在去程。

以原始渡河問題為例，操作「輔助程式」進行解題，如圖 2-48，將找到的 2 種結果整理成圖 2-49。

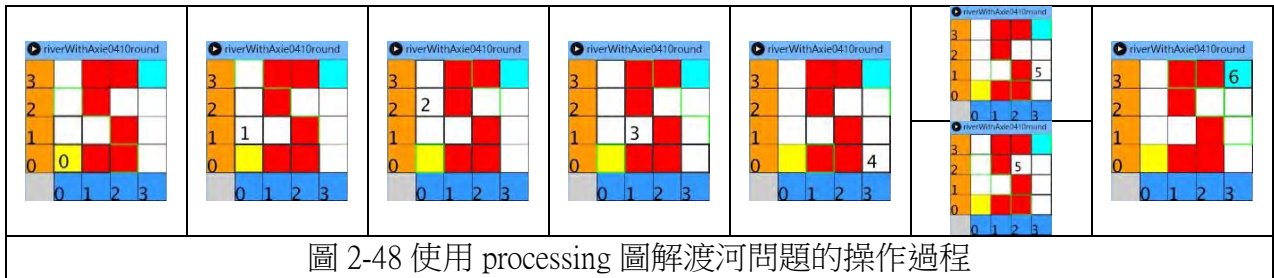


圖 2-48 使用 processing 圖解渡河問題的操作過程

經過研究，還原的方法只要把棋盤 180 度旋轉後，產生圖 2-50。回程與去程的配對方法為 $\text{潛在去程(旋轉圖第N步)} = \text{總步數} - \text{原始紀錄第M步}$ ，潛在去程與原始紀錄代表一組完整去程與回程組合。如第 0 趟要前往第 1 趟時， $\text{潛在去程} = 6 - 1 = 5$ ，可以看到圖 2-49 有 2 個第 5 趟，所以代表第 0 趟要前往第 1 趟時，有 2 個選擇，從旋轉圖找看看計算出來的潛在去程來看，顛倒數字寫第 5 步的座標分別是(1 傳教士, 1 土著)與(0 傳教士, 2 土著)，代表這 2 個是去程。

換個方式說，正寫的數字都是回程後的結果，倒寫的數字都是去程後的結果，如果兩個數字加起來是總步數，代表(倒,正)為一個去回程組合。因此如果把所有的去回操作次數都還原，閱讀步數時，原始紀錄與旋轉圖要一起看，整個完整操作過程就要依正，(倒,正)，(倒,正)，(倒,正)…正)座標閱讀規律找出完整去回紀錄。以原始渡河問題為例，數字配對中 1 會對應兩個 5，以及兩個 5 會對應同一個 1，其他都只有唯一一個配對可以加起來等於 6，因此，原始渡河問題共有 4 種解法。如圖 2-51。

	傳教士	起點岸座標
	3 2 1 0	
土著	2 2 5 1	土著
	1 3 5 2	
目的岸座標	0 0 4 3	
	傳教士	

	土著	起點岸座標
	3 2 1 0	
土著	2 2 5 1	土著
	1 3 5 2	
目的岸座標	0 0 4 3	
	傳教士	

綠色為原始紀錄	(傳教士,土著)
0 1 2 3 4 5 6	
9 5 7 8 6 1 0	
	解法1
(0,0)→(1,1)→(0,1)→(0,3)→(0,2)→(2,2)→(1,1)→(3,1)→(3,0)→(3,2)→(3,1)→(3,3)	
	解法2
(0,0)→(0,2)→(0,1)→(0,3)→(0,2)→(2,2)→(1,1)→(3,1)→(3,0)→(3,2)→(2,2)→(3,3)	
	解法3
(0,0)→(1,1)→(0,1)→(0,3)→(0,2)→(2,2)→(1,1)→(3,1)→(3,0)→(3,2)→(2,2)→(3,3)	
	解法4
(0,0)→(0,2)→(0,1)→(0,3)→(0,2)→(2,2)→(1,1)→(3,1)→(3,0)→(3,2)→(3,1)→(3,3)	

圖 2-49 原始圖

圖 2-50 旋轉圖

圖 2-51 原始渡河問題有 4 種解法，具對稱性

(七) 變化題在「棋盤樣式」與「棋子走法」的規律。

1. 改變傳教士 A 個與土著 B 個的關係：

若其他條件不變， $A < B$ 一開始遊戲就失敗，不討論；剩下 $A \geq B$ 要討論，以 $A = B + G$ 公式討論差異， G 越大，表格越狹長，且死亡地帶距離越遠(圖 2-52)。

$(A + 1) \times (B + 1)$ 代表所有可能的棋盤格，也代表岸上組合共有這麼多種。而變數 A 與 B 的關係根據我們的紀錄方式，這是影響「棋盤樣式」類型的變化題。

圖 2-52-1 $B = 3, G = 0$	圖 2-52-2 $B = 3, G = 1$	圖 2-52-3 $B = 3, G = 2$	圖 2-52-4 $B = 3, G = 3$
---	---	---	---

2. 改變座位 D 個的變因：

其他條件不變時， D 值如果變大，代表每一趟操作能成功增加目的岸的人數會增加，根據我們的紀錄方式，這是影響「棋子走法」類型的變化題。

以△法來說，等腰直角三角形邊長為 $D + 1$ ，傳教士與土著的搭船組合可能為

$$\frac{(D+1) \times (D+1)}{2} - 1 \text{ 種。 (減 1 是減去一開始所在位置)}$$

以棋子移動 1 步範圍（一趟去回的可能選擇）來說，棋子所在位置的座標為 (x, y) ，而周遭的座標就相對位置進行編碼，在正上方 1 格的就是 $(x, y + 1)$ ，因為增加土著 1 人；在左下方 1 格的就是 $(x - 1, y - 1)$ ，依此類推...，檢查周遭座標若符合 $x + y = D - 1$ （必須有人開船回來），代表這是一趟去回可到達的地方，也就是棋子 1 步的移動範圍。

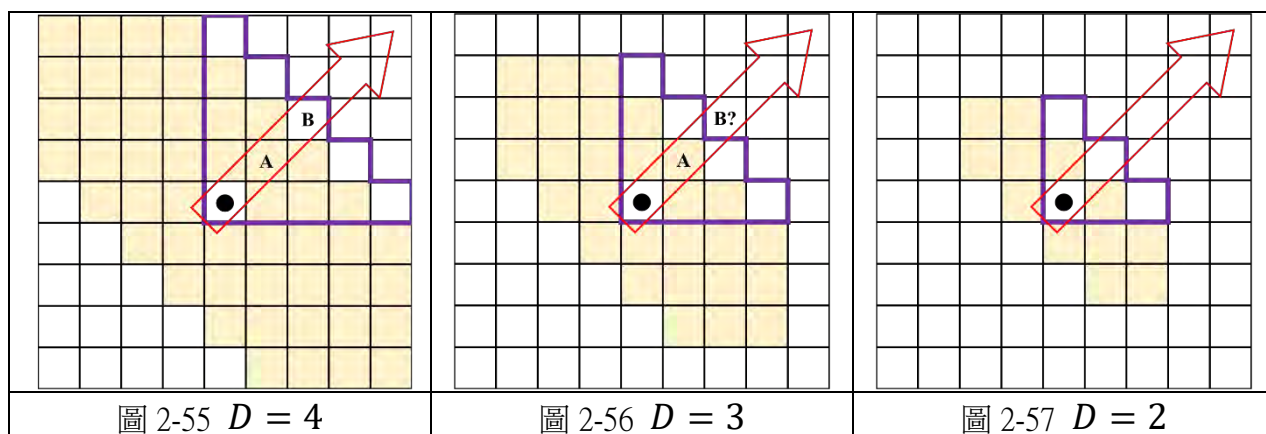
圖 2-53 △法邊長為 $D + 1$	圖 2-54 任一座標與周遭座標的關係
--	----------------------------

以 $D=4$ (圖 2-55)、 $D=3$ (圖 2-56)、 $D=2$ (圖 2-57)的「**棋子 1 步可選擇範圍**」規律來看。

當 $D \geq 4$ 之後，棋子每 1 步，都能進入 45 度右上角 A 的位置，代表可以透過潛在去程 B 直接走斜角直上，以實際操作思考的話，就是每次都是 B:2 傳教士與 2 個土著上船，每次下船都是 1 個傳教士與 1 個土著下船，然後 1 個傳教士與 1 個土著開船回來，因此 $D \geq 4$ 之後，遊戲會變得太簡單。

當 $D = 3$ 時，雖然右上角 A 也是棋子 1 步的範圍，但以潛在去程的角度發現 B 格沒有落入△法涵蓋的空格，代表沒辦法直接走完美斜角，所以實際解題時仍有許多可討論的變化。

當 $D = 2$ 時，就遇到更多阻礙，右上角方向沒有任何步數可作為棋子的選擇。



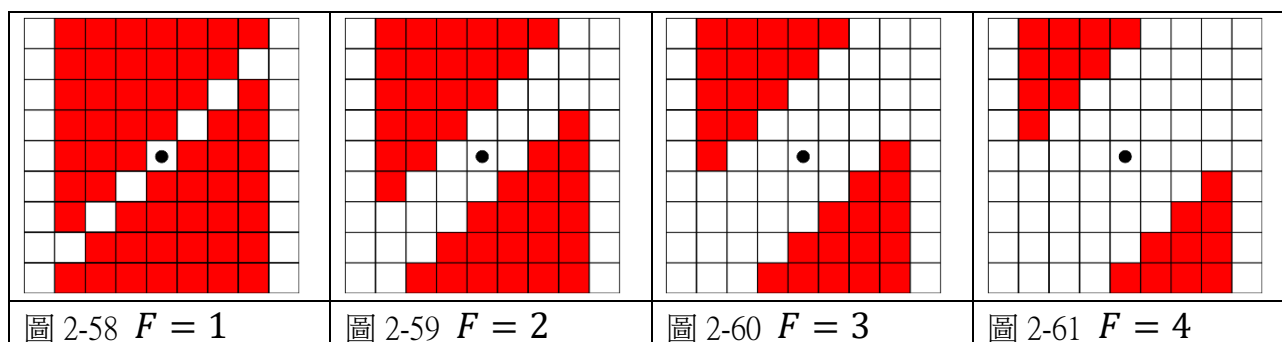
3. 改變土著比傳教士多 F (食性關係) 人才造成傷亡的變因：

(1) $F \geq 1$ 類型：

當食性關係 F 值提高，兩個死亡地帶之間的空格會越來越多，代表限制越少，搭配 D 值規律來看，當 $F = 1$ 限制最高時，必須 $D \geq 4$ 才能一定有解。

因此， F 提高時，會讓遊戲變得不好玩，且不影響棋盤，且影響會越來越小。

若改為 $A > B$ 類型，兩個死亡地帶會距離更遠，之間的空格會更多。

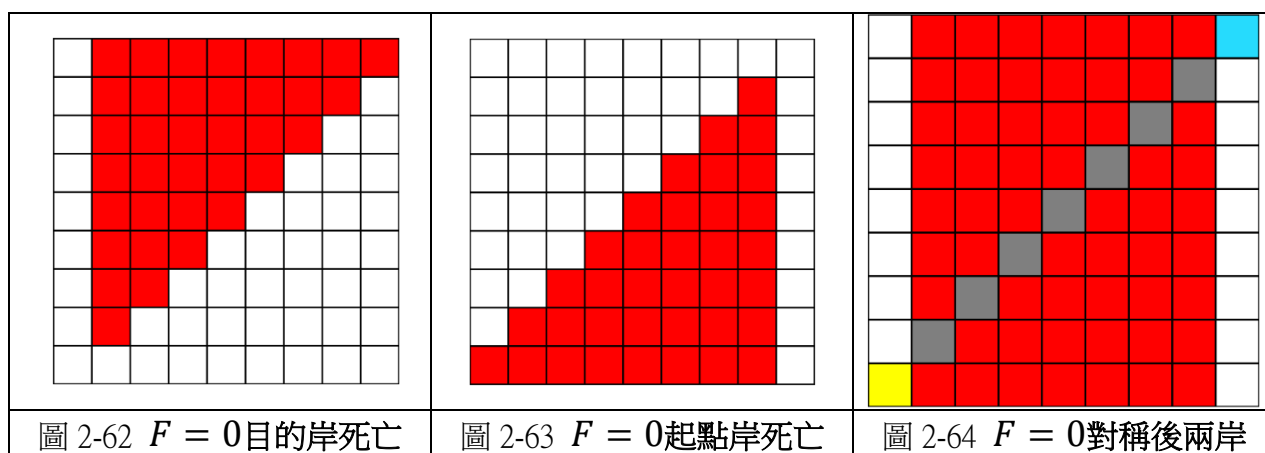


(2) $F \leq 0$ 類型：

死亡地帶在兩岸會有重疊的組合出現， F 值越小，重疊越多，而在棋盤中間會有長方形區塊出現，且沒有斜線可以依序行走

F 值越小，死亡地帶越大。以圖 2-62 與圖 2-63 來看，當兩者透過對稱性合併成完整的死亡地帶後，**灰色**是重疊的地方，而**黃色**是在重疊線上，但是只有起點岸才有的死亡狀態；**藍色**則是在重疊線上，但是只有目的岸才有的死亡狀態。

若要解開這樣的題目，必須要變成 $A > B$ 的類型，但我們認為不合理，若是透過數量比較，土著比傳教士多而造成傷亡狀態，認為合理。但土著比傳教士少卻還能吃掉傳教士，不太合理。但我們確實可以知道 $A > B$ 值提高，可以避免重疊狀態，因為兩個死亡地帶距離會變遠。



三、 運用程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊。

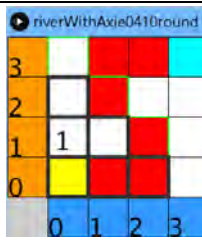
我們學習 Processing 程式語言，將研究成果融入在這個作品中，完成了萬用棋盤程式及棋譜提示圖，透過控制 A 、 B 、 D 、 F 四個變數，可操控以下變因：傳教士 A 人，土著 B 人，船座位 D 人以及土著比傳教士多 F 人時才可以吃掉傳教士。

(一) 透過 Processing 程式語言設計製作萬用棋盤程式：

根據我們的推論，完成自動根據人數組合變因完成棋盤格數、根據物種能造成死亡的差異人數條件變因完成死亡地帶繪製、根據船座位變因完成棋子走法…等。

(二) 使用我們透過 Processing 語法實際操作渡河問題程式：

以傳教士人數 $A=3$ ，土著人數 $B=3$ ，船座位 $D=2$ ，土著比傳教士 $F=1$ 人才能吃掉傳教士的原始題目為例，將程式裡頭的 4 個變數改變後，我們設計的 Processing 軟體能自動產生對應表格(圖 3-1)。座標代表目的岸(右岸)的人數組合狀況，因此一開始一定停留(0, 0)位置，將滑鼠點在(0, 0)就會記錄第 0 趟，並且自動產生 $D=2$ 的提示格子，**粗黑線框出的範圍**如果包含白格，代表可做為下一趟選擇(圖 3-2)，如根據(0,1)順利完成第 1 趟的動作(圖 3-3)，但是一趟操作包含船去跟回，在記錄步數時是省略去程的，根據研究：往右及往上都是增加人，而去回 1 趟是代表先增後減(必須有人開船回來)，因此必須先找出想去的**粗黑線範圍**內的白格，以他為原點，往右或往上數最多 D 格，如果過程中可以找到任何一個**粗黑線範圍**或**綠色框範圍**(**綠色框代表只能去但不能停留的點**)的白格(為潛在去程)，代表這 1 趟可行的，依此類推就能找到**目的地**，代表目的岸(右岸)人數全滿。因此，第 1 趟要前往第 2 趟時，有兩個粗黑框範圍的白格選擇，分別是(0,2)與(1,1)，但(1,1)往上及往右最多 2 格的過程中，找不到任何框範圍內的白格，而(0,2)能找到(0,3)由綠色框住的白格，因此選擇(0,2)作為第 2 趟(圖 3-4)；第 2 趟前往第 3 趟能找到框內白格(2,2)完成第 3 趟(圖 3-5)；第 3 趟前往第 4 趟能找到框內白格(3,1)完成第 4 趟(圖 3-6)；第 4 趟前往第 5 趟能找到框內白格(3,2)完成第 5 趟(圖 3-7)；第 5 趟框範圍包含終點，因此完成最後一步(只去不回)(圖 3-8)。

			
圖 3-1 自動產生棋盤	圖 3-2 粗黑框範圍	圖 3-3 第 1 趟	圖 3-4 第 2 趟
			
圖 3-5 第 3 趟	圖 3-6 第 4 趟	圖 3-7 第 5 趟	圖 3-8 最後一步

(三) 程式語法解析：

riverWithAxie0410round

```
1 int A=3,B=3,D=2,F=1;
2 int spaceXY=50,stepNum=0,dRound=D-1;
3 void setup(){ size(1000,1000); }
4 void mouseReleased(){ stepNum++; }
```

1. 設定 A、B、D、F 與題目相關的變數，未來可以根據題目要求隨時設定。
2. 設定 spaceXY 棋盤格子大小、stepNum 步數變數、dRound 一趟最遠距離，隨著 D 座位數而改變，-1 是因為有人要開船回來。
3. 設定視窗大小 1000 像素的正方形。
4. 設定滑鼠放開時，stepNum 變數會自動+1。

```
5 void draw(){
6     if(mousePressed == true){
7         for(int xAxie=0;xAxie<=A;xAxie++){
8             for(int yAxie=0;yAxie<=B;yAxie++){
9                 strokeWeight(1); stroke(0);
10                fill(255,255,255); rect((xAxie+1)*spaceXY,(B-yAxie)*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
11                fill(0,255,255); rect((A+1)*spaceXY,0,spaceXY,spaceXY);
12                fill(255,255,0); rect(spaceXY,B*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
13                if(xAxie>0&&xAxie+F-1<yAxie){
14                    fill(255,0,0); rect((xAxie+1)*spaceXY,(B-yAxie)*spaceXY,spaceXY,spaceXY); }
15                if(xAxie<A&&A-xAxie+F-1<B-yAxie){
16                    fill(255,0,0); rect((xAxie+1)*spaceXY,(B-yAxie)*spaceXY,spaceXY,spaceXY); } } }
```

5. draw()函數會反覆執行
6. 如果滑鼠被按下，就執行大括號裡頭的程式，模擬使用者點滑鼠下棋走位
7. 使用 for 迴圈產生 x 軸需要的變數 xAxie，由 0 一直增加到傳教士 A 人數。
8. 使用 for 迴圈產生 y 軸需要的變數 yAxie，由 0 一直增加到土著 B 人數。
9. 設定邊框線的粗細與顏色。
10. rect()是畫矩形，4 個參數分別是（x 軸座標，y 軸座標，寬，高）。將 xAxie 與 yAxie 都乘上 spaceXY，讓格子分布在正確的位置，並且寬高都是 spaceXY，並且透過 fill()填入白色。
11. 利用變數控制起點位置，並填入起點(0,255,255)顏色。
12. 利用變數控制終點位置，並填入終點(255,255,0)顏色。
13. If 判斷右岸狀況，如果傳教士 xAxie>0 並且傳教士 xAixe+F-1<土著 yAxie 時執行下面的程式。把 F 放進判別式，就能隨 F 改變死亡地帶大小。

14. 滿足 if 判別之後，利用 xAxe 與 yAxe 變數將死亡地帶的格子填上紅色。
15. If 判斷左岸狀況，如果傳教士 xAxe<A 並且傳教士 xAxe+F-1< B-土著 yAxe 時執行下面的程式。B-yAxe=土著總人數-右岸土著人數=左岸土著人數。
16. 滿足 if 判別之後，利用 xAxe 與 yAxe 變數將死亡地帶的格子填上紅色。但 Processing 程式座標原點在左上角，而數學座標在右下角，rect()畫格子時，我們透過數學式 B-yAxe 就能順利將座標上下顛倒符合我們需求。

```

17   for(int axieB=0;axieB<=B;axieB++){
18       fill(255,153,0);   rect(0,axieB*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
19       fill(0); textSize(32); text(B-axieB,0,(axieB+1)*spaceXY); }
20   for(int axieA=0;axieA<=A;axieA++){
21       fill(51,153,255);   rect((axieA+1)*spaceXY,(B+1)*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
22       fill(0); textSize(32); text(axieA,(axieA+1)*spaceXY,(B+2)*spaceXY); }

```

17. 透過 for 迴圈產生 axieB 變數從 0 到土著總人數 B。
18. 畫出土著座標格，並塗上土黃色，所以土著座標隨 B 值改變。
19. 在土著座標格中寫上 axieB 變數，但透過 B-axieB 調整座標上下顛倒問題。
20. 透過 for 迴圈產生 axieA 變數從 0 到傳教士總人數 A。
21. 畫出傳教士座標格，並塗上淡藍色，所以傳教士座標隨 A 值改變。
22. 在傳教士座標格中寫上 axieA 變數，代表傳教士右岸人數。

```

23   int mousePressX=floor(mouseX/spaceXY),mousePressY=floor(mouseY/spaceXY);
24   if(mousePressX<A+2&&mousePressY<B+1){
25       fill(0,0,0); textSize(32);
26       text(stepNum-1, (mousePressX)*spaceXY+spaceXY/6, (mousePressY+1)*spaceXY-spaceXY/6);

```

23. 讀取滑鼠座標並除以 spaceXY 格子大小，再透過 floor 函數無條件捨去小數點，就能將滑鼠按下那一刻的 X 與 Y 座標讀取，並且轉化成從 0 開始的並依序增加的自然數，就能拿來比較滑鼠座標位置與右岸傳教士土著人數關係。
24. 透過 if 判別式檢查滑鼠是否點在自動產生的表格內，如果是就值刑大括號內的程式。
25. 填滿黑色，字是 32 號的大字體。
26. text()函數有 3 個參數，分別是要寫的文字以及 XY 座標位置。寫上記步變數 stepNum，我們設計滑鼠點第一下是呼叫程式，所以要先減 1，正式開始才會從第 0 趟開始計算。XY 座標 $\pm \frac{spaceXY}{6}$ 微調讓數字盡量在格子正中央。

(四) 運用自製研究工具輔助找出更多變化題的最少步數解

利用「棋盤樣式」與「棋子走法」的研究所得的解題知識與經驗，再加上自製 Processing 研究工具加快解題流程，並且運用科技輔助有效率地驗證我們的想法。

=IF(MOD(((A21-1+B21-1)/(C21-1)),C21-1)>1,(L21*2+1),((A21-1+B21-1)/(C21-1)*2+1))													
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
傳教士	土著	船座位	棋子	實際操作次數	公式1	公式2	公式3	公式4	公式5	公式6	公式7	輔助	公式7
A	B	D	步數										
							適用B=2 A>B D=2 F=1	適用D=2 A>B		適用任何(除了換人及A=B)題目			適用A=B D=4
							A>B · 且D=2的類型						
3	2	2	4	7	9	7		7	7	7		7	
4	2	2	5	9	11	9		9	9	9		9	
5	2	2	6	11	13	11		11	11	11		11	
6	2	2	7	13	15	13		13	13	13		13	
7	2	2	8	15	17	15		15	15	15		15	
8	2	2	9	17	19	17		17	17	17		17	
9	2	2	10	19	21	19		19	19	19		19	
4	3	2	6	11	13	11		9	11	11		11	
5	3	2	7	13	15	13		11	13	13		13	
							A>B · 且D=3的類型						
4	3	3	4	7	6	11		9	11	5.5		6	1
5	3	3	4	7	7	13		11	13	6.5		7	
							A>B · 且D=4的類型						
4	3	4	2	3	3.66667	11		9	11	3.67		3	1
5	3	4	3	5	4.33333	13		11	13	4.33		5	2
6	3	4	3	5	5	15		13	15	5		5	2
							A=B · 且D=3的類型						
4	4	3	5	9	7	13		9	13	6.5		7	3
5	5	3	6	11	9	17		11	17	8.5		9	4
							A=B · 且D=4的類型						
6	6	4	5	9	7	21		13	21	7		7.67	3
7	7	4	6	11	8.33333	25		15	25	8.33		9	4
8	8	4	7	13	9.66667	29		17	29	9.67		9	4
9	9	4	8	15	11	33		19	33	11		11	5
10	10	4	9	17	12.3333	37		21	37	12.33		13	6

圖 3-9 運用 Excel 記錄研究成果，並運用函數技巧快速驗證哪個公式在變化題中有錯誤

A 欄、B 欄、C 欄分別是研究變數傳教士 A、土著 B、船座位 D。

D 欄紀錄運用 Processing 實際操作後的步數。還原操作次數為 $D \times 2 - 1$ 。

E 欄是實際解題操作後的結果，答案如果等於 $D \times 2 - 1$ ，代表運用程式輔助的研究工具得到的結果與實際操作結果一致。

F 欄與 G 欄是公式一與公式二，觀察 Excel 紀錄簿上的 D 欄棋子步數與 E 欄實際操作次數並嘗試想出數學運算式，希望無論變數如何改變都能套用並算出實際操作次數。

H 欄公式三是根據前面經驗，找出了適用 $B = 2, A > B, D = 2$ 變化題的公式。實際操作次數為 $A \times 2 - 1$ ，公式思維是把二維棋盤壓縮成一維，以傳教士人數為線段長度，每走 1 步其實代表 2 次操作（去回），最後 1 步直接去沒有回，所以減 1。

I 欄公式四，實際操作次數為 $(A - 1) + (B - 1) \times 2 + 1$ ，與公式三不同之處在於 B 不需固定。將土著也考量進來。在計算過程中，傳教士先減 1 人，土著也減 1 人，代表最後一次他們兩人坐船，剩下來的 $A - 1 + B - 1$ 代表新的線段長度，每走 1 步其實代表 2 次操作（去回），最後 1 步是剛剛先排除的 1 傳教士與 1 土著最後一次一起坐船過去，所以把 1 加回來。

J 欄公式五，把船座位也考量進來，公式四再除以 $D - 1$ ，代表船座位越大，所走的每 1 步就不會是剛好線段 1 格，而是 $D - 1$ 格（必須有人開船回來）。

K 欄公式六，根據公式五計算，會產生小數點，代表最後 1 趟的組合需要進一步處理，因此我們想出來的 excel 函數公式，以第 21 列為例：

$$=IF(MOD(((A21-1+B21-1)/(C21-1)),C21-1)>1,(L21*2+1),((A21-1+B21-1)/(C21-1)*2+1))。$$

裡頭參考的 **L 欄**函數為 $=ROUNDDOWN((A21-1+B21-1)/(C21-1),0)$ 。

合併並翻譯成白話：

$$IF(\text{MOD}(\text{公式五}, D - 1) > 1, (\text{公式五無條件捨去的結果} \times 2 + 1), \text{公式五} \times 2 + 1)$$

如果 公式五除以 $D - 1$ 的餘數大於 1，代表最後一趟要額外開一艘船，所以公式五的結果無條件捨去後 $\times 2$ 再加上 1 趟把剩下的人載過去。但如果 公式五除以 $D - 1$ 的餘數大於 1 的條件不符合，就直接以公式五 $\times 2 + 1$ 為答案。

因此，我們找到一個當 $A > B$ 的萬用公式解，可以找出最少步數。

如果 $(\frac{A-1+B-1}{D-1})$ 除以 $D - 1$ 的餘數 $> 1 \rightarrow$	$IF(\text{MOD}((\frac{A-1+B-1}{D-1}), D - 1) > 1 ,$
符合條件的話，選擇這個公式 $\rightarrow$	$(\text{RoundDown}(\frac{A-1+B-1}{D-1}, 0) \times 2 + 1) ,$
如果不符合條件的話，選這公式 $\rightarrow$	$(\frac{A-1+B-1}{D-1} \times 2 + 1)$

$MOD(\text{number}, \text{divisor})$ 是取餘數。

$RoundDown(\text{number}, \text{number_digits})$ 是無條件捨去， $\text{number_digits}=0$ 是取到整數。

若是 $A = B$ 的類型，以原始題(3,3)來說，因死亡地帶裡可走的空間是 1 格寬的狹長形走道，必須要換人才能順利通過，但人數提升之後，就無解，除非提高船座位 D 。

M 欄公式七適用於 $D = 4$ 有一個快速的解法思維。 $(A - 3) \times 2 + 3$ 代表，前後加起來有 3 步可以透過捷徑加快步數，再透過還原加 3。無論 A 或 B 值提升到多少，前後加起來的 3 步捷徑不變，分別是出現在進入危險地帶前與離開危險地帶時所節省的步數。

若是 $D = 3$ ， $A \geq 5$ 之後就無解了。因為進入危險地帶之後，由於沒有像 $D = 4$ 這種優勢的斜上走法，必須下一步就跳離危險地帶，而 $A \geq 5$ 使得危險地帶太寬，所以跳不出來就因此失敗。

四、以運算思維推理三維以上的題目類型，並提出渡河解題策略。

我們在研究過程能順利解開渡河問題其實是運用了運算思維，研究目的的四個階段就是有方法的解題，**抽象化**：設計一款能記錄渡河問題操作過程的解題紀錄方式→把渡河問題複雜的操作過程，變成簡化的表格，方便閱讀與記錄。再透過**樣式辨識**：以「棋盤樣式」與「棋子走法」分析渡河變化問題→從原始渡河變化題中找出規律。接著**模型化**：運用程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊→發現原始渡河變化題的規律後，透過規律找出公式。最後**演算法**：建立一套完整思維路徑的演算法→判別 A、B、D、F 等各種條件，決定不同的題目該使用哪一個公式。

一開始，我們透過改變數字產生原始渡河變化問題，透過改變規則產生進階渡河變化問題，主要是思考改變物種會產生三維棋盤，我們要嘗試推論如何解題。

但後來發現，我們必須將 A、B、D、F 四個變數歸類在原始變化渡河問題，而船 C 艘與陸地 E 岸這 2 變數的改變，連帶影響其他變數，要歸類在進階渡河變化問題，比方改變了船 C 艘，如果是 2 以上，那船座位 D 分別是多少變成另一個要思考的問題；陸地 E 岸如果是 3 以上，那是否一定要停留，也是進階延伸需要討論的新問題。因此，我們將會有連帶關係影響的變數定義在進階渡河變化問題，包含原本設定在進階渡河變化的問題的改變物種 Z。

調整後**原始渡河變化問題**包含傳教士 A、土著 B、船座位 D、食性關係 F…變數。

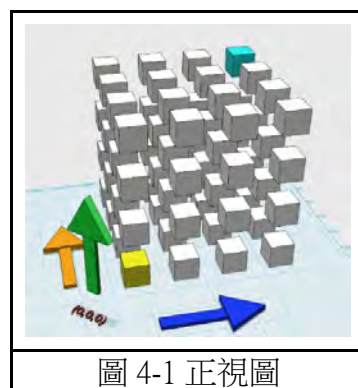
調整後**進階渡河變化問題**包含船 C 艘、陸地 E 岸、物種數量 Z..變數。

(一) 以運算思維產出進階變化題並找出模式，改變物種數量 Z：

當 $Z = 3$ 時，棋盤會變成立體，若再提高，會變成無法以視覺輔助思考的問題。因此，我們希望透過 $Z = 3$ 時找出規律，從建立研究成果推理 $Z \geq 4$ 以上的類型：

1. 抽象化：轉化渡河問題變成三維立體表格思維，並可閱讀三個資訊

運用 3D 立體座標記錄圖檢驗想法，避免遺漏細節而造成想法推論缺失。首先，以牛 $H=3$ 、傳教士 $A=3$ 、土著 $B=3$ 的類型產生三維棋盤，將產生立體棋盤，棋子格數為 $(H + 1) \times (B + 1) \times (A + 1) = (3 + 1) \times (3 + 1) \times (3 + 1) = 64$ 格。產生三方向座標且黃色對應(0、0、0)，而青綠色對應(3、3、3)。



2. 樣式辨識：透過實作或根據研究成果推理規律

當棋盤變成三維之後，根據我們的研究會影響其死亡地帶，以及△法的選擇法範圍。

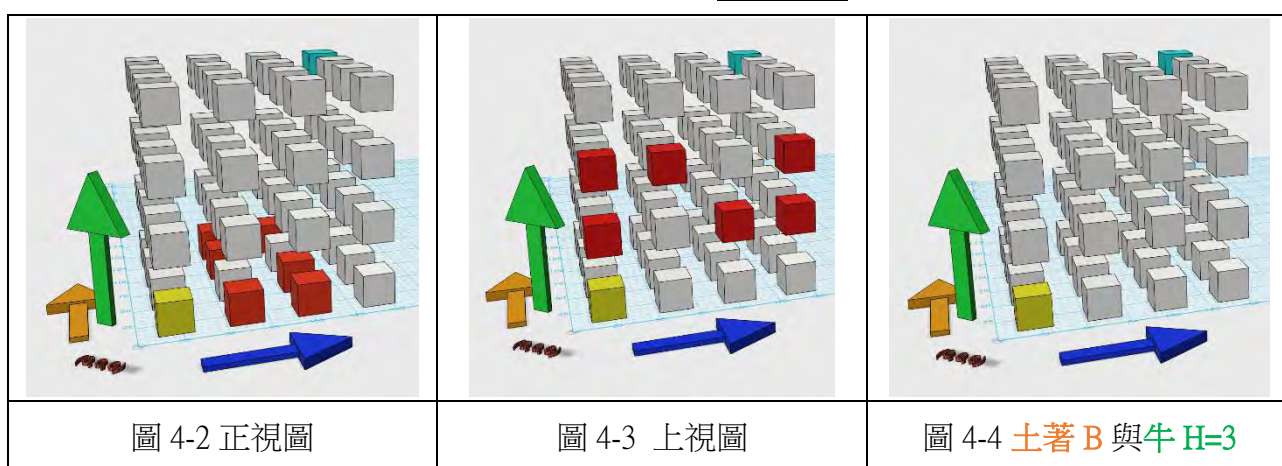
3. 模型化：將規律以模型化的形式表達

根據題目設定，只有相鄰物種才會產生食性關係

(1) 土著 B 比傳教士 A 多 $F=1$ 人就會造成死亡所產生的死亡地帶，如圖 4-2。

(2) 傳教士 A 比牛 $H=3$ 多 $J=1$ 人就會造成死亡所產生的死亡地帶，如圖 4-3。

(3) 土著 B 與牛 $H=3$ 所組成的平面並不會產生死亡地帶，如圖 4-4。

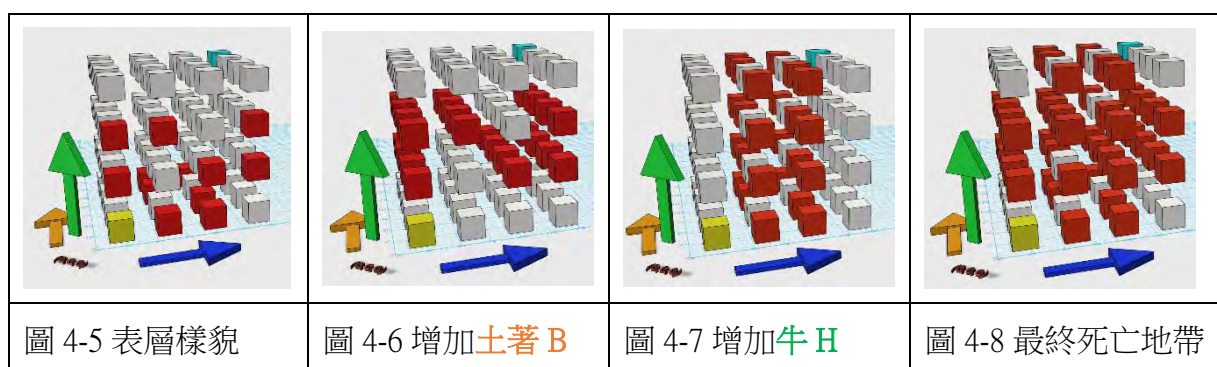


透過這方法完成所有死亡地帶並不完整。這只完成最表層的死亡地帶，如圖 4-5。

當傳教士 A 比牛 $H=3$ 多 $J=1$ 人就會造成死亡，並且土著 B 人數增加時，代表死亡地帶從表面往內延伸，只要內部符合傳教士 A 比牛 $H=3$ 多 $J=1$ 人就會有死亡地帶圖 4-6。

土著 B 比傳教士 A 多 $F=1$ 人就會造成死亡，並且牛 $H=3$ 人數增加時，代表死亡地帶從表面往內延伸，只要內部符合土著 B 比傳教士 A 多 $F=1$ 人就會有死亡地帶圖 4-7。

有些格子會因為不同的方式造成死亡地帶，但不論是哪一種，只要會造成死亡，他就是死亡地帶，因此交叉影響後的最終結果如圖 4-8。

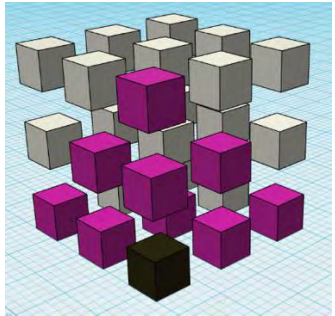
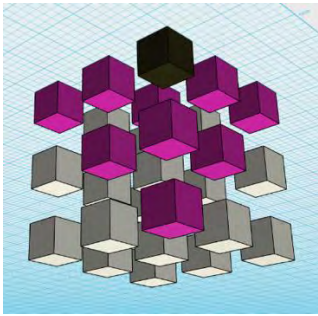
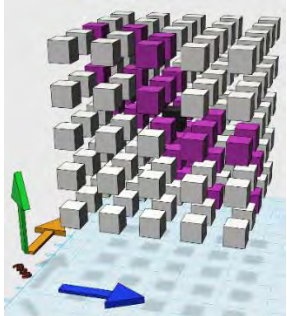


當物種增加，代表可以上船的物種組合也會更著增加，△法將從平面提升到立體空間。

(1) 以 D=2 去程選擇為例，黑色為起點，如圖 4-9，可以看出△法呈現立體樣貌。

(2) 以 D=2 回程選擇為例，黑色為起點，圖 4-10，可以看出△法呈現立體樣貌。

(3) 以 D=2 去回一趟的選擇為例，黑色為起點，可以形成圖 4-11 的立體樣貌。非常複雜，等於將平面圖進行三方向轉換。

		
圖 4-9 去程選擇	圖 4-10 回程選擇	圖 4-11 去回一趟選擇

4. 演算法：建立一套完整思維路徑的演算法

→根據立體圖形驗證後的想法，有三個關鍵想法要寫進三維程式中。但是我們自學的 Processing 在三維空間可使用的函數較少，更別說四維以上空間。因此我們決定貢獻想
以下說明第幾行的程式需要進行微調，以 Line1 代表第一行，以此類推…

(1) 根據物種數量產生棋盤大小、座標、滑鼠點擊位置以及計步器

- Line1 加入新物種 **牛** **H=3** 變數，以及食性關係所產生的多 **J=1** 人的變數。
- Line7&8 要加入新的 for 迴圈，產生從 0~H 值的變數，做為第 3 座標變數。
- Line10&11&12 要分別要從參數 XY 加入新產生的 for 迴圈變數給 Z 座標(牛)使用，並產生對應的格子，令 line10 產生立體白格、line11 產生立體終點並標上青色、line12 產生立體終點並標上黃色。
- Line17~22 是座標產生器，與死亡地帶產生器原理相似，只要將 z 軸參數(**牛H**)分別寫進格產生座標(x,y,z)以及文字顯示位置(x,y,z)就能更新立體座標及文字位置。
- Line23 是滑鼠擊點位置，如果是 123D 繪圖軟體，畫面座標是可以旋轉的，因此如果直接偵測滑鼠在畫面點擊的位置，是無法取得正確的(x,y,z)，這需要未來團隊運用程式時，根據程式進行調適。
- Line24~26 是計步器，也是將 z 軸參數(**牛H**)寫進計步的新位置座標。

(2) 根據 J 與 F 畫出對應的立體死亡地帶

Line13~16 是死亡地帶產生器，必須將 rect()裏頭原先 x 軸參數(傳教士A)與 y 軸參數(土著 B)再外加一個 z 軸參數(牛H)，將這些參數透過 if 判別式檢驗，除了原有的判別，要再外加一組傳教士A > 牛H並且牛H ≠ 0時，以及同時考量對岸傳教士總人數A - 傳教士A > 牛總隻數H - 牛H並且牛H ≠ H時(因為多了一組食性關係)，就能畫出立體的死亡地帶。

(3) 根據棋盤大小以及船座位 D 畫出正確的去回一趟的提示產生器。

Line27~35 是棋子走法，能自動一趟去回提示並框出黑線。在 line27&28 之後加入 z 軸參數(牛H)，計算自動產生變數叢-(D-1)~(D-1)範圍(必須有人開船回來)。再將變數當作 z 座標寫入 Line30~32 以及 Line33~35 這兩組自動產生去回範圍的產生器，讓平面去回變成立體去回。並且將 xD、yD、zD 三個變數排列組合檢查是否加起來的量有落在±D之間，如果是就畫出提示範圍。

(二) 以運算思維產出進階變化題並找出模式，改變船幾艘 C

1. 抽象化：轉化渡河問題變成表格思維

→因為是改變船數量，所以不影響表格。

2. 樣式辨識：透過實作或根據研究成果推理規律

→我們發現，若要改變船幾艘 C，有以下三種情形：同時出發、輪流出發、不同時出發。

3. 模型化：將規律以公式的形式表達

- (1) 同時出發：等於是船變大，所以所有的船座位加起來，當作一個 D 值，用變數 D 的題型公式解題。D 值=全部船的座位總和。
- (2) 輪流出發：輪流出發其實等於只有一艘船，而且解法不是受 C 值的影響，而是受到 D 值的影響，等於只有一艘船，C 值不影響操作次數，用變數 D 的題型公式解題。
- (3) 不同時出發（船就好像可移動的陸地）：

總操作次數 = 減掉移動陸地上的人，剩下的人操作次數 + 移動陸地的數量。

4. 演算法：建立一套完整思維路徑的演算法：

→可將我們的研究發現透過判斷式判別改變 C 變數後，看延伸規則屬於同時出發、輪流出發、不同時出發哪一類，就套用那一類的研究發現。

(三) 以運算思維產出進階變化題並找出模式，改變陸地幾岸 E

1. 抽象化：轉化渡河問題變成表格思維

→增加岸，棋盤（表格）的數量也會增加。

2. 樣式辨識：透過實作或根據研究成果推理規律

→我們發現，若要改變陸地幾岸 E，有以下 2 種情形：中間陸地一定要停與可停可不停。

3. 模型化：將規律以公式的形式表達

→如果是中間陸地一定要停，以 $E=3$ 時，那解法等於是兩個各自獨立的解法加總。

→如果是中間陸地可停可不停，還沒實作前，猜測如果一開始有換人的題目類型，總步數會比較少，實作後發現，總步數不變，為了避免死亡狀態（原本用換人解決），先把人送到中間陸地也是需要步數，所以無論換人不換人的題型，多了可選擇的中間陸地，總步數不變。

4. 演算法：建立一套完整思維路徑的演算法

→可將我們的研究發現透過判斷式判別改變 E 變數後，看延伸規則屬於同中間陸地一定庭、可停可不停哪一類，就套用那一類的研究發現。

伍、 討論

一、 設計一款能記錄渡河問題操作過程的解題紀錄方式。

運用座標圖概念能同時表達兩格變數之間的關係，而並且運用顏色將題目限制塗成紅色限制走法完成棋盤樣子，並且把移動的操作過程轉化成棋子走法，以下棋的方式進行渡河問題研究，解決了原本渡河問題必須考量許多資訊而無法有效解題的困擾。

二、 以「棋盤樣式」與「棋子走法」分析渡河變化問題。

用數學的語言重新描述這個題目：傳教士 A 個與土著 B 個，然後船 C 艘座位 D 個，陸地 E 岸，要由左岸到右岸，如果土著比傳教士多 F 個就會被吃掉。並且知道變因 A、B、F 與棋盤樣式有關，而變因 D 與棋子走法有關。其中變因 A 與 B 是成組出現，因為主要是討論其關係， $A > B$ 越多，棋盤越狹長；F 值越高，題目限制越少，F 值比 1 小，土著比傳教士少還能吃掉，不合理，而且，船座位必須要能容納所有傳教士一次到對岸的大小才能解題；D 值越大， Δ 法越大，代表棋子可移動範圍越大。

我們發現渡河問題具有「對稱性」，不論是河岸上的人數組合、死亡地帶、最少步數解法、潛在去程…等都可以透過對稱性規律找到捷徑。

三、 運用程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊。

透過我們自學 Processing 自製渡河問題程式，可以快速依據 A、B、D、F 產生對應的棋盤樣式、死亡地帶、棋子走法，甚至在解題過程還能自動算出一趟去回合理範圍讓玩家都能非常順利過關，而我們也在程式裡頭得到許多研究內容是否正確的驗證。

運用 Excel 整理驗證程式解題與手工解題是否答案一致，答案是肯定的。且透過這些研究的資料，我們找出各種題目組合的最少步數解的公式。

四、 以運算思維推理三維以上的題目類型，並提出渡河解題策略。

研究依循運算思維建構有層次的研究，並且透過改變數字，產生原始渡河變化問題（包含變因 A、B、C、D、E、F）；改變規則產生進階渡河變化問題（包含變因 Z）。

研究進一步發現，C 與 E 變因的改變，會進一步延伸影響其他規則，所以重新歸類到進階渡河變化問題。在進階渡河變化問題裡，最具挑戰的是改變物種數量 Z，會使棋盤變成三維立體，死亡地帶也是三維立體型態，棋子走法的△法會變成正三角形立體。但走法規律仍然是一樣的。

陸、 結論

- 一、 運用棋士精神「棋盤樣式」與「棋子走法」能有效解決渡河變化題。
- 二、 渡河問題解法具有對稱性，包含死亡地帶、最快解法與潛在去程。
- 三、 棋子走法可採用△法，且邊長為 D+1。
- 四、 透過公式計算快速解開原始渡河變化問題的最少操作次數。

原始渡河變化題最少步數解：

$$\text{IF}(\text{MOD}((\frac{A-1+B-1}{D-1}), D-1) > 1, \left(\text{RoundDown}(\frac{A-1+B-1}{D-1}, 0) \times 2 + 1\right), \left((\frac{A-1+B-1}{D-1}) \times 2 + 1\right))$$

- 五、 進階渡河變化問題也能運用我們的研究成果進行有效解題。

柒、 參考資料與其他

一、 類似研究有沒有取材之處：

第 47 屆全國科展高中組_最佳鄉土教材獎_渡河問題

題型與我們大大不同，而且最終目的也不同，不過仍然有參考價值。

(一) 提出合法狀態名詞：

提到合法狀態讓我們想到棋盤可以附帶死亡地帶讓使用者都不會落入死亡區。我們的研究也順利的從規律中找到死亡地帶快速產生的方式。

(二) 提出食性關係名詞：

如果物種之間具備食性關係，代表會有被吃的問題。我們進一步拓展這個食性關係的觀點，發現三個物種以上時有 3 種類型值得討論：第一類型：只有相鄰物種具食性關係：甲吃乙，乙吃丙，但是甲與丙沒有關係。第二類型：包含第一類型，並且物種具備大小關係，比較大的都會吃比較小的：甲吃乙，乙吃丙，丙吃丁。而且甲吃丙、甲吃丁、乙吃丁。第三類型：包含第一類型，並且循環食物鏈，成為一個環狀關係：甲吃乙，乙吃丙，丙吃丁。而且丁吃甲。食性關係對我們的變化題產出有很大的貢獻，但我們的研究著重在第一類型，理由是透過第一類型找到的程式邏輯規律，便可推論第二與第三類型。

二、 其他數學問題的靈感：

在找科展主題過程中，我們嘗試過許多益智問題，以下兩個遊戲帶給我們很大靈感。

(一) 開燈關燈遊戲的靈感

點燈關燈由方格組成，令我們想到如果這些方格都是座標，我們就能知道現在的位置(代表此刻河岸上人數的組合為何)而且點燈關燈會有不同顏色變化，因此我們想到可以在設計的棋盤上繪製不同顏色來標示不同的狀態，如死亡地帶、此刻位置、起點與終點。

(二) 踩地雷遊戲的靈感

踩地雷是根據滑鼠點的位置，自動讀取格子並連帶影響周遭格子會自動變化，讓我們想到如果我們棋子走到不同位置，都會自動計算符合一趟去回的範圍並標示出來，就能協助使用者完成渡河問題。而一趟去回是受船座位 D 值影響，需有人開船回來，所以每次能增加或減少物種的總和只要在正負(D-1)的範圍內，都可以做為一趟合法的去回。

【評語】 080401

本作品取材自一個流傳已久的數學挑戰題，依據規則，探討如何渡河才能成功過關、以及所需的最少步數解法；作者嘗試將渡河的變化問題巧妙轉化成「棋盤樣式」與「棋子走法」兩項變因，設計了渡河問題操作過程的紀錄方式，並進一步運用程式來驗證棋譜理論，找出更多解題的相關資訊、同時完成各式變化題的實驗操作；研究過程堪稱嚴謹周全、研究結果的分析與討論亦稱完備，整體而言，本作品內容豐富又具備探索性，是一份值得肯定的佳作。

原始問題：

傳教士3個與土著3個，船1艘座位2個，要由左岸到右岸，任一岸傳教士比土著少會被吃掉。

原始渡河變化題

~以數學語言重新描述

傳教士A個與土著B個，船C艘座位D個，陸地E岸，

由左岸到右岸，如果傳教士比土著少F個會吃掉。

進階渡河拓展變化題

~以原始渡河問題為基礎

進階挑戰是改變物種數量Z直接影響物種間的食性關係。

當新增物種時，必須新增物種變數(與A、B同家族)，以及食性關係變數(與F同家族)。

壹、研究動機

我們希望能建立一個能解開各種渡河問題的思維模式，簡化渡河問題，以視覺化方式輔助解題思維。並自學Processing繪圖程式語法並將研究成果寫入軟體中，協助驗證研究成果是否正確，建立一套完整渡河問題的解題規則。而當渡河問題在增加物種變數時，會使棋盤樣式從平面提升到立體，甚至是四度空間，因此我們也根據現有研究成果提出思維改良方向。

貳、研究目的

- 一、設計一款能記錄渡河問題操作過程的解題記錄方式。
- 二、以「棋盤樣式」與「棋子走法」分析渡河變化問題。
- 三、運程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊。
- 四、以運算思維推理三維以上的題目類型，並提出渡河解題策略。

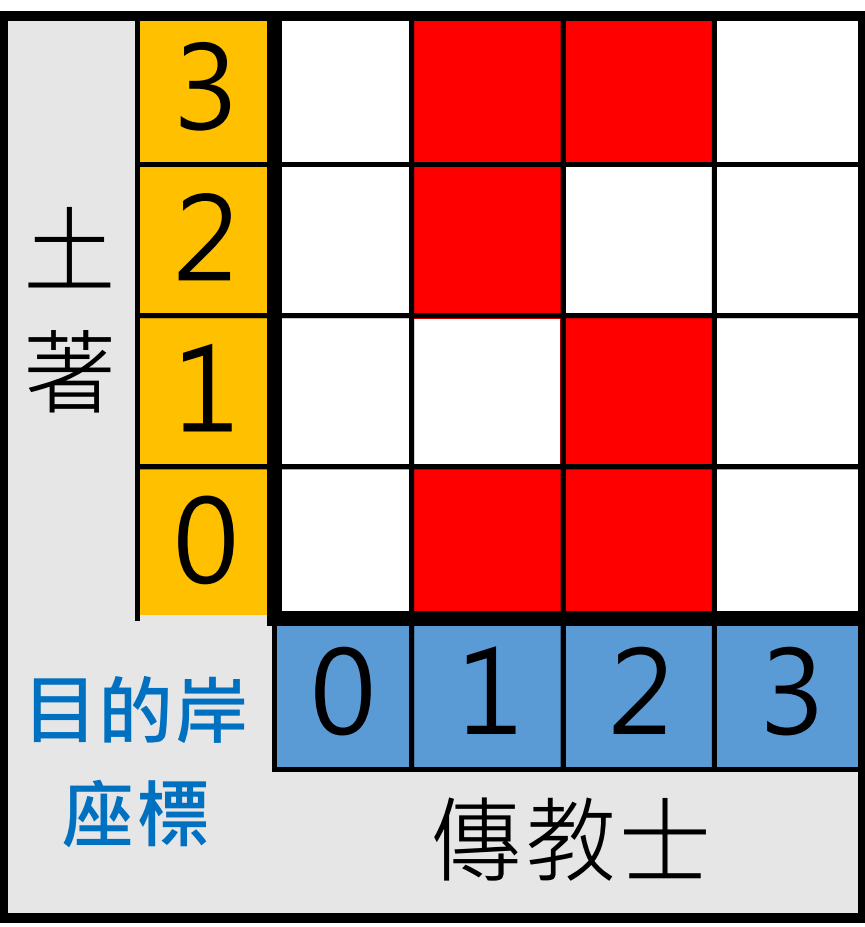
參、研究器材與設備

電腦、印表機、自製方格紙、筆、黑板、Word軟體、Excel建立表格及運用公式驗證規律、Processing程式設計萬用棋盤、自製3D模擬渡河遊戲道具、123D Design繪製立體記錄圖、PowerPoint繪製研究相關圖形與3D印表機、乒乓球。



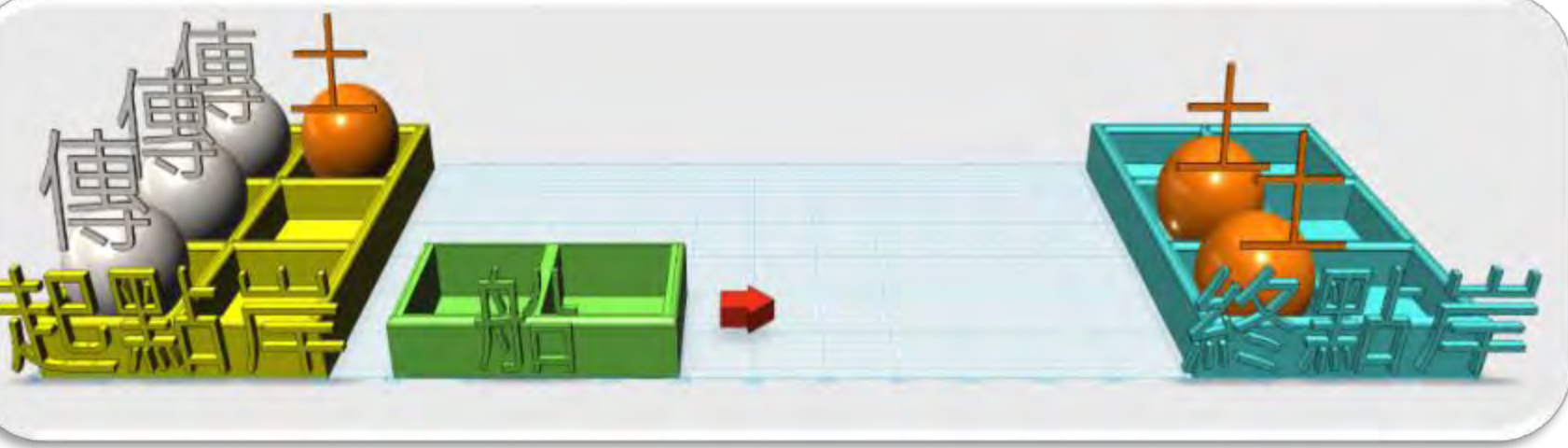
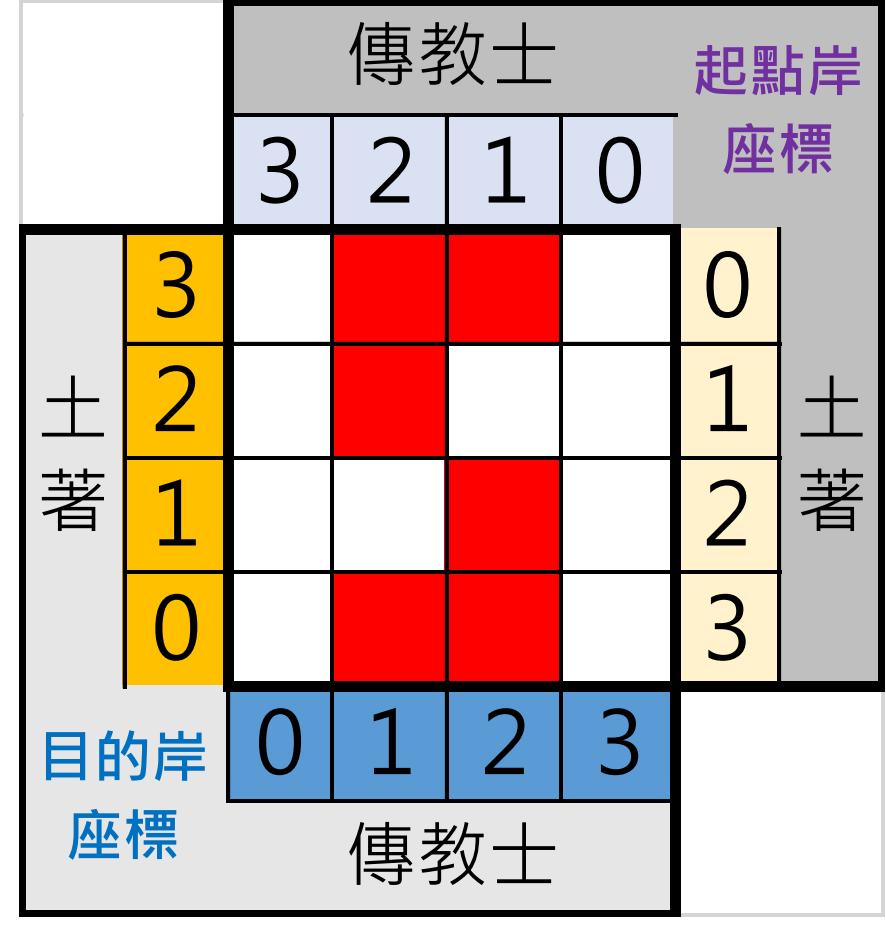
肆、研究過程

- 一、設計一款能記錄渡河問題操作過程的解法記錄方法。

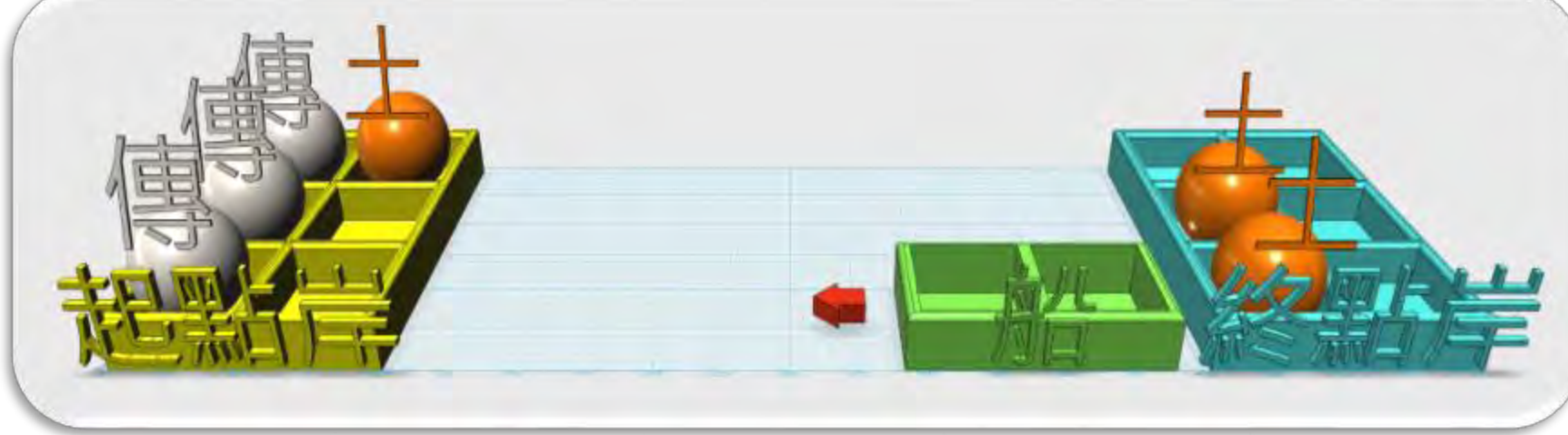


我們設計一種表格記錄方式，透過座標可以一次解讀兩個資訊：傳教士與土著的人數。閱讀方式是以左下角為原點，參考下方X軸(目的岸傳教士人數)與左方Y軸(目的岸土著人數)，閱讀的(X,Y)座標就是**目的岸的人數組合**。

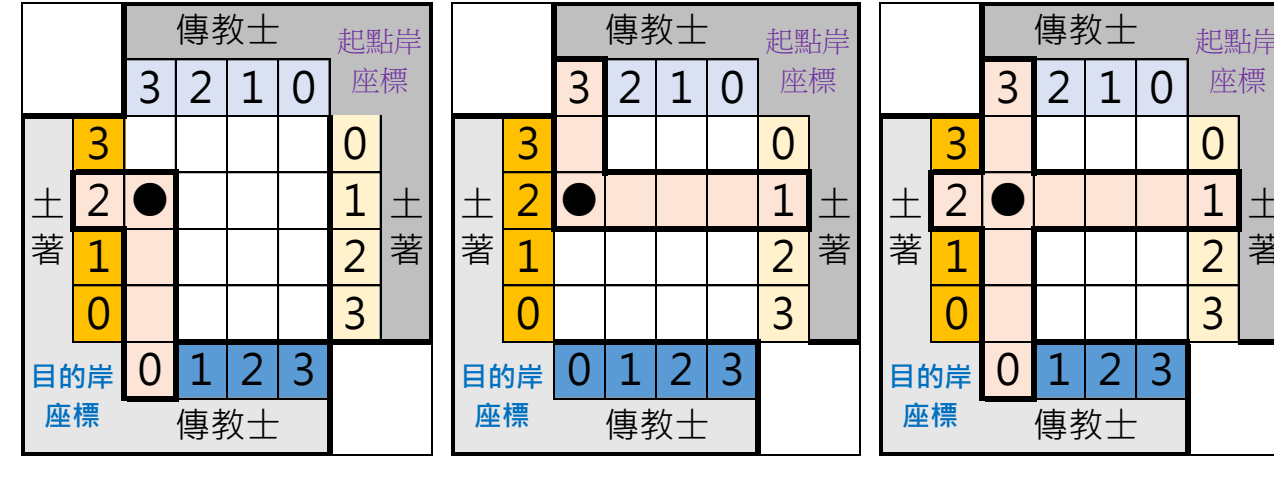
根據兩岸總和人數不變的條件下，只要知道其中一岸，便可知道另一岸人數組合，因此我們也在右上角建立一個相反的起點岸座標，方便查閱另一岸的人數組合。



船在**左岸(起點岸)**，代表可以直接開船過河，可增加人數



船在**右岸(終點岸)**，必須先有人開船回來，必定會減少人數



閱讀目的岸

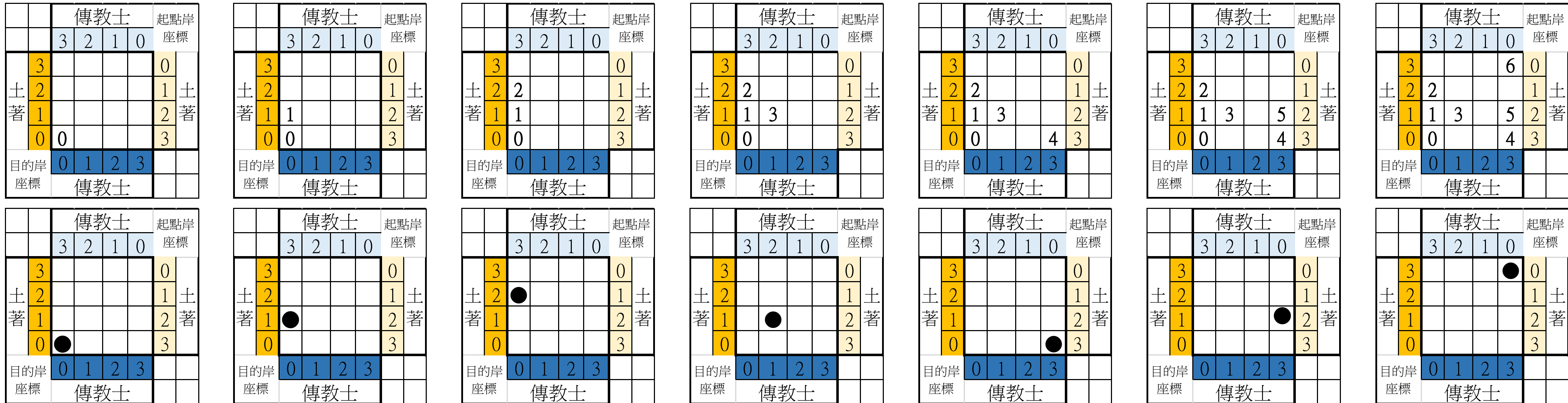
閱讀起點岸

兩岸一起看

經過觀察，記錄去回一趟才是有效的解題策略。因此記錄方式為一次去回做為一趟並寫上第幾步。不將去回分開記錄的原因在於，船可以靠在兩個不同的岸，因此有2種操作過程會記錄在一樣的座標，但是船卻在不同的地方。例如，有可能目的岸(右岸)同樣都是**A: B = 0: 2**，但船此時停靠在**目的岸(右岸)**或**起始岸(左岸)**這2種變化

去回分開記錄還有一個嚴重的缺點在於，單看座標時，會誤以為某些組合是可行並且有進展的，但如果船也在**目的岸(右岸)**，意味著必須要有至少一個人開船回到**起始岸(左岸)**，造成我們期待目的岸(右岸)能增加人數，事實上卻反而會減少，退回到總人數組合比較少的座標。

所以我們設定**棋子每走1步**，代表實際操作為**船的一趟去回**，每1步走完之後，船都回到**起始岸(左岸)**，代表每次新操作可直接增加不同的人數組合，且每一個座標都會代表獨一無二的操作(步數)。代表每一次棋子移動時(每一次操作的完整思維)，必須要先思考如何把人成功送到**目的岸(右岸)**，以及如何將船送回到**起始岸(左岸)**。唯獨最後一次，可以直接將船靠岸在**目的岸(右岸)**。

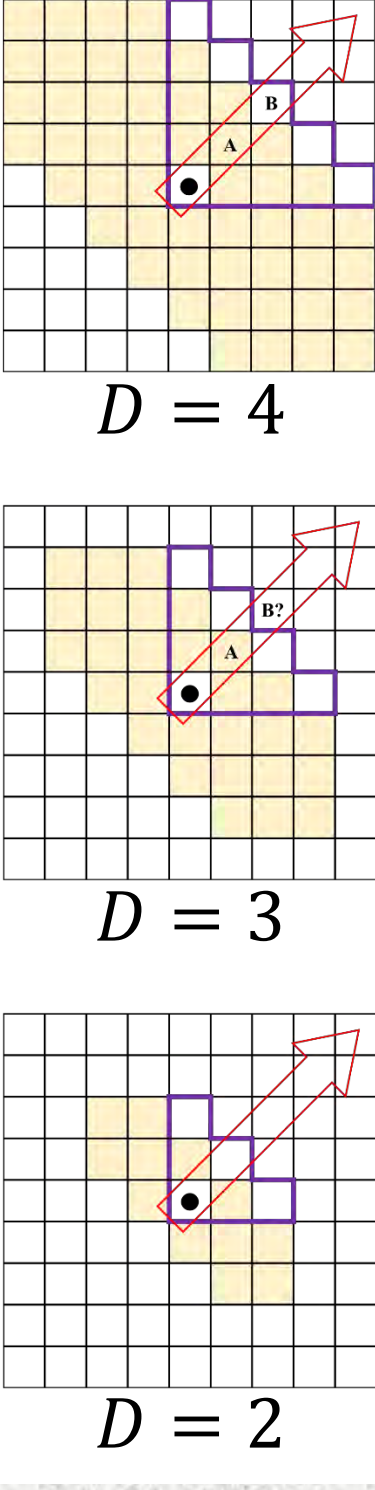


改變座位D個的變因

當 $D \geq 4$ 之後，棋子每1步，都能進入45度右上角A的位置，代表可以透過潛在去程B直接走斜角直上，以實際操作思考，就是每次都是B:2傳教士與2個土著上船，每次下船都是1個傳教士與1個土著下船，然後1個傳教士與1個土著開船回來，因此 $D \geq 4$ ，遊戲變得簡單。

當 $D = 3$ 時，雖然右上角A也是棋子1步範圍但以潛在去程的角度發現B格沒有落入△法涵蓋的空格，代表沒辦法直接走完美斜角，所以實際解題時仍有許多可討論的變化。

當 $D = 2$ 時，就遇到更多阻礙，右上角方向沒有任何步數可作為棋子的選擇。

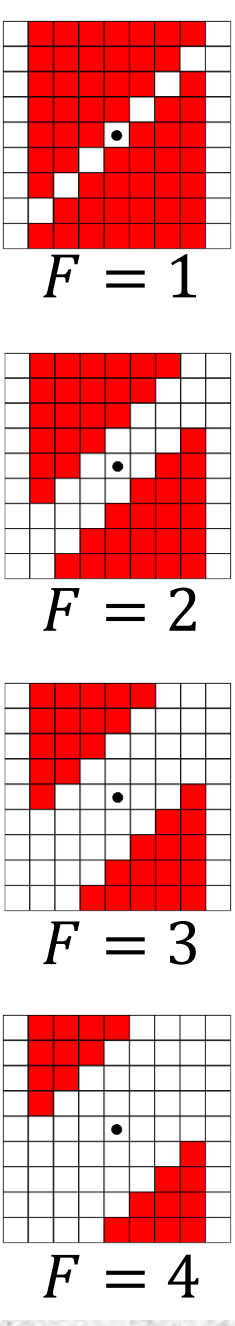


F ≥ 1類型

當食性關係F值提高，兩個死亡地帶之間的空格會越來越多，代表限制越少，搭配D值規律來看，當F = 1限制最高時，必須D ≥ 4才一定有解

因此，F提高時，使遊戲變得不好玩，且影響會越來越小。若改為A > B類型，兩個死亡地帶會距離更遠，之間的空格會更多。

改變食性關係F 才能造成傷亡的變因

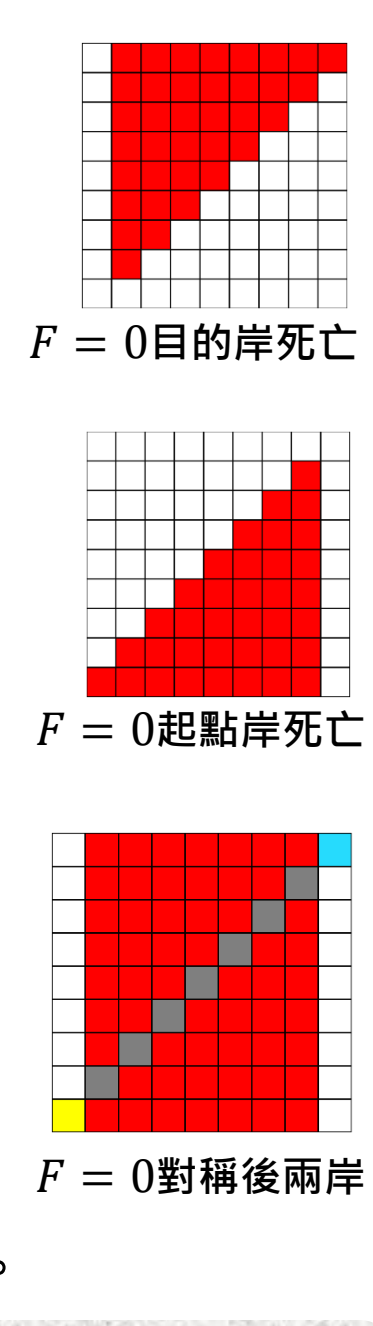


F ≤ 0類型

死亡地帶在兩岸有重疊組合出現，F值越小，重疊越多，在棋盤中間有長方形區塊出現，且沒有斜線可以依序行走，F值越小，死亡地帶越大。

當兩者透過對稱性合併成完整的死亡地帶後，灰色是重疊的地方，而黃色是在重疊線上，但是只有起點岸才有的死亡狀態；青色則是在重疊線上，但是只有目的岸才有的死亡狀態。

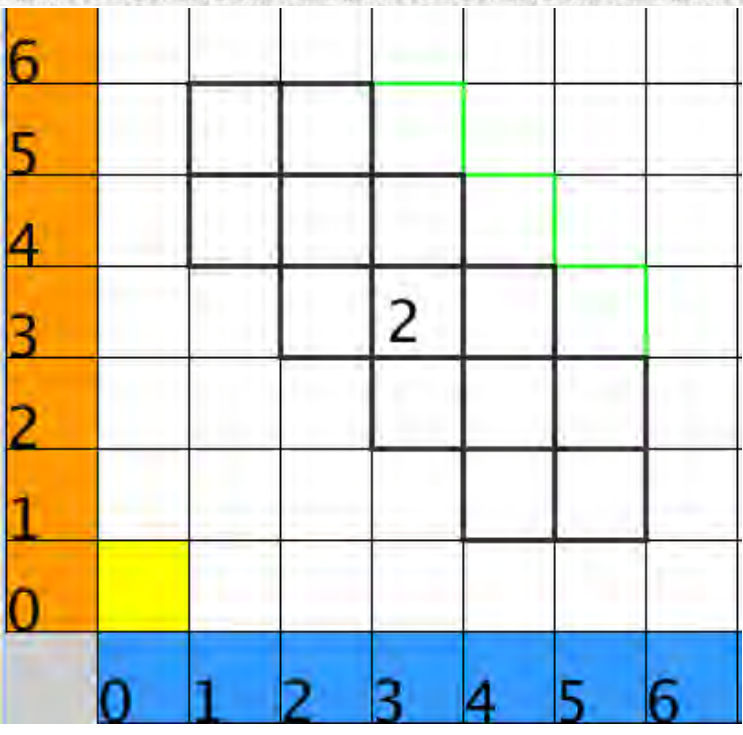
若要解開這樣的題目，必須要變成A > B的類型，但我們認為不合理，若是透過數量比較，土著比傳教士多而造成傷亡狀態，認為合理。但土著比傳教士少卻還能吃掉傳教士，不太合理。但我們確實可以知道A > B值提高，可以避免重疊狀態，因為兩個死亡地帶距離會變遠。



三、運程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊。

```
riverWithAxie410round
int A=13,B=8,D=2,F=1; int spaceXY=50,stepNum=0,dRound=0-1;
void setup(){ size(1000,1000); }
void mouseReleased(){ stepNum++; }
void draw(){
  if(mousePressed == true){
    for(int xAxie=0;xAxie<=A;xAxie++){
      for(int yAxie=0;yAxie<=B;yAxie++){
        strokeWeight(1); stroke(0);
        fill(255,255,255); rect((xAxie+1)*spaceXY,(B-yAxie)*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
        fill(0,255,255); rect((A+1)*spaceXY,0,spaceXY,spaceXY);
        fill(255,255,0); rect(spaceXY,B*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
        if(xAxie>0&&xAxie<F-1&yAxie){ fill(255,0,0); rect((xAxie+1)*spaceXY,(B-yAxie)*spaceXY,spaceXY,spaceXY); }
        if(xAxie>0&&xAxie<F-1&yAxie){ fill(255,0,0); rect((xAxie+1)*spaceXY,(B-yAxie)*spaceXY,spaceXY,spaceXY); } } }
    for(int axieB=0;axieB<=B;axieB++){
      fill(255,153,0); rect(0,axieB*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
      fill(0); text(51,axieB*spaceXY,(B-axieB)*spaceXY);
    }
    for(int axieA=0;axieA<=A;axieA++){
      fill(51,153,255); rect((axieA+1)*spaceXY,(B+1)*spaceXY,spaceXY,spaceXY);
      fill(0); text(51,axieA*spaceXY,(B+2)*spaceXY);
    }
    mousePressX=floor(mouseX/spaceXY);mousePressY=floor(mouseY/spaceXY);
    if(mousePressX+A+2&mousePressY<B+1){ fill(0,0,0); text(51,axieB*spaceXY,(B-axieB)*spaceXY);
      for(int xD=0;xD<=D;xD++){
        for(int yD=0;yD<=D;yD++){
          if(mousePressX+xD+2&mousePressY-yD<B+1&mousePressX+xD>0){
            if(mousePressX+xD+A+2&mousePressY-yD<D+1){ noFill();stroke(50, 50, 50);strokeWeight(3); rect((mousePressX+xD)*spaceXY,(mousePressY-yD)*spaceXY,spaceXY,spaceXY); }
            if(xD+yD==D){xD+yD==D){ noFill();stroke(0, 250, 0);strokeWeight(2); rect((mousePressX+xD)*spaceXY,(mousePressY-yD)*spaceXY,spaceXY,spaceXY); }
          } } } } } }
```

程式輔助提示說明



中間數字代表是第幾趟，根據座標：往右及往上都是增加人，去回1趟代表先增後減(必須有人開船回來)，因此先找出想去的粗黑線範圍內的白格，以他為原點，往右→或往上↑數最多D格，如果找到任何一個粗黑線範圍或綠色框範圍(綠色框代表只能去但不能停留的點)的白格(為潛在去程)，代表這1趟可行的，依此類推，進行下一步選擇。

透過程式輔助，我們解開所有「原始渡河變化題」並得到研究成果。

IF盤別式、for迴圈、變數控制、函式功能

電腦座標與數學座標上下顛倒，如何調整？

程式撰寫挑戰

因此，我們找到一個當A>B的萬用公式解，可以找出最少步數。

如果 $\left(\frac{A-1+B-1}{D-1}\right)$ 除以D-1的餘數> 1→
符合條件的話，選擇這個公式→
如果不符合條件的話，選這公式→

$$\text{IF}(\text{MOD}((A-1+B-1), D-1) > 1, \left(\text{RoundDown}\left(\frac{A-1+B-1}{D-1}, 0\right) \times 2 + 1\right), \left(\left(\frac{A-1+B-1}{D-1}\right) \times 2 + 1\right))$$

若是A = B的類型，以原始題(3,3)來說，因死亡地帶裡可走的空間是1格寬的狹長形走道，必須要換人才順利通過，但人數提升之後，就無解，除非提高船座位D。

M欄公式七適用於D = 4有一個快速的解法思維。(A - 3) × 2 + 3代表，前後加起來有3步可以透過捷徑加快步數，再透過還原加3。無論A或B值提升到多少，前後加起來的3步捷徑不變，分別是出現在進入危險地帶前與離開危險地帶時所節省步數。

若是D = 3，A ≥ 5之後就無解了。因為進入危險地帶之後，由於沒有像D = 4這種優勢的斜上走法，必須下一步就跳離危險地帶，而A ≥ 5使得危險地帶太寬，所以跳不出來就因此失敗。

四、以運算思維推理三維以上的題目類型，並提出渡河解題策略。

我們在研究過程能順利解開渡河問題其實是運用了運算思維，研究目的的四個階段就是有方法的解題，抽象化：設計一款能記錄渡河問題操作過程的解題記錄方式→把渡河問題複雜的操作過程，變成簡化的表格，方便閱讀與記錄。再透過樣式辨識：以「棋盤樣式」與「棋子走法」分析渡河變化問題→從原始渡河變化題中找出規律。接著模型化：運程式驗證棋譜理論，並找出更多解題相關資訊→發現原始渡河變化題的規律後，透過規律找出公式。最後演算法：建立一套完整思維路徑的演算法→判別A、B、D、F等各種條件，決定不同的題目該使用哪一個公式。

後來發現，我們必須將A、B、D、F四個變數歸類在原始渡河變化問題，而船C艘與陸地E岸這2變數的改變，連帶影響其他變數，要歸類在進階渡河變化問題，比方改變了船C艘，如果是2以上，那船座位D分別是多少，這會變成另一個要思考的問題；陸地E岸如果是3以上，那是否一定要停留，也是進階延伸需要討論的新問題。因此，我們將會有連帶關係影響的變數定義在進階渡河變化問題，包含原本設定在進階渡河變化的問題的改變物種Z。

調整後原始渡河變化問題包含傳教士A、土著B、船座位D、食性關係F...變數。調整後進階渡河變化問題包含船C艘、陸地E岸、物種數量Z..變數。

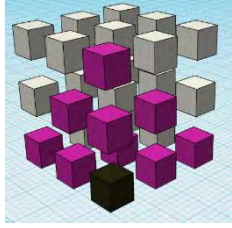
根據「原始渡河變化題」解題經驗與成果，推論「進階渡河拓展變化題」的解題可能。

傳教士A個與土著B個，然後船C艘座位D個，陸地E岸，要由左岸到右岸，如果傳教士比土著少F個就會被吃掉。再增加物種「牛」H個，新的食性關係為線性不循環，土著會吃傳教士，傳教士會吃牛，但土著不吃牛，然後牛比傳教士少J個就會被吃掉。

	以牛H=3、傳教士A=3、土著B=3的類型產生三維棋盤		傳教士A比牛H=3多J=1人就會造成死亡所產生的死亡地帶		土著B比傳教士A多F=1人就會造成死亡所產生的死亡地帶		土著B與牛H=3所組成的平面並不會產生死亡地帶
	死亡地帶並不完整這只完成最表層的死亡地帶		增加土著B，內部符合傳教士A比牛H=3多J=1人就會有死亡地帶		增加牛H，內部符合土著B比傳教士A多F=1人就會有死亡地帶		增加傳教士A，不影響死亡地帶

3 × 3 × 3立體棋盤含完整死亡地帶

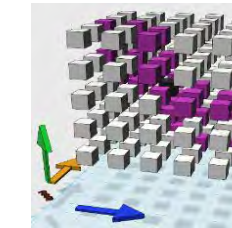
船的座位雖然沒改變，但在「進階渡河拓展變化題」，一趟去回的不仅是△法增加邊長，還由平面提升至立體。



以D=2去程選擇為例，黑色為起點



以D=2回程選擇為例，黑色為起點



以D=2去回一趟的選擇為例，黑色為起點

依據立體圖的規律差異變化，我們提出如何修正平面程式的技巧，使新的輔助程式能產生「立體棋盤樣式」以及「立體棋子走法」輔助提示功能，並實現「進階渡河拓展變化題」的全破解。

伍、研究結果與結論

一、運用棋士精神「棋盤樣式」與「棋子走法」能有效解決渡河變化題。

二、渡河問題解法具有對稱性，包含死亡地帶、最佳解法與潛在去程。

三、棋子走法可採用△法，且邊長為D+1。

四、透過公式計算可快速解開原始渡河變化問題的最少操作次數

IF(MOD((A-1+B-1), D-1) > 1, (RoundDown((A-1+B-1)/(D-1), 0) × 2 + 1), ((A-1+B-1)/(D-1) × 2 + 1))

五、進階渡河變化問題也能運用我們的研究成果有效解題。