

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 物理科

第一名

080104

繩奇摩力

學校名稱：彰化縣彰化市南郭國民小學

作者： 小四 楊舒喬	指導老師： 林郁軒
---------------	--------------

關鍵詞：繩子、纏繞的摩擦力、省力效應

得獎感言

繩奇摩力的奇幻歷程

熱鬧又精彩的全國科展饗宴終於結束了。長達一週的活動，歷經佈展、解說、觀摩交流、科展之夜、頒獎典禮等仿佛歷歷在目，令我難以忘懷，是我今年夏天最感動的回憶。

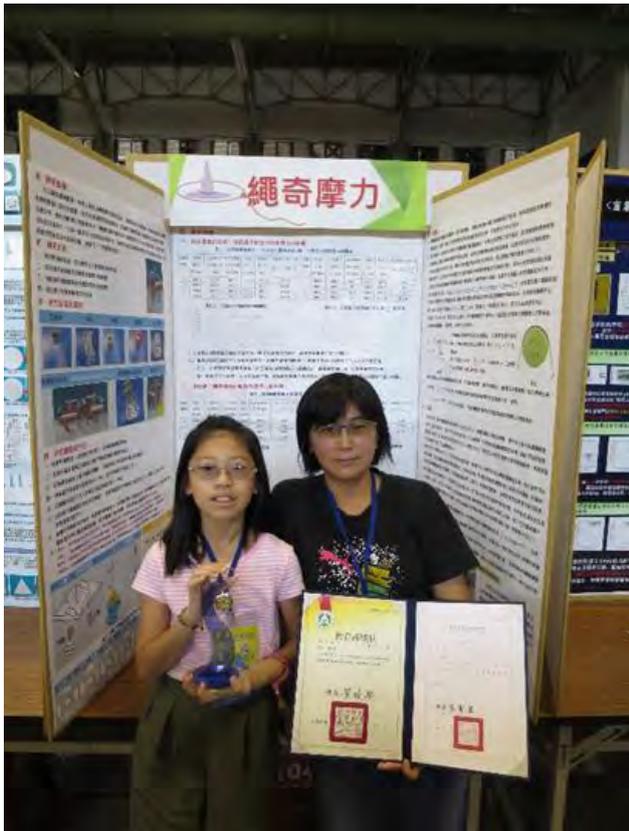
會選擇研究繩子纏繞的摩擦力，是因為去年端午節看到阿嬤綁粽子，熟練的手法將棉繩纏繞在粽葉上兩、三圈，就把粽子牢牢綁緊了。我覺得很有趣，因為綁太緊或綁太鬆都會失敗，要怎麼拿捏綁的力道才能恰到好處？還有纏繞的圈數是不是也有影響呢？爸爸提醒我，既然好奇，何不試著去蒐集資料或進行研究來尋找答案呢？

在探索的過程中，我發現繩子的摩擦力應用在生活中處處可見，例如岸邊利用繩子纏繞圓柱而停泊的船隻、野外露營時，利用纏繞樹幹而撐起的吊床，打陀螺時的繩子纏繞等等，只要仔細觀察、用心體會，就會發現許多科學的痕跡與物理的美妙。

確定研究方向後，最困難的就是如何測量摩擦力的大小與打造合適的器材。器材的部分，在確定設計圖後，須找到願意幫忙的鋼材行，裁切我們需要的圓柱鋼管，但是拿到的鋼管，還必須打磨、拋光才能使表面性質穩定可用，因此也須另外尋找願意幫我們處理的加工廠，過程中多次碰壁，因為許多加工廠沒空接這樣突如其來的小工程，最後是一間熱心的加工廠老闆，被我們做科展的強烈企圖心感動，犧牲假日來為我們加班完工。這件事情，也讓我學到，只有自己有一顆堅持不放棄的心，才能感動他人而得到協助。

在實驗測量的過程中，充滿挫折與挑戰，例如靜摩擦力的大小會變動，如何測量它的數值就是一件傷透腦筋的事，也因此卡住了實驗進度。後來加入電子秤的巧妙應用，才解決了測量上的困難，當下高興到從椅子上跳起來。實際從事研究，才會發現實作的困難重重，往往解決了一個難題，又面臨了新的挫敗，但是許多意外的驚喜，常常就在面臨困頓後的突破而獲得。就像複賽得到特優後，針對複賽評審的建議，又重新針對實驗的不足之處進行補強，絞盡腦汁，重新設計與精進實驗的量測，最後終於得出了一個預測省力效應的繞繩公式，過程很辛苦，但結果很欣慰，這也是科展研究迷人的地方。

最後要感謝我的家人和老師，一路上支持和陪伴我，尤其老師犧牲許多假日時間，陪我進行研究並帶我尋求專家諮詢，給予我很多協助。另外要感謝彰化縣的科展團隊，提供相當多的資源和經驗分享，因此這份榮耀也是團隊的榮耀。



感謝老師和我攜手奮戰，並獲得第一名的榮耀



佈展的當天，仍把握時間練習作品的解說



帶著處長、校長、縣長及外公的鼓勵與期待，要在全國賽爭光

摘要

日常生活中常利用繩子來綑綁一些物件，也透過繩結來交織出安全防護網，這些繩子的廣泛應用可能都和繩子造成的摩擦力息息相關，而繩子摩擦力的產生是透過纏繞的模式，這和一般認知的摩擦力原理可能有所差異。本研究透過繩子與圓柱系統的纏繞，探討影響繩子摩擦力的因素，並發現纏繞圓柱的力道、纏繞圓柱的圈數多寡、及繩子的種類性質都對繩子產生的摩擦力大小有重要性地影響。

壹、研究動機：

在公園或遊樂園裏，常可以看見由繩結構成的體能設施，這些繩結彼此交錯緊縛，所造成的摩擦力竟能乘載好幾個小朋友的重量。另外在碼頭看見漁船靠岸時，透過繩子纏繞在圓柱上幾圈就能拉住漂泊的漁船，我很好奇，繩子的摩擦力到底有多大？纏繞的圈數和繩子的材質對摩擦力的大小有什麼影響呢？在自然與生活科技的課本中，也有一個單元介紹到生活中的力，而摩擦力就是隨時存在周遭且和生活最密切相關的。於是我把這些想法和老師討論，並進行了下列實驗的探究。

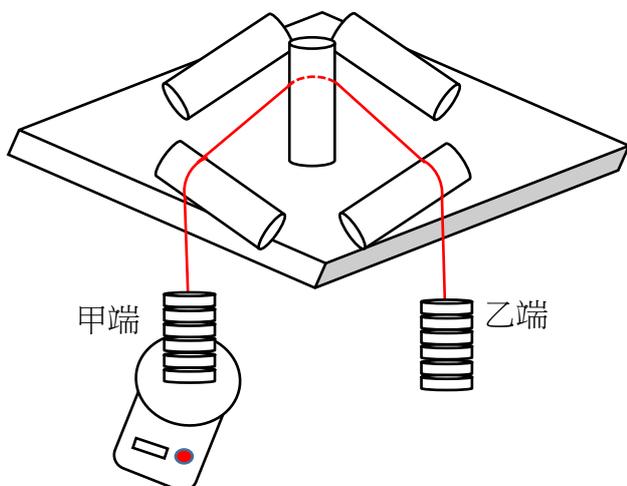
貳、研究目的：

- 一、利用掛重的改變，探討繩子拉力對摩擦力的影響
- 二、探討繩子纏繞圓柱的圈數對摩擦力的影響
- 三、探討繩子纏繞圓柱的長度對摩擦力的影響
- 四、探討繩子材質對摩擦力的影響

參、研究設備及器材：

		
<p>有掛鉤的槽碼吊盤 及砝碼組</p>	<p>尼龍繩</p>	<p>電子磅秤</p>
		
<p>塑膠繩</p>	<p>棉繩</p>	<p>麻繩</p>
		
<p>金屬圓柱系統：(1)直徑 5.9 公分 (2)直徑 7.6 公分</p>		<p>實驗裝置全貌</p>

肆、研究過程或方法：



圖一：實驗裝置示意圖



圖二：實驗裝置實體圖

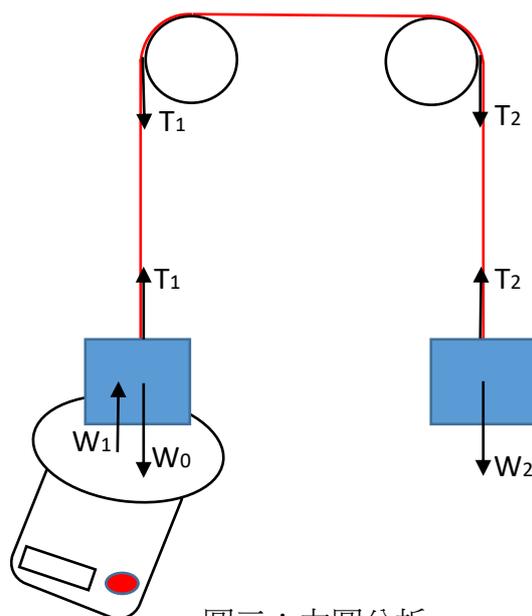
- 一、先將甲端掛重，並放置於電子秤上，測得重量讀數為 W_0 。
- 二、再將甲端掛重與乙端掛重以繩子連結並纏繞於圓柱系統上。
- 三、記錄圓柱系統上繩子纏繞的圈數、乙端掛重 W_2 及此時的電子秤讀數 W_1 。
- 四、甲端電子秤變輕的讀數(即 $W_0 - W_1$)，就是甲端繩子的拉力 T_1 。
- 五、乙端繩子的拉力大小則等於乙端的掛重(即 $T_2 = W_2$)。
- 六、由於繩子纏繞圓柱所造成的摩擦力，使得測量到的甲端和乙端之繩子拉力並不相同，兩端拉力差 $T_2 - T_1$ 即為摩擦力的大小。

七、如圖三所示，

$W_0 - W_1$ ：即為繩子拉力 T_1

W_2 ：即為繩子拉力 T_2

$T_2 - T_1$ ：即為繩子纏繞圓柱的摩擦力



圖三：力圖分析

八、當電子秤讀數等於零時，即達最大靜摩擦力，此時應紀錄乙端掛重 W_2 (為求精確可以將乙端掛重取下後，置於電子秤以量取精確讀數)，並反覆進行幾次測量，以求得最大靜摩擦力的平均值。

九、研究一：使用直徑 5.9 公分的小圓柱系統，以尼龍繩纏繞圓柱系統 1 圈，甲端預先掛重 400 (gw)，改變乙端掛重 W_2 ，並重複過程一 ~ 八，測量乙端掛重和摩擦力大小 (T_2-T_1) 的關係。

十、研究二：使用直徑 5.9 公分的小圓柱系統，以尼龍繩纏繞圓柱系統，甲端掛重 400 (gw)，改變繩子纏繞圓柱的圈數(參照圖四)，測量纏繞圈數和摩擦力大小(T_2-T_1)的關係。

十一、研究三：將直徑 5.9 公分的小圓柱系統更換為直徑 7.6 公分的大圓柱系統，當纏繞相同圈數時，大圓柱系統的纏繞長度會比小圓柱系統長，記錄纏繞圈數及繩子的纏繞長度，並測量摩擦力大小(T_2-T_1)和繞繩長度的關係。

十二、研究四：使用直徑 5.9 公分的小圓柱系統，甲端掛重 400 (gw)，固定纏繞的圈數為 0.75 圈，改變繩子的材質種類(分別換成麻繩及棉繩)，測量材質種類和摩擦力大小 (T_2-T_1)的關係。

纏繞 0.5 圈	纏繞 0.75 圈	纏繞 1 圈
纏繞 1.25 圈	纏繞 1.5 圈	纏繞 1.75 圈
纏繞 2 圈	纏繞 1 圈	纏繞 0.75 圈

圖四：各種不同纏繞圈數的裝置示意圖

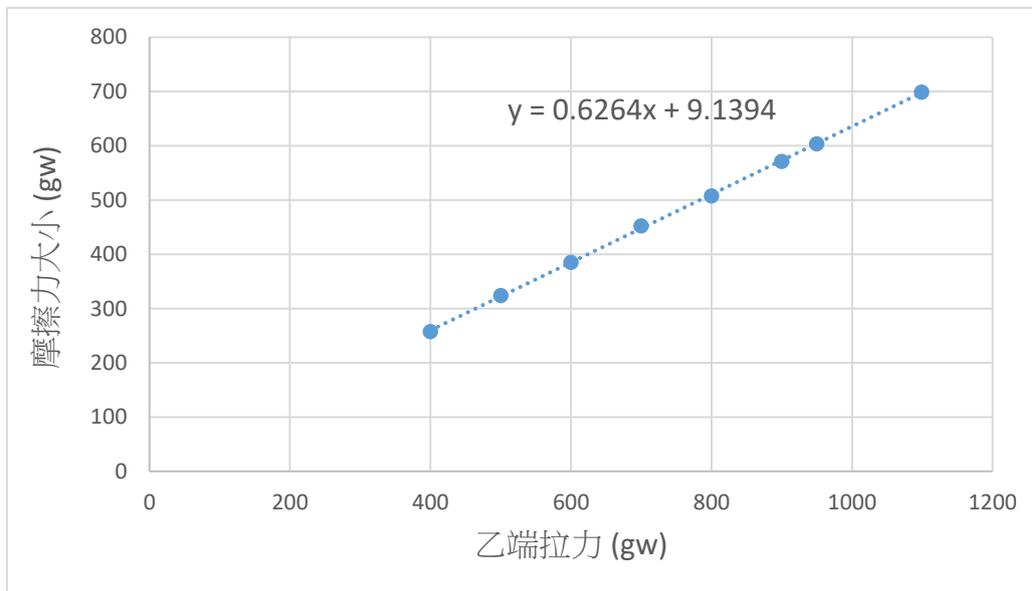
伍、研究結果：

一、利用掛重的改變，探討繩子拉力對摩擦力的影響：

表 1：以尼龍繩繞圓柱系統 1 圈，乙端拉力對摩擦力的關係

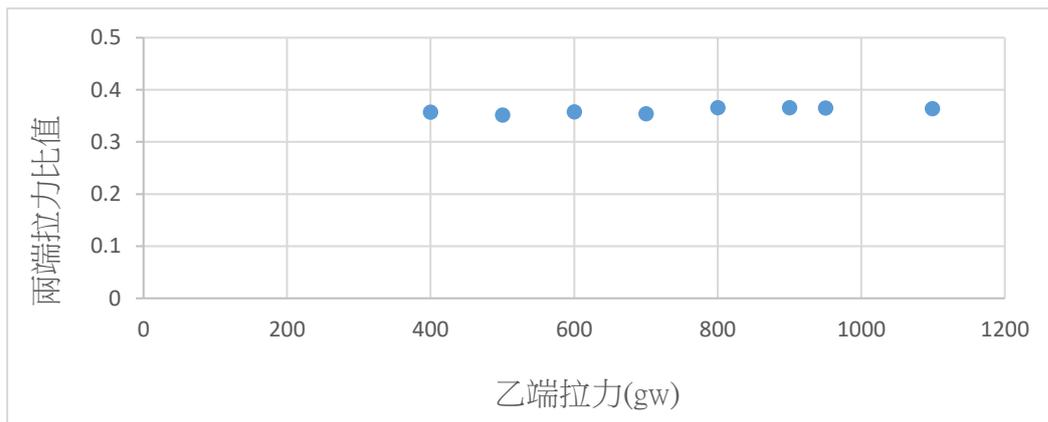
繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕後 的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 $T_2 - T_1$ (gw)	甲端拉力與乙端拉力 的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
1	400.0	400.0	257.4	142.6	257.4	0.357
1	400.0	500.0	223.8	176.2	323.8	0.352
1	400.0	600.0	185.4	214.6	385.4	0.358
1	400.0	700.0	152.2	247.8	452.2	0.354
1	400.0	800.0	107.6	292.4	507.6	0.366
1	400.0	900.0	70.8	329.2	570.8	0.366
1	400.0	950.0	53.2	346.8	603.2	0.365
1	400.0	1098.9	0.0	400.0	698.9	0.364
						平均：0.360

表 1-a：乙端拉力和摩擦力的關係



研究發現：由表 1-a 發現當乙端拉力越大時，繩子的摩擦力也越大，兩者間呈現線性正比的關係。

表 1-b：乙端拉力和兩端拉力比值($\frac{T_1}{T_2}$)的關係



研究發現：由表 1 發現乙端拉力不等於甲端拉力，且由於摩擦力的作用，使得甲端能以比較省力的方式來平衡乙端拉力，由研究結果發現甲端拉力和乙端拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)會趨近於一個常數約為 0.36，代表甲端拉力只要為乙端拉力的 0.36 倍，即可使兩端平衡，故此值為摩擦力造成的省力效應。因此本研究把 $\frac{T_1}{T_2}$ 的值稱作「省力效應」。

二、探討繩子纏繞圓柱的圈數對摩擦力的影響：

表 2：以尼龍繩繞圓柱系統 0.5 圈的摩擦力測量

繞繩圈數	甲端掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕後的視重 W_1 (gw)	甲端拉力 T_1 (gw)	摩擦力 $T_2 - T_1$ (gw)	甲端拉力與乙端拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
0.5	400.0	400.0	159.8	240.2	159.8	0.601
0.5	400.0	450.0	126.4	273.6	176.4	0.608
0.5	400.0	500.0	92.4	307.6	192.4	0.615
0.5	400.0	550.0	63.2	336.8	213.2	0.612
0.5	400.0	600.0	26.0	374.0	226.0	0.623
0.5	400.0	649.6	0.0	400.0	249.6	0.616
						平均：0.613

表 3：以尼龍繩繞圓柱系統 0.75 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 $T_2 - T_1$ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
0.75	400.0	400.0	221.6	178.4	221.6	0.446
0.75	400.0	500.0	171.4	228.6	271.4	0.457
0.75	400.0	600.0	126.0	274.0	326.0	0.457
0.75	400.0	700.0	81.2	318.8	381.2	0.455
0.75	400.0	800.0	27.4	372.6	427.4	0.466
0.75	400.0	856.8	0.0	400.0	456.8	0.467
						平均：0.458

表 4：以尼龍繩繞圓柱系統 1.25 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 $T_2 - T_1$ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
1.25	400.0	400.0	292.2	107.8	292.2	0.270
1.25	400.0	500.0	269.4	130.6	369.4	0.261
1.25	400.0	600.0	242.2	157.8	442.2	0.263
1.25	400.0	700.0	212.2	187.8	512.2	0.268
1.25	400.0	800.0	186.8	213.2	586.8	0.267
1.25	400.0	1000.0	118.6	281.4	718.6	0.281
1.25	400.0	1100.0	93.2	306.8	793.2	0.279
1.25	400.0	1438.2	0.0	400.0	1038.2	0.278
						平均 0.270

表 5：以尼龍繩繞圓柱系統 1.5 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 T_2-T_1 (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
1.5	400.0	400.0	311.8	88.2	311.8	0.221
1.5	400.0	600.0	263.4	136.6	463.4	0.228
1.5	400.0	800.0	210.8	189.2	610.8	0.237
1.5	400.0	900.0	186.6	213.4	686.6	0.237
1.5	400.0	1000.0	168.2	231.8	768.2	0.232
1.5	400.0	1100.0	139.0	261.0	839.0	0.237
1.5	400.0	1729.0	0.0	400.0	1329.0	0.231
						平均：0.232

表 6：以尼龍繩繞圓柱系統 1.75 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 T_2-T_1 (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
1.75	400.0	400.0	332.6	67.4	332.6	0.169
1.75	400.0	600.0	301.6	98.4	501.6	0.164
1.75	400.0	800.0	261.8	138.2	661.8	0.173
1.75	400.0	1000.0	228.8	171.2	828.8	0.171
1.75	400.0	1200.0	185.2	214.8	985.2	0.179
1.75	400.0	1350.0	162.6	237.4	1112.6	0.176
1.75	400.0	2238.5	0.0	400.0	1838.5	0.179
						平均：0.173

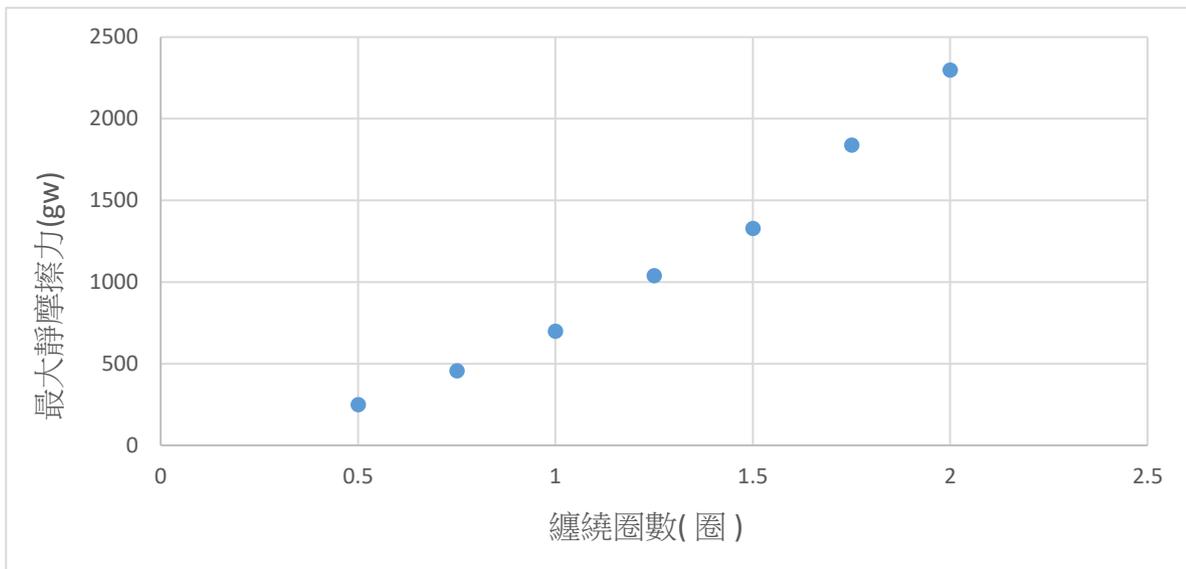
表 7：以尼龍繩繞圓柱系統 2 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 T_2-T_1 (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
2	400.0	400.0	347.6	52.4	347.6	0.131
2	400.0	600.0	321.2	78.8	521.2	0.131
2	400.0	800.0	294.4	105.6	694.4	0.132
2	400.0	1000.0	257.2	142.8	857.2	0.143
2	400.0	1100.0	245.8	154.2	945.8	0.140
2	400.0	1200.0	229.2	170.8	1029.2	0.142
2	400.0	1300.0	218.4	181.6	1118.4	0.140
2	400.0	2698.6	0.0	400.0	2298.6	0.148
						平均：0.138

表 8：纏繞圈數與最大靜摩擦力及省力效應($\frac{T_1}{T_2}$)的關係

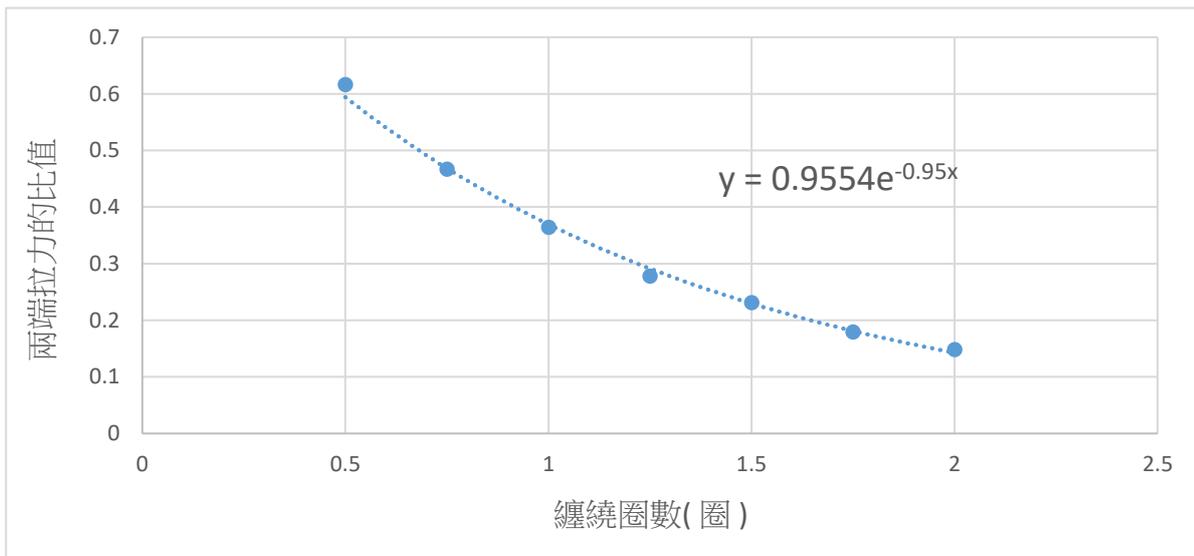
繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	最大靜摩擦力 T_2-T_1 (gw)	甲端拉力與乙端拉 力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
0.5 圈	400.0	649.6	0.0	400.0	249.6	0.616
0.75 圈	400.0	856.8	0.0	400.0	456.8	0.467
1 圈	400.0	1098.9	0.0	400.0	698.9	0.364
1.25 圈	400.0	1438.2	0.0	400.0	1038.2	0.278
1.5 圈	400.0	1729.0	0.0	400.0	1329.0	0.231
1.75 圈	400.0	2238.5	0.0	400.0	1838.5	0.179
2 圈	400.0	2698.6	0.0	400.0	2298.6	0.148

表 8-a：纏繞圈數和最大靜摩擦力的關係



研究發現：纏繞圈數愈多，最大靜摩擦力愈大。

表 8-b：纏繞圈數和兩端拉力的比值 $\frac{T_1}{T_2}$ (省力效應)的關係



研究發現：纏繞圈數愈多，省力效應愈好，且省力效應和圈數之間，有著指數函數的關係。

三、探討繩子纏繞圓柱的長度對摩擦力的影響：

研究方法：透過纏繞不同直徑的圓柱系統，來探討纏繞繩長對摩擦力的影響：

本研究使用的圓柱系統的直徑規格比較如下：

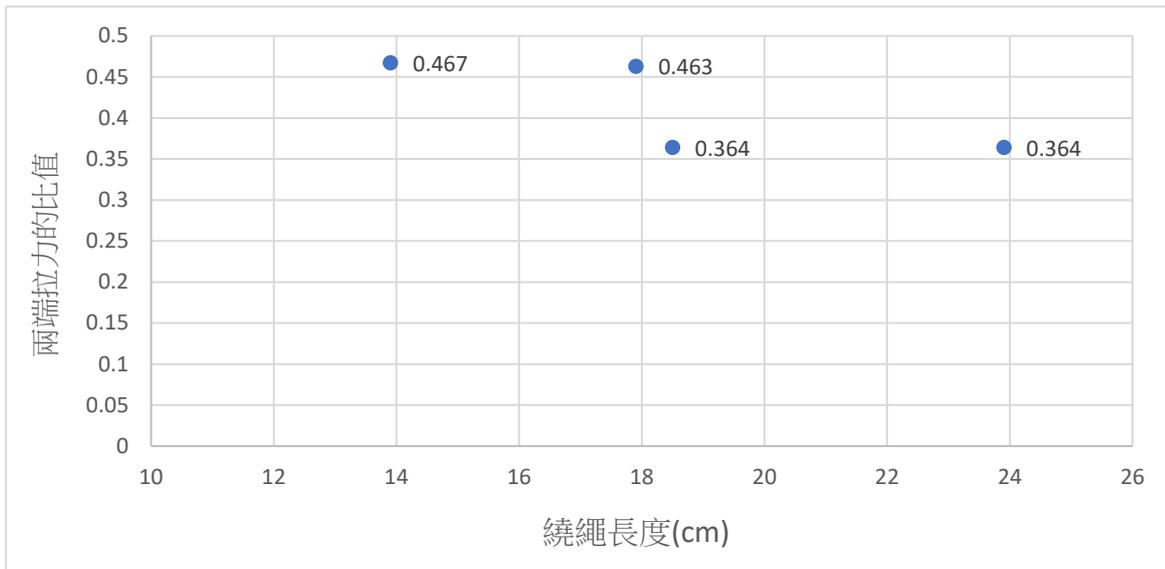
小圓柱系統 直徑 5.9 公分	纏繞圈數	纏繞繩長
	0.75 圈	13.9 公分
	1 圈	18.5 公分

大圓柱系統 直徑 7.6 公分	纏繞圈數	纏繞繩長
	0.75 圈	17.9 公分
	1 圈	23.9 公分

表 9： 繞繩長度對摩擦力的關係

繞繩 圈數	繞繩 長度 (cm)	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	最大靜摩擦力 $T_2 - W_0$ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
繞小圓 0.75 圈	13.9	400.0	856.8	0.0	456.8	0.467
繞大圓 0.75 圈	17.9	400.0	863.6	0.0	463.6	0.463
繞小圓 1 圈	18.5	400.0	1098.9	0.0	698.9	0.364
繞大圓 1 圈	23.9	400.0	1099.4	0.0	699.4	0.364

表 9-a： 繞繩長度和兩端拉力的比值 $\frac{T_1}{T_2}$ (省力效應)關係



研究發現：由表 9-a 可看出繞繩長度變長時，省力效應並沒有明顯改變，如：繞繩 18.5 公分和繞繩 23.9 公分的省力效應皆為 0.364，且其省力效應會相同的原因是因為都是繞繩 1 圈所致，可見省力效應的關鍵是在繞繩圈數，而非繞繩長度。

表 9-b： 圈數相同(0.75 圈)但繩長不同下，乙端拉力與摩擦力關係

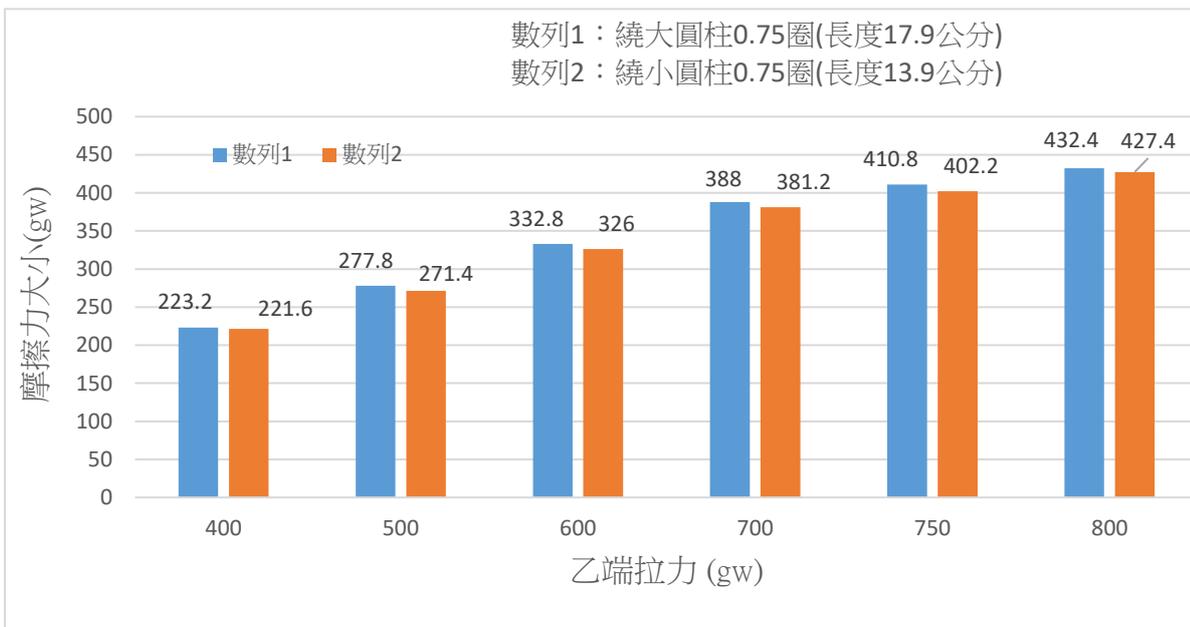
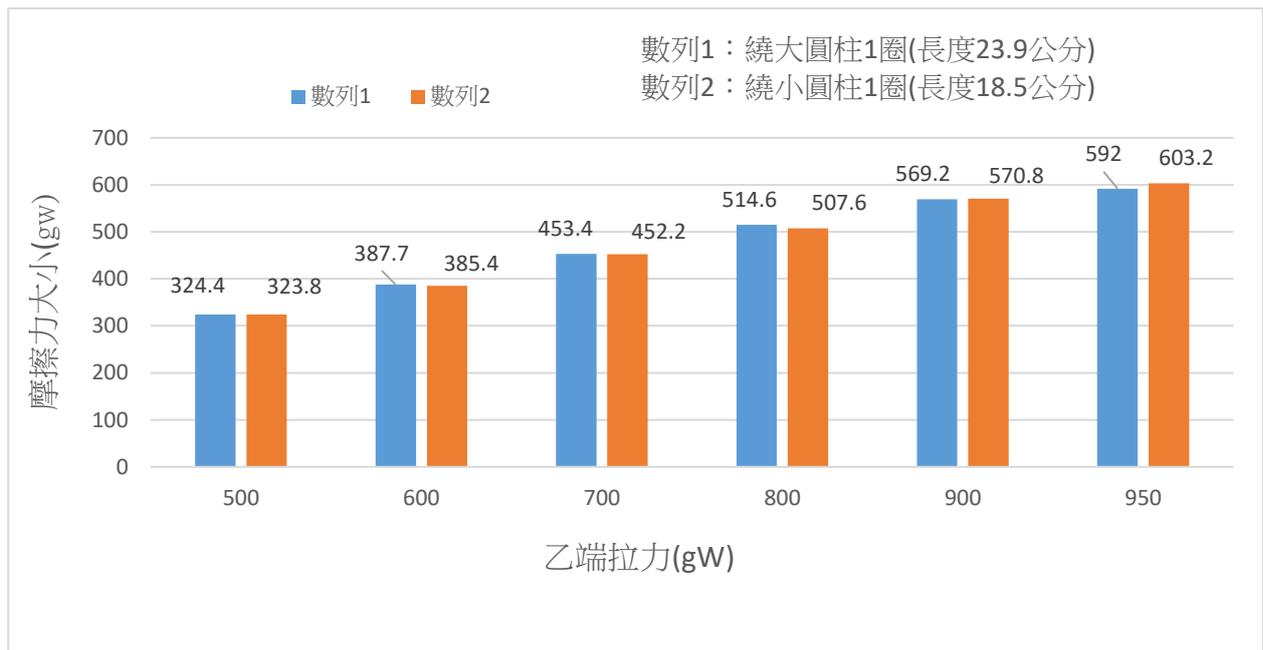


表 9-C： 圈數相同(1 圈)但繩長不同下，乙端拉力與摩擦力關係



研究發現：由表 9-b 及 9-c 可看出在纏繞圈數相同時，繞小圓柱或繞大圓柱系統，其摩擦力都相當接近，所以纏繞繩長不是影響摩擦力的因素，反而圈數的差異，才是影響摩擦力的主因。

四、探討繩子材質對摩擦力的影響：

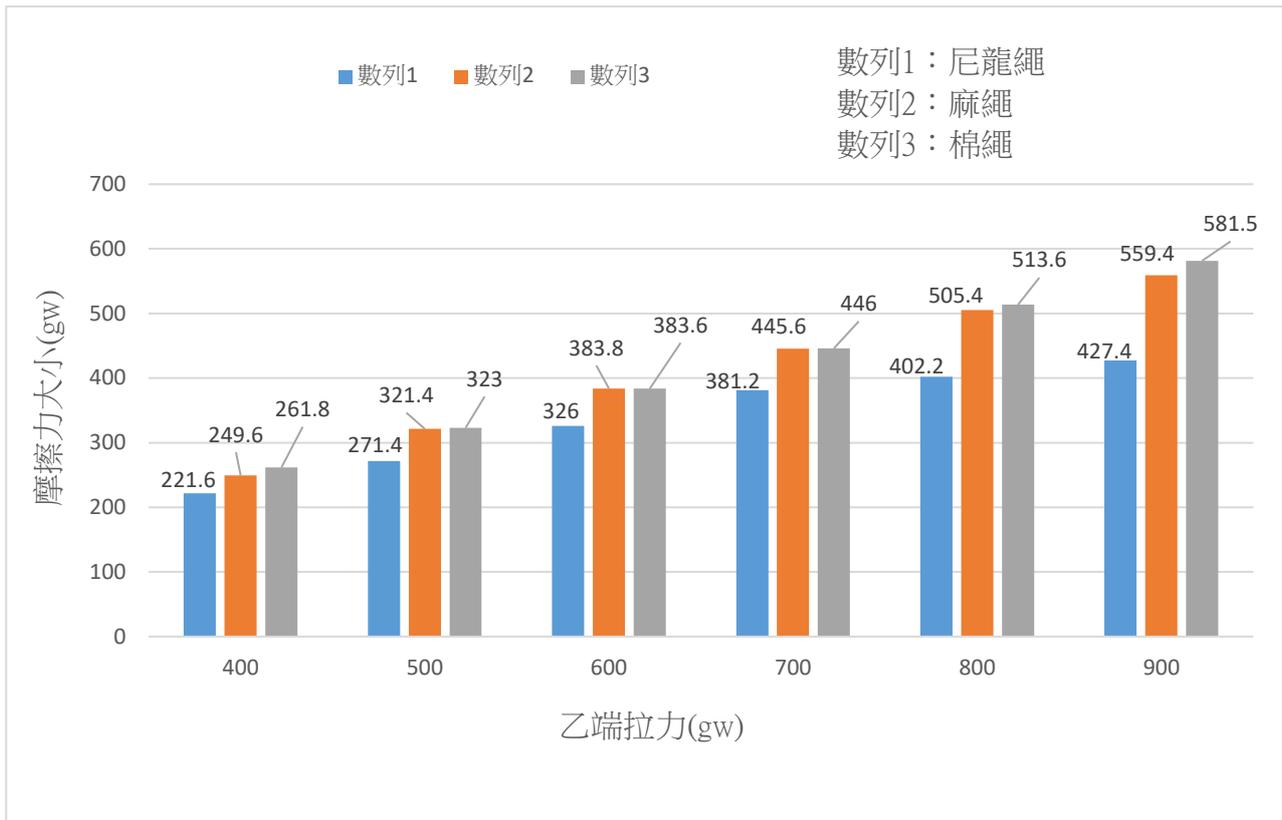
表 10：以麻繩纏繞圓柱系統 0.75 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 $T_2 - T_1$ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
0.75	400.0	400.0	249.6	150.4	249.6	0.376
0.75	400.0	500.0	221.4	178.6	321.4	0.357
0.75	400.0	600.0	183.8	216.2	383.8	0.360
0.75	400.0	700.0	145.6	254.4	445.6	0.363
0.75	400.0	800.0	105.4	294.6	505.4	0.368
0.75	400.0	1056.7	0.0	400.0	656.7	0.379
						平均：0.367

表 11：以棉繩纏繞圓柱系統 0.75 圈的摩擦力測量

繞繩 圈數	甲端 掛重 W_0 (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T_2 (gw)	甲秤變輕 後的視重 W_1 (gw)	甲端 拉力 T_1 (gw)	摩擦力 $T_2 - T_1$ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
0.75	400.0	400.0	261.8	138.2	261.8	0.346
0.75	400.0	500.0	223.0	177.0	323.0	0.354
0.75	400.0	600.0	183.6	216.4	383.6	0.361
0.75	400.0	700.0	146.0	254.0	446.0	0.363
0.75	400.0	800.0	113.6	286.4	513.6	0.358
0.75	400.0	1134.2	0.0	400.0	734.2	0.353
						平均：0.356

表 12： 摩擦力對乙端拉力與繩子材質的關係 (纏繞圈數皆為 0.75 圈)



研究發現：纏繞相同圈數下，產生的摩擦力效果，棉繩 > 麻繩 > 尼龍繩，但棉繩和麻繩相差不大。

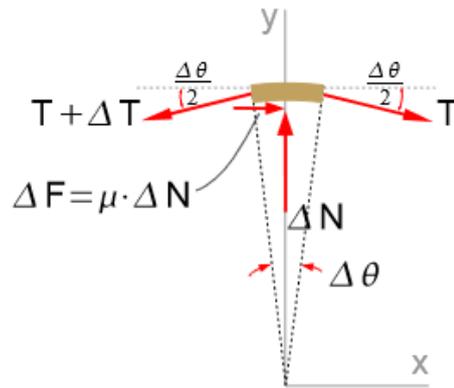
表 13： 繩子材質和省力效應($\frac{T_1}{T_2}$)的比較 (控制纏繞圈數為 0.75 圈)

繩子材質	尼龍繩	麻繩	棉繩
平均省力效應 ($\frac{T_1}{T_2}$)	0.459	0.367	0.356

陸、討論：

- 一、本研究用來吊掛重量的砝碼，和其標示的質量會有些許的誤差，故每次量測前仍須繫上繩子後，再由電子秤量測其吊掛總重，以求精確。
- 二、實驗時須注意吊掛砝碼的繩子是否呈鉛直線方向？繩子在各圓柱間纏繞連結時是否有確實呈現拉直？是否有精確的纏繞該有的四分之一圈、半圈、四分之三圈？這些細節都是能提高量測準確度的因素。
- 三、在進行繩子材質對摩擦力影響的研究時發現，尼龍繩、麻繩、棉繩纏繞圓柱造成的摩擦力會有時間效應，尼龍繩纏繞時的摩擦力量測數值會在最短時間內達到穩定，而棉繩的摩擦力數值則會不斷變動，需等待約 5 分鐘才能達到穩定數值，這可能是因為棉繩材質較柔軟、蓬鬆，繩子之間需時間來演變為更張緊的狀態，才能使拉力大小穩定。
- 四、實驗進行中，在靠近最大靜摩擦力的出現時(即甲端電子秤數值即將等於零)，須小心地增加砝碼的掛重，必須以很小質量的砝碼(如 1 公克、0.1 公克、甚至是小螺帽、小鐵圈等周遭輕質小物)來慢慢探求最大靜摩擦力出現的那一瞬間，並應多次測量以求取測量值的平均。
- 五、本研究僅探討各類繩子與金屬圓柱纏繞的摩擦力關係，當繩子纏繞的對象是木材圓柱或其他材質柱體時，摩擦力大小應也會有所差異，這方面的相關研究有待未來繼續探索。
- 六、許多利用繩結組成的設施，如公園裡的體能設施或一些安全防護措施，依賴的是繩子和繩子互相纏繞時的所造成的強大摩擦力，而本研究僅研究繩子對圓柱纏繞時的摩擦力，未來如有機會，可再深入研究繩結間的摩擦力關係。
- 七、一般網綁物品時常用的塑膠繩，原本也是本研究欲討論的對象，但實驗發現塑膠繩纏繞圓柱所產生的摩擦力大小很不穩定，即使重複同樣的控制變因來進行實驗也會得到截然不同的結果。推測和塑膠繩的形狀構造有關，因其形狀呈不規則的線狀，使其纏繞圓柱時有接觸空隙，且每次接觸空隙的分布也不平均，因此影響了每次摩擦力的大小。

八、從文獻資料中(出處：http://statics.marcks.cc/friction/pdf/belt_friction.pdf)，找到關於繩子纏繞時的兩端拉力與摩擦力的理論推導，當某小段繩長受兩端拉力的拉扯且纏繞的角度為 $\Delta\theta$ ，此時若考慮繩子呈靜力平衡，則其受力關係為 $\sum F_x=0$ 及 $\sum F_y=0$ (如圖五)。兩端拉力 T 愈大，正向力 ΔN 就需愈大以平衡拉力 T 的 y 軸分力。而正向力 ΔN 愈大，最大靜摩擦力 ΔF 就愈大，因此拉力 T 和最大靜摩擦力之間有正相關的線性關係。

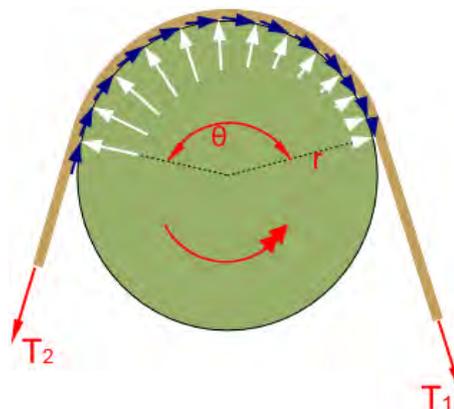


圖五：某小段繩長纏繞時的受力圖

透過數學積分的推導 (可參考圖六)，可推求在繩子纏繞達一定角度 θ 時兩端拉力的關係，

即 $T_1 = T_2 \cdot e^{-\mu\theta}$ 的關係式

因此 T_1 總是小於 T_2 ， $\frac{T_1}{T_2} = e^{-\mu\theta}$ ，在本研究中，我們把 $\frac{T_1}{T_2}$ 稱作摩擦力所造成的省力效應。



圖六：當繩子纏繞角度達 θ 時的力圖

柒、結論：

一、利用掛重的改變，探討繩子拉力對摩擦力的影響：

- (一) 在繩子材質(尼龍繩)及纏繞圈數(1 圈)的控制固定下，發現乙端掛重愈大，則繩子產生的摩擦力就愈大，判斷原因應為當掛重愈大時，繩子各點的拉力也變大，使繩子呈現更張緊、更拉直的狀態，因此與圓柱間地接觸愈緊密而增加了壓迫在圓柱上的接觸力，因而使摩擦效果變得更大。
- (二) 繩子纏繞圓柱時產生的摩擦力使得圓柱兩端拉力可以不相等而平衡，也就是讓另一端達到省力效果，當計算此省力效應 (即 $\frac{T_1}{T_2}$ 的比值) 時發現在繩子材質及纏繞圈數固定下， $\frac{T_1}{T_2}$ 的比值會呈現定值(約為 0.36)，意即乙端掛重增加，可使得繩子產生的摩擦力變大，但卻不會提升省力效應。省力效應的關鍵應落在繩子材質及纏繞圈數的研究。

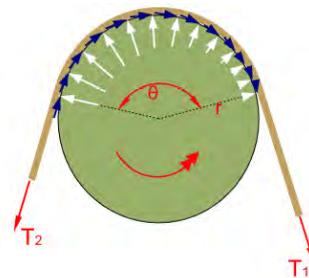
二、探討繩子纏繞圓柱的圈數對摩擦力的影響：

- (一) 在繩子材質(尼龍繩)控制固定下，發現纏繞圓柱的圈數愈多，繩子產生的摩擦力就愈大 (可參照表 8 的研究結果)，而且省力效應(即 $\frac{T_1}{T_2}$ 的比值)亦會愈來愈小，也就是說，繩子纏繞圈數的多寡是實質能影響省力程度的因素。

(二) 由討論八文獻資料的原理探討，發現繩子跨繞圓柱兩端的拉力會呈現下列的關係式：

$$T_1 = T_2 \cdot e^{-\mu\theta}$$

所以也會得到省力效應 $\frac{T_1}{T_2} = e^{-\mu\theta}$ 的結論



雖然目前無法完全理解推導過程的數學意義，但從結論來看，繩子的摩擦力，確實使得兩端繩子拉力間存在著公式關係： $\frac{T_1}{T_2} = e^{-\mu\theta}$ ，若以表 8-b 的實驗數據去跑電腦應用程式的趨勢線公式，得到 $\frac{T_1}{T_2} = 0.9554 \cdot e^{-0.95X}$ ，(式中 X 是纏繞圈數)，發現實驗的結果和文獻資料裏的推導公式極為吻合。

三、探討繩子纏繞圓柱的長度對摩擦力的影響：

由表 9 發現，在纏繞相同圈數下，即使纏繞長度不同，摩擦力卻幾近相等，因此摩擦力的大小，不受繞繩長度的影響。摩擦力大小實質決定在纏繞圈數的多寡。因此我們可以這樣建議：如果有船舶須透過繩索纏繞圓柱以停泊岸邊，那麼他們應該選擇比較小的圓柱來纏繞，同樣的繩長若選擇纏繞直徑小的圓柱，則能纏繞的圈數可以更多，圈數才是重點，也就能產生比較佳的省力效應。

四、探討繩子的材質，對摩擦力的影響：

(一) 由表 12 發現，發現在相同纏繞圈數下，繩子產生的摩擦力大小是：

棉繩 > 麻繩 > 尼龍繩，但棉繩和麻繩產生的摩擦力效果非常接近。

因此繩子材質也是影響摩擦力大小的重要因素。

(二) 由研究發現，繩子的材質，會影響省力效應(即 $\frac{T_1}{T_2}$ 的比值)，是除了纏繞圈數外，另一個會影響省力效應的因素。

五、由討論八文獻資料的原理和本研究結果來看：省力效應 $\frac{T_1}{T_2} = e^{-\mu\theta}$ ，省力效應受到摩擦係數 μ (和繩子材質有關聯) 和纏繞角度 θ (和纏繞圈數有關聯) 的影響。當摩擦材質和纏繞圈數固定不變時，省力效應 $\frac{T_1}{T_2}$ 會成為一個定值，和當時的拉力大小無關。因此無論是噸位大或噸位小的船隻 (兩者間的繩子拉力大小相差很大)，都能以相同的繩索材質和纏繞圈數的決定，達到預期且相同的省力效應，以確實地拉住停泊的船隻。

六、**應用與展望**：繩子纏繞所造成的摩擦力，除了實質應用在岸邊船隻的停泊，也可以利用其可控制及可預測的省力效應，來作為生活中或工程上的應用。例如：洗窗工人欲將自己安全地固定在高樓的某個位置以進行清潔工作時，除了可以透過繩子纏繞的摩擦力來減輕吊掛的拉力負擔，也可以由省力效應的關係式來估算要繞多少圈？需要多大拉力？才能安全無虞。以本實驗「尼龍繩纏繞鋼質圓柱」所得到的省力效應關係式為

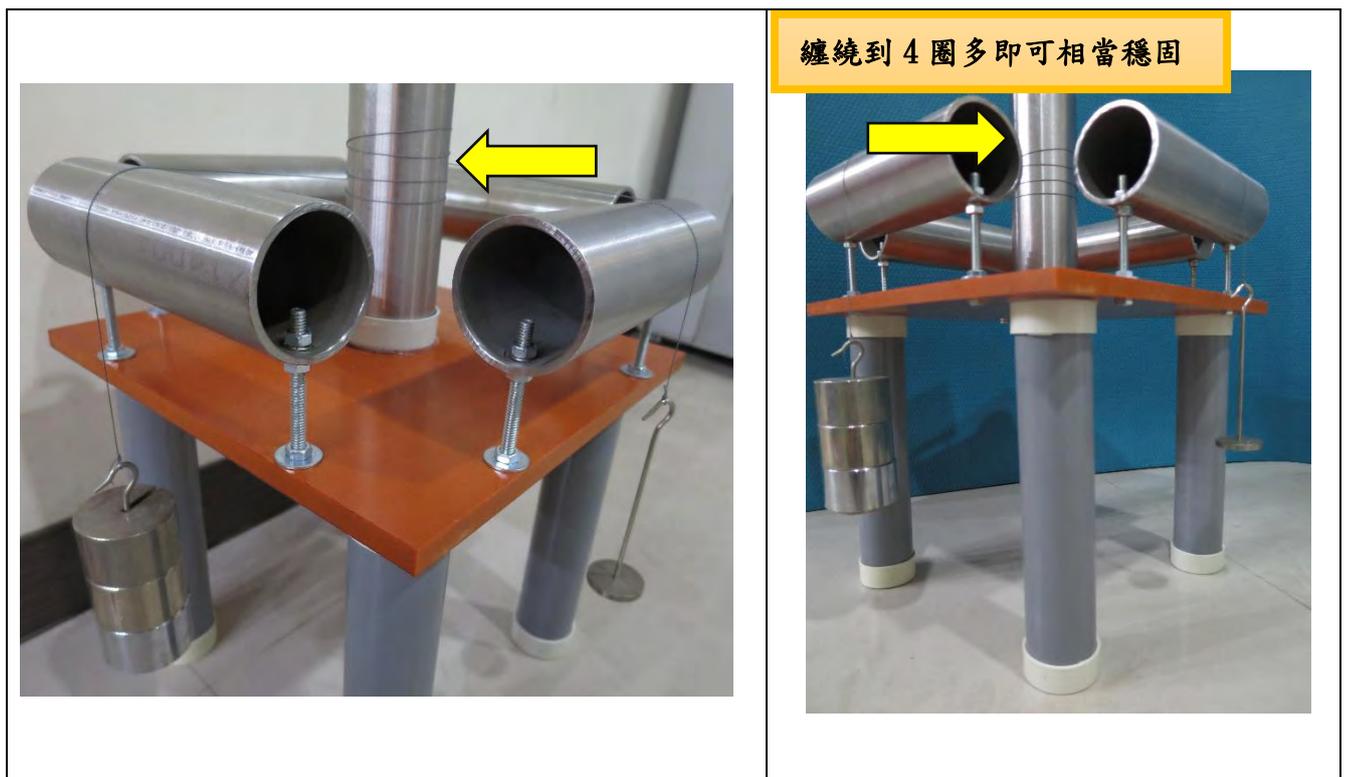
$$\frac{T_1}{T_2} = 0.9554e^{-0.95X}$$

，如果我要吊掛一個 1550 公克重的物體，透過繩子纏繞所造成的省

力效應，在繩子另一端只想以 50 公克重來負擔，即 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{50}{1550} = \frac{1}{31} = 0.032$ ，則 透

過 $\frac{T_1}{T_2} = 0.9554 \cdot e^{-0.95X}$ 的研究成果公式，以計算機計算，求出預估的纏繞圈數 X 約為 3.6

圈。 當我們實測纏繞圈數略大於 3.6 圈後，真的能讓一端以 50 公克重的掛重來平衡另一端 1550 公克重的掛重（可參考圖七）。



圖七：透過纏繞圓柱系統超過 3.6 圈（如圖所示，約纏繞 4 圈多），即可非常穩固地達到一端以 50 公克重的掛重來平衡另一端 1550 公克重。

推想在古埃及建造金字塔時，在缺乏現代重機械設備的協助下，能夠吊掛幾公噸重的巨石使其靜止平衡在高空以等待或進行堆砌，可能也是透過繩子纏繞的強大省力效應來完成

的吧。

捌、參考資料及其他：

- 一、Michael M. Starkey. (June 2010). Investigation of Capstan Friction and its Potential Use as a Mechanical Amplifier. https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/document/get/ohiou1275950107/inline
- 二、BELT AND WRAP FRICTION. http://statics.marcks.cc/friction/pdf/belt_friction.pdf
- 三、BomBom Story，劉永承(2017年9月25日出版)。漫畫大英百科 力與能量。三采文化。
- 四、http://www.irre.org/att_frict.pdf
- 五、翰林國中自然與生活科技 二下 (6-3 摩擦力)

【評語】 080104

實驗裝置設計良好，且針對研究主題做出了創意的裝置。整體的研究分析思路清楚，且在過程中找出了纏繞圈數、線材材質、接觸面積和摩擦力的關係。此一題目富科學性與實用性。相當值得肯定！

壹、研究動機：

在公園或遊樂園裏，常可以看見由繩結構成的體能設施，這些繩結彼此交錯緊縛，所造成的摩擦力竟能乘載好幾個小朋友的重量。另外在碼頭看見漁船靠岸時，透過繩子纏繞在圓柱上幾圈就能拉住漂泊的漁船，我很好奇，繩子的摩擦力到底有多大？纏繞的圈數和繩子的材質對摩擦力的大小有什麼影響呢？在自然與生活科技的課本中，也有一個單元介紹到生活中的力，而摩擦力就是隨時存在周遭且和生活最密切相關的。於是我把這些想法和老師討論，並進行了下列實驗的探究。

貳、研究目的：

- 一、利用掛重的改變，探討繩子拉力對摩擦力的影響
- 二、探討繩子纏繞圓柱的圈數對摩擦力的影響
- 三、探討繩子纏繞圓柱的長度對摩擦力的影響
- 四、探討繩子材質對摩擦力的影響

參、研究設備及器材：

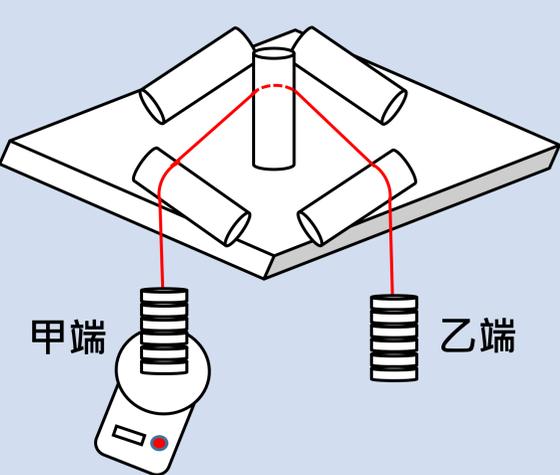
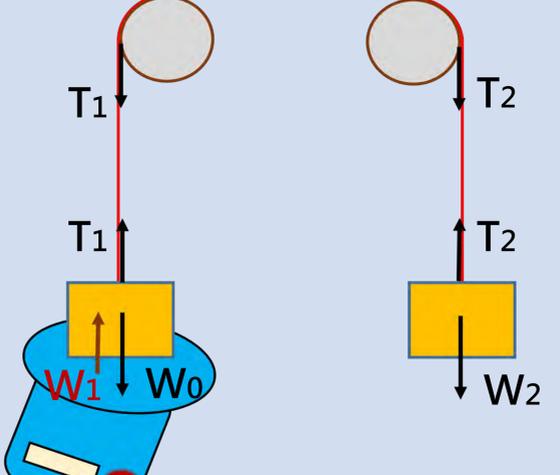


尼龍繩	棉繩	麻繩	塑膠繩	電子磅秤
				

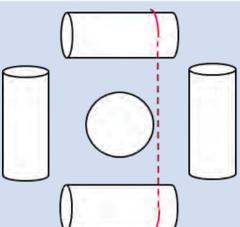
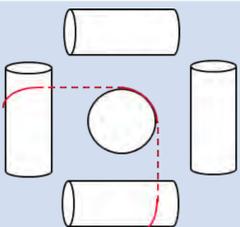
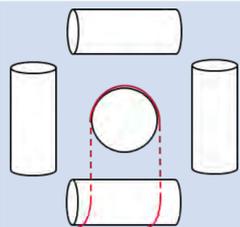
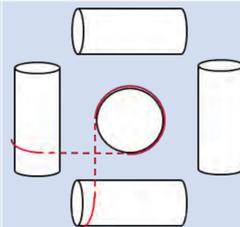
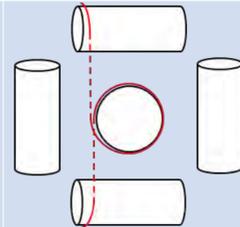
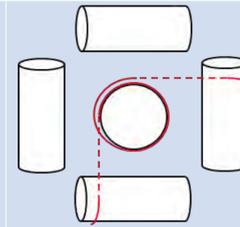
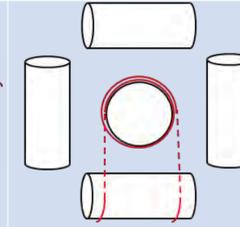
金屬圓柱系統：(1)直徑5.9公分 (2)直徑7.6公分	槽碼吊盤及砝碼組	實驗裝置全貌
		

肆、研究過程或方法：

- 一、先將甲端掛重，並放置於電子秤上，測得重量讀數為 W_0 。
- 二、再將甲端掛重與乙端掛重以繩子連結並纏繞於圓柱系統上。
- 三、記錄圓柱系統上繩子纏繞的圈數、乙端掛重 W_2 及此時的電子秤讀數 W_1 。
- 四、甲端電子秤變輕的讀數(即 $W_0 - W_1$)，就是甲端繩子的拉力 T_1 。
- 五、乙端繩子的拉力大小則等於乙端的掛重(即 $T_2 = W_2$)。
- 六、由於繩子纏繞圓柱所造成的摩擦力，使得測量到的甲端和乙端之繩子拉力不相同，兩端拉力差 $T_2 - T_1$ 即為摩擦力的大小。
- 七、當電子秤讀數等於零時，即達最大靜摩擦力，此時應紀錄乙端掛重 W_2 (為求精確可以將乙端掛重取下後，置於電子秤以量取精確讀數)，並反覆進行幾次測量，以求得最大靜摩擦力的平均值。
- 八、研究一：使用直徑5.9公分的小圓柱系統，尼龍繩纏繞圓柱1圈，甲端掛重400 (gw)，改變乙端掛重 W_2 ，並重複過程一～七。
研究二：以尼龍繩纏繞直徑5.9公分的小圓柱系統，甲端掛重400 (gw)，改變繩子纏繞圓柱的圈數(如圖三)，並重複過程一～七。
研究三：將直徑5.9公分的小圓柱系統更換為直徑7.6公分的大圓柱系統，比較圈數和纏繞長度對摩擦力的影響。
研究四：以尼龍繩纏繞直徑5.9公分的小圓柱系統0.75圈，甲端掛重400 (gw)，改變繩子的材質種類，並重複過程一～七。

圖一：裝置示意圖	圖二：力圖說明	圖示代碼說明
		$W_0 - W_1$ ：即為繩子拉力 T_1
		W_2 ：即為繩子拉力 T_2
		$T_2 - T_1$ ：即為繩子纏繞圓柱的摩擦力

圖三：各種不同纏繞圈數的裝置示意圖

纏繞0.5圈	纏繞0.75圈	纏繞1圈	纏繞1.25圈	纏繞1.5圈	纏繞1.75圈	纏繞2圈
						

伍、研究結果：

一、利用掛重的改變，探討繩子的拉力對摩擦力的影響：

表1：以尼龍繩繞直徑5.9公分的小圓柱系統1圈，乙端拉力對摩擦力的關係

繞繩圈數	甲端掛重 W ₀ (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T ₂ (gw)	甲秤變輕 後的視重 W ₁ (gw)	甲端 拉力 T ₁ (gw)	摩擦力 T ₂ -T ₁ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
1	400.0	400.0	257.4	142.6	257.4	0.357
1	400.0	500.0	223.8	176.2	323.8	0.352
1	400.0	600.0	185.4	214.6	385.4	0.358
1	400.0	700.0	152.2	247.8	452.2	0.354

表1-a：乙端拉力和摩擦力的關係

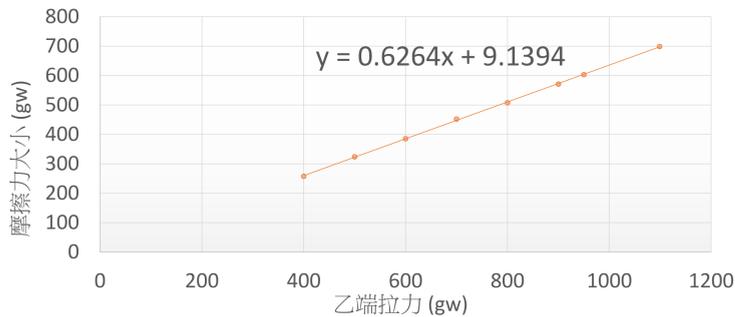
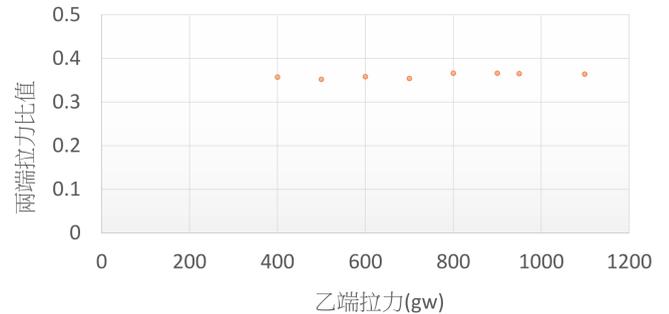


表1-b：乙端拉力和兩端拉力比值($\frac{T_1}{T_2}$)的關係



(一) 由表1-a發現當乙端拉力越大時，繩子的摩擦力也越大，兩者間呈現線性的正相關。

(二) 由表1發現乙端拉力不等於甲端拉力，且由於摩擦力的作用，使得甲端能以比較省力的方式來平衡乙端

拉力，由研究結果發現甲端拉力和乙端拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)會趨近於一個常數約為0.36，代表甲端拉力只要

為乙端拉力的0.36倍，即可使兩端平衡，故此值為摩擦力造成的省力效應。因此本研究把 $\frac{T_1}{T_2}$ 的值稱作「省力效應」。

二、探討繩子纏繞圓柱的圈數對摩擦力的影響：

表2：纏繞圈數與最大靜摩擦力及省力效應($\frac{T_1}{T_2}$)的關係

繞繩圈數	甲端掛重 W ₀ (gw)	乙端掛重 (乙端拉力) T ₂ (gw)	甲秤變輕 後的視重 W ₁ (gw)	甲端 拉力 T ₁ (gw)	最大靜摩擦力 T ₂ -T ₁ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
0.5	400.0	649.6	0.0	400.0	249.6	0.616
0.75	400.0	856.8	0.0	400.0	456.8	0.467
1	400.0	1098.9	0.0	400.0	698.9	0.364
1.25	400.0	1438.2	0.0	400.0	1038.2	0.278

表2-a：纏繞圈數和最大靜摩擦力的關係

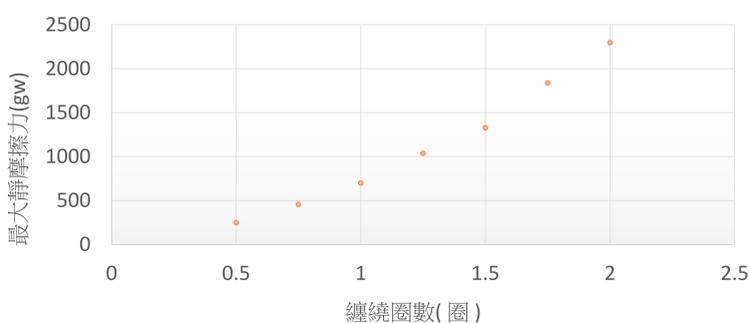
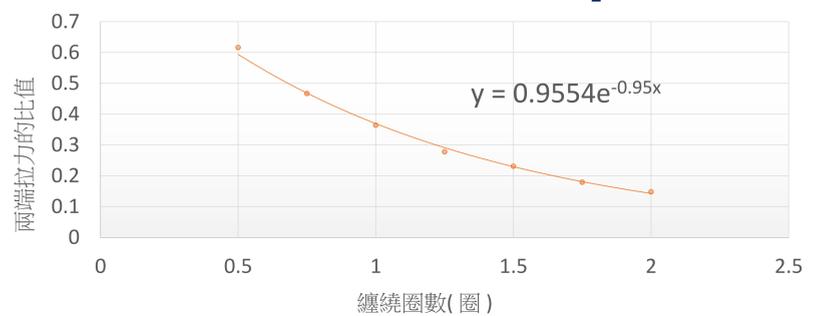


表2-b：纏繞圈數和兩端拉力的比值 $\frac{T_1}{T_2}$ (省力效應)的關係



三、探討繩子纏繞圓柱的長度對摩擦力的影響：

表3：繞繩長度對摩擦力的關係

繞繩圈數	繞繩長度(cm)	甲端掛重 W ₀ (gw)	乙端拉力 T ₂ (gw)	甲秤變輕後的 視重W ₁ (gw)	最大靜摩擦力 T ₂ -T ₁ (gw)	甲端拉力與乙端 拉力的比值($\frac{T_1}{T_2}$)
繞小圓0.75圈	13.9	400.0	856.8	0.0	456.8	0.467
繞大圓0.75圈	17.9	400.0	863.6	0.0	463.6	0.463
繞小圓1圈	18.5	400.0	1098.9	0.0	698.9	0.364
繞大圓1圈	23.9	400.0	1099.4	0.0	699.4	0.364

表3-a：繞繩長度和兩端拉力的比值 $\frac{T_1}{T_2}$ (省力效應)關係



四、探討繩子的材質對摩擦力的影響：

表4：摩擦力對乙端拉力與繩子材質的關係(纏繞圈數皆為0.75圈)

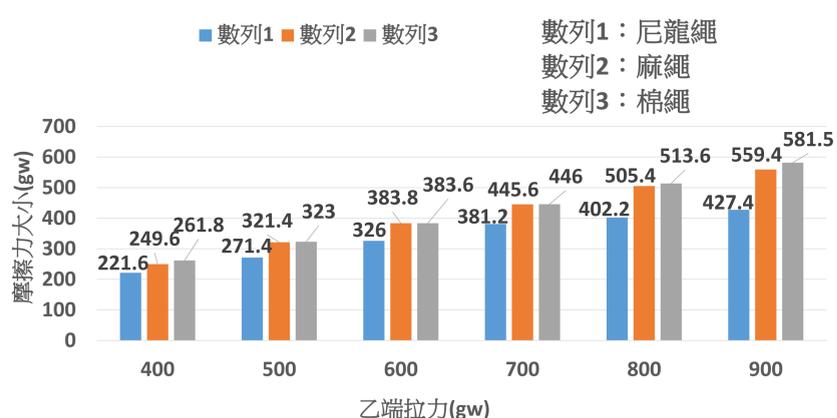


表5：繩子材質和省力效應($\frac{T_1}{T_2}$)的比較(控制纏繞圈數為0.75圈)

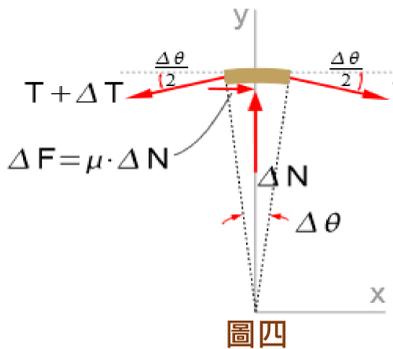
繩子材質	尼龍繩	麻繩	棉繩
平均省力效應 ($\frac{T_1}{T_2}$)	0.459	0.367	0.356

由表4可發現：纏繞相同圈數下，產生的摩擦力效果，

棉繩 > 麻繩 > 尼龍繩，但棉繩和麻繩相差不大。

陸、討論：

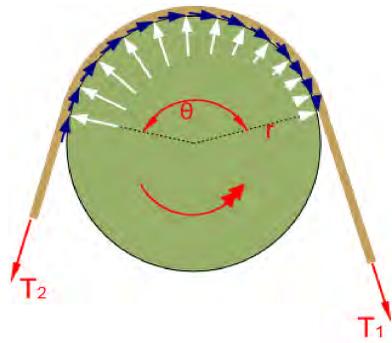
- 一、棉繩的摩擦力數值在測量時，會不斷變動，需等待約數分鐘才能達到穩定數值，這可能是因為棉繩材質較柔軟、蓬鬆，繩子之間需時間來演變為更張緊的狀態，才能使拉力大小穩定。
- 二、實驗發現，一般網綁物品常用的塑膠繩在纏繞圓柱時，所產生的摩擦力很不穩定，即使重複同樣的控制變因來進行實驗也會得到截然不同的結果。推測和塑膠繩的形狀構造有關，因其形狀呈不規則的線狀，使其纏繞圓柱時有接觸空隙，且每次接觸空隙的分布也不平均，因此影響了每次摩擦力的大小。
- 三、實驗進行中，在靠近最大靜摩擦力的出現時(即甲端電子秤數值即將等於零)，須小心地增加砝碼的掛重，必須以很小質量的砝碼來慢慢探求最大靜摩擦力出現的那一瞬間，並應多次測量以求取測量值的平均。
- 四、從文獻資料中(出處：http://statics.marcks.cc/friction/pdf/belt_friction.pdf)，找到關於繩子纏繞時的兩端拉力與摩擦力的理論推導，當某小段繩長受兩端拉力的拉扯且纏繞的角度為 $\Delta\theta$ ，此時若考慮繩子呈靜力平衡，則其受力關係為 $\sum F_x = 0$ 及 $\sum F_y = 0$ (如圖四)。兩端拉力 T 愈大，正向力 ΔN 就需愈大以平衡拉力 T 的 y 軸分力。而正向力 ΔN 愈大，最大靜摩擦力 ΔF 就愈大，因此拉力 T 和最大靜摩擦力之間存在正相關的線性關係。這和表1-a的研究結果吻合。



圖四

透過數學積分的推導(可參考圖五)，可推求在繩子纏繞達一定角度 θ 時兩端拉力的關係，即 $T_1 = T_2 \cdot e^{-\mu\theta}$ 的關係式

因此 T_1 總是小於 T_2 ， $\frac{T_1}{T_2} = e^{-\mu\theta}$ ，在本研究中，我們把 $\frac{T_1}{T_2}$ 稱作摩擦力所造成的**省力效應**。



圖五

雖然目前無法理解推導過程的數學意義，但從結論來看，繩子的摩擦力，確實使得兩端繩子拉力間存在著

公式關係： $\frac{T_1}{T_2} = e^{-\mu\theta}$ ，若以表2-b的實驗數據去跑電腦應用程式的趨勢線公式，得到

$$\frac{T_1}{T_2} = 0.9554 \cdot e^{-0.95X} \text{ (式中X是纏繞圈數)}，發現實驗的結果和文獻資料裏的推導公式極為吻合。$$

柒、結論：

- 一、由研究發現，繩子纏繞圓柱時的摩擦力受到繩子拉力、纏繞圈數及材質的影響，繩子拉力愈大或纏繞圈數愈多，摩擦力會愈大。但省力效應卻和繩子拉力大小無關，只受材質和纏繞圈數的影響。因此停泊的船隻，無論是大船或小船(兩者間的所需繩子拉力大小相差很大)，只要是以相同的繩索材質和纏繞圈數，就能達到相同的省力效應，不論其噸位大小。
- 二、由表3發現，摩擦力的大小，不受繞繩長度的影響。摩擦力大小實質決定在纏繞圈數的多寡。因此我們可以這樣建議：如果有船舶須透過繩索纏繞圓柱以停泊岸邊，那麼他們應該選擇比較小的圓柱來纏繞，同樣的繩長若選擇纏繞直徑小的圓柱，則能纏繞的圈數可以更多，圈數才是重點，也就能產生比較佳的省力效應。
- 三、繩子纏繞所造成的摩擦力，除了應用在船隻的停泊，也可以利用其可預測的省力效應，來作為生活中或工程上的應用。例如：洗窗工人欲將自己安全地固定在高樓的某個位置以進行清潔工作時，除了可以透過繩子纏繞的摩擦力來減輕吊掛的拉力負擔，也可以由省力效應的關係式來估算要繞多少圈？需要多大拉力？才能安全無虞。以本實驗「尼龍繩纏繞鋼質圓柱」所得到的省力效應關係式為 $\frac{T_1}{T_2} = 0.9554e^{-0.95X}$ ，如果我要吊掛一個1550公克重的物體，透過繩子纏繞所造成的省力效應，在繩子另一端只想以50公克重來負擔，即 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{50}{1550} = 0.032$ ，則透過 $\frac{T_1}{T_2} = 0.9554 \cdot e^{-0.95X}$ 的研究成果公式，以計算機計算，求出預估的纏繞圈數 X 約為3.6圈。當我們實測纏繞圈數略大於3.6圈後，真的能讓一端以50克重的掛重來平衡另一端1550克重的掛重(如圖所示)。



纏繞到4圈多即可相當穩固

推想在古埃及建造金字塔時，在缺乏現代重機械設備的協助下，能夠吊掛幾公噸重的巨石使其靜止平衡在高空以等待或進行堆砌，可能也是透過繩子纏繞的強大省力效應來完成的吧。

捌、參考資料及其他：

- 一、Michael M. Starkey. (June 2010). Investigation of Capstan Friction and its Potential Use as a Mechanical Amplifier. https://etd.ohiolink.edu/rws_etd/document/get/ohiou1275950107/inline
- 二、BELT AND WRAP FRICTION. http://statics.marcks.cc/friction/pdf/belt_friction.pdf
- 三、BomBom Story · 劉永承(2017年9月25日出版)。漫畫大英百科 力與能量。三采文化。