

# 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高級中等學校組 工程學科(二)科

探究精神獎

052406

同聲相應『辨材』無礙

學校名稱：雲林縣私立揚子高級中學

作者：  高一 施竣皓  高三 施泓丞  高一 黃冠毓	指導老師：  陳尚民  黃琪騰
---	-----------------------------

關鍵詞：FFT、Arduino、材質分析

## 摘要

本研究係使用快速傅立葉轉換對金屬圓板撞擊產生的音頻進行分析，並搭配自製的運算叢集，來實現使材料辨識系統。本研究為分析金屬圓版與其相關之物理量對音頻的影響，吾人透過 Journal of Sounds and Vibrations 中的一篇 “The Influence Of Poisson’s Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates” 之公式，配合大量實驗做為數據轉換的基礎，找出金屬的 $\psi$ 值，如鋁為0.15762、鐵為0.28921、銅為0.36213，最後將之整合，並提出以機器學習的方式優化材料辨識系統，大大提高本研究之未來發展性。

## 壹.動機

在高中物理課時，曾經聽到老師說：「不同硬幣可以測出不同的音頻。」物理實驗課中，也時常聽到老師向我們詢問：「這個材料是中碳鋼還是高碳鋼？」而我們的老師家裡是在開設機械工廠，基於我們的求知與好奇心，我們也常常到工廠學習。在工廠裡我們常能看到專門為測定某些物理量而製作的試驗棒、試驗片，於是我們嘗試透過快速傅立葉轉換（Fast Fourier Transform, 縮寫為FFT），分析出不同金屬在撞擊下產生的音頻，並更進一步探討音頻與其材質等物理量之關係。

## 貳.目的

一. 設計並測試實驗儀器：

1. 固定相的選擇之頻譜分析；
2. 樣品撞擊力道之頻譜分析；
3. 樣品撞擊方式與頻譜分析；
4. 分析系統的架設。

二. 使用不同材質之樣品在儀器中檢測並分析頻譜：

1. 比較不同金屬材質，但在同條件下撞擊出的音頻，透過FFT分析其頻譜大小；
2. 比較不同金屬材質，在不同質量、面積、厚度條件下撞擊出的音頻，透過FFT分析頻譜大小；
3. 比較混合金屬材質，但在同條件下撞擊出的音頻，透過FFT分析頻譜值大小；
4. 試著比較混合金屬材質，在不同質量、面積、厚度條件下撞擊出的音頻，透過FFT分析頻譜值大小。

三. 建立一套物理研究模型以及物理理論方程式來分析材質中的物質做組成比例並製成程式，透過自製分析系統，在單晶片為電腦叢集上運算，並完成撞擊頻譜分析資料庫的建設，未來將使用機器學習得技術使系統優化。

## 參.研究設備及器材

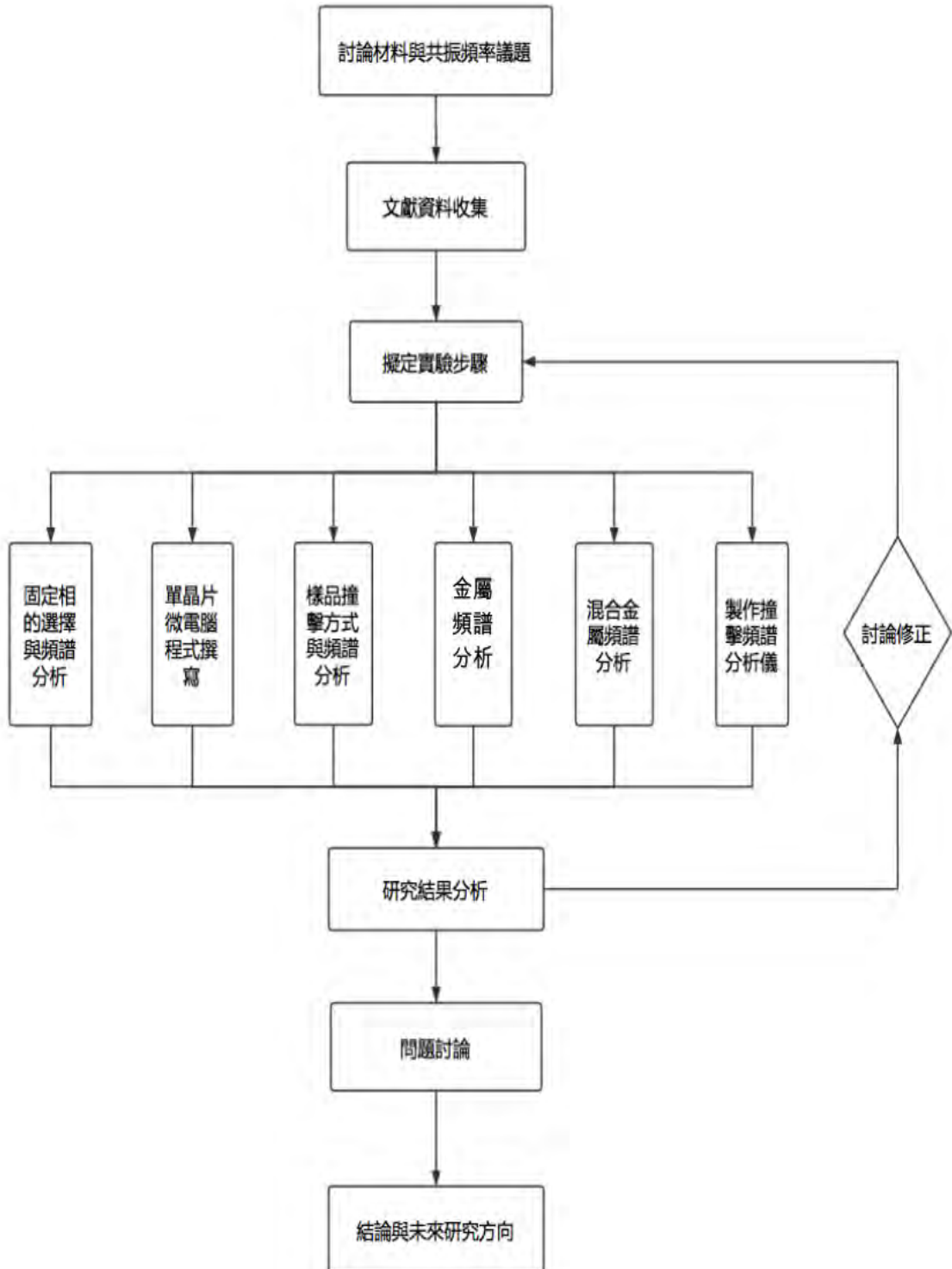
本次研究的實驗設備與器材，如表一所示之：

表一、實驗測量器材與試片一覽表

編號	名稱	數量 (單位)	備註
1	電腦	2 (台)	程式撰寫、資料查詢、文書整理
2	筆記本、筆	1 (本)、1 (支)	繪製設計圖、紀錄數據
3	手機	2 (支)	樣品頻譜分析
4	Arduino UNO	6 (片)	運算中心
5	鋼質質量塊	1 (塊)	固定相
6	木板	1 (塊)	固定相
7	雷射切割機	1 (台)	儀器製作
8	3D列印機	1 (台)	儀器製作
9	USB B to A	7 (條)	資料傳輸
10	伺服馬達	2 (個)	自動化儀器動力來源
11	2.8 inch TFT 觸控螢幕	1 (塊)	輸入數值
12	杜邦線	若干(條)	
13	12 種硬幣	各 5 (個)	含舊版新台幣、新版新台幣、代幣、古錢、外幣
14	4種金屬試片	各 9 (個)	鋁板、SUS、SPHC、鈹板
15	固定架	2 (支)	儀器架設
16	20*4 LCD 螢幕	1 (塊)	輸出數值

# 肆.研究流程及方法

## 一. 研究流程

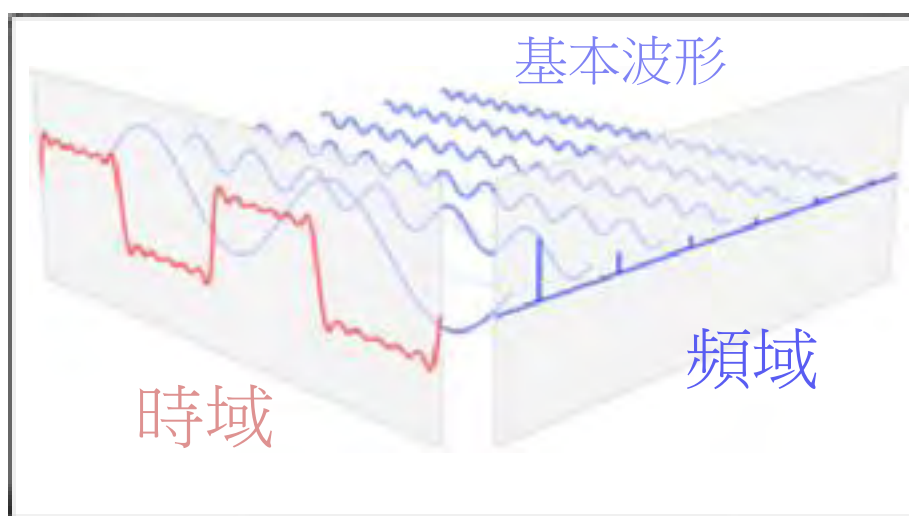


圖一、研究流程圖

## 二. 文獻搜集

### (一) 傅立葉變換 (Fourier Transform)

傅立葉變換是數學的一個分支領域。它是研究如何將一個函數或者信號表達為基本波形的疊加，而基本波形稱為調和函數，因此傅立葉變換又稱為調和分析。在過去兩個世紀中，傅立葉變換已成為學界中一個被廣泛研究的主題，並在諸多領域也得到廣泛應用，如信號處理、量子力學、神經科學等。



圖二、傅立葉變換將函數的時域（紅色）與頻域（藍色）相關聯。頻譜中的不同成分頻率在頻域中以峰值形式表示。

（取自：維基百科。<https://zh.wikipedia.org/wiki/傅里葉變換>）

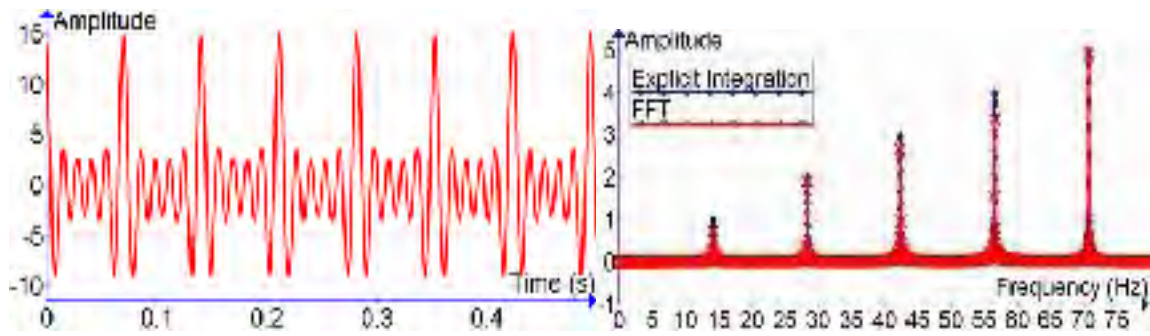
### (二) 離散傅立葉變換 (Discrete Fourier Transform, 縮寫為DFT)

離散傅立葉變換（以下簡稱為DFT），是傅立葉變換在時域和頻域上都呈離散的形式，將信號的時域採樣變換為其DFT的頻域採樣。在形式上，時域和頻域上的序列是有限長的，而實際上這兩組序列都應當被認為是離散週期信號的主值序列。即使對有限長的離散信號作DFT，也應當將其看作其週期延拓的變換。在實際應用中通常採用快速傅立葉變換計算DFT。

### (三) 快速傅里葉變換 (Fast Fourier Transform, 縮寫為FFT)

快速傅立葉變換（以下簡稱為FFT）廣泛的應用於工程、科學和數學領域。FFT的基本思想在1965年才得到普及，但早在1805年就已推匯出來。1994年吉爾伯特·斯特朗（William Gilbert Strang）把FFT描述為「我們一生中最重要的數值演算法」，它還被IEEE科學與工程計算期刊列入20世紀十大演算法。

FFT是快速計算序列的DFT 或其逆轉換的方法。傅立葉分析將訊號從原始域（通常是時間或空間）轉換到頻域的表示或者逆過來轉換。



圖三、FFT訊號分析：一個五項餘弦級數的時域訊號，用FFT（~40,000次運算）五項餘弦級數及用顯式積分（~1億次運算）得出的DFT。時間窗又是10秒。

（取自：維基百科。<https://zh.wikipedia.org/wiki/快速傅里葉變換>）

這裡的一個原則是任何信號，即使是非週期信號，都可以通過不同頻率和振幅的正弦信號相加而得到相當精確的重構；也就是說我們加在一起的正弦信號越多，我們重建的信號就越像原來的信號。

#### （四）物體性質與振動頻率的關係

在Journal of Sounds and Vibrations 中有一篇“The Influence Of Poisson’s Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates”，其中有關於圓形板殼在自由態的振動頻率的解析理論為：

$$\omega_{ns} = \frac{\Omega_{ns}}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

(1)

其中， $h$  為圓形板殼樣品的厚度 (m)  $a$  為圓形板殼樣品的半徑 (m)  $\rho$  為圓形板殼樣品的密度 ( $kg/cm^3$ )

而  $D$  有以下定義：

$$D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$$

(2)

其中： $\nu$  為浦松比(Poisson’s ratio)； $Y$  為楊氏係數(Young’s modulus)。

最後有關於圓形板殼在自由態的振動頻率的解析的  $\Omega_{ns}$ ，在“The Influence Of

Poisson's Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates”這篇論文中附有的相關數值如下表；其中 $\Omega_{ns}$ 為節線數， $\Omega_{ns}$ 愈小代表其振動的自然頻率愈低。

表二、 $\Omega_{ns}$  數值表

n\s	0	1	2	3
0	0	9.068	38.507	87.80
1	0	20.513	59.932	143.758
2	5.253	35.242	84.51	161.54
3	12.243	52.512	112.26	195.647

之後我們便有辦法計算各圓盤的自然振動頻率：將公式（2）帶入公式（1）中得 到（3）：

$$\omega_{ns} = \frac{\Omega_{ns} h}{a^2} \sqrt{\frac{Y}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (3)$$

由於材質不同，密度  $\rho$  也會不同；而原板密度可由下式（4）定義：

$$\rho = \frac{M}{2\pi a h} \quad (4)$$

再由公式（3）得：

$$\omega_{ns} = \frac{\Omega_{ns}}{a} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} \sqrt{\frac{Y}{12(1-\nu^2)}} \quad (5)$$

因此我們可以得到以下關係：

$$\omega \propto h^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-1} \cdot M^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

其中定義以下關係：

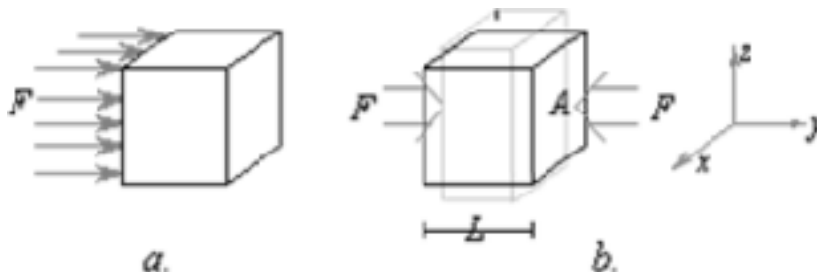
$$\psi = \Omega_{ns} \sqrt{\frac{Y}{12(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

$\psi$  為楊氏係數與浦松比之函數，可知其與樣品材質有關。

## (五) 浦松比與楊氏係數

### 1. 楊氏係數 ( Young's Modulus )

討論楊氏係數前，先考慮以下兩種物體受外力的情形：



圖四、物體受力的兩種情形

圖五-(a)，只有一面 受力  $F$ ，顯然的此物體會逐漸地向右方加速移動，而物體內各部分的相對位置並無改變；而圖五-(b) 則不同，物體的兩面受到方向相反、大小相同的力，兩力的合力為  $0$ ，因此原來靜止的物體不會移動，但物體的形狀大小可能就有變化了。

在楊氏係數的討論中，我們研究的是受壓後可復原的彈性體。圖五 -(b) 的彈性體受力後沿力方向會變得比較短，和力垂直的方向可能變得比較寬。這些彈性體的變化可用「應變」( strain ) 來表示，而施加於物體的力則以「應力」( stress ) 來表示，沿力方向的應變定義為  $\frac{\Delta L}{L}$ ，應力定義為  $\frac{F}{A}$ ，其中  $L$  為原長度， $\Delta L$  為其變化量， $A$  是受力面積。

彈性體的特性是應變和應力成正比，可看成是較廣義的虎克定律：

$$\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad (8)$$

和彈性體的特性有關，稱為楊氏係數 ( Young's Modulus )。

### 2. 浦松比 ( Poisson's ratio )

浦松比是一無量綱（無因次）的物理量。

浦松比定義為材料受拉伸或壓縮力、發生變形時，其橫向應變與縱向應變的比值。當材料在一個方向被壓縮，它會在與該方向垂直的另外兩個方向伸長，這就是泊松現象，泊松比是用來反映泊松現象的無量綱的物理量。



當材料在彈性限度以內對縱方向施加荷重時，以  $\frac{b}{D}$  代表橫向應變、 $\frac{\delta}{L}$  代表軸向應變，可列浦松比即為下（8）式：

$$\nu = \frac{\frac{b}{D}}{\frac{\delta}{L}}$$

(9)

其中： $b$  為橫向的改變量； $d$  為軸向的改變量； $b$  為寬度； $L$  為長度；



圖五、浦松比示意圖：當一可變形物體受軸向拉力( $P_t$ )，不只在軸向會伸長，其軸向也會收縮;受壓縮力時則反之。

### 三. 實驗設計與步驟

#### (一) 撞擊力量的施予

為了方便施予敲擊的外力，本研究使用以高中物理所學到的自由落體與碰撞原理來設計主動式撞擊系統。



圖六、自由落體實驗模式

當樣品做自由落體時，其只受重力作用並不受高度影響，且在短距離、大質量的狀況下，可以忽略掉空氣阻力的影響，因此受力根據牛頓第二運動定律為

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \quad (10)$$

## (二) 撞擊聲波收集與分析實驗

音頻分析元件組分成軟體與硬體部分，在硬體方面有手機麥克風；程式設計方面則有 Android 手機應用程式 Sound Spectrum Analyzer、由 App Inventor 製作成的資料分析程式。



圖七、Sound Spectrum Analyzer App、透過 App 所記錄之實驗數據節錄

首先透過手機 App Sound Spectrum Analyzer 與 Agilent CSA Spectrum Analyzer 所測得的數據製成資料庫，再使用 Arduino IDE 開發平臺，透過程式設計將資料進行運算，進而得出我們所需要的數值，並加以分析找出樣品確切成分，最後再透過電腦螢幕做為人機界面輸出數值與最終結果。

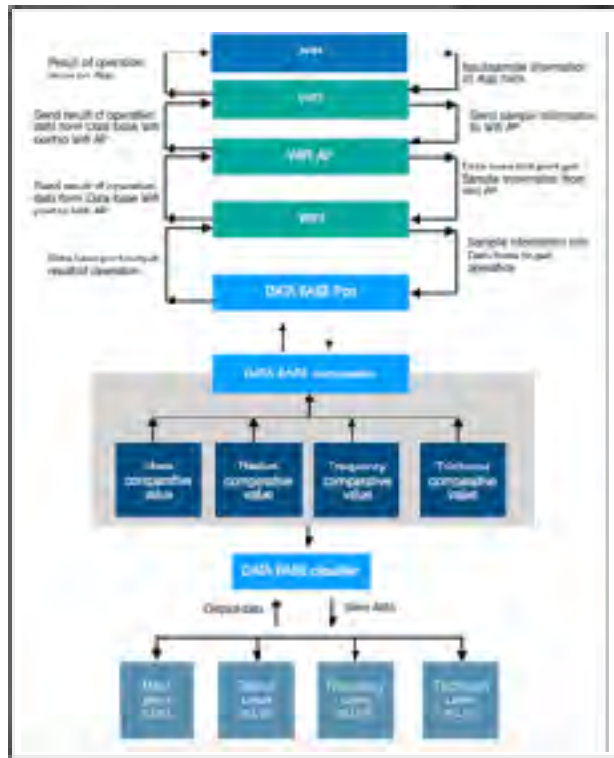
有了大量數據後，我們使用 ROOT 資料分析程式來整理我們的數據。ROOT 是由 CERN 開發的物件導向程式和函式庫。它最初設計用於粒子物理數據分析，現今它也用於其他諸多領域，如天文學和資料探勘。



圖八、Root 資料分析程式

### (三) 運算資料系統

運算資料系統分成軟體與硬體部分，在硬體方面有 Arduino 開發板、LCD 中央控制介面、Wifi、藍牙等；程式設計方面則有 ATSAM3X8E 晶片的韌體程式達成底部通訊。



圖九、運算資料系統架構設計圖

### (四) 固定相的選擇實驗

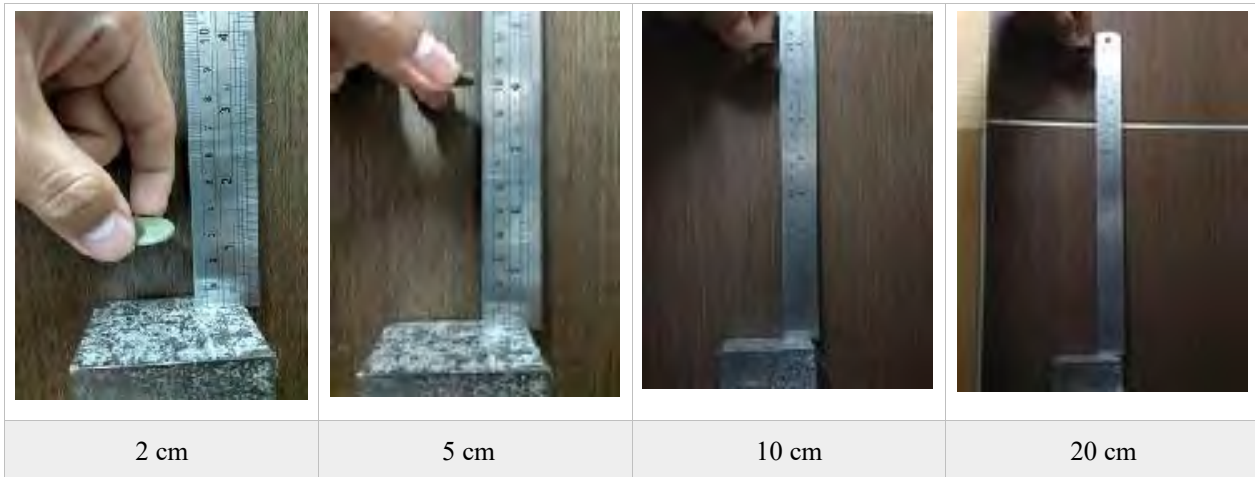
為了選擇能當固定相的平板，我們決定設計以下實驗來測試不同材質的固定相對頻譜分析的影響：我們使用塑膠砧板、碳鋼質量塊與木板來對同樣品在同狀況下的 FFT 分析。



圖十、固定相的選擇實驗

#### (五) 撞擊高度的影響

考量樣品在不同高度下掉落所產生的誤差，我們實驗了以下幾種不同的高度來探討樣品落下高度對頻譜分析的影響。



圖十一、樣品掉過高度對頻譜分析的影響

#### (六) 樣品撞擊方式與頻譜分析實驗





考量樣品在不同方式撞擊固定相平板所照成的誤差，因此決定透過以下實驗來檢測不同撞擊方式對頻譜分析的影響：我們使用舊版十元硬幣（頻譜落於的範圍內），再利用高數攝影機捕捉掉落方式：在第一次撞擊平板後以面接觸落下方式和點接觸落下方式兩種不同的形式，使用主動式撞擊頻譜分析儀檢測兩者頻譜差異。



圖十二、樣品撞擊方式與頻譜分析實驗

## (七) 金屬之撞擊頻譜分析實驗

我們使用以下幾種金屬來進行本項實驗：

圖片				
名稱	鋁合金金板	SUS 不鏽鋼	SPHC 熱軋鋼板	鍍板

### 1. 鋁合金板

鋁合金在現在工業上應用甚為廣泛，主要原因有質輕、具良好耐蝕性、成形性、表面處理性和良好的導電性、導熱性。

表三、擠型、鍛造、沖壓、車床加工用鋁合金成份表

1000系列	99.00%以上 Al
2000系列	Cu+Al
3000系列	Mg+Al
4000系列	Si+Al
5000系列	Mg+Al
6000系列	Mg+Si+Al
7000系列	Mg+Zn
8000系列	其他

本研究使用之鋁合金屬1000系列之金屬，可類比為純鋁。

### 2. SUS SPHC 熱軋鋼板

### 3.

SPHC是由鋼胚加熱，經粗軋機及精軋機軋延，桿成固定寬度鋼板，用水冷卻，將經過的壓研寬度固定但長度變成很長的鋼板捲取，成為鋼捲，此鋼捲為熱軋鋼捲（SPHC），因加水冷卻，會在鋼板表面形成反應物(外觀成黑色)，所以俗稱「黑皮料」。

### 4. 鍍板

「鋅」的日語發音近似閩南語發音的「鋸」，因此鍍合金板實際上為鍍鋅鋼板。絕大部分鍍鋅鋼板會以熱浸或電鍍方式，在其外層覆上鋅層，表面鍍鋅層較厚，



藉以隔絕金屬的氧化作用，使鋼材具有防腐、防鏽、防蝕的功能，不僅可延長鋼製品的使用壽命，也具有美化效果。

#### (八) 混合金屬之撞擊頻譜分析實驗

我們使用以下幾種硬幣來當作混合金屬進行本項實驗。

圖片									
名稱	舊版一角硬幣 第一套橫式新台幣	舊版一角硬幣 第四套橫式新台幣	舊版五角硬幣 第一套橫式新台幣	舊版一元硬幣 第一套橫式新台幣	新版一元硬幣 第三套橫式新台幣	新版五元硬幣 第三套橫式新台幣	舊版十元硬幣 第三套橫式新台幣	新版十元硬幣 第五套橫式新台幣	新版五十元硬幣 第五套橫式新台幣
成分	鋁幣(含鎂 1%)	鋁幣(含鎂 1%)	銅幣(含鋅 34%、鎳 1%)	銅幣(含鋅 27%、鎳 18%)	銅幣(含鎳 6%及鋁 2%)	銅幣(含鎳 25%)	銅幣(含鎳 25%)	銅幣(含鎳 25%)	銅幣(含鎳 2%及鋁 6%)

圖十三、混合金屬之撞擊頻譜分析實驗樣本

## 伍.研究結果

本研究經反覆實驗的研究結果如下：

### 一. 儀器的整合與撞擊聲波收集與分析實驗結果

本研究將所有樣品皆製成相同規格的試片，因此使用主動式撞擊系統即可達成目的。為使實驗能更加方便與後續資料庫建構之穩定，本團隊一共改良三代設計，每代的更改及遇些相關原因而持續做修改的作動。以下為三代改良過程研究結果：

#### 第一代：簡易型材質頻譜分析儀

本代實驗儀器主要是方便實驗人員製作小型數據庫而設計，透過人力辨識數據，將極端值以人力方式刪除，以利實驗的進程。



圖十四、簡易型材質頻譜分析儀

表四、第一代材質頻譜分析儀優缺點列表

優點	無複雜技術含量，可供一般人員自行架設與操作
缺點	數據調整對於人力來說過於複雜且重複性高，不但浪費人力，更使在樣本數極大或是建設大型資料庫時無法展現其效率

### 第二代：圓盤帶動機構材質頻譜分析儀

本代實驗儀器經過第一代的測試，我們試圖將主要功能留下，並以最少人力方式來達成目的。因此在數據分析上，我們利用筆記型電腦的試算表功能做出一套輸入介面，讓實驗數據能輸入至介面中，透過電腦幫我們運算；我們用 3D 繪圖技術設計一個帶動原盤機構，透過馬達帶動，讓樣品在平臺上隨著圓盤帶動至缺又處掉落於固定相上，再由手機 App 測量其主頻。



3D列印結構

電源焊接

3D 列印機構組件

圖十五、音頻測試機台製作過程



圖十六、音頻測試機台

表五、第二代材質頻譜分析儀優缺點列表

優點	減輕人力負擔，可估算撞擊力道
缺點	樣品彈跳方式不一，造成多數為點接觸碰撞，與本實驗所求不一致，易造成電腦誤讀垃圾數據，導致實驗崩潰

### 第三代：含 GUI 之材質頻譜分析儀

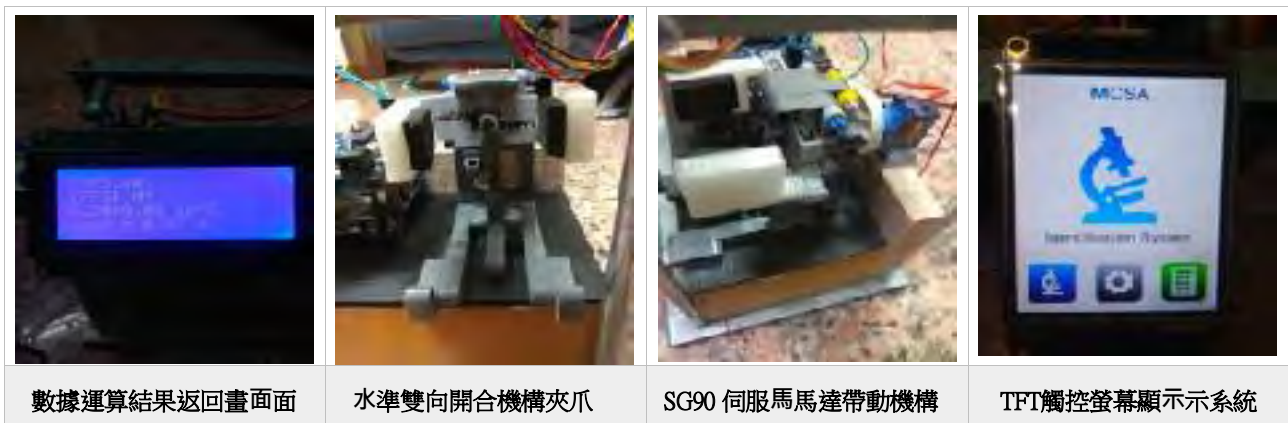
本代實驗儀器，將上代電腦輸入介面轉換成自製單晶片系統程式，並透過 UART 通訊技術，將實驗數據傳到運算叢集系統中，透過自製的演算法比較實驗數據與資料庫中之資料，找出相符之項目。

我們透過自製的材質頻譜分析儀，讓實驗人員能方便的將待測樣品的半徑、厚度、主頻、質量透過 GUI 輸入程式碼中進行運算，並將結果回傳於儀器上的 20\*4 LCD 液晶螢幕中顯示予實驗人員確認；若確認無誤，則將這筆資料加進資料運算叢集中，增加內建的資料樣本數，以求更加精準的數據。



圖十七、音頻測試機台製作過程





圖十八、音頻測試機台



圖十九、GUI 界面設計



圖二十、運算叢集程式節錄

表六、第三代材質頻譜分析儀優缺點列表

優點	使用程式設計出的演算法含有消除極端值之功能，並且可以將資訊回傳給實驗人員確認，透過此一機制，不但能將資料庫以精準的數值擴充，增加其可信度，更節省實驗的時間。
缺點	此一設計，必然是要有先前兩代所打下的基礎：完善的資料庫

## 二. 固定相的選擇實驗結果

表七、固定相的選擇實驗數據

次數	塑膠質	碳鋼質	木質
1	17420	17334	17484
2	17420	17312	17334
3	17441	17334	17441
4	17441	17506	17334
5	17355	17441	17355
6	17377	17420	17355
7	17334	17334	17420
8	17483	17312	17420
9	17334	17355	17463
10	17441	17441	17398

## 三. 樣品撞擊方式與頻譜分析實驗結果

表八、樣品撞擊方式與頻譜分析實驗數據

次數	面接觸落下方式	點接觸落下方式
1	17420	17398
2	17441	17398
3	17441	17377
4	17355	12661
5	17334	9560
6	17312	17291
7	17355	17420
8	17441	17377
9	17312	19164
10	17441	9819

## 四. 撞擊高度的影響實驗結果

表九、撞擊高度的影響實驗數據

次數	3cm	10 cm	20 cm	25 cm
1	17355	17441	17441	17420
2	17441	17506	17334	17441
3	17355	17441	17355	17355
4	17377	17420	17355	17441
5	17334	17441	9560	17355
6	17355	17420	17291	17420
7	17355	17441	9819	9560
8	17441	17355	17420	17441
9	17355	17420	17441	17355
10	17334	17441	17441	9819

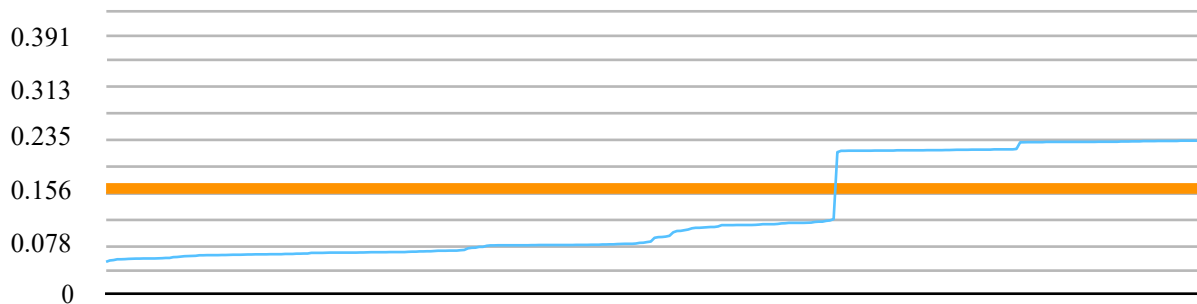
## 五. 金屬之撞擊頻譜分析實驗結果

### 1. 鋁合金之頻譜分析實驗結果

表十、鋁合金板之頻譜分析實驗數據

編號	鋁合金板直徑 (cm)	鋁合金板厚度 (cm)	鋁合金板質量 (g)	頻率									
				9250	9582	9302	9711	9625	9410	9280	9345	9689	9410
1	2.434	0.303	3.59	9250	9582	9302	9711	9625	9410	9280	9345	9689	9410
2	2.200	0.310	3.03	10637	10185	10206	10702	10228	10292	10206	10163	10615	10486
3	2.025	0.300	2.50	10732	10685	10357	10206	10163	10981	10852	10379	10745	10456
4	2.435	0.200	2.41	17291	17441	17377	17355	17463	17312	17463	17398	17377	17441
5	2.215	0.206	2.02	20456	20628	20628	20564	20607	20499	20542	20650	20650	20456
6	2.225	0.204	1.68	10206	10335	10788	10852	10271	10379	10379	10680	10702	10981

鋁合金板密度：7.82289718916236±0.526901714916874



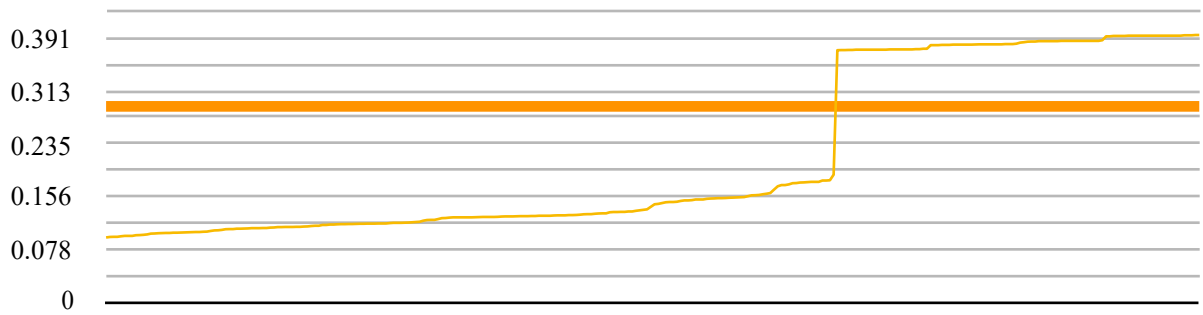
可以依據 (6) 式轉換，得  $\psi$  為：0.162508994999045±0.05870317885078。

### 2. SUS之頻譜分析實驗結果

表十一、SUS之頻譜分析實驗數據

	SUS直徑 (cm)	SUS厚度 (cm)	SUS質量 (g)	頻率									
				9173	9668	9797	9108	9194	9745	9474	9754	9431	9689
1	2.415	0.315	10.69	9173	9668	9797	9108	9194	9745	9474	9754	9431	9689
2	2.210	0.312	8.99	10120	10228	10163	10142	10206	10465	10292	10776	10422	10206
3	2.030	0.300	7.45	10852	10938	10456	10745	10809	10572	10702	10163	10551	10960
4	2.405	0.200	7.07	17509	17118	17441	17463	17484	17506	17463	17441	17118	17118
5	2.215	0.200	5.59	20241	20628	20650	20241	20671	20671	20241	20628	20241	20219
6	2.010	0.200	4.93	11326	11347	11197	11412	11391	11034	11326	11132	11347	11089

SUS密度：23.7695975857419 ± 0.607378952162634



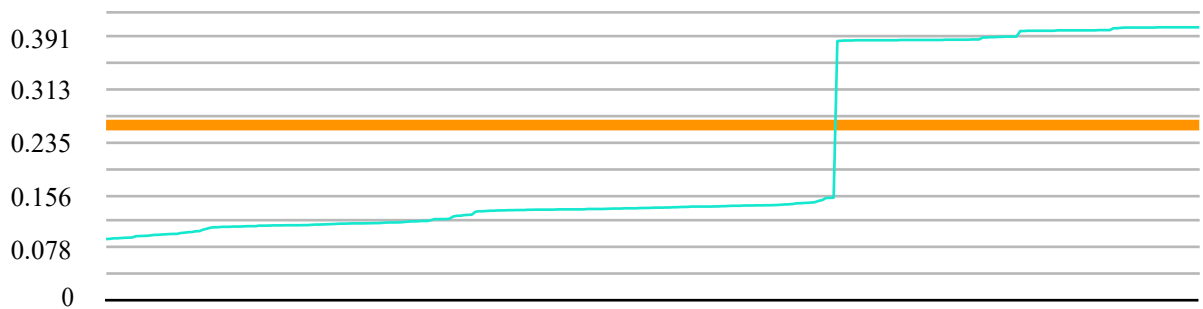
可以依據 (6) 式轉換，得  $\psi$  為： $0.29775124589478 \pm 0.119946563525878$ 。

### 3. SPHC之頻譜分析實驗結果

表十二、SPHC之頻譜分析實驗數據

	SPHC 直徑 (cm)	SPHC 厚度 (cm)	SPHC 質量量(g)	頻率									
				9496	9474	9388	9302	9771	9603	9560	9603	9926	9453
1	2.385	0.302	10.54	9496	9474	9388	9302	9771	9603	9560	9603	9926	9453
2	2.180	0.308	8.84	10443	10596	10594	10551	10685	10637	10809	10185	10637	10766
3	1.988	0.306	7.30	10960	10271	10249	10357	10271	10960	10895	10960	10874	10895
4	2.384	0.202	6.99	18432	18260	18475	18453	18432	18432	18453	18389	18453	18260
5	2.198	0.204	5.64	21597	21576	21576	21856	21576	21834	21813	21597	21554	21576
6	2.000	0.208	4.83	11218	11606	11132	11412	11132	11498	11391	11197	11741	11154

SPHC密度： $23.2211538461538 \pm 0.608821302703727$



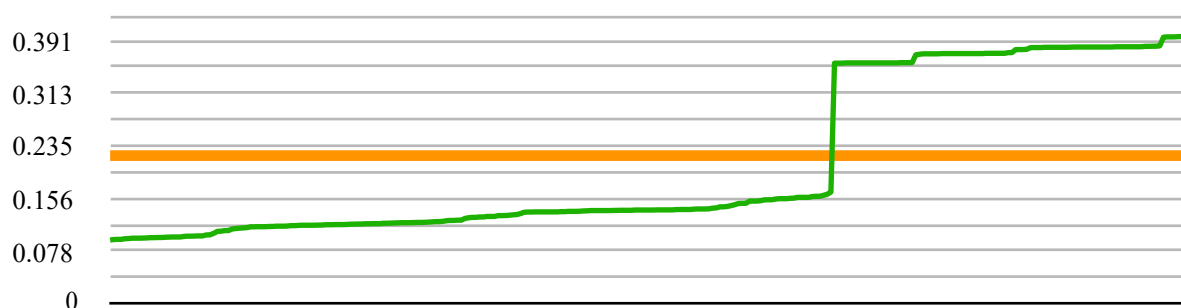
可以依據 (6) 式轉換，得  $\psi$  為： $0.263090250169937 \pm 0.135745402248858$ 。

#### 4. 鋁合金板之頻譜分析實驗結果

表十三、鋁合金板之頻譜分析實驗數據

	鋁合金板直徑 (cm)	鋁合金板厚度 (cm)	鋁合金板質量 (g)	頻率									
				17183	17205	17205	17851	17205	17894	17915	17205	17872	17894
1	2.410	0.210	6.87	17183	17205	17205	17851	17205	17894	17915	17205	17872	17894
2	2.210	0.200	5.76	20348	20391	20348	20370	20348	20391	20391	20391	20456	20435
3	2.012	0.216	4.77	11304	11434	11089	11541	11304	11003	11412	11197	11412	11347
4	2.410	0.104	3.45	14577	14599	14664	14621	14599	14470	14427	14448	14470	14448
5	2.212	0.100	2.90	17183	17205	17205	17226	17205	17355	17355	17377	17334	17355
6	2.008	0.100	2.41	20973	20973	20994	20973	20973	20801	20779	20882	20882	20779

鋁合金板密度：23.3228710857534 ± 0.849789954364052



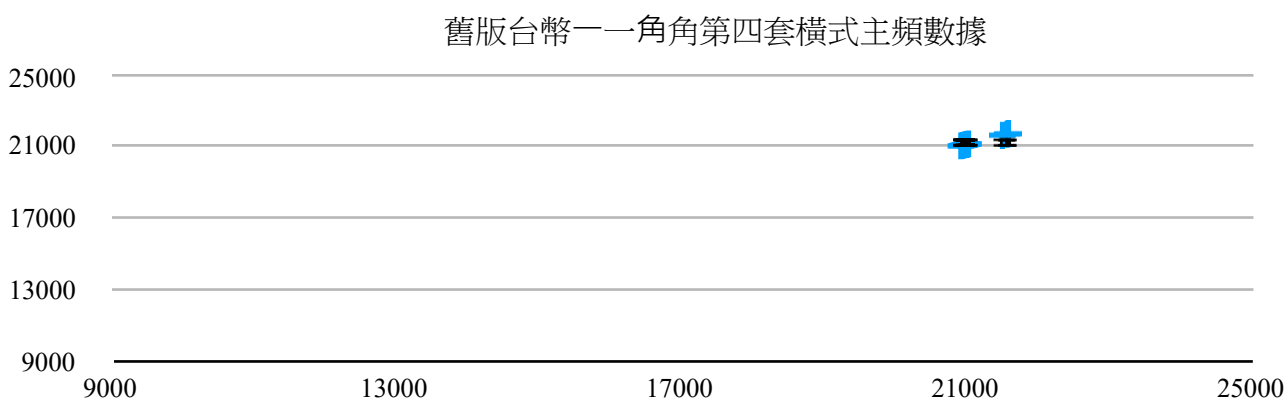
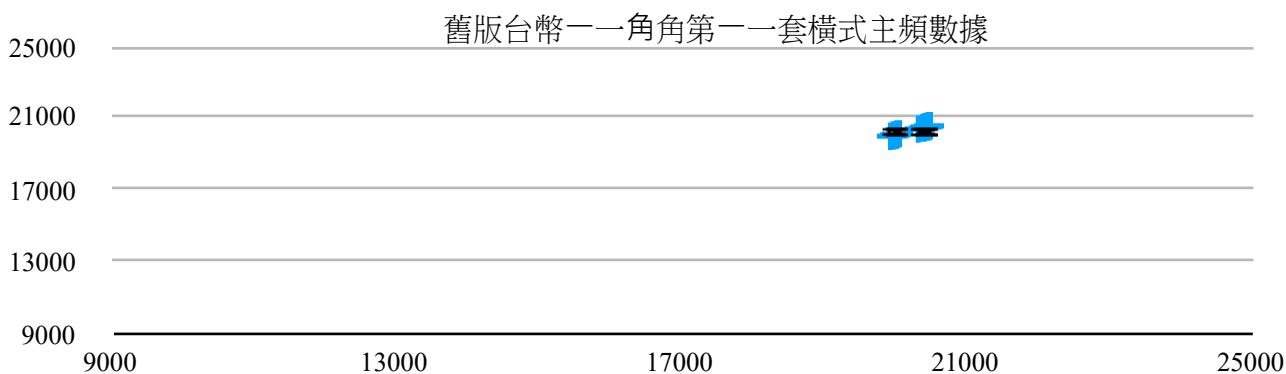
可以依據 (6) 式轉換，得  $\psi$  為：0.221116821570913±0.122100020753082。

#### 六. 混合金屬之撞擊頻譜分析實驗結果

##### 1. 鋁、鎂混合硬幣之頻譜分析實驗結果

表十四、鋁、鎂混合硬幣之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

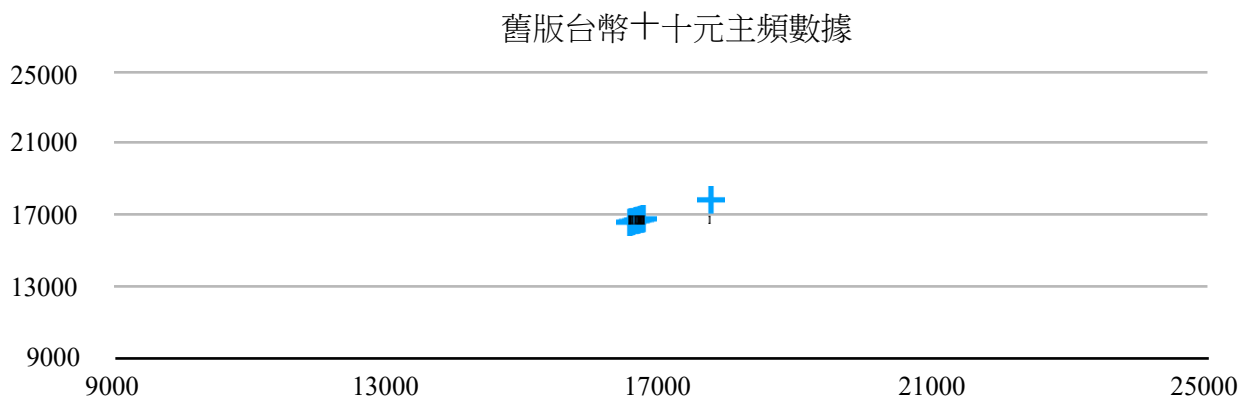
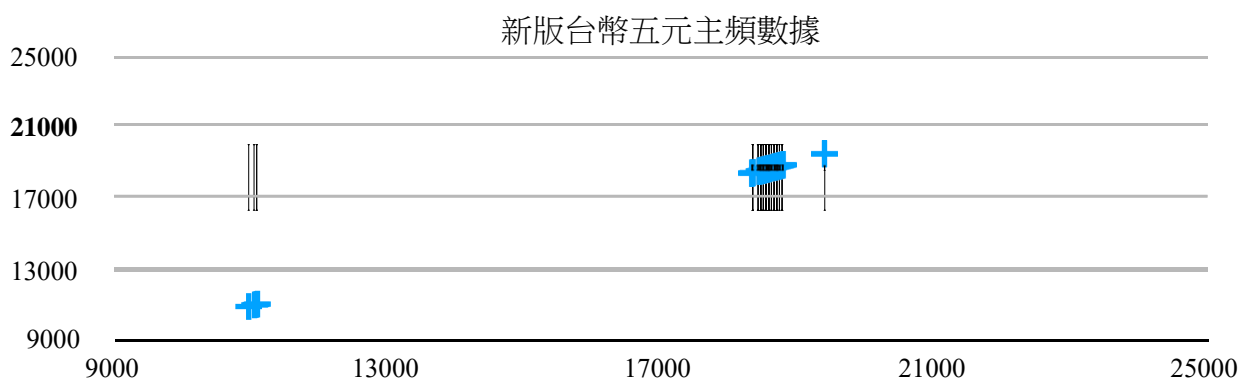
次數	舊版一角硬幣第一套 橫式新台幣	舊版一角硬幣第四套 橫式新台幣
成分	鋁幣 (含鎂1%)	鋁幣 (含鎂1%)
直徑 (cm)	1.910	1.900
厚度 (cm)	0.194	0.189
質量 (g)	1.13	1.10
密度	6.38660373130258	6.44887071479869
數值	0.154978532450129 ± 0.000003	0.15726758667217 ± 0.000006



## 2. 銅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗結果

表十五、銅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

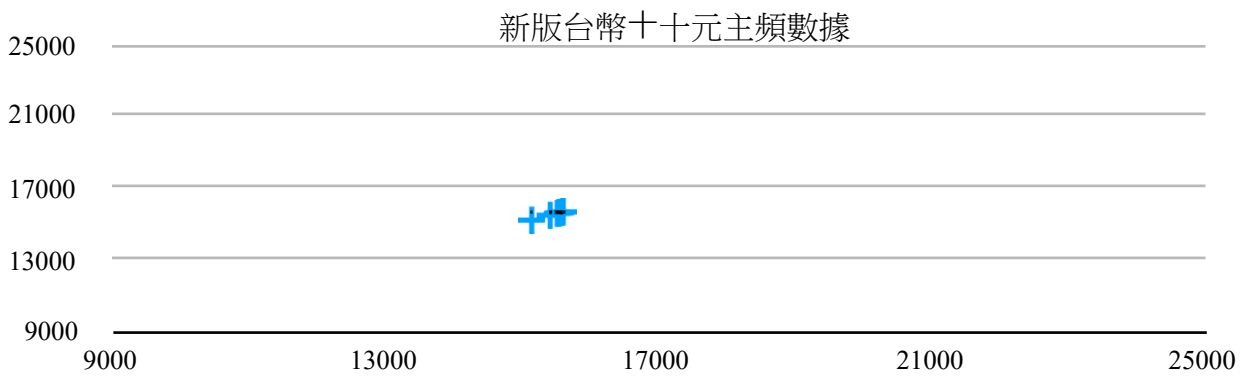
次數	新版五元硬幣 第三套橫式新台幣	舊版十元硬幣 第三套橫式新台幣
成分	銅幣 (含鎳25%)	銅幣 (含鎳25%)
直徑 (cm)	2.200	2.592
厚度 (cm)	0.158	0.190
質量量 (g)	4.35	7.47
密度	22.7534260905952	23.4076059490289
數值	0.392084769781893 ± 0.002	0.450855215081551 ± 0.00002



在新台幣十元中，發行了兩種不同雕紋的硬幣，考慮雕紋是否影響硬幣頻譜而將此二版本作出比較，得下表十六數據：

表十六、相同幣值不同雕紋之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

次數	舊版十元硬幣第三套橫式新台幣	新版十元硬幣第五套橫式新台幣
成分	銅幣 (含鎳25%)	銅幣 (含鎳25%)
直徑 (cm)	2.592	2.600
厚度 (cm)	0.190	0.200
質量量 (g)	7.47	7.44
密度	23.4076059490289	22.0118343195266
數值	0.450855215081551 ± 0.00002	0.450855215081551 ± 0.003



### 3. 銅、鋅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗結果

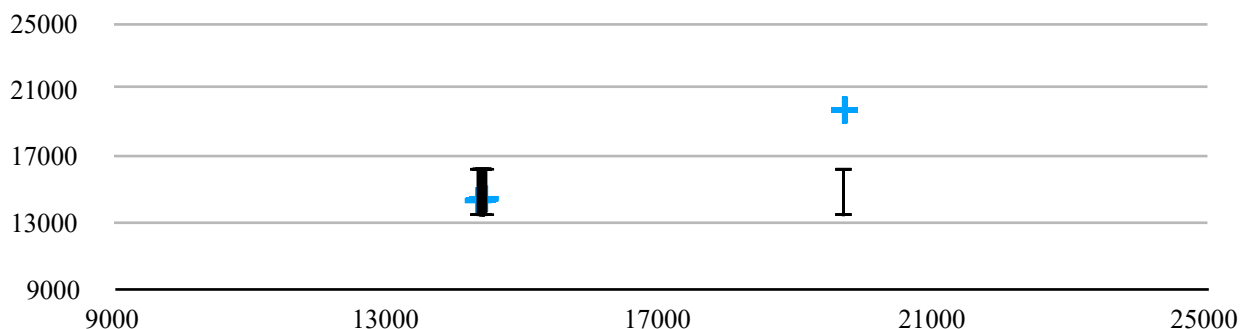
表十七、銅、鋅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

次數	舊版五角角硬幣第一套橫式新台幣	舊版一元硬幣第一套橫式新台幣
成分	銅幣 (含鋅34%、鎳1%)	銅幣 (含鋅27%、鎳18%)
直徑 (cm)	2.282	2.482
厚度 (cm)	0.156	0.172
質量量 (g)	3.76	5.96
密度	18.5136461032645	22.4995716398668
數值	$0.287138904326611 \pm 0.0000002$	$0.397521386376987 \pm 0.0011$





舊版台幣一一元主頻數據



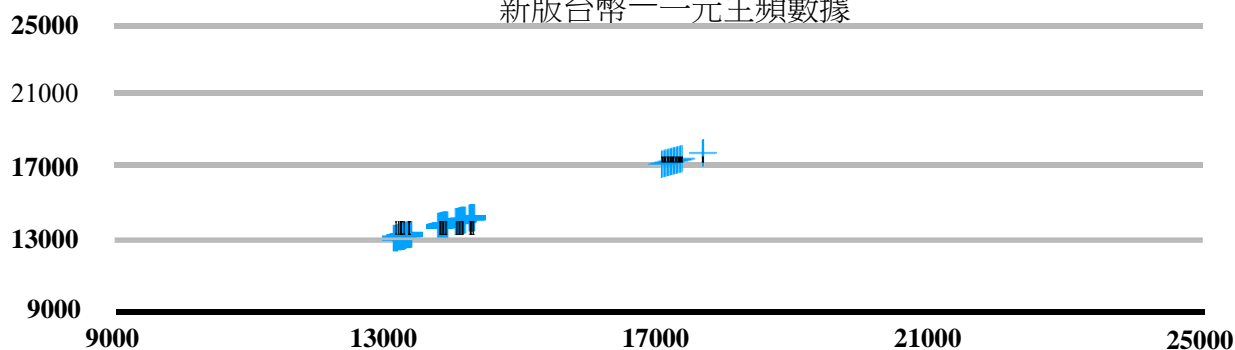
兩者相差約為 0.003000006。茲考慮五角硬幣與舊版一元硬幣之鋅、鎳含量有所差異，因此誤差略大。未來若有更多樣本，我們將可以分析不同材質比例差異的數學模型，就能透過這模型分析出物體成分的確切比例含量。

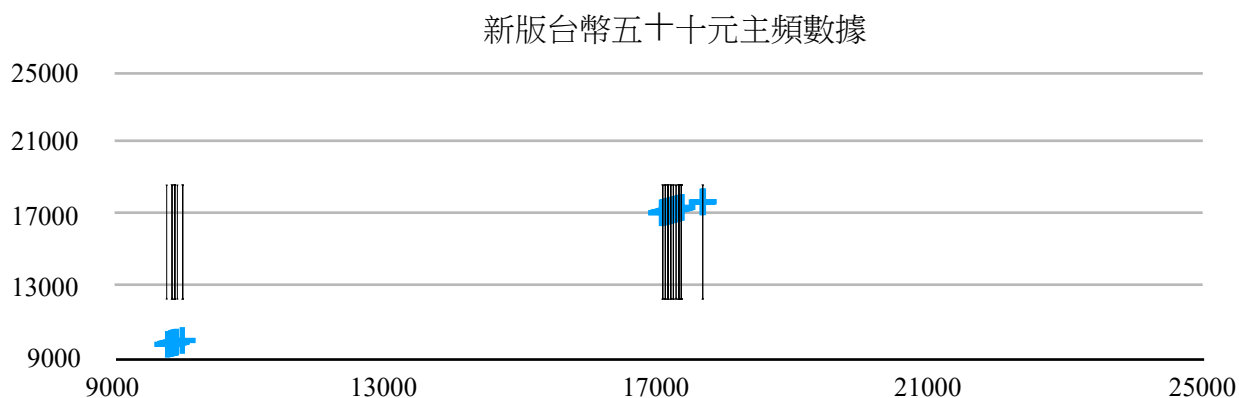
#### 4. 銅、鎳、鋁混合硬幣之頻譜數據之頻譜分析實驗結果

表十八、銅、鎳、鋁混合硬幣之頻譜分析實驗數據

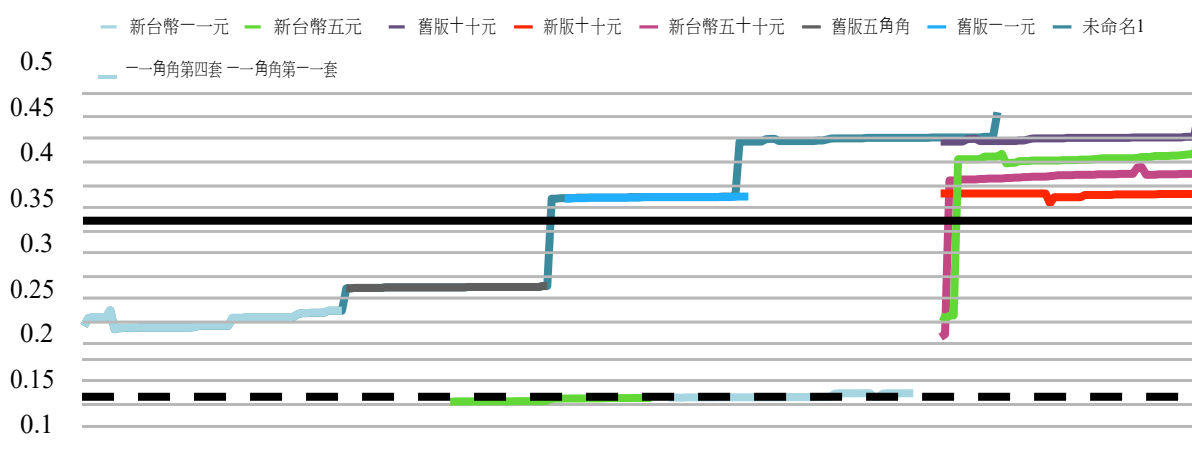
次數	新版一元硬幣第 三套橫式新台幣	新版五十元硬幣第 五套橫式新台幣
成分	銅幣 (含鎳6%及鋁2%)	銅幣 (含鎳2%及鋁6%)
直徑 (cm)	2.000	2.800
厚度 (cm)	0.166	0.240
質量量 (g)	3.86	9.95
密度	23.2530120481928	21.1522108843537
數值	0.253893511051643 ± 0.0046	0.40972404595903 ± 0.001

新版台幣一一元主頻數據





最後我們將所有硬幣數據疊圖製成下圖，可以發現在0.15到0.175間有鋁質硬幣數據聚集、在方程式  $y=0.1359x^{0.2059}$  之間有銅質硬幣數據聚集。



圖二十一、各種硬幣數據線分佈

## 陸.討論

經以上實驗結果，本研究有以下幾點討論事項：

### 1. 測量之精密度討論

在測量軟體的精密度上，我們利用 Sound Spectrum Analyzer 應用程式找頻譜之主頻時，麥克風的收訊敏感度，以及軟體能擷取到的原始訊息屬於整數型態，若能讓顯示數值從整數型態更改成 Double、Float 等小數型態，將能提升測量的精密度。

### 2. 固定相的選擇實驗討論

本研究在「固定相的選擇實驗」中，發現使用相同材質支金屬圓板，在與不同材質之固定相接處後，對其頻譜頻率的影響幾乎為零。但在取樣時，本研究亦發現，相較於

金屬材質固定相，塑膠表材質固定相較會使樣品反彈而造成頻譜頻率數值不穩，取樣不易。因此本研究以碳鋼材質金屬塊做為統一的固定相。

### 3. 測量時撞擊固定相之反彈與頻譜數值關係討論

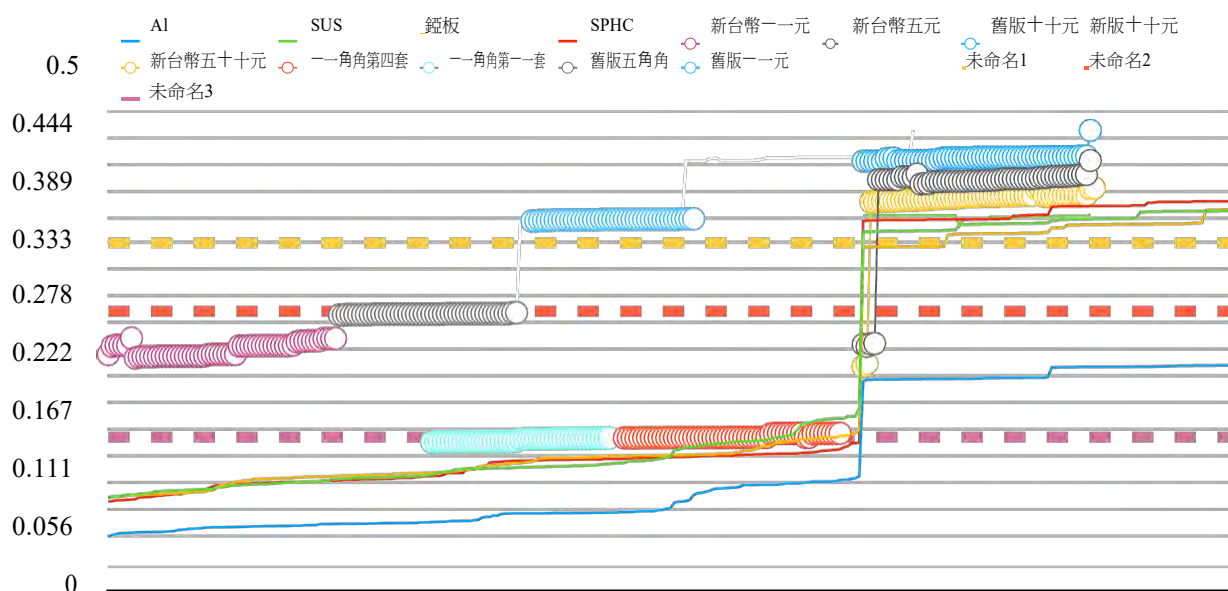
在測量時，我們無法讓金屬板能夠敲擊一次固定相就不再敲擊，因此考慮不同高度落下撞擊產生的頻譜是否對數值產生影響。因此我們透過「撞擊高度的影響」實驗證明出，不同高度撞擊固定相對頻譜不會有影響。

### 4. 不同落下接觸方式對頻譜分析之影響

落下的方式中，我們將之分為「面接觸落下方式」與「點接觸落下方式」。我們可以從表中看出兩者的確在數值採樣率上有落差，推測是撞擊後彈跳所照成的影響。為了符合在儀器中方便實驗，本研究主要針對「面接觸落下方式」做探討。未來期望能針對此兩項接觸方式做出轉換之模型。

### 5. 金屬圓板頻譜方式測量與組成比例之測定

本研究在金屬原版測量實驗中，透過FFT分析複合音頻，並利用“The Influence Of Poisson’s Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates”之公式調整數據，透過理論推導，得出下圖：



圖二十二、鋁、SUS、SPHC、鈹金屬與個硬幣間  $\psi$  數值之差異

可以發現主要材質相同的樣本，如SUS、SPHC、鋁板皆以鐵為主要原料，會明顯的聚集在一起，反之便會有所區隔。

關於組成成分的部分，從表中，我們可以很明顯的發現組成成分、比例有差異之樣本對頻譜與數值的轉換有所影響，因此我們嘗試利用線性組成比例來推測成分，但每組方程式得到的各元素數據相差甚大，因此未能將混合金屬中的成分透過組成線性模型計算出來。因此未來除了去獲得更多樣本，來分析不同材質比例差異的數學模型，我們更會從原子物理的角度進行理論的重新推導與分析，就能透過這模型分析出物體成分的確切比例含量，藉此找出每種元素都有的特定頻率，有助於對未知樣品材質的測定。

## 6. 不規則金屬板頻譜方式測量

本研究目前只能分析金屬原板狀之物體，考慮並非所有待測物皆能製成金屬圓板，因此我們使用面積來推算該形狀金屬版之理論直徑，但並未有理論支持，在未來我們將繼續研究不規則物體振動時的音頻與該物體物理量的關係理論。

$$\omega \propto h^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{A}{2\pi}\right)^{-1} \cdot M^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

## 7. 自動化設計討論

本系統目前使用 Android FFT的App，並無法將得出的數據直接輸入至運算叢集系統運算，未來我們將繼續研究以下幾點，將系統做出最完善的整合：

- (1) 透過程式設計，製出FFT 程式，並讓電腦自動找出主頻，並排除因實驗操作所秀成的極端誤差來做運算與判斷；
- (2) 改變FFT 程式輸出之資料型態，將精密度提升；
- (3) 繼承 Sound Spectrum Analyzer 應用程式之「紀錄最大數值」的功能，讓研究人員與電腦能容易在快速分析下找出最需要的數值；
- (4) 透過 3D 掃描出袋側物之物理性質，完成轉換公式參數的測量。

## 6. 機器學習演算法討論

本研究係透過物理學的推論，並設計許多實驗來驗證，將諸多實驗數據輸入至電腦運算，最後透過人力總結出材質頻譜的規律。我們亦有思考到機器學習技術在本研究的應用性，經過一連串的討論後，我們將使用 Supervised Learning 中 Normal Equation 方式將數據透過電腦直接運算，找出最佳的假設函數 (回歸曲線, Hypothesis Function)，

再透過多類別分類演算法即可判斷出該資料所隸屬的集合。

Supervised Learning 中有兩種主要的演算法：Normal Equation 演算法、Gradient descent 演算法。而 Normal Equation 演算法相對於 Gradient descent 演算法有以下幾點特質：

- (1) Normal Equation 演算法不用選擇學習速率 (Learning Rate) ；
- (2) 速度快，無需太多反覆運算步驟 (Iterations) ；
- (3) 資料特徵少的時候，效率十分高。

而本研究之數據特徵只有四項，因此十分符合 Normal Equation 運算的特性。所謂 Normal Equation 即是將資料建立成二迭張量形式，再透過一連串的運算找出假設函數的一迭參數張量，而我們使用的張量方程式如下：

$$h_{\theta}(x) = E^T X \quad (12)$$

其中， $E^T$  為假設函數之一迭參數張量的轉移張量； $X$  為各種資料建立而成的二迭張量，因為本研究只有四個資料特徵，加上特徵向量之定義  $\theta_0^i = 1 (0 \leq i \leq m, i \in Z)$ ，因此此張量將會是  $m \times 5$  的矩陣， $m$  為資料量。

而一迭參數張量 可透過下式求得最佳解：

$$E = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (13)$$

其中  $Y$  為資料庫中透過公式 (6) 所運算出數值組成的一迭張量。

得出假設函數後，我們要再利用 Sigmoid Function 的出下式：

$$h_{\theta}(x) = g(E^T X) = \frac{1}{1 + e^{-E^T X}} \quad (14)$$

從中得出邊界條件。最後再使用多類別分類演算法，找出 (14) 式對於不同樣品類別運算所得到的機率最大值，即可做出判定。

我們將在未來使用 C、C++ 等開發環境，撰寫相關函式庫，並持續學習 Unsupervised Learning、Deep Learning 和 AI，期望能將人工智慧技術應用於材料科學與辨識上，大大的減少人力成本。

## 柒.結論

本研究在金屬原版測量實驗中，透過FFT分析複合音頻，並利用“ The Influence Of Poisson’s Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates ”之公式調整數據，透過理論推導與一連串的實驗及數據分析，成功的歸納出不同金屬圓板撞擊固定相所產生的頻譜，並歸納以下幾點結論：

1. 圓形金屬板的直徑大約以反比的關係影響其自然頻率；
2. 圓形金屬板的厚度大約以1.5次方正比的關係影響其自然頻率；
3. 同樣材質、不同比例之樣品，對測量結果有一定的影響。
4. 樣品與不同材質之固定相碰撞後，對其頻譜頻率的影響幾乎為零；
5. 樣品在不同高度撞擊固定相，對其頻譜頻率的影響幾乎為零；
6. 「面接觸落下方式」採樣率較「點接觸落下方式」高。

在以上實驗研究過後，我們將實驗得出的資料製成資料庫，使實驗系統化，並提出結合目前科技趨勢—機器學習、深度學習與人工智慧研究的可能性與演算法設計方向，讓本研究擁有無限的未來發展趨勢。

## 捌.參考資料

### 一. 中文部分

1. 蔡秉良（2013）。金屬材料振動波形、阻尼及振動頻率之研究
2. 【Super】選修物理(上)課堂講義。聲音的共鳴3. 3小時讀通稀有金屬（2011/05/26）
4. 金屬-有機框架材料（2017/11/01）
5. 快速傅里葉變換：演算法與應用（2016/09/01）

### 二. 網路資源

1. Fourier transform（無日期）。維基百科。2018年2月28日。取自：[https://www.facebook.com/#https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier\\_transform](https://www.facebook.com/#https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform)
2. Discrete Fourier transform（無日期）。維基百科。2018年2月28日。取自：[https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_Fourier\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform)
3. Fast Fourier transform（無日期）。維基百科。2018年2月28日。取自：[https://en.wikipedia.org/wiki/Fast\\_Fourier\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform)
4. ampd sine wave（無日期）。維基百科。2018年2月28日。取自：<https://>

- [en.wikipedia.org/wiki/Damped\\_sine\\_wave](https://en.wikipedia.org/wiki/Damped_sine_wave)
5. Vibration (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自：<https://en.wikipedia.org/wiki/Vibration>
  6. What Is FFT and How Can You Implement It on an Arduino? (August 10, 2017)。norwegiancreations.com。2018年2月28日。取自：<https://www.norwegiancreations.com/2017/08/what-is-fft-and-how-can-you-implement-it-on-an-arduino/>
  7. 演算法筆記- Wave (無日期)。國立臺灣師範大學資工系。2018年2月28日。取自：<http://www.csie.ntnu.edu.tw/~u91029/Wave.html>
  8. 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會高中組物理科 龍銀的秘密~圓形金屬板振動頻率的探討，取自：<https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/senior/0401/040102.pdf>
  9. 金屬材料振動波形、阻尼及振動頻率之研究，取自：<http://www.shs.edu.tw/works/essay/2013/10/2013100911440303.pdf>
  10. 如果看了此文你還不懂傅里葉變換，取自：<http://blog.xuite.net/lapuda.chen/PaulBlog/221866406-如果看了此文你還不懂傅里葉變換%28Fourier+Transform%29>，那就過來掐死我吧
  11. 採用USRP軟體無線電及FFT-based通道分離器之合作式寬頻頻譜感知系統實現，取自：<http://hdl.handle.net/11296/arhkk5>
  12. TH1 Class Reference (無日期)。ROOT@CERN。取自：<https://root.cern.ch/doc/master/classTH1.html>
  13. 機器學習-斯坦福大學|Coursera，取自：<https://www.coursera.org/learn/machine-learning/home/info>

## 【評語】 052406

本研究係使用快速傅立葉轉換對金屬圓板撞擊產生的音頻進行分析，並搭配自製的運算叢集，來實現使材料辨識系統。具有創意及發展性。研究者應先對時間域信號，以機器學習方式做分析，配合應力波傳遞理論與非破壞檢測的反算理論，開發更嚴謹而有效之材料辨識系統。



# MCSA 金屬組成成分之頻譜分析系統

## 摘要

本研究係使用快速傅立葉轉換對金屬圓板撞擊產生的音頻進行分析，並搭配自製手機 App，和自製的運算叢集系統，來實現使材料辨識系統。本研究為分析金屬圓板與其相關之物理量對音頻的影響，吾人透過 Journal of Sounds and Vibrations 中的一篇 "The Influence Of Poisson's Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates" 之公式，配合大量實驗做為數據轉換的基礎，最後將之整合成材料辨識系統，大大提高本研究之未來發展性。

## 壹、動機

在高中物理課時，曾經聽到老師說：「不同硬幣可以測出不同的音頻。」物理實驗課中，也時常聽到老師向我們詢問：「這個材料是中碳鋼還是高碳鋼？」而我們的老師家是在開設機械工廠，基於我們的求知與好奇心，我們也常常到工廠學習。在工廠裡我們常能看到專門為測定某些物理量而製作的試驗棒、試驗片，於是我們嘗試透過快速傅立葉轉換 (Fast Fourier Transform, 縮寫為 FFT)，分析出不同金屬在撞擊下產生的音頻，並更進一步探討音頻與其材質等物理量之關係。

## 貳、目的

### 一、設計並測試實驗儀器：

1. 固定相的選擇之頻譜分析
2. 樣品撞擊力道之頻譜分析
3. 樣品撞擊方式與頻譜分析
4. 分析系統的架設

### 二、使用不同材質之樣品在儀器中檢測並分析頻譜：

1. 比較不同金屬材質，但在同條件下撞擊出的音頻，透過 FFT 分析其頻譜大小。
2. 比較不同金屬材質，在不同質量、面積、厚度條件下撞擊出的音頻，透過 FFT 分析，頻譜大小。
3. 比較混合金屬材質，但在同條件下撞擊出的音頻，透過 FFT 分析頻譜值大小。
4. 試著比較混合金屬材質，在不同質量、面積、厚度條件下撞擊出的音頻，透過 FFT 分析頻譜值大小。

三、建立一套物理研究模型以及物理理論方程式來分析材質中的物質組成比例並製成程式，透過自製分析系統，在單晶片為電腦叢集上運算，並完成撞擊頻譜分析資料庫的建設，未來將使用機器學習得技術使系統優化。

## 參、研究設備及器材

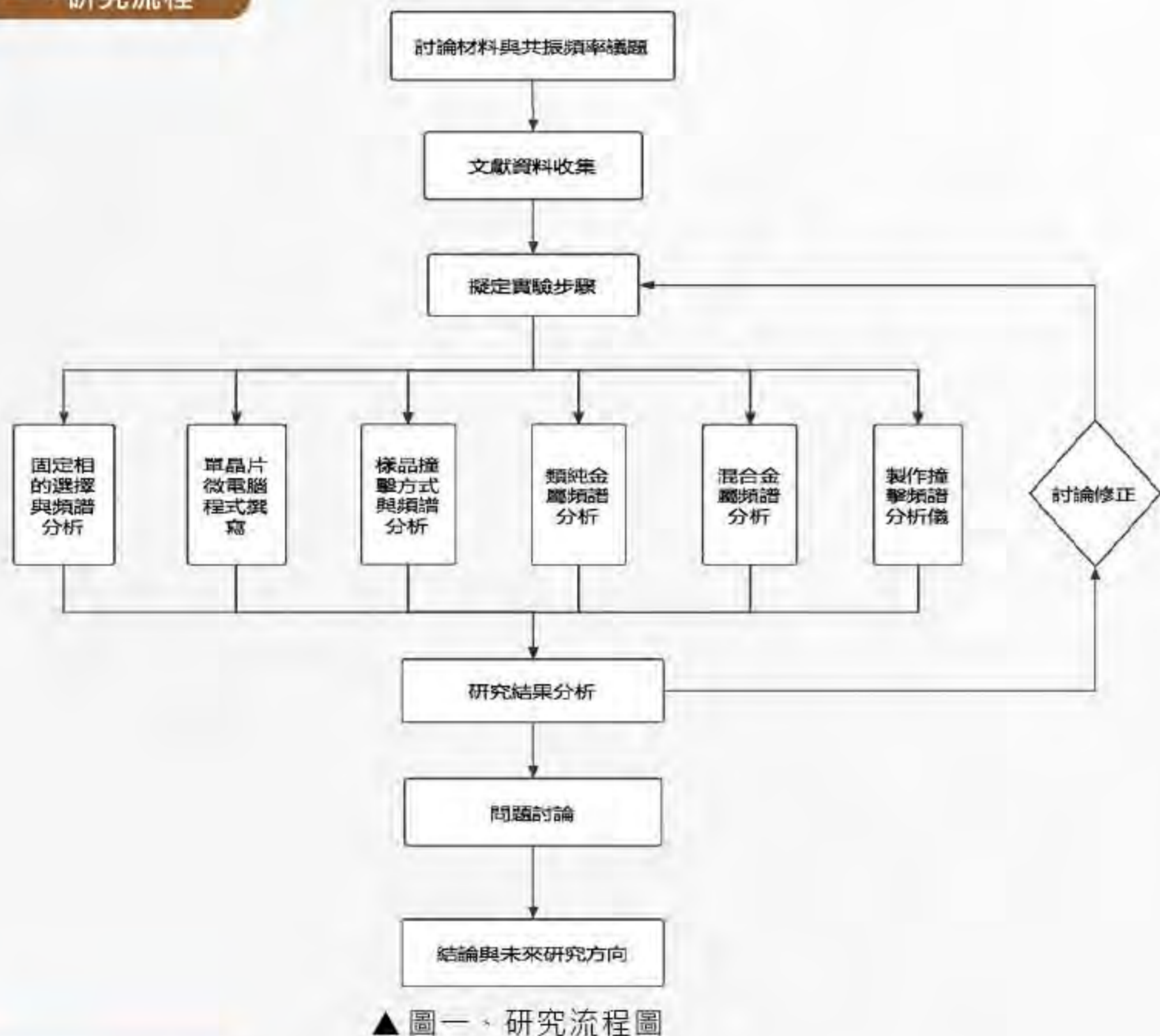
本次研究的實驗設備與器材，如表一所示之：

表一、實驗測量器材與試片一覽表

編號	名稱	數量 (單位)	備註
1	電腦	2 (台)	程式撰寫、資料查詢、文書整理
2	筆記本、筆	1 (本) · 1 (支)	繪製設計圖、紀錄數據
3	手機	2 (支)	樣品頻譜分析
4	Arduino UNO	6 (片)	運算中心
5	鋼質質量塊	1 (塊)	固定相
6	木板	1 (塊)	固定相
7	雷射切割機	1 (台)	儀器製作
8	3D 列印機	1 (台)	儀器製作
9	USB B to A	7 (條)	資料傳輸
10	伺服馬達	2 (個)	自動化儀器動力來源
11	2.8 inch TFT 觸控螢幕	1 (塊)	輸入數值
12	杜邦線	若干 (條)	
13	12 種硬幣	各 5 (個)	含舊版新台幣、新版新台幣、代幣、古錢、外幣
14	4 種金屬試片	各 9 (個)	鋁板、SUS、SPHC、鈹板
15	固定架	2 (支)	儀器架設
16	20*4 LCD 螢幕	1 (塊)	輸出數值

## 肆、研究流程及方法

### 一、研究流程

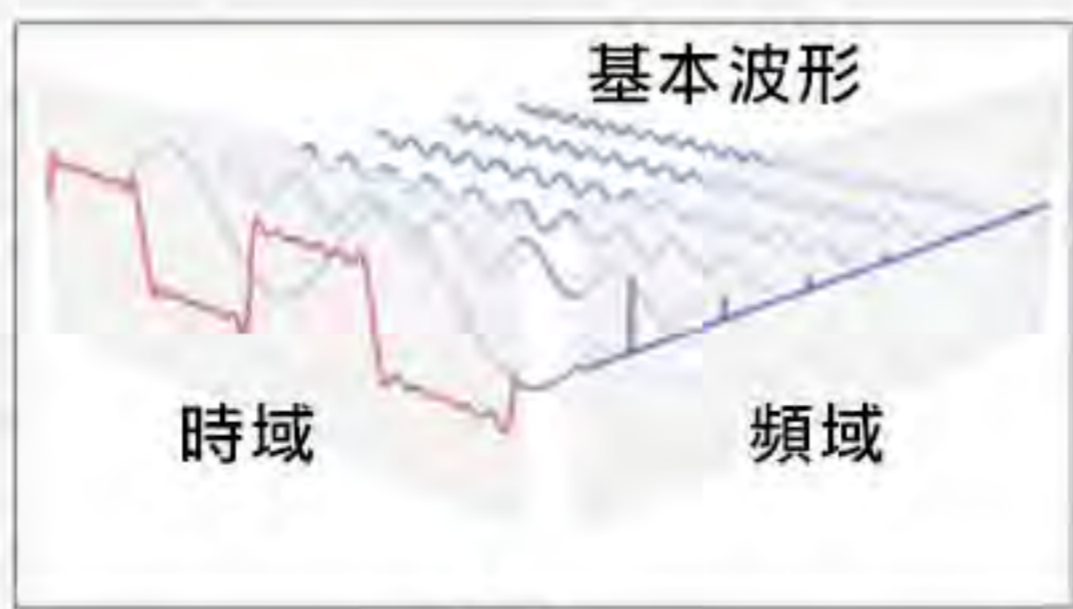


▲圖一、研究流程圖

### 二、文獻搜集

#### (一) 傅立葉變換 (Fourier Transform)

傅立葉變換是數學的一個分支領域。它是研究如何將一個函數或者信號表達為基本波形的疊加，而基本波形稱為調和函數，因此傅立葉變換又稱為調和分析。在過去兩個世紀中，傅立葉變換已成為學界中一個被廣泛研究的主題，並在諸多領域也得到廣泛應用，如信號處理、量子力學、神經科學等。



▲圖二

圖二、傅立葉變換將函數的時域 (紅色) 與頻域 (藍色) 相關聯。頻譜中的不同成分頻率在頻域中以峰值形式表示。

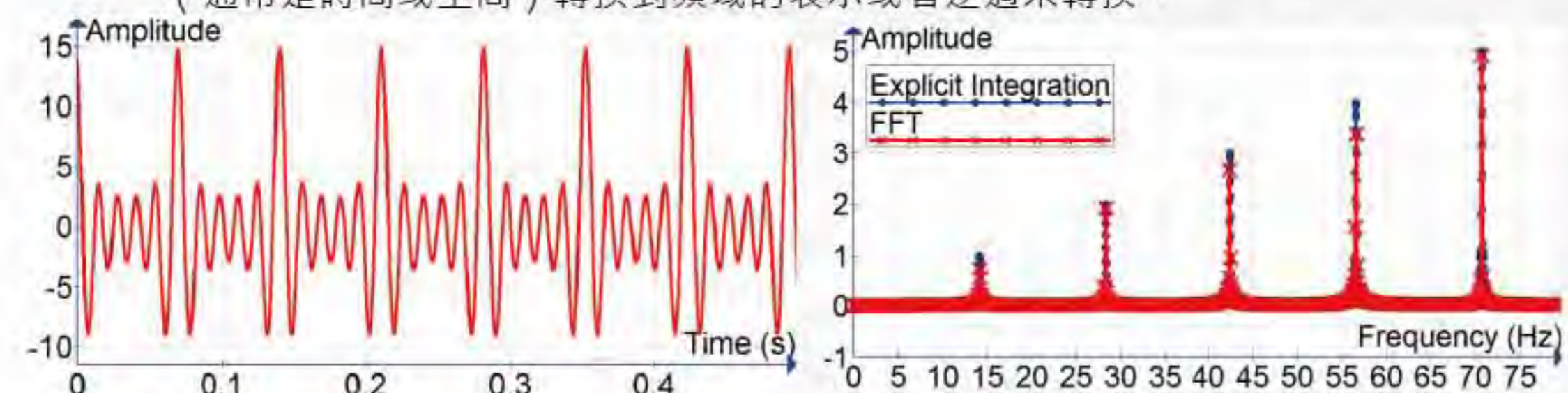
(取自：維基百科。https://zh.wikipedia.org/wiki/傅里叶变换)

#### (二) 離散傅立葉變換 (Discrete Fourier Transform, 縮寫為 DFT)

離散傅立葉變換 (以下簡稱為 DFT)，是傅立葉變換在時域和頻域上都呈離散的形式，將信號的時域採樣變換為其 DFT 的頻域採樣。在形式上，時域和頻域上的序列是有限長的，而實際上這兩組序列都應當被認為是離散周期信號的主值序列。即使對有限長的離散信號作 DFT，也應當將其看作其周期延拓的變換。在實際應用中通常採用快速傅立葉變換計算 DFT。

#### (三) 快速傅里葉變換 (Fast Fourier Transform, 縮寫為 FFT)

快速傅立葉變換 (以下簡稱為 FFT) 廣泛的應用於工程、科學和數學領域。FFT 的基本思想在 1965 年才得到普及，但早在 1805 年就已推匯出來。1994 年吉爾伯特·斯特朗 (William Gilbert Strang) 把 FFT 描述為「我們一生中最重要的數值演算法」，它還被 IEEE 科學與工程計算期刊列入 20 世紀十大演算法。FFT 是快速計算序列的 DFT 或其逆轉換的方法。傅立葉分析將訊號從原始域 (通常是時間或空間) 轉換到頻域的表示或者逆過來轉換。



▲圖三、FFT 訊號分析：一個五項餘弦級數的時域訊號，用 FFT (~40,000 次運算) 五項餘弦級數及用顯式積分 (~1 億次運算) 得出的 DFT。時間窗又是 10 秒。  
(取自：維基百科。https://zh.wikipedia.org/wiki/快速傅里叶变换)

這裡的一個原則是任何信號，即使是非週期信號，都可以通過不同頻率和振幅的正弦信號相加而得到相當精確的重構；也就是說我們加在一起的正弦信號越多，我們重建的信號就越像原來的信號。

### (四) 物體性質與振動頻率的關係

在 Journal of Sounds and Vibrations 中有一篇 "The Influence Of Poisson's Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates"，其中有關於圓形板設在自由態的振動頻率的解析理論為：

$$\omega_{ns} = \frac{\Omega_{ns}}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (1)$$

其中， $h$  為圓形板殼樣品的厚度 (m)  
 $a$  為圓形板殼樣品的半徑 (m)  
 $\rho$  為圓形板殼樣品的密度 (kg/cm<sup>3</sup>)

$$D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

而  $D$  有以下定義：  
 其中： $\nu$  為浦松比 (Poisson's ratio)  
 $Y$  為楊氏係數 (Young's modulus)。

最後有關於圓形板設在自由態的振動頻率的解析的  $\Omega_{ns}$ ，在 "The Influence Of Poisson's Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates" 這篇論文中附有  $\Omega_{ns}$  的相關數值如下表，其中  $n$  為節線數， $s$  為節環數， $\Omega_{ns}$  愈小代表其振動的自然頻率愈低。

表二、 $\Omega_{ns}$  數值表

n\s	0	1	2	3
0	0	9.068	38.507	87.80
1	0	20.513	59.932	143.758
2	5.253	35.242	84.51	161.54
3	12.243	52.512	112.26	195.647

之後我們便有辦法計算各圓盤的自然振動頻率：由於材質不同，密度  $\rho$  也會不同；將公式 (2) 帶入公式 (1) 中得到 (3)：而原板密度可由下式 (4) 定義：

$$\omega_{ns} = \frac{\Omega_{ns} h}{a^2} \sqrt{\frac{Y}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (3)$$

$$\rho = \frac{M}{2\pi ah} \quad (4)$$

再由公式 (3) 得：

$$\omega_{ns} = \frac{\Omega_{ns}}{a} \sqrt{\frac{h^2}{12M}} \sqrt{\frac{Y}{12(1-\nu^2)}} \quad (5)$$

$$\omega \propto h^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-1} \cdot M^{-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

其中定義以下關係：

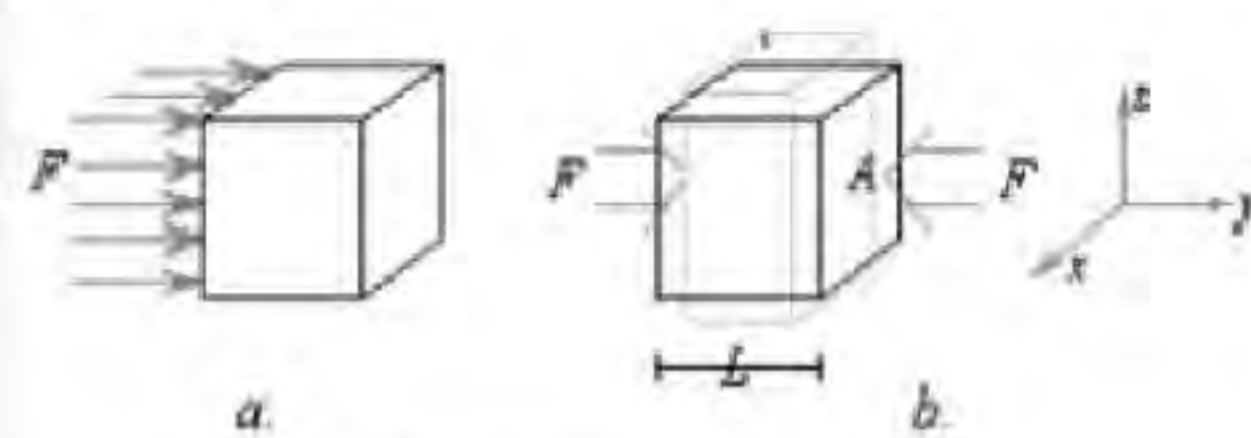
$$\psi = \Omega_{ns} \sqrt{\frac{Y}{12(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

$\psi$  為楊氏係數與浦松比之函數，可知其與樣品材質有關。

### (五) 浦松比與楊氏係數

#### 1. 楊氏係數 (Young's Modulus)

討論楊氏係數前，先考慮以下兩種物體受外力情形：



▲圖四、物體受力的兩種情形

圖五-(a)，只有一面受外力  $F$ ，顯然的此物體會逐漸地向右方加速移動，而物體內各部分的相對位置並無改變；而圖五-(b) 則不同，物體的兩面受到方向相反、大小相同的力，兩力的合力為 0，因此原來靜止的物體不會移動，但物體的形狀大小可能就有變化了。

在楊氏係數的討論中，我們研究的是受壓後可復原的彈性體。圖五-(b) 的彈性體受外力後沿力方向會變得比較短，和力垂直的方向可能變得比較寬。這些彈性體的變化可用「應變」(strain) 來表示，而施加於物體的力則以「應力」(stress) 來表示，沿力方向的應變定義為  $\Delta L/L$ ，應力定義為  $F/A$ ，其中  $L$  為原長度， $\Delta L$  為其變化量， $A$  是受方面積。

彈性體的特性是應變和應力成正比，可看成是較廣義的虎克定律：

$$\frac{F}{A} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$Y$  和彈性體的特性有關，稱為楊氏係數 (Young's Modulus)。

#### 2. 浦松比 (Poisson's ratio)

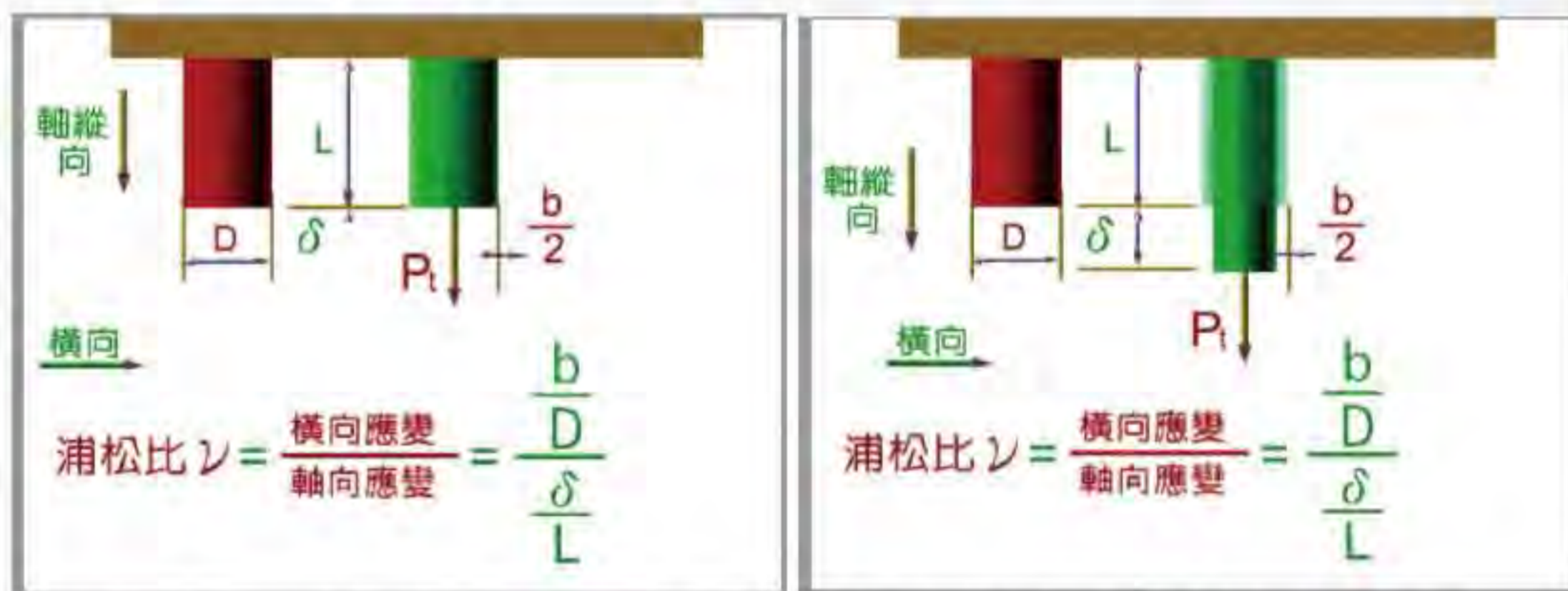
浦松比是一無量綱 (無因次) 的物理量。

浦松比定義為材料受拉伸或壓縮力、發生變形時，其橫向應變與縱向應變的比值。當材料在一個方向被壓縮，它會在與該方向垂直的另外兩個方向伸長，這就是泊松現象，泊松比是用來反映泊松現象的無量綱的物理量。

當材料在彈性限度以內對縱方向施加荷重時，以  $\frac{\delta}{D}$  代表橫向應變、 $\frac{\Delta L}{L}$  代表軸向應變，可列浦松比即為下 (8) 式：

$$\nu = \frac{\frac{\delta}{D}}{\frac{\Delta L}{L}} \quad (9)$$

其中： $\delta$  為橫向的改變量； $D$  為寬度； $L$  為長度



▲圖五、浦松比示意圖：當一可變形物體受軸向拉力 ( $P_1$ )，不只會在軸向會伸長，其軸向也會收縮；受壓縮力時則反之。

### 三、實驗設計與步驟

#### (一) 撞擊力量的施予

為了方便施予敲擊的外力，本研究使用以高中物理所學到的自由落體與碰撞原理來設計主動式撞擊系統。當樣品做自由落體時，其只受重力作用並不受高度影響，且在短距離、大質量的狀況下，可以忽略掉空氣阻力的影響，因此受力根據牛頓第二運動定律為

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \quad (10)$$



▲圖六、自由落體實驗模式

#### (二) 撞擊聲波收集與分析實驗

音頻分析元件組成軟體與硬體部分，在硬體方面有手機麥克風，程式設計方面則有 Android 手機應用程式 Sound Spectrum Analyzer、由 App Inventor 製作成的資料分析程式。



▲圖七、Sound Spectrum Analyzer App、透過 App 所記錄之實驗數據節錄

首先透過手機 App Sound Spectrum Analyzer 與 Agilent CSA Spectrum Analyzer 所測得的數據製成資料庫，再使用 Arduino IDE 開發平台，透過程式設計將資料進行運算，進而得出我們所需要的數值，並加以分析找出樣品確切成分，最後再透過電腦螢幕做為人機界面輸出數值與最終結果。

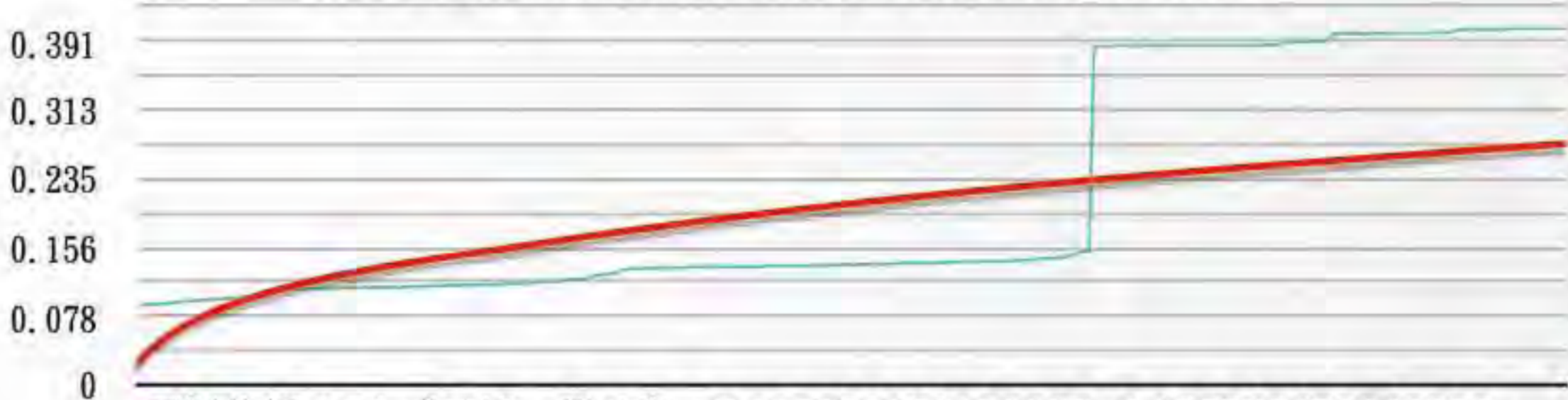


### 3.SPHC之頻譜分析實驗結果

▼表十二、SPHC之頻譜分析實驗數據

Table with 11 columns: 編號, SPHC 直徑(cm), SPHC 厚度(cm), SPHC 質量(g), 頻率. Contains 6 rows of experimental data for SPHC samples.

SPHC密度: 23.2211538461538 ± 0.608821302703727



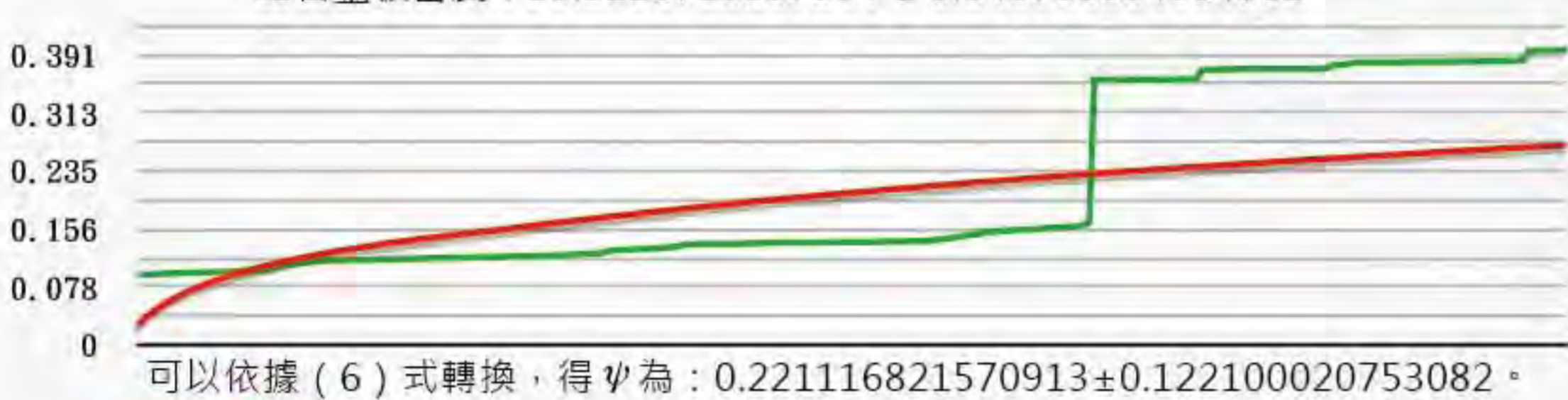
可以依據(6)式轉換,得ψ為:0.263090250169937±0.135745402248858。

### 4.鉅合金板之頻譜分析實驗結果

▼表十三、鉅合金板之頻譜分析實驗數據

Table with 11 columns: 編號, 鉅合金板 直徑(cm), 鉅合金板 厚度(cm), 鉅合金板 質量(g), 頻率. Contains 6 rows of experimental data for stainless steel plates.

鉅合金板密度: 23.3228710857534 ± 0.849789954364052



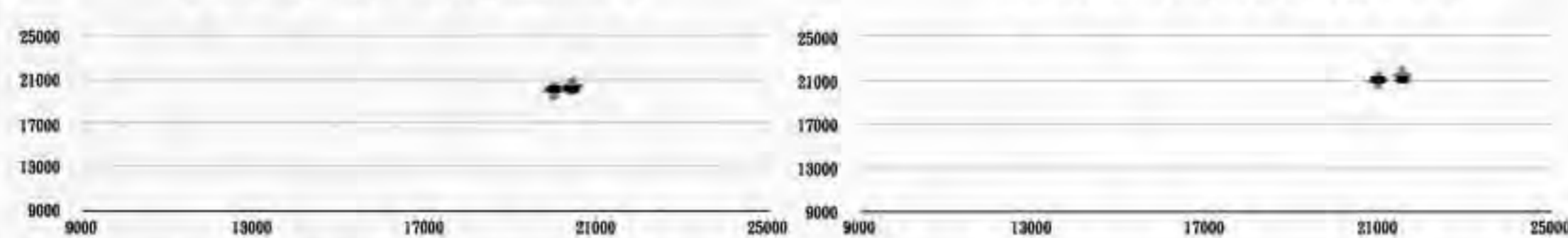
可以依據(6)式轉換,得ψ為:0.221116821570913±0.122100020753082。

## 六、混合金屬之撞擊頻譜分析實驗結果

### 1.鋁、鎂混合硬幣之頻譜分析實驗結果

▼表十四、鋁、鎂混合硬幣之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

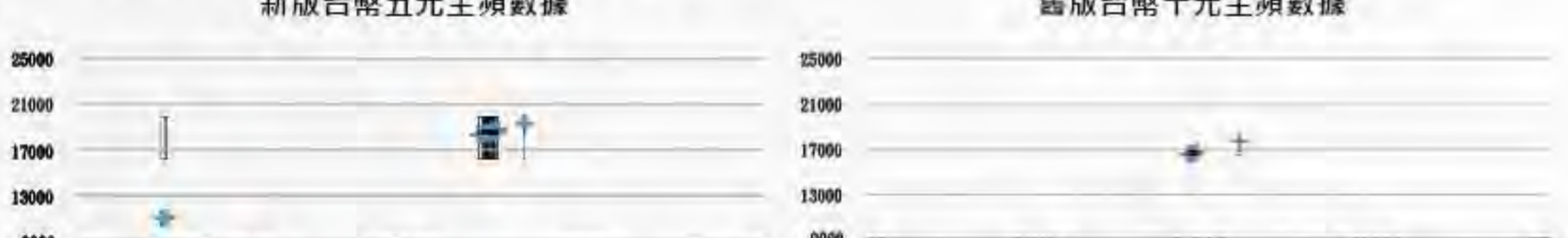
Table comparing experimental data for old and new aluminum-magnesium coins. Columns include 次數, 成分, 直徑, 厚度, 質量, 密度, and 數值.



### 2.銅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗結果

▼表十五、銅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

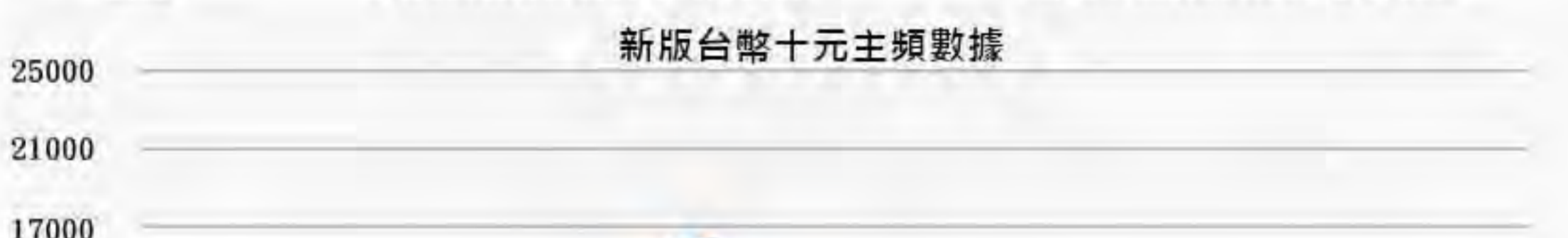
Table comparing experimental data for old and new copper-nickel coins. Columns include 次數, 成分, 直徑, 厚度, 質量, 密度, and 數值.



在新台幣十元中,發行了兩種不同雕紋的硬幣,考慮雕紋是否影響硬幣頻譜而將此二版本作出比較,得下表十六數據:

▼表十六、相同幣值不同雕紋之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

Table comparing experimental data for old and new 10 New Taiwan Dollar coins with different engravings. Columns include 次數, 成分, 直徑, 厚度, 質量, 密度, and 數值.



### 3.銅、鋅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗結果

▼表十七、銅、鋅、鎳混合硬幣之頻譜分析實驗數據與轉換後之實驗數據

Table comparing experimental data for old and new copper-zinc-nickel coins. Columns include 次數, 成分, 直徑, 厚度, 質量, 密度, and 數值.

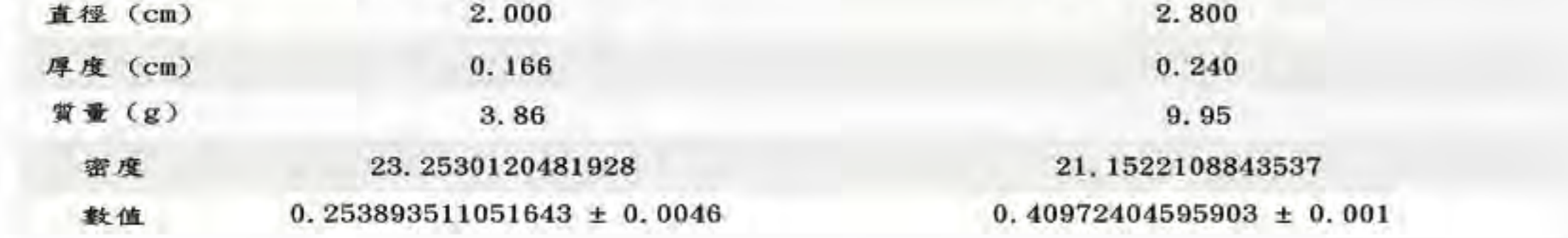


兩者相差約為0.003000006。茲考慮五角硬幣與舊版一元硬幣之鋅、鎳含量有所差異,因此誤差略大。未來若有更多樣本,我們將可以分析不同材質比例差異的數學模型,就能透過這模型分析出物體成分的確切比例含量。

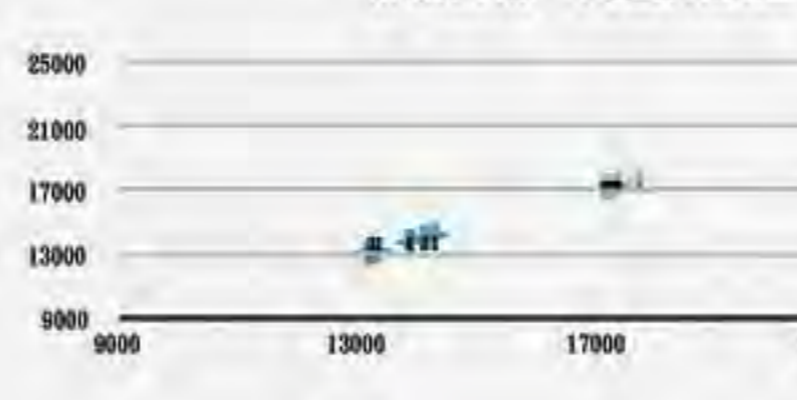
### 4.銅、鎳、鋁混合硬幣之頻譜分析實驗結果

▼表十八、銅、鎳、鋁混合硬幣之頻譜分析實驗數據

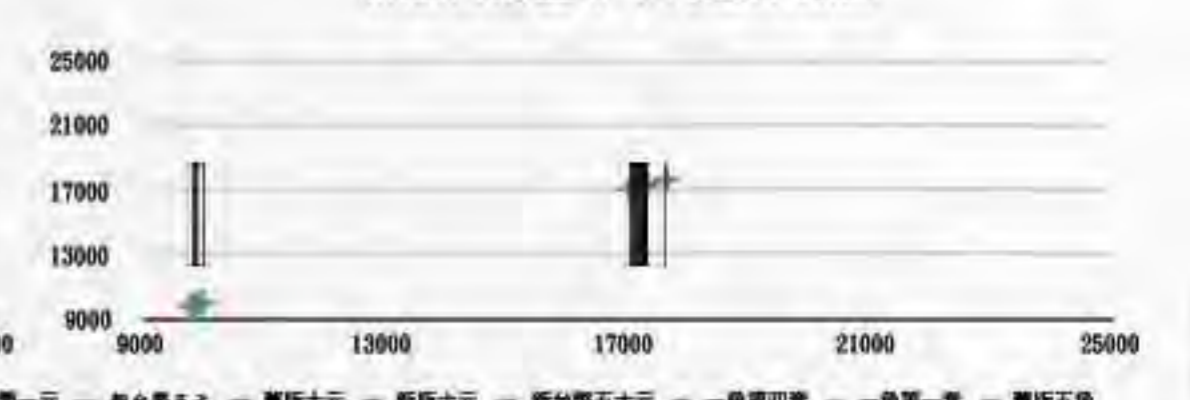
Table comparing experimental data for old and new copper-nickel-aluminum coins. Columns include 次數, 成分, 直徑, 厚度, 質量, 密度, and 數值.



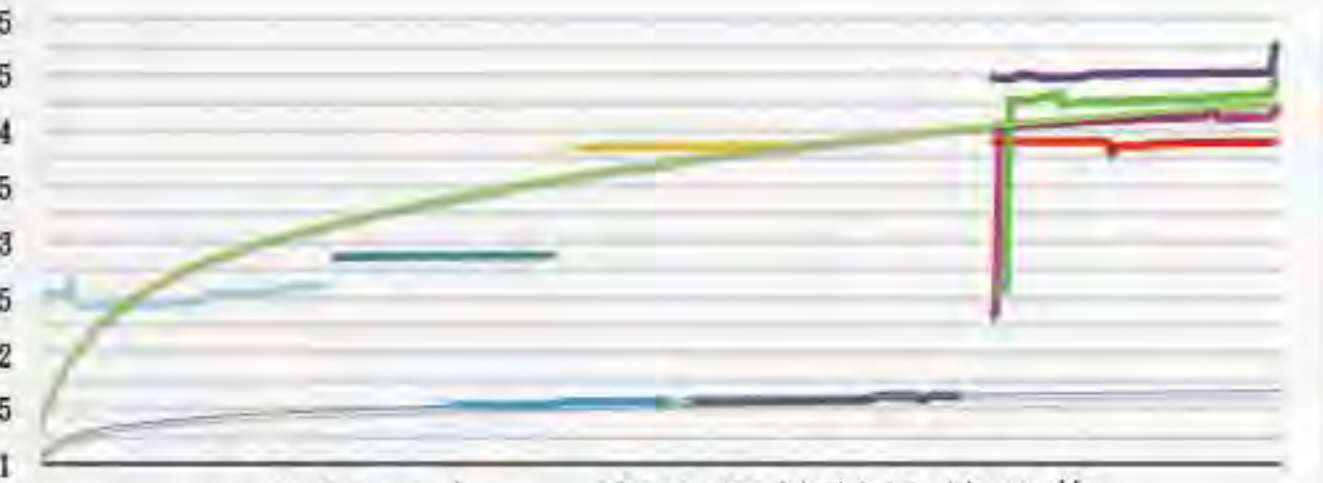
### 新版台幣一元主頻數據



### 新版台幣五十元主頻數據



最後我們將所有硬幣數據疊圖製成下圖,可以發現在0.15到0.175間有鋁質硬幣數據聚集、在方程式之間有銅質硬幣數據聚集。



▲圖二十一、各種硬幣數據線分佈

## 陸、討論

經以上實驗結果,本研究有以下幾點討論事項:

#### 1.測量之精密度討論

在測量軟體的精密度上,我們利用 Sound Spectrum Analyzer 應用程式找頻譜之主頻時,麥克風的收訊感度,以及軟體能擷取到的原始訊息屬於整數型態,若能讓顯示數值從整數型態更改成Double、Float等小數型態,將能提升測量的精密度。

#### 2.固定相的選擇實驗討論

本研究在「固定相的選擇實驗」中,發現使用相同材質支金屬圓板,在與不同材質之固定相接處後,對其頻譜頻率之影響幾乎為零。但在取樣時,本研究亦發現,相較於金屬材質固定相,塑膠材質固定相較會使樣品反彈而造成頻譜頻率數值不穩,取樣不易。因此本研究以硬鋼材質金屬塊做為統一的固定相。

#### 3.測量時撞擊固定相之反彈與頻譜數值關係討論

在測量時,我們無法讓金屬板能夠敲擊一次固定相就不再敲擊,因此考慮不同高度落下撞擊產生的頻譜是否對數值產生影響。因此我們透過「撞擊高度的影響」實驗證明出,不同高度撞擊固定相對頻譜不會有影響。

#### 4.不同落下接觸方式對頻譜分析之影響

落下的方式中,我們將之分為「面接觸落下方式」與「點接觸落下方式」。我們可以從表中看出兩者的確在數值採樣率上有落差,推測是撞擊後彈跳所照成的影響。為了符合在儀器中方便實驗,本研究主要針對「面接觸落下方式」做探討。未來期望能針對此兩項接觸方式做出轉換之模型。

#### 5.金屬圓板頻譜方式測量與組成比例之測定

本研究在金屬原板測量實驗中,透過FFT分析複合音頻,並利用「The Influence Of Poisson's Ratio On The Natural Frequencies Of Free Circular Plates」之公式調整數據,透過理論推導,得出以下幾點關係:

- (1)圓形金屬板的直徑大約以反比的關係影響其自然頻率
(2)圓形金屬板的厚度大約以1.5次方正比的關係影響其自然頻率
(3)同樣材質、不同比例之樣品,對測量結果有一定的影響



▲圖二十二、鋁、SUS、SPHC、鉅金屬與硬幣間,數值之差異

可以發現主要材質相同的樣本,如SUS、SPHC、鉅板皆以鐵為主要原料,會明顯的聚集在一起,反之便會有所區隔,因此我們便可以用來做材質辨識。

關於組成成分的部分,從表中,我們可以很明顯的發現組成成分、比例有差異之樣本對頻譜與數值的轉換有所影響,因此我們嘗試利用線性組成比例來推測成分,但每組方程式得到的各元素數據相差甚大,因此未能將混合金屬中的成分透過組成線性模型計算出來。

雖然我們只能運用Root的曲線近似來近似我們的數據,但我們依然能輕易地發現元素含量對數據所照成的影響,因此未來除了去獲得更多樣本,來分析不同材質比例差異的數學模型,我們更會從原子物理的角度進行理論的重新推導與分析,就能透過這模型分析出物體成分的確切比例含量,藉此找出每種元素都有的特定頻率,有助於對未知樣品材質的測定。

#### 6.不規則金屬板頻譜方式測量

本研究目前只能分析金屬原板狀之物體,考慮並非所有待測物皆能製成金屬圓板,因此我們使用面積來推算該形狀金屬板之理論直徑,但並未理論支持,在未來我們將繼續研究不規則物體振動時的音頻與該物體物理量的關係理論。

#### 7.自動化設計討論

本系統目前使用 Android FFT 的 App,並無法將得出的數據直接輸入至運算叢集系統運算,未來我們將繼續研究以下幾點,將系統做出最完善的整合:

- (1)透過程式設計,製出FFT程式,並讓電腦自動找出主頻,並排除因實驗操作所秀成的極端誤差來做運算與判斷
(2)改變FFT程式輸出之資料型態,將精密度提升
(3)繼承 Sound Spectrum Analyzer 應用程式之「紀錄最大數值」的功能,讓研究人員與腦能容易在快速分析下找出最需要的數值

#### 8.機器學習演算法討論

本研究係透過嚴謹的物理學推論,並設計許多實驗來驗證,且將諸多實驗數據輸入至電腦運算,最後透過人力總結出材質頻譜的規律。我們亦有思考到機器學習技術在本研究的應用性,經過一連串的討論後,首先我們將使用 Supervised Learning 中 Normal Equation 方式將數據透過電腦直接運算,找出最佳的假設函數(回歸曲線, Hypothesis Function)。

Supervised Learning 中有兩種主要的演算法:Normal Equation 演算法、Gradient descent 演算法。而 Normal Equation 演算法相對於 Gradient descent 演算法有以下幾點特質:

- (1)Normal Equation 演算法不用選擇學習速率(Learning Rate)
(2)速度快,無需太多迭代步驟(Iterations)
(3)資料特徵少時,效率十分高。

而本研究之數據特徵只有四項,因此十分符合 Normal Equation 運算的特性。所謂 Normal Equation 即是將資料建立成二選張量形式,再透過一連串的運算找出假設函數的一迭參數張量,而我們使用的張量方程式如下: h\_0(x) = E^T X (12) 其中, E^T 為假設函數之一迭參數張量的轉移張量; X 為各種資料建立而成的二選張量,因為本研究只有四個資料特徵,加上特徵向量之定義 θ\_0 = 1 (0 ≤ i ≤ m, i ∈ Z),因此此張量將會是 m\*5 的矩陣, m 為資料量。

而一迭參數張量 E 可透過下式求得: E = (X^T X)^-1 X^T Y (13) 其中 Y 為資料庫中透過公式(6)所運算出數值組成的一迭張量。

我們將在未來使用 C、C++ 等開發環境,撰寫相關函式庫,並持續學習 Unsupervised Learning、Deep Learning 和 AI,期望能將人工智慧技術應用於材料科學與辨識上,大大的減少人力成本。

## 柒、結論

本研究透過一連串的實驗及數據分析,成功的歸納出不同金屬圓板撞擊固定相所產生的頻譜,並製成資料庫,使實驗系統化,並提出結合目前科技趨勢——機器學習、深度学习與人工智慧研究的可能性,讓本研究擁有無限的未來發展趨勢。

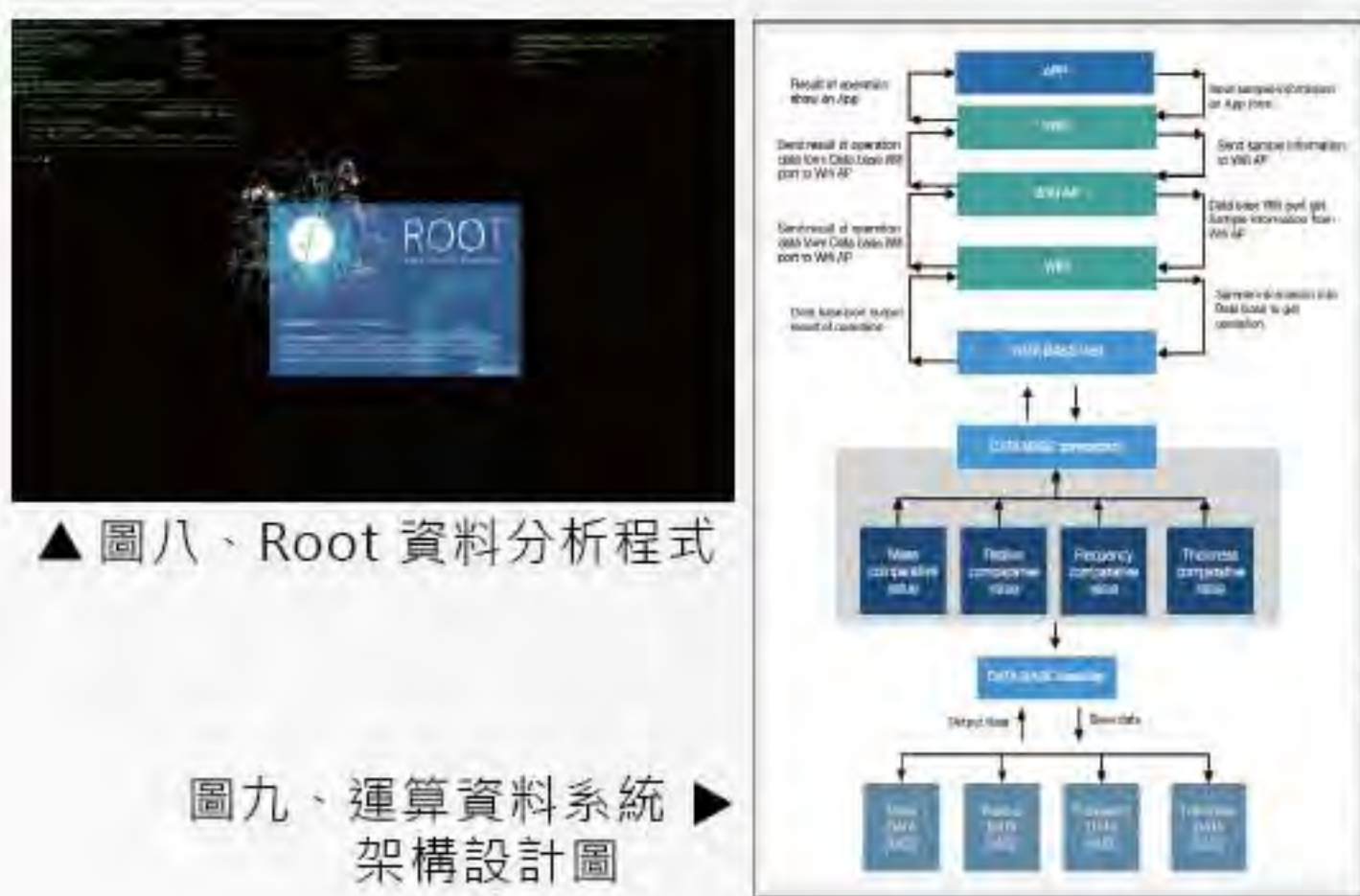
在這次的科展研究中,本團隊費了許多時間與心思去設計製作,收穫甚多,我們不但學習專業資料分析程式 Root,更參與了線上機器學習的課程來協助研究,此外,我們除了在程式撰寫上有較多的磨練,也對材料學方面有更深的理解與認識,更讓我們學習到要如何規劃工作進度,並面對問題與困難商討解決的對策,在一次又一次的磨練後,得到的成就是甜美的,最後也讓本團隊互相做經驗交流,提升彼此研究與創造力,相對對未來的生涯產生不少的助益!

## 捌、參考資料

- 一、中文部分
1.蔡秉良(2013)。金屬材料振動波形、阻尼及振動頻率之研究
2.【Super】維修物理(上)課堂講義。聲音的共鳴 3.3小時講通稀有金屬(2011/05/26)
4.金屬-有機框架材料(2017/11/01) 5.快速傅里葉變換:算法與應用(2016/09/01)
二、網路資源
1. Fourier transform (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自:https://www.facebook.com/#https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier\_transform
2. Discrete Fourier transform (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自:https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\_Fourier\_transform
3. Fast Fourier transform (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自:https://en.wikipedia.org/wiki/Fast-Fourier\_transform
4. amped sine wave (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自:https://en.wikipedia.org/wiki/Damped\_sine\_wave
5. Damping ratio (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自:https://en.wikipedia.org/wiki/Damping\_ratio
6. Vibration (無日期)。維基百科。2018年2月28日。取自:https://en.wikipedia.org/wiki/Vibration
7. What Is FFT and How Can You Implement it on an Arduino? (August 10, 2017)。norwegiancreations.com。2018年2月28日。取自:https://www.norwegiancreations.com/2017/08/what-is-fft-and-how-can-you-implement-it-on-an-arduino/
8. 演算法筆記-Wave (無日期)。國立臺灣師範大學實工系。2018年2月28日。取自:http://www.csie.ntnu.edu.tw/~u91029/Wave.html
9. 中華民國第四十六屆中小學科學展覽會高中組物理科 龍銀的祕密-圓形金屬板振動頻率的探討,取自:https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/senior/0401/040102.pdf
10. 金屬材料振動波形、阻尼及振動頻率之研究。取自:http://www.shs.edu.tw/works/es-say/2013/10/2013100911440303.pdf
11. 如果看了此文你還不懂傅里葉變換 http://blog.xuite.net/lapuda.chen/PaulBlog/221866406-如果看了此文你還不懂傅里葉變換 %28Fourier+Transform%29,那就過來掐死我吧
12. 採用USRP軟體無線電及FFT-based通頻分離器之合作式寬頻頻譜感知系統實現,取自:http://hdl.handle.net/11296/arkh5
13. 机器学习-斯坦福大学|Coursera,取自:https://www.coursera.org/learn/machine-learning/home/info



有了大量數據後，我們使用ROOT資料分析程式來整理我們的數據。ROOT是由CERN開發的物件導向程式和函式庫。它最初設計用於粒子物理數據分析，現今它也用於其他諸多領域，如天文學和資料探勘。



### (三) 運算資料系統

運算資料系統分成軟體與硬體部分，在硬體方面有 Arduino 開發板、LCD 中央控制介面、Wifi、藍牙等；程式設計方面則有 ATSAM3X8E 晶片的韌體程式達成底部通訊。

圖九、運算資料系統架構設計圖

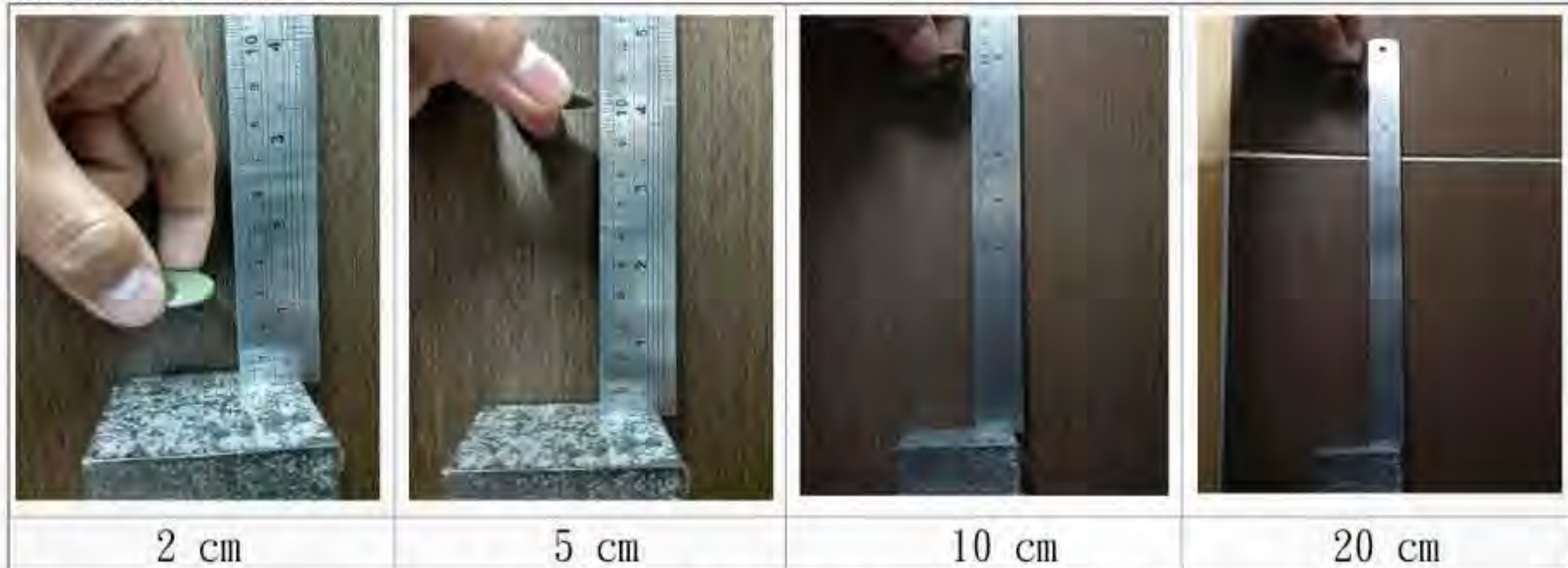
### (四) 固定相的選擇實驗

為了選擇能當固定相的平板，我們決定設計以下實驗來測試不同材質的固定相對頻譜分析的影響：我們使用塑膠砧板、碳鋼質量塊與木板來對同樣品在同狀況下的FFT分析。



### (五) 撞擊高度的影響

考量樣品在不同高度下掉落所產生的誤差，我們實驗了以下幾種不同的高度來探討樣品落下高度對頻譜分析的影響。



### (六) 樣品撞擊方式與頻譜分析實驗

考量樣品在不同方式撞擊固定相平板所照成的誤差，因此決定透過以下實驗來檢測不同撞擊方式對頻譜分析的影響：我們使用舊版十元硬幣（頻譜落於的範圍內），再利用高數攝影機捕捉掉落方式：在第一次撞擊平板後以面接觸落下方式和點接觸落下方式兩種不同的形式，使用主動式撞擊頻譜分析儀檢測兩者頻譜差異。



### (七) 金屬之撞擊頻譜分析實驗

我們使用以下幾種金屬來進行本項實驗：

圖片	名稱	鋁合金板	SUS 不鏽鋼	SPHC 熱軋鋼板	鍍板
	鋁合金板				
	SUS 不鏽鋼				
	SPHC 熱軋鋼板				
	鍍板				

#### 1. 鋁合金板

鋁合金在現在工業上應用甚為廣泛，主要原因有質輕、具良好耐蝕性、成形性、表面處理性和良好的導電性、導熱性。

▼表三、擠型、鍛造、沖壓、車床加工用鋁合金成份表

系列	成份
1000系列	99.00%以上Al
2000系列	Cu+Al
3000系列	Mg+Al
4000系列	Si+Al
5000系列	Mg+Al
6000系列	Mg+Si+Al
7000系列	Mg+Zn
8000系列	其他

本研究使用之鋁合金1000系列之金屬，可類比為純鋁。

#### 2. SUS SPHC 熱軋鋼板

SPHC是由鋼胚加熱，經軋軋機及精軋機軋延，桿成固定寬度鋼板，用水冷卻，將經過的壓研寬度固定但長度變成很長的鋼板捲取，成為鋼捲，此鋼捲為熱軋鋼捲（SPHC），因加水冷卻，會在鋼板表面形成反應物（外觀成黑色），所以俗稱「黑皮料」。

#### 3. 鍍板

「鍍」的日語發音近於閩南語發音的「鍍」，因此鋁合金板實際上為鍍鋅鋼板。絕大部分鍍鋅鋼板會以熱浸或電鍍方式，在其外層覆上鋅層，表面鍍鋅層較厚，藉以隔絕金屬的氧化作用，使鋼材具有防腐、防鏽、防蝕的功能，不僅可延長鋼製品的使用壽命，也具有美化效果。

### (八) 混合金屬之撞擊頻譜分析實驗

我們使用以下幾種硬幣來當作混合金屬進行本項實驗。

圖片	名稱	成分
	舊版一角硬幣	鋁幣(含錳1%)
	新版一角硬幣	鋁幣(含錳1%)
	舊版五角硬幣	銅幣(含錳27%、錳1%)
	新版五角硬幣	銅幣(含錳27%、錳1%)
	新版一元硬幣	銅幣(含錳6%及鋁2%)
	新版一元硬幣	銅幣(含錳6%及鋁2%)
	新版五元硬幣	銅幣(含錳25%)
	新版五元硬幣	銅幣(含錳25%)
	新版十元硬幣	銅幣(含錳25%)
	新版十元硬幣	銅幣(含錳25%)
	新版五十元硬幣	銅幣(含錳2%)及鋁6%)
	新版五十元硬幣	銅幣(含錳2%)及鋁6%)

▲圖十三、混合金屬之撞擊頻譜分析實驗樣本

## 伍、研究結果

本研究經反覆實驗的研究結果如下：

### 一、儀器的整合與撞擊聲波收集與分析實驗結果

本研究將所有樣品皆製成相同規格的試片，因此使用主動式撞擊系統即可達成目的。為使實驗能更加方便與後續資料庫建構之穩定，本團隊一共改良三代設計，每代的更改及週邊相關原因而持續做修改的作動。以下為三代改良過程研究結果：

#### 第一代：簡易型材質頻譜分析儀

本代實驗儀器主要是方便實驗人員製作小型數據庫而設計，透過人力辨識數據，將極端值以人力方式刪除，以利實驗的進程。

▲圖十四、簡易型材質頻譜分析儀

▼表四、第一代材質頻譜分析儀優點缺點列表

優點	缺點
無複雜技術含量，可供一般人員自行架設與操作	數據調整對於人力來說過於複雜且重複性高，不但浪費人力，更使在樣本數極大或是建設大型資料庫時無法展現其效率

### 第二代：圓盤帶動機構材質頻譜分析儀

本代實驗儀器經過第一代的測試，我們試圖將主要功能留下，並以最少人力方式來達成目的。因此在數據分析上，我們利用筆記型電腦的試算表功能做出一套輸入介面，讓實驗數據能輸入至介面中，透過電腦幫我們運算，我們用3D繪圖技術設計一個帶動原盤機構，透過馬達帶動，讓樣品在平台上隨著圓盤帶動至缺又處掉落在固定相上，再由手機App測量其主頻。



▼表五、第二代材質頻譜分析儀優點缺點列表

優點	缺點
減輕人力負擔，可估算撞擊力道	樣品彈跳方式不一，造成多數為點接觸碰撞，與本實驗所求不一致，易造成電腦誤讀垃圾數據，導致實驗崩潰

### 第三代：含 GUI 之材質頻譜分析儀

本代實驗儀器，將上代電腦輸入介面轉換成自製單晶片系統程式，並透過 UART 通訊技術，將實驗數據傳到運算叢集系統中，透過自製的演算法比較實驗數據與資料庫中之資料，找出相符之項目。

我們透過自製的材質頻譜分析儀，讓實驗人員能方便的將待測樣品的半徑、厚度、主頻、質量透過 GUI 輸入程式碼中進行運算，並將結果回傳於儀器上的 20\*4 LCD 液晶螢幕中顯示予實驗人員確認；若確認無誤，則將這筆資料加進資料運算叢集中，增加內建的資料樣本數，以求更加精準的數據。



▲圖二十、運算叢集程式節錄

▼表六、第三代材質頻譜分析儀優點缺點列表

優點	缺點
使用程式設計出的演算法含有消除極端值之功能，並且可以將資訊回傳給實驗人員確認，透過此一機制，不但能將資料庫以精準的數值擴充，增加其可信度，更是大大節省實驗的時間。	此一設計，必然是要有先前兩代所打下的基礎：完善的資料庫

### 二、固定相的選擇實驗結果

▼表七、固定相的選擇實驗數據

次數	塑膠質	碳鋼質	木質
1	17420	17334	17484
2	17420	17312	17334
3	17441	17334	17441
4	17441	17506	17334
5	17355	17441	17355
6	17377	17420	17355
7	17334	17334	17420
8	17483	17312	17420
9	17334	17355	17463
10	17441	17441	17398

### 三、樣品撞擊方式與頻譜分析實驗結果

▼表八、樣品撞擊方式與頻譜分析實驗數據

次數	面接觸落下方式	點接觸落下方式
1	17420	17398
2	17441	17398
3	17441	17377
4	17355	12661
5	17334	9560
6	17312	17291
7	17355	17420
8	17441	17377
9	17312	19164
10	17441	9819

### 四、撞擊高度的影響實驗結果

▼表九、撞擊高度的影響實驗數據

次數	3cm	10cm	20cm	25cm
1	17355	17441	17441	17420
2	17441	17506	17334	17441
3	17355	17441	17355	17355
4	17377	17420	17355	17441
5	17334	17441	9560	17355
6	17355	17420	17291	17420
7	17355	17441	9819	9560
8	17441	17355	17420	17441
9	17355	17420	17441	17355
10	17334	17441	17441	9819

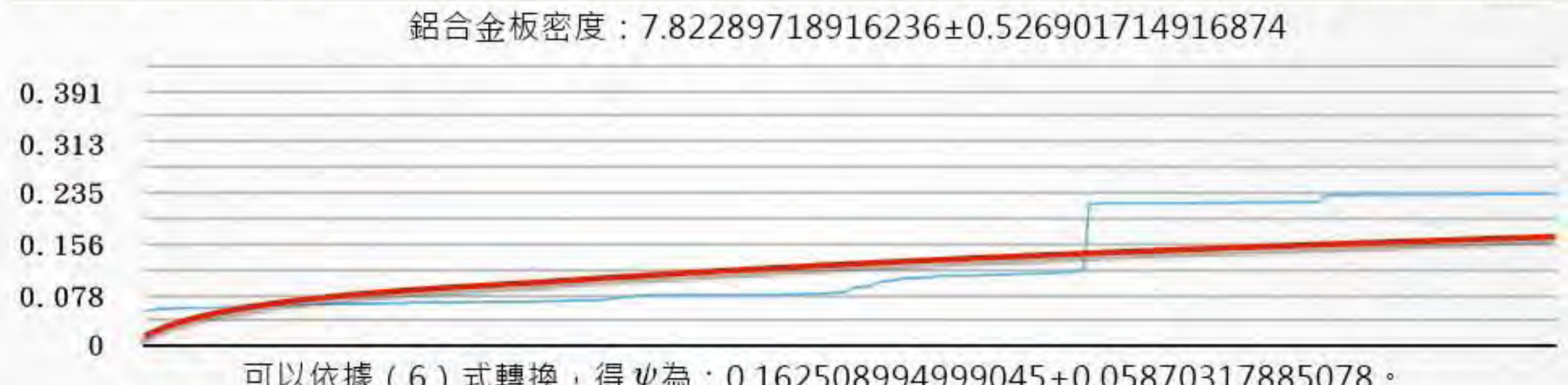
### 五、金屬之撞擊頻譜分析實驗結果

#### 1. 鋁合金之頻譜分析實驗結果

▼表十、鋁合金板之頻譜分析實驗數據

編號	鋁合金板直徑 (cm)	鋁合金板厚度 (cm)	鋁合金板質量 (g)	頻率											
1	2.434	0.303	3.59	9250	9582	9302	9711	9625	9410	9280	9345	9689	9410		
2	2.200	0.310	3.03	10637	10185	10206	10702	10228	10292	10206	10163	10615	10486		
3	2.025	0.300	2.50	10732	10685	10357	10206	10163	10981	10852	10379	10745	10456		
4	2.435	0.200	2.41	17291	17441	17377	17355	17463	17312	17463	17398	17377	17441		
5	2.215	0.206	2.02	20456	20628	20628	20564	20607	20499	20542	20650	20650	20456		
6	2.225	0.204	1.68	10206	10335	10788	10852	10271	10379	10379	10680	10702	10981		

鋁合金板密度：7.82289718916236±0.526901714916874



#### 2. SUS之頻譜分析實驗結果

▼表十一、SUS之頻譜分析實驗數據

編號	SUS直徑 (cm)	SUS厚度 (cm)	SUS質量 (g)	頻率											
1	2.415	0.315	10.69	9173	9668	9797	9108	9194	9745	9474	9754	9431	9689		
2	2.210	0.312	8.99	10120	10228	10163	10142	10206	10465	10292	10776	10422	10206		
3	2.030	0.300	7.45	10852	10938	10456	10745	10809	10572	10702	10163	10551	10960		
4	2.405	0.200	7.07	17509	17118	17441	17463	17484	17506	17463	17441	17118	17118		
5	2.215	0.200	5.59	20241	20628	20650	20241	20671	20671	20241	20628	20241	20219		
6	2.010	0.200	4.93	11326	11347	11197	11412	11391	11034	11326	11132	11347	11089		

SUS密度：23.7695975857419 ± 0.607378952126234

