

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051814

由克拉德尼圖形探討會變的波速

學校名稱：國立金門高級中學

作者： 高三 楊惇景 高三 張蕭云	指導老師： 李育賢 李哲承
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：克拉德尼、平面共振、駐波

摘要

本實驗以銅板、不鏽鋼板、壓克力板、膠合木片與塑膠瓦楞板，以雷射雕刻機切割不同直徑圓板來實驗，並以高中物理方式簡化克拉德尼圖形理論，並由各種材料的同心圓板振出克拉德尼圖案，找到與理論相近的實驗結果。

實驗中發現許多與高中物理課本中理論的矛盾之處：

- (1)若要用高三物理的直線駐波公式找到材料波速，需要經過重力的修正項。
- (2)壓克力片只能振出同心圓的克拉德尼圖案，木片和塑膠瓦楞板則無法振出同心圓圖案。
- (3)不論任何材料，頻率的改變皆會影響波速。

本次科展的過程發現，網路上多為金屬板的克拉德尼圖案，極少壓克力與同心圓板材的實驗數據，實驗後發現，各式板材的速率與圖形的變化與銅板稍有不同，可做為不同材料間的比較依據。

壹、 研究動機




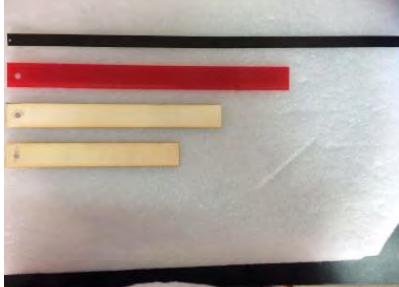
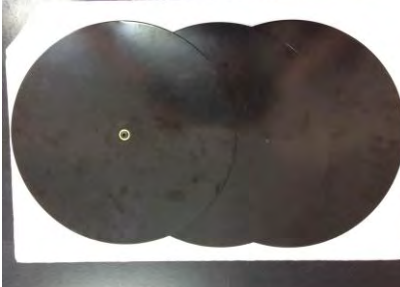
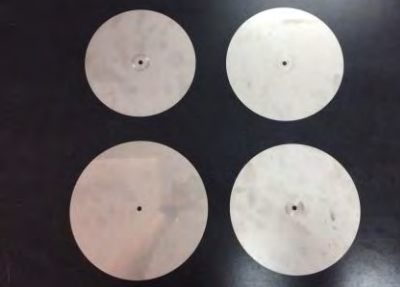
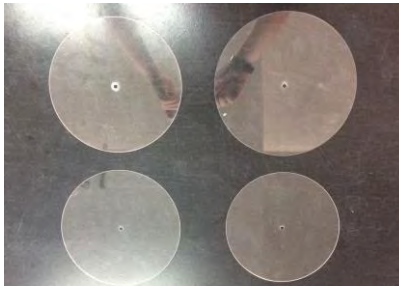
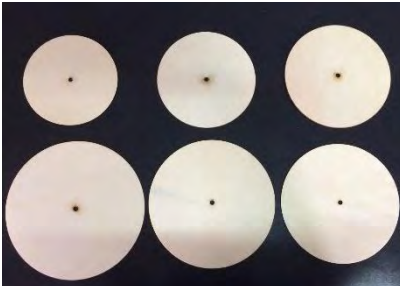
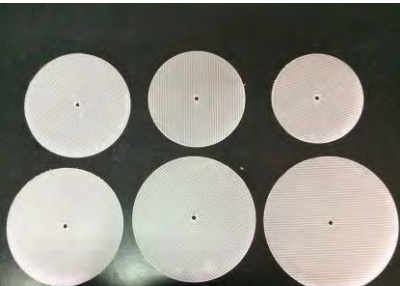
高二的物理課程教到駐波單元時，老師提及一些簡單的現象，下課時，向老師詢問有關駐波的一些疑惑及問題後，我們對駐波有了更深的印象和了解。利用準備學測的及課後的空閒時間，我們到老師辦公室看了許多有關駐波的影片及原理分析，並且在老師的帶領下認識了許多駐波所產生的現象，其中之一就是著名的「克拉德尼圖形」，於是我們便開始著手進行對此現象的研究和實驗，因為各式各樣的共振圖案非常的多，且很多規律性都難以捉摸，所以將研究重點放在其所形成的同心圓的圖形，並運用學校創客教室的資源來訂做板子，由試驗不同材質和實驗方式，來對照理論或得到新的發現。

貳、 研究目的

國高中物理課本提到，材料決定物體的波動速率，與頻率無關，但我們發現克拉德尼圖形卻在固定的頻率下，不同的區間卻有著不同的速度變化，經過許多中英文的文獻查詢後，發現沒有太多相關系統性的資料，於是我們花很多時間找到參數，並訂做各式的板材，進而探究各式大小、材料與紋路的圓板，做出第一個圓板的克拉德尼資料庫。

- 一、比較同一均勻板材的波速變化
- 二、比較具有向性之板材的圖形變化
- 三、克拉德尼圖形實驗現象理論推導
- 四、探討圓板在不同頻率下的波速差異
- 五、探討圓板尺寸與頻率的關係

參、 研究設備及器材

雷射切割機	正弦波產生器	沙子
		
銅條、壓克力條、木條	銅板 3 片	不鏽鋼板，各尺寸 2 片
		
1mm 壓克力板，各尺寸 2 片	膠合木板，各尺寸 2 片	塑膠瓦楞板，各尺寸 2 片
		

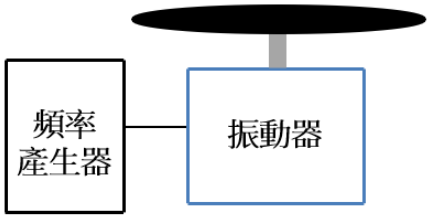

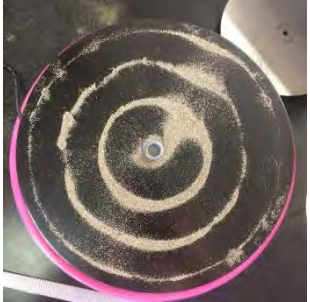

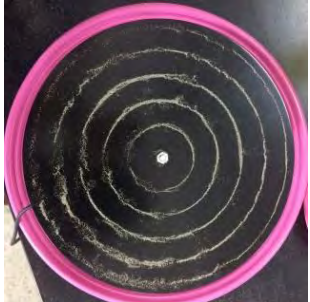
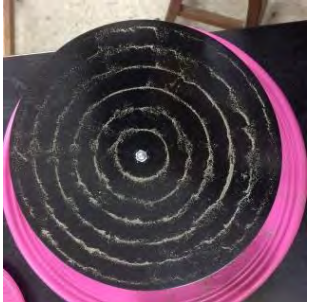
肆、 研究過程及方法

- 一、我們從日常生活中收集各種不同材質的圓板，利用正弦波產生器在圓板上製造出不同頻率的波，並在找到能振出駐波的幾個頻率後，觀察各個頻率所造成的駐波會使沙子在圓板上呈現什麼圖案，以及測量呈現同心圓圖案時各圈寬度的改變。

(一) 銅板，直徑 25cm，有編號為 A、B、C 三片相同大小

網路上以此方法觀察駐波的研究大多是使用銅板做為材料，因此一開始我們先利用器材內所附的圓形銅板來做實驗。

1. 同心圓

實驗裝置	f=365 Hz	f=710 Hz
<p data-bbox="309 338 437 371">實驗圓盤</p>  <p data-bbox="261 501 357 568">頻率產生器</p> <p data-bbox="469 501 564 546">振動器</p>		
f=1165 Hz	f=1754 Hz	f=2408 Hz
		

本文所有的間距皆由+x、+y、-x、-y(如下圖所示)四個方向所測量平均而得



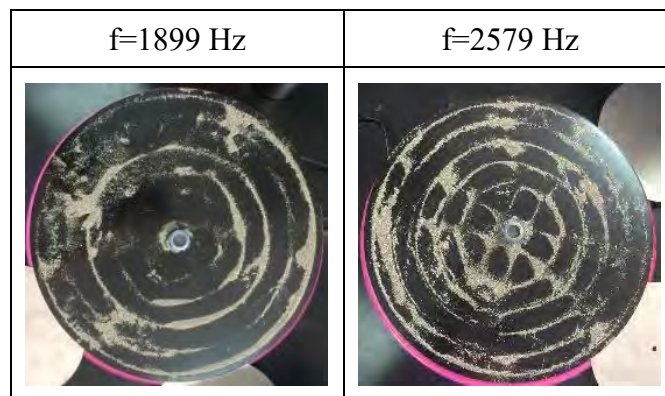
- 【註 1】本作品的共振圖案因板面反光緣故，只能盡可能由正上方拍攝，而略有扭曲
- 【註 2】透明壓克力板拍照要明顯，圖案的拍攝角度會更大，且易有靜電所以粉量較多
- 【註 3】參考資料四論文指出，粉量與顆粒大小不影響共振頻率，只影響成形的時間

25cm 銅盤各頻率的平均波速。區間平均波速 = 頻率 × 半波長平均值 × 2



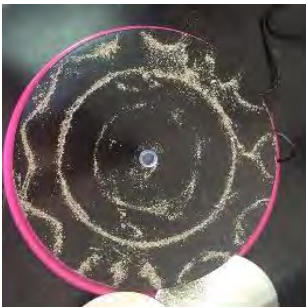
頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值(cm)	區間平均波速(cm/s)
365	0~1	6.3	6.3	6.3	6.3	6.3	4599
	1~2	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	3285
710	0~1	4.8	4.8	4.8	4.8	4.8	6816
	1~2	3.6	3.5	3.6	3.6	3.575	5076.5
	2~3	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	4260
1165	0~1	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	8854
	1~2	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	6291
	2~3	2.6	2.5	2.5	2.5	2.525	5883.25
	3~4	2.3	2.3	2.3	2.4	2.325	5417.25
1754	0~1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	10874.8
	1~2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	7717.6
	2~3	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	7366.8
	3~4	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	7016
	4~5	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	6314.4
2408	0~1	2.5	2.5	2.6	2.5	2.525	12160.4
	1~2	2.0	2.1	2.1	2.0	2.05	9872.8
	2~3	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	9632
	3~4	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	9150.4
	4~5	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	8187.2
	5~6	1.6	1.6	1.7	1.6	1.625	7826

由以上的數據可以發現，當沙子的圖案為同心圓時，各圈的寬度由內到外漸漸減小，因而波速也由內向外漸漸變慢，會與之後所用的理論預測的情況相同。

2. 非同心圓



在頻率較高的時候產生共振時，會有一定機率產生上兩張圖的情形，雖然圖形仍是由同心圓共振所形成，另出現均等分的共振，且共振的頻率不屬於剛剛所提到的同心圓頻率。

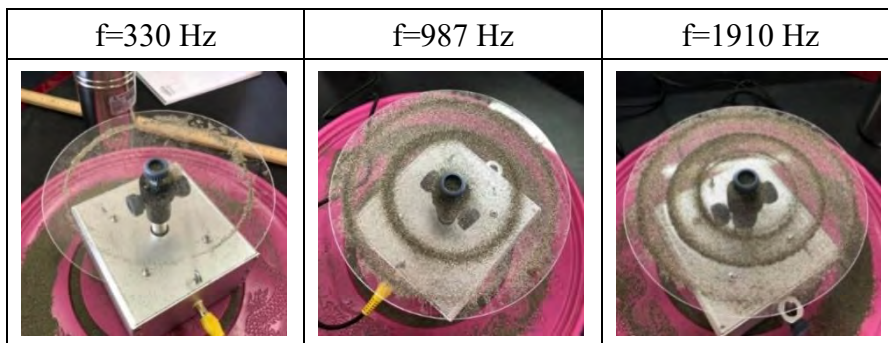
銅板 B	頻率	f=419 Hz	f=500	f=771 Hz
	圈數	同心圓 2→3 之間產生	同心圓 2→3 之間產生	同心圓 3→4 之間產生
	圖形			

由於銅板會出現對稱性共振，當頻率較低頻的時候，兩個相鄰同心圓頻率中間時會因為對稱性共振和同心圓共振之間互相交互作用，而有機會產生以上的圖案。

(二) 1 mm 壓克力板

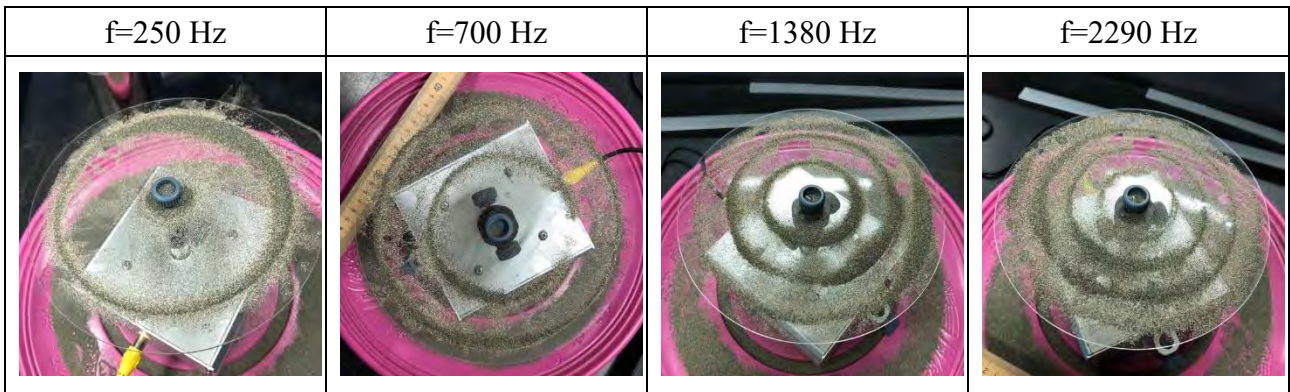
為了找到其中頻率的規律，我們利用學校的雷射切割機裁切出不同半徑長的圓形壓克力板，並試圖從不同大小的圓板所振出的駐波中探討圓板尺寸大小與駐波是否具有相關性。

1. 直徑 16 公分



頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
330	0~1	6.1	6.1	6.1	6.1	6.1	4026
987	0~1	4.7	4.6	4.7	4.7	4.675	9228.45
	1~2	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	4540.2
1910	0~1	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	12224
	1~2	1.9	1.9	2.0	1.9	1.925	7353.5
	2~3	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	7258

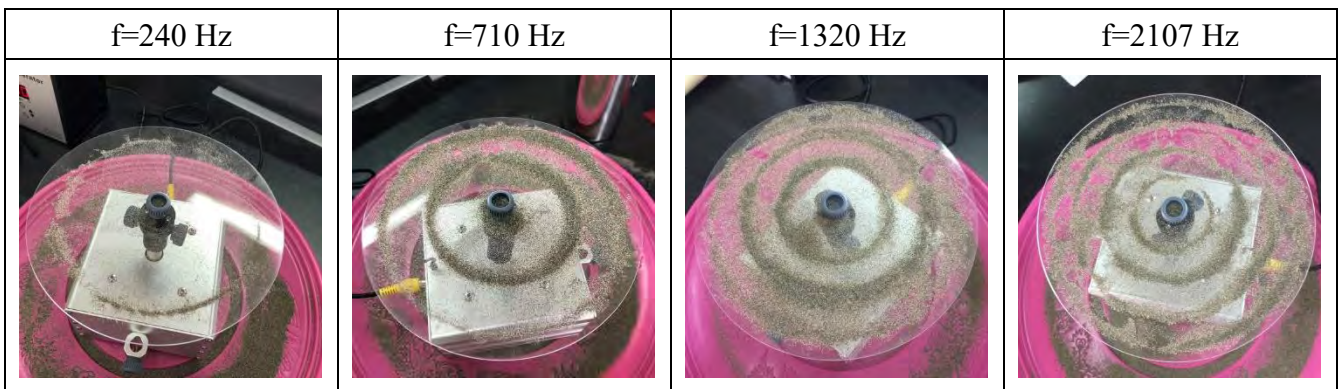
2. 直徑 17 公分



頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
250	0~1	6.6	6.6	6.6	6.6	6.6	3300
700	0~1	4.6	4.7	4.6	4.6	4.625	6475
	1~2	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	3780
1380	0~1	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	8832
	1~2	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3	6348
	2~3	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	5796
2290	0~1	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	10992
	1~2	1.8	1.9	1.9	1.9	1.875	8587.5
	2~3	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	7786
	3~4	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	7328

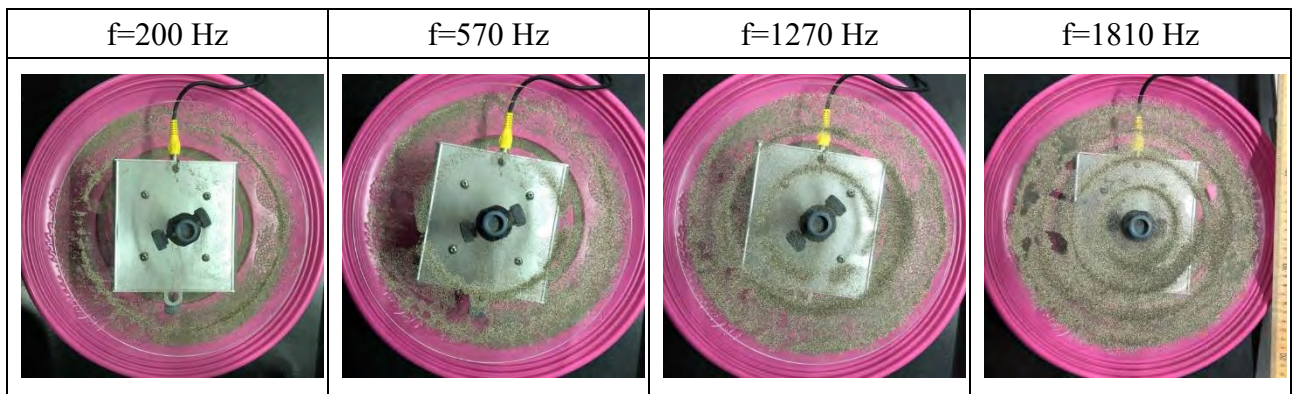
我們可以由以上的數據得知，各圈的寬度由內到外漸漸減小，因而波速也由內向外漸漸變慢，會與之後所用的理論預測的情況相同。

3. 直徑 18 公分



頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
240	0~1	6.8	6.8	6.9	6.8	6.825	3276
710	0~1	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	6106
	1~2	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	4260
1320	0~1	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	8712
	1~2	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	6600
	2~3	2.1	2.0	2.1	2.1	2.075	5478
2107	0~1	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	11799.2
	1~2	2.1	2.1	2.1	2.0	2.075	8744.05
	2~3	1.5	1.6	1.6	1.5	1.55	6531.7
	3~4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	5899.6

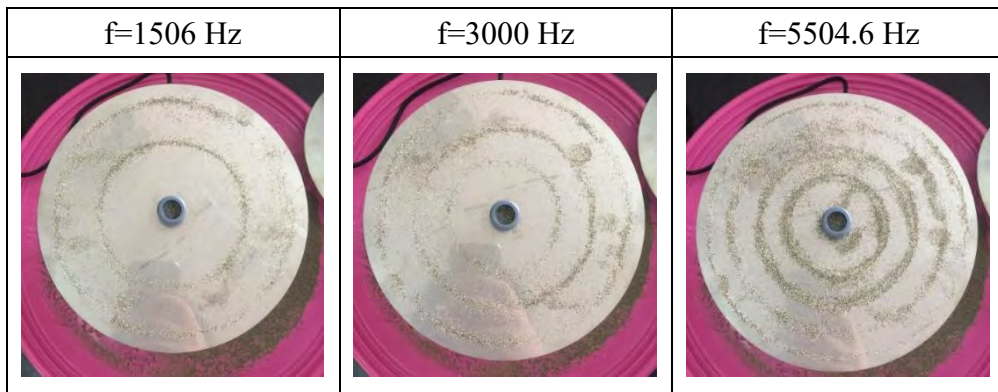
4. 直徑 19 公分



頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
200	0~1	7.4	7.5	7.4	7.4	7.425	2970
570	0~1	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5700
	1~2	3.1	3.0	3.0	3.1	3.05	3477
1270	0~1	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	7112
	1~2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	5588
	2~3	2.0	2.1	2.0	2.0	2.025	5143.5
1810	0~1	2.8	2.8	2.7	2.8	2.725	9864.5
	1~2	2.0	2.0	2.0	2.0	2	7240
	2~3	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	6878
	3~4	1.8	1.8	1.9	1.8	1.825	6606.5

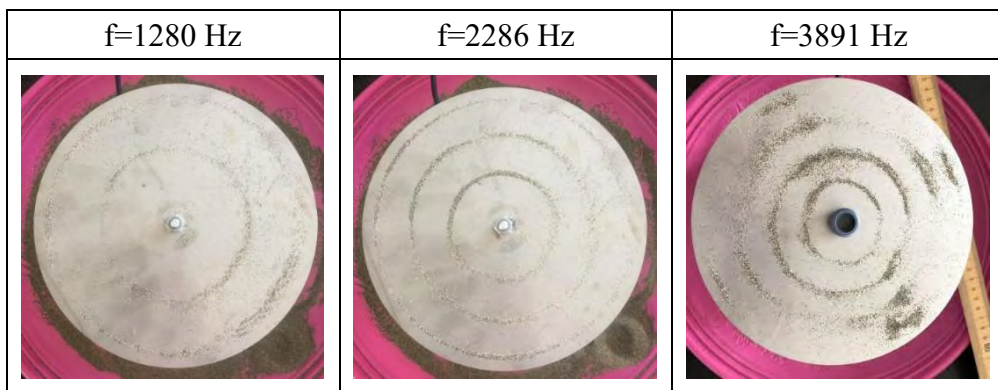
(三) 不鏽鋼

1. 直徑 16 公分



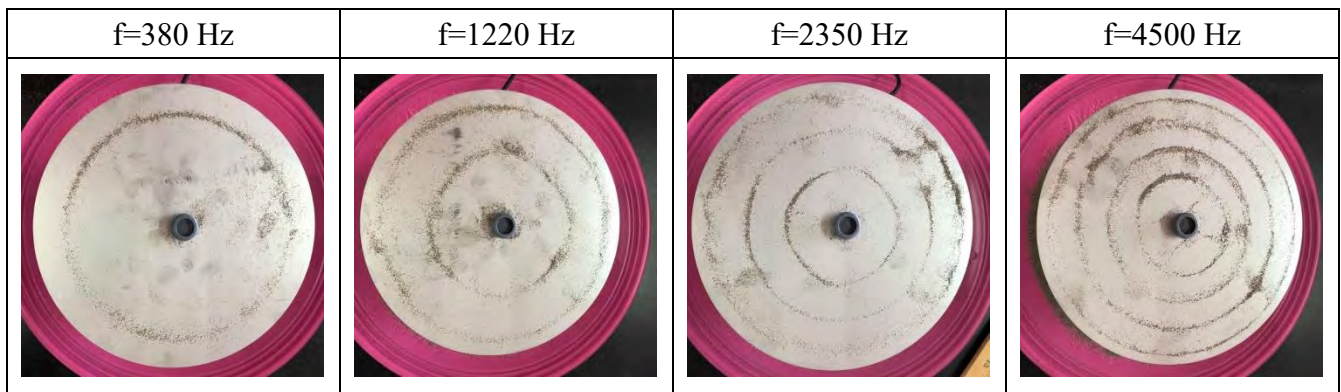
頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
1506	0~1	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	13554
	1~2	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	7530
3000	0~1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	18600
	1~2	1.9	2.0	1.9	1.9	1.925	11550
	2~3	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	10800
5504.6	0~1	3.0	3.0	3.0	3.1	3.025	33302.83
	1~2	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	16513.8
	2~3	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	15412.88
	3~4	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	14311.96

2. 直徑 17 公分



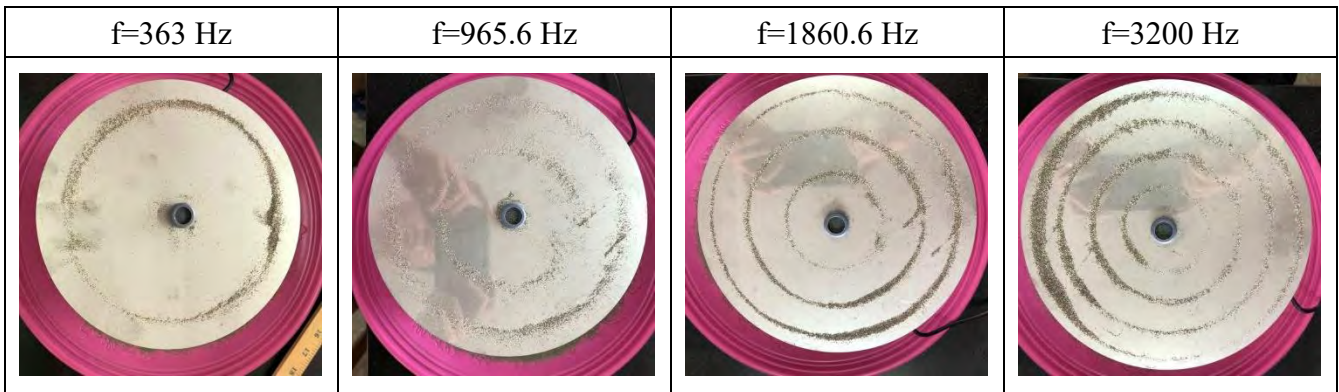
頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
1280	0~1	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	11520
	1~2	3.4	3.3	3.3	3.3	3.325	8512
2286	0~1	3.2	2.9	2.8	3.1	3.0	13716
	1~2	2.6	2.5	2.5	2.4	2.5	11430
	2~3	2.1	2.3	2.2	2.2	2.2	10058.4
3819	0~1	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	16803.6
	1~2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	14512.2
	2~3	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	13748.4
	3~4	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	12984.6

3. 直徑 18 公分



頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
380	0~1	7.7	7.8	7.7	7.7	7.725	5871
1220	0~1	4.7	4.7	4.7	4.7	4.7	11468
	1~2	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0	7320
2350	0~1	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	15980
	1~2	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	11280
	2~3	2.0	2.1	2.1	2.1	2.025	9517.5
4500	0~1	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	28800
	1~2	1.9	1.9	1.9	2.0	1.925	17325
	2~3	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	15300
	3~4	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	13500

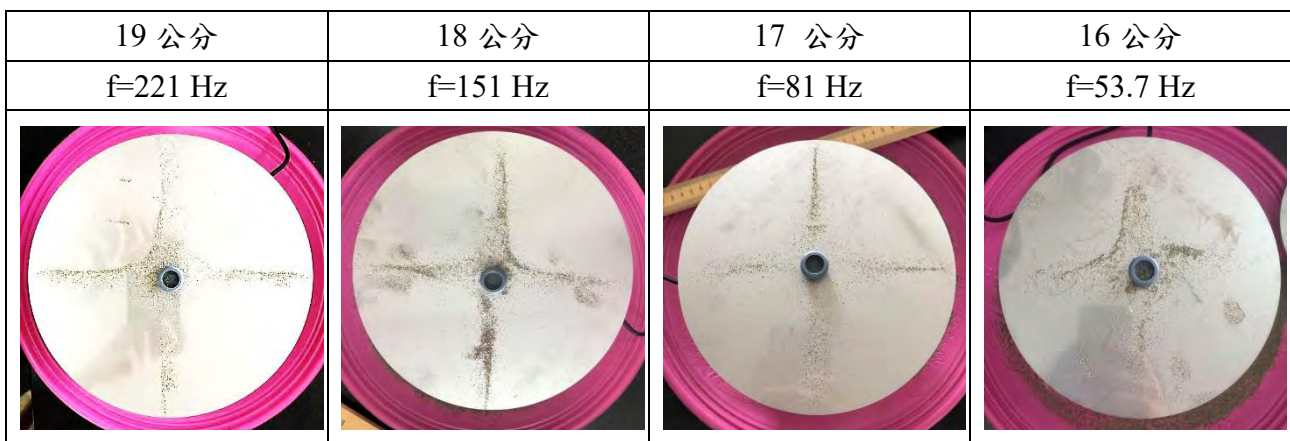
4. 直徑 19 公分



頻率	區間	+x	+y	-x	-y	半波長平均值	區間平均波速(cm/s)
363	0~1	7.6	7.6	7.5	7.6	7.525	5463.15
965.6	0~1	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	8883.52
	1~2	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	4634.88
1860.6	0~1	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	12279.96
	1~2	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	9303
	2~3	2.5	2.4	2.3	2.4	2.4	8930.88
3200	0~1	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	17280
	1~2	2.2	2.3	2.2	2.2	2.225	14240
	2~3	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	12160
	3~4	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	10880





由以上的數據可以發現，當沙子的圖案為同心圓時，各圈的寬度由內到外漸漸減小，因而波速也由內向外漸漸變慢，會與之後所用的理論預測的情況相同。

5. 各直徑十字共振



除了銅板外，不鏽鋼板也一樣會有對稱性共振的情況，且在低頻時每種尺寸的不鏽鋼板都能振出只純的均等分共振的十字圖形，然而，十字出現時的頻率卻隨著板子尺寸的增加而變大，此現象與同心圓共振的結果不同，還需進一步的探討。



6. 綜合圖形




直徑	18 公分	17 公分	16 公分	
頻率	f=1286 Hz	f=1624 Hz	f=5041 Hz	f=7406 Hz
圈數	同心圓 2→3 之間產生	同心圓 2→3 之間產生	同心圓 3→4 之間產生	同心圓 4→5 之間產生
				

因為不鏽鋼板也會產生對稱性共振，因此除了同心圓及十字以外，當頻率在兩相鄰的同心圓頻率中間時也會因為對稱性共振和同心圓共振之間互相影響而產生以上的圖案。

(四) 膠合木板

以下為我們所挑選出來各共振的圖形，並記錄各尺寸木板出現圖形的頻率。


編號	圖一	圖二	圖三	圖四
圖形				
直徑				
尺寸				
12 公分	1110Hz	1220Hz	1260Hz	1280Hz
13 公分	720Hz	870Hz	980Hz	1040Hz
14 公分	660Hz	840Hz	920Hz	950Hz
15 公分	570Hz	660Hz	750Hz	810Hz
16 公分	540Hz	600Hz	660Hz	700Hz
17 公分	520Hz	570Hz	607Hz	618Hz


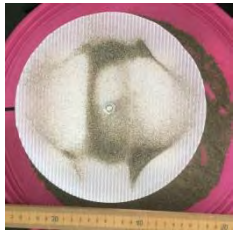

編號	圖五	圖六	圖七
圖形			
直徑尺寸			
12 公分	1440Hz	1760Hz	2200Hz
13 公分	1130Hz	1370Hz	1690Hz
14 公分	1070Hz	1260Hz	1600Hz
15 公分	920Hz	1130Hz	1320Hz
16 公分	790Hz	900Hz	1180Hz
17 公分	700Hz	830Hz	1060Hz

由以上的實驗結果可以得知膠合木板不會有同心圓的共振圖案，但得到的圖形都有對稱性。我們發現只要在某個頻率區間內，木板都會呈現相似的圖案，不像其他材料必須在一個特定的頻率時才能產生圖形。在前面的數據中我們也發現在振出的圖形相同的前提下，若是板子的直徑越小，則需要越高的頻率，兩者之間呈現負相關的關係。

(五) 塑膠瓦楞

以下為我們所挑選出各共振的圖形，並記錄各尺寸塑膠瓦楞板出現圖形的頻率。

編號	圖一	圖二	圖三	圖四
圖形				
直徑尺寸				
12 公分	670Hz	710Hz	750Hz	820Hz
13 公分	580Hz	630Hz	680Hz	770Hz
14 公分	500Hz	570Hz	610Hz	720Hz
15 公分	410Hz	490Hz	570Hz	650Hz
16 公分	390Hz	470Hz	530Hz	610Hz
17 公分	370Hz	430Hz	470Hz	540Hz

編號	圖五	圖六	圖七
圖形			
直徑尺寸	17 公分	17 公分	17 公分
	580 Hz	670 Hz	750 Hz

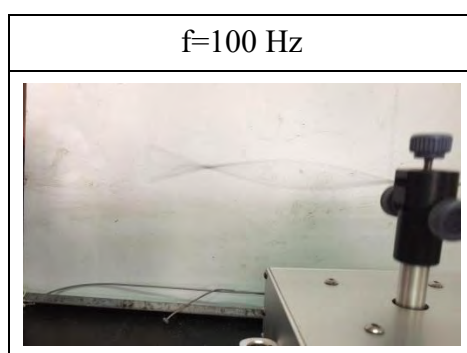
由以上的實驗結果可以得知塑膠瓦楞板不會有同心圓的共振圖案，但得到的圖形都有對稱性。我們發現只要在某個頻率區間內，塑膠瓦楞板都會呈現相似的圖案，不像其他材料必須在一個特定的頻率時才能產生圖形。在前面的數據中我們也發現在振出的圖形相同的前提下，若是板子的直徑越小，則需要越高的頻率，兩者之間呈現負相關的關係。

(六) 長條狀

高二的物理課中，為了讓剛接觸駐波的我們先從最基礎學起並不要有太過複雜的計算，課本所教導的情況僅限於繩波這種直線駐波，因此我們也利用器材內所附的銅條以及我們用雷射切割機切割出的木條、壓克力條與塑膠瓦楞條(2種方向)來做實驗，看看實驗結果是否會與課本中的繩波有所異同，並探究駐波在不同材質或不同長度的長條中有什麼差異。

1. 銅條

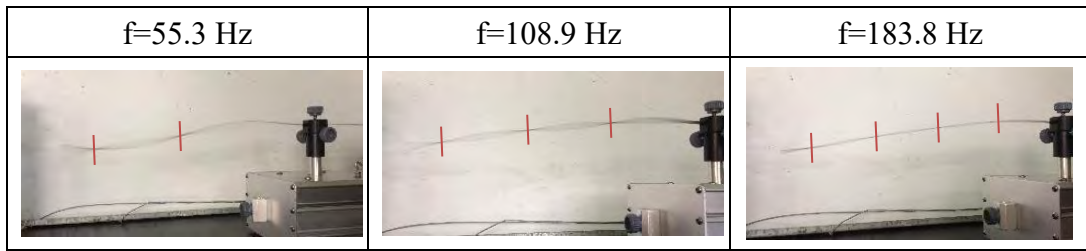
(1)12.5 公分



區間	第一次	第二次	第三次	半波長平均值(cm)	區間平均波速(cm/s)
0~1	8.8	8.6	8.5	8.6	1720

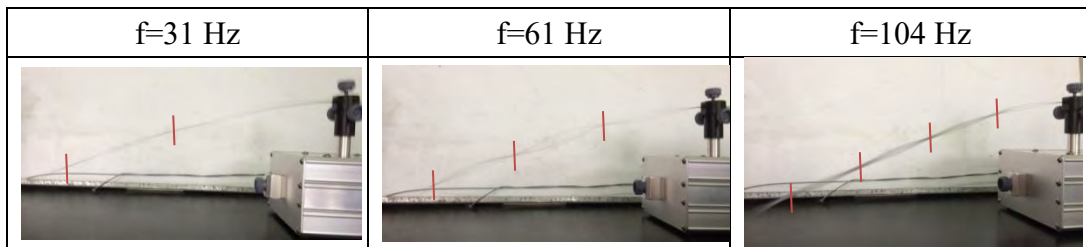
【註】本文較不明顯的節點以紅色直線標示

(2)27.7 公分



頻率(Hz)	區間	第一次	第二次	第三次	半波長平均值(cm)	區間平均波速(cm/s)
55.3	0~1	12.7	13.1	13.2	13.0	1437.8
	1~2	10.3	10	9.7	10.0	1106
108.9	0~1	8.7	8.4	8.3	8.5	1851.3
	1~2	7.6	7.7	7.7	7.7	1677.06
	2~3	6.9	6.9	7.2	7.0	1524.6
183.8	0~1	6.8	7.1	7.1	7.0	2573.2
	1~2	6.0	6.1	5.9	6.0	2205.6
	2~3	5.9	5.6	5.7	5.7	2095.32
	3~4	5.5	5.4	5.5	5.5	2021.8

(3)36 公分



頻率(Hz)	區間	第一次	第二次	第三次	半波長平均值(cm)	區間平均波速(cm/s)
31	0~1	17.3	16.8	16.9	17.0	1054
	1~2	12.9	13.0	13.2	13.0	806
61	0~1	11.5	11.3	11.2	11.3	1378.6
	1~2	9.5	9.4	9.6	9.5	1159
	2~3	8.8	9.1	9.0	9.0	1098
104	0~1	8.4	8.6	8.5	8.5	1768
	1~2	8.0	7.8	8.1	8.0	1664
	2~3	7.7	7.9	7.9	7.8	1622.4
	3~4	7.5	7.3	7.2	7.3	1518.4

由以上實驗結果可以得知，銅條所測得的半波長會由振源向外漸漸縮短，而不是像課本中的駐波一樣每個半波長都等長，因此各區間的平均波速也不相同，和高中課本所提到的相同材質有相同波速有所出入。關於此現象可能與銅條上各點所受到的重力不同有關。

2. 壓克力條



頻率(Hz)	區間	第一次	第二次	第三次	半波長平均值(cm)	區間平均波速(cm/s)
37	0~1	21.6	21.4	21.5	21.5	1591
127	0~1	12.4	12.6	12.5	12.5	3175
	1~2	10.0	9.9	10.1	10.0	2540

(1) 從壓克力條的實驗中，我們可以發現壓克力所呈現出的駐波振幅並沒有像銅條一樣大，而且振出來的半波長個數不多，可能是由於壓克力的彈性較差，不像銅條能夠彎曲的幅度較大，因此無法呈現出明顯的駐波。

(2) 我們發現壓克力各區間的半波長和銅條一樣也有由振源向外漸漸變小的趨勢。

3. 木條

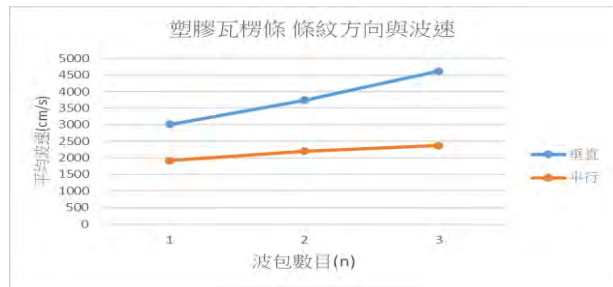
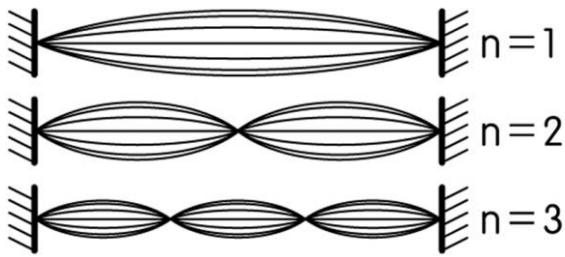
$f=148.8 \text{ Hz}$



區間	第一次	第二次	第三次	半波長平均值(cm)	區間平均波速(cm/s)
0~1	13.3	13.6	13.6	13.5	4017.6

木條只能做出唯一的腹點來推論平均波速，因此重力由銅條與壓克力條來探討，紋路方向的影響由塑膠瓦楞板來探討。

4. 塑膠瓦楞條



本實驗可以參考高中物理的駐波單元，兩種結構的長度維持定值，固定兩端點，並用彈簧秤固定張力為 100 公克重，經多次的實驗，只能做出 $n=1$ 、 $n=2$ 、 $n=3$ 的結果，但 $n=3$ 是用聲頻與目測，可以勉強觀察到微小的 3 個波包，多次實驗皆無法拍攝下可辨識的圖像。由本實驗可以初步得知，紋路會影響到板材的波速

(1) 紋路垂直波的傳遞方向(垂直傳遞)

n=1 f=47Hz	n=2 f=117 Hz	n=3 f=216 Hz

結構示意	n	頻率	半波長	區間平均波速
	1	47 (Hz)	32 (cm)	3008 (cm/s)
	2	117 (Hz)	16 (cm)	3744 (cm/s)
	3	216 (Hz)	10.7 (cm)	4622.4 (cm/s)

(2) 紋路平行波的傳遞方向(平行傳遞)

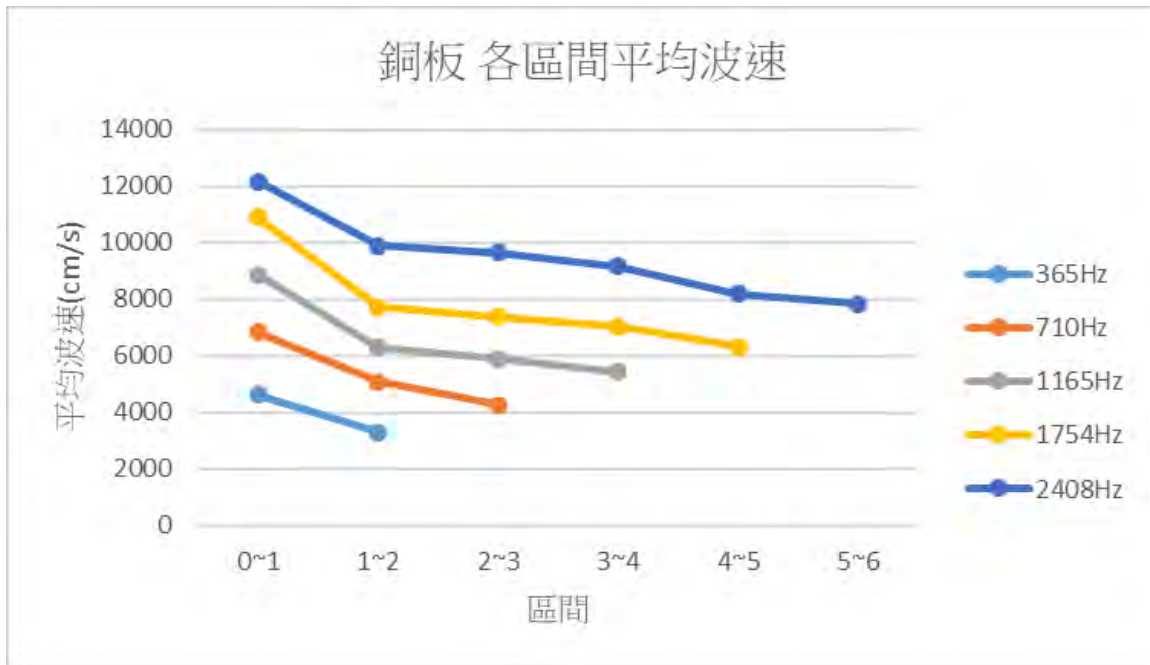
n=1 f=30Hz	n=2 f=69Hz	n=3 f=111Hz

結構示意	n	頻率	半波長	區間平均波速
	1	30 (Hz)	32 (cm)	1920 (cm/s)
	2	69 (Hz)	16 (cm)	2208 (cm/s)
	3	111 (Hz)	10.7 (cm)	2375.4 (cm/s)

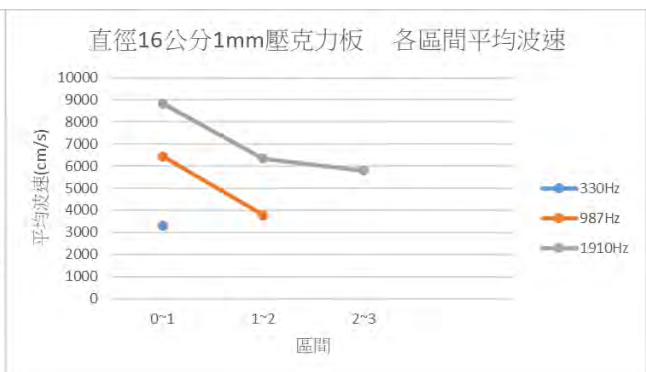
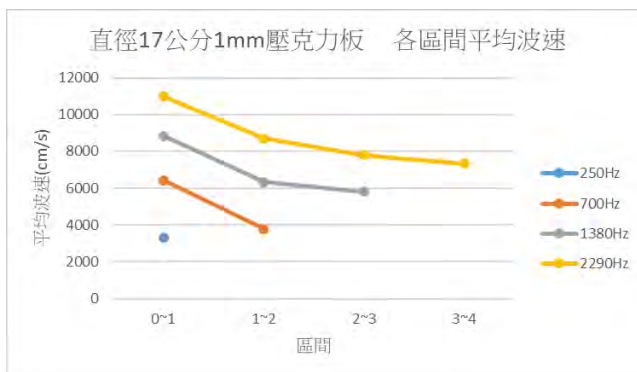
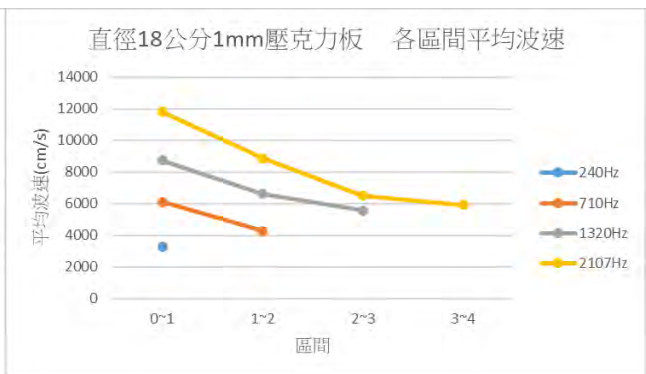
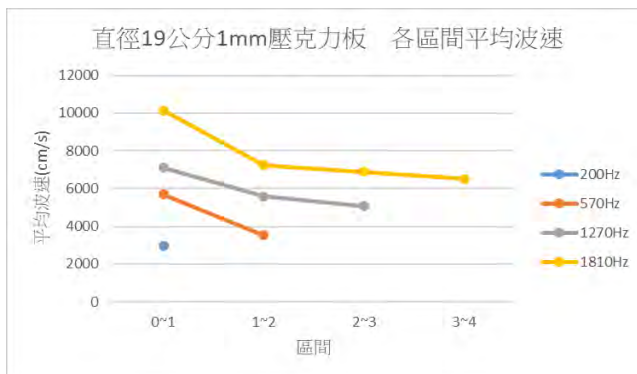
伍、 結果與討論

一、銅板、1mm 壓克力板與不鏽鋼板的各區間平均波速比較

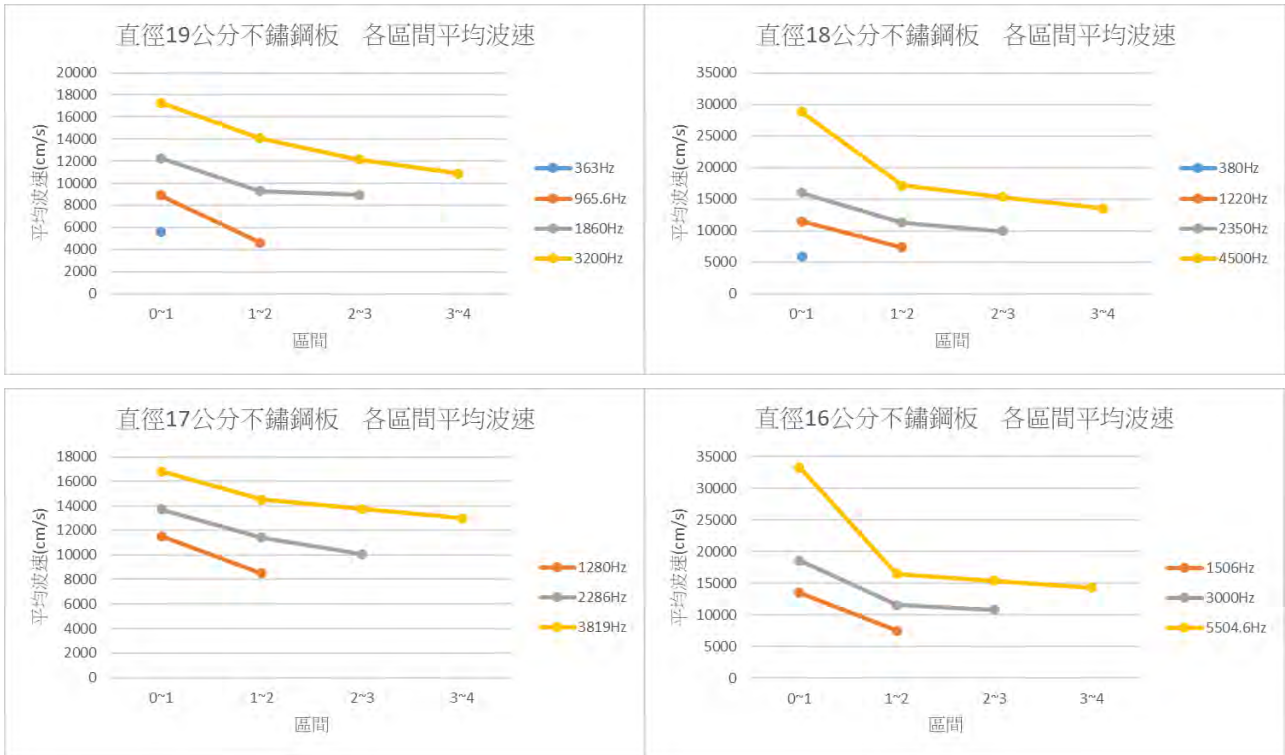
(一) 銅板



(二) 1mm 壓克力板



(三) 不鏽鋼板



由上面幾張圖可發現，無論銅板、壓克力板或不鏽鋼板，其各區間折線圖的線段都呈現下降的趨勢，也就是說波速隨著與波源處之間距離的增加而變慢，兩者呈負相關的現象。

二、各區間波速變化的理論推導

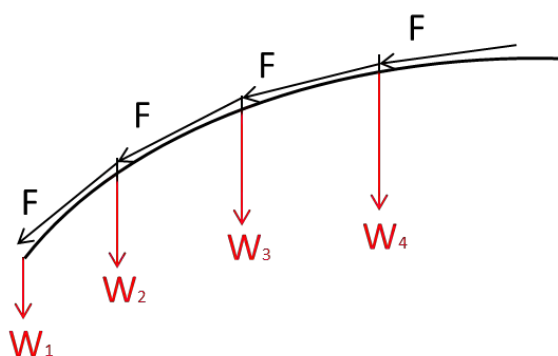
(一) 波速的討論

我們查過許多的資料，發現要解克拉德尼圖案都需要超過高中物理範圍的數學與電腦計算能力，因此我們就高中所學，做系列的假設與推論，來證實一片圓板的速率會愈來愈小。網路上有相當多的儀器能產生克拉德尼圖形，這些共振圖形都是滿足邊界為零的解，其中，若是圓形則可以用 Bessel function 解之，模擬的結果網路資料皆可參考(參考資料五、六、七、八)，因此本作品將以簡單的數學物理方法處理複雜的圓板克拉德尼圖案。

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{mv}{4L} = \frac{m}{4L} \sqrt{\frac{F}{u}}$$

由高中的物理課本可以得知均勻弦振動的頻率與張力、線密度有關。但是，本作品的實驗在直線物體在振動時一端是自由垂吊，就要考慮張力會變化的因素。

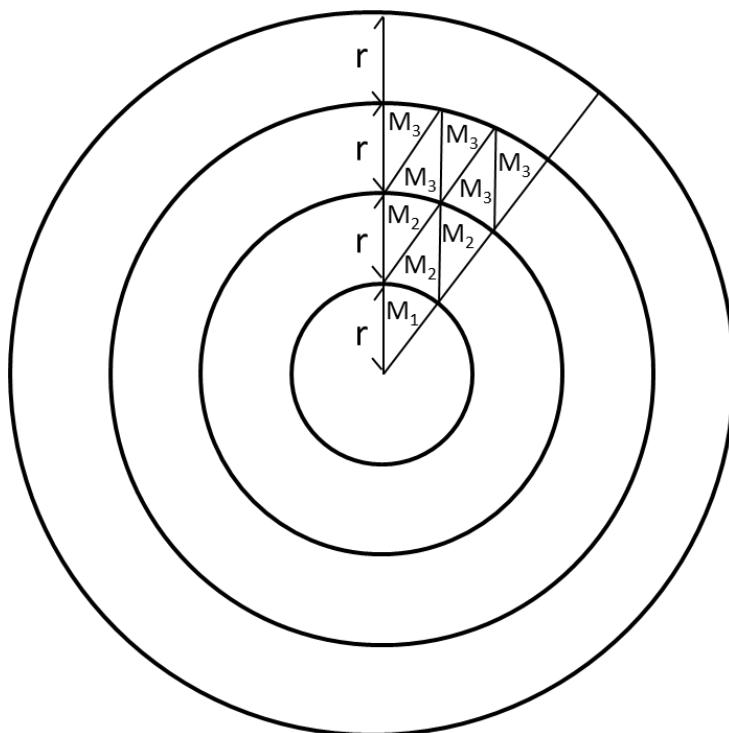
(二) 重力對波速的影響



如上圖所示，直線狀的材料在振動時，其材質表面張力及線密度並不隨與波源距離增加而改變，導致波速減緩，反而是受到重力影響。距離波源越近的區間，其所受的重力也越大，再與材質原本的表面張力加成後，因而形成表面張力隨與波源距離增加而減少，波速 $V = \sqrt{\frac{F}{\delta_i}}$ ， $V_1 < V_2 < V_3 < V_4$ (面密度 δ 相等)，波速呈減緩趨勢，與實驗結果相符。

(三) 以線密度推導

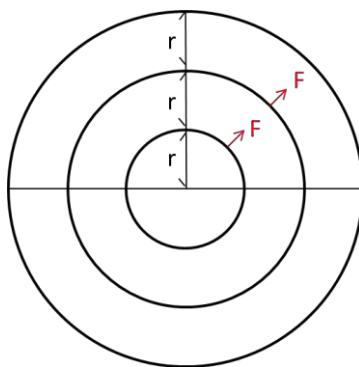
參考資料二的方法如下圖，將圓切割成若干間距皆為 r 的同心圓，取扇形。



忽略些許差距，可將 M_1 、 M_2 、 M_3 的面積大小視為 $M_1 = M_2 = M_3$ ，因此扇形區域的各區間面積比為 $M_1 : 3M_2 : 5M_3 = 1 : 3 : 5$ ，並且我們將整個板面視為一個密度均勻的物體，可各區間質量比同為 $1 : 3 : 5$ 。由於震波是由中心傳遞，我們可將扇形視為一細條物體，而線密度公式 $\rho_i = \frac{M_i}{r}$ ，可得各區間 $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1 : 3 : 5$ ，波速 $V = \sqrt{\frac{F}{\rho_i}}$ ， $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{5}}$ (同一圓，張力 F 相等)，波速呈減緩趨勢，與實驗結果相符。

(四) 以表面張力推導

參考資料三的方法，如下圖，將一圓切割成若干間距皆為 r 的同心圓。

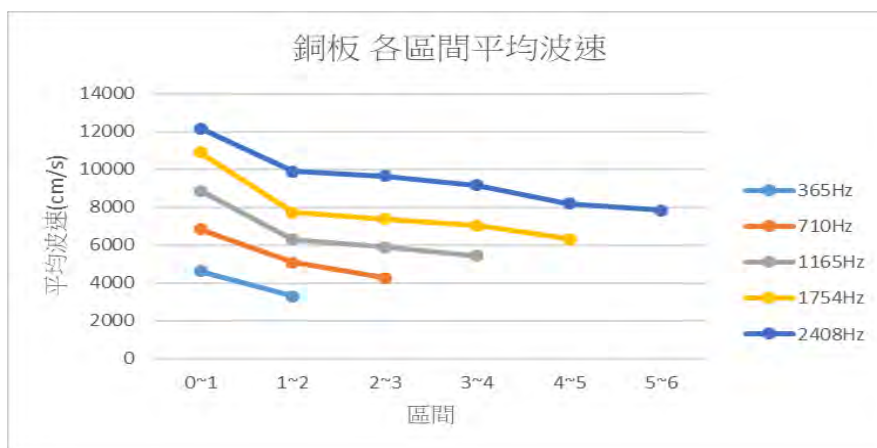


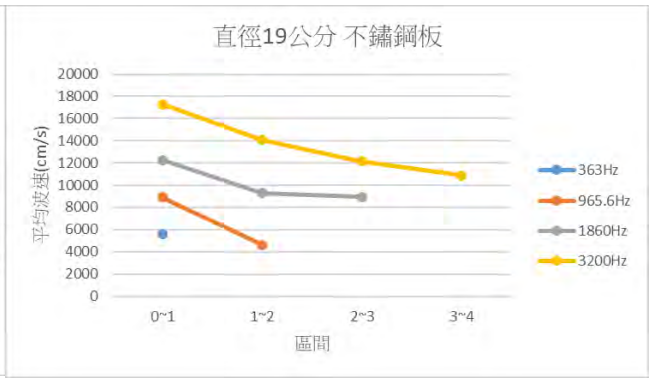
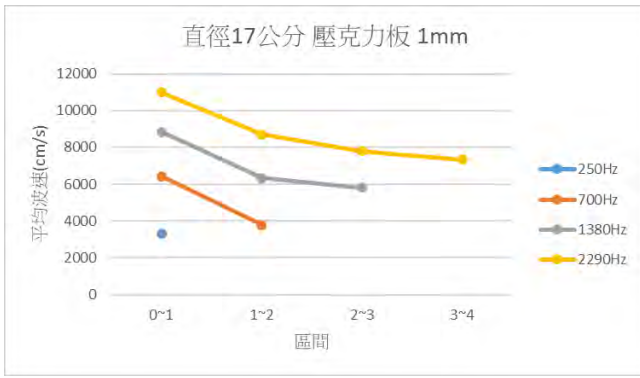
由於同一圓，張力 F 相等，表面張力 $T_i = \frac{F}{r_i \Delta\theta}$ ，可得各區間

$$T_1 : T_2 : T_3 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}, \text{ 波速 } V = \sqrt{\frac{F}{\delta_i}}, V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(同一圓，面密度 δ 相等)，波速呈減緩趨勢，與實驗結果相符。

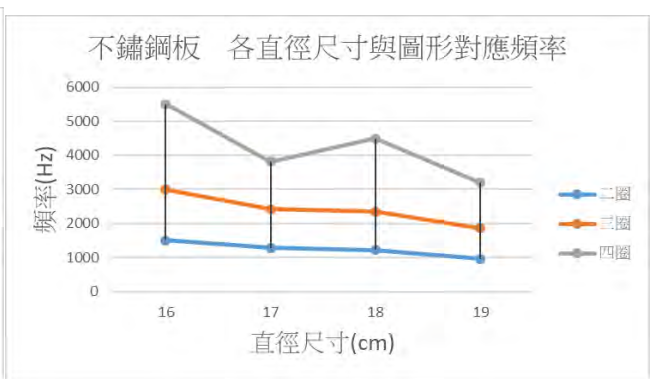
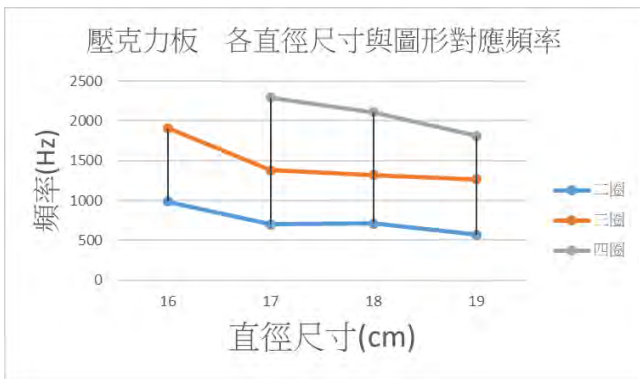
三、頻率與波速的關係





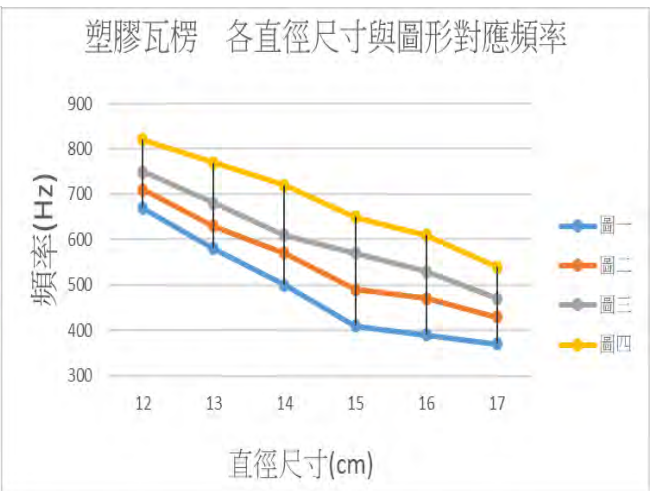
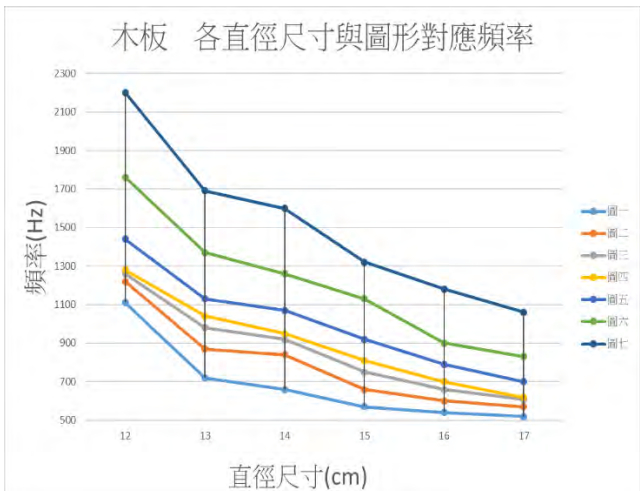
由上面三張折線圖可明顯看出各區間或是整體的波速會有因頻率提升而增加的現象。

四、直徑尺寸與頻率

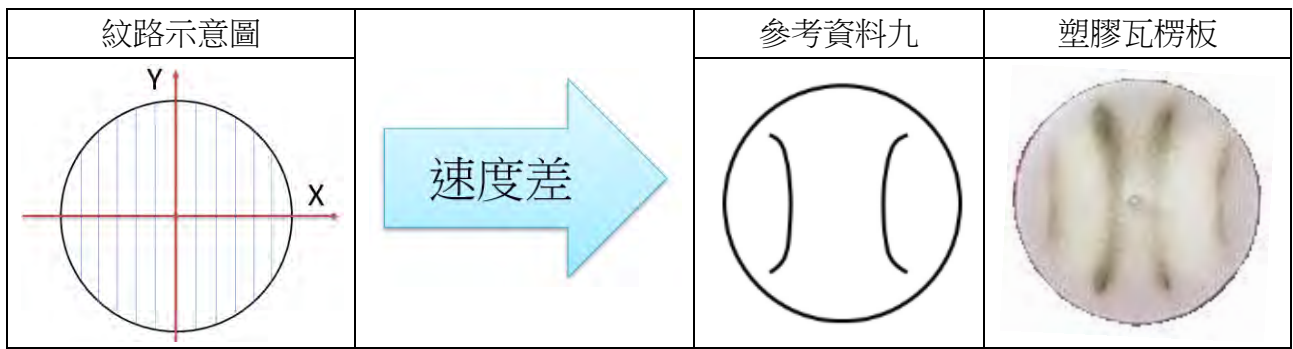


相同的材料，不論各種大小皆可以振出相同的共振圖案，即使是膠合木板與塑膠瓦楞板皆是如此(只是非同心圓)，且由以上四張圖表可以發現當圓板的直徑越小時，需要越高的頻率；反之，若是圓板的直徑越大，則所需的頻率越低。

五、膠合木板與塑膠瓦楞的圖形討論



膠合木板與塑膠瓦楞板所形成的圖形並不是同心圓，但卻有一定對稱性質的圖形；我們在實驗過程也發現，木板與塑膠瓦楞板各個尺寸和出現圖形的頻率存在著一定的相關性。



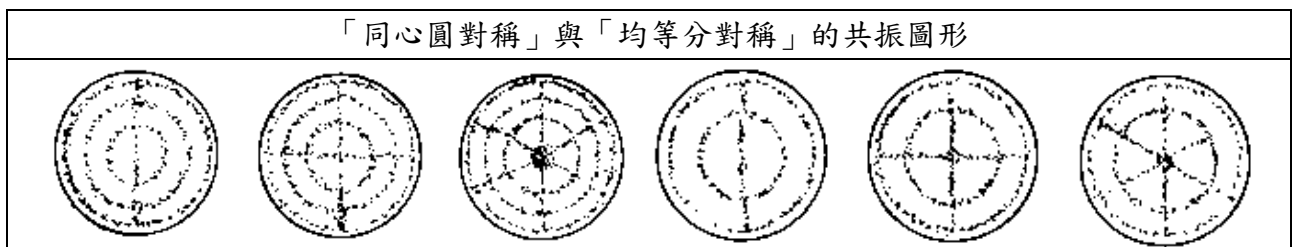
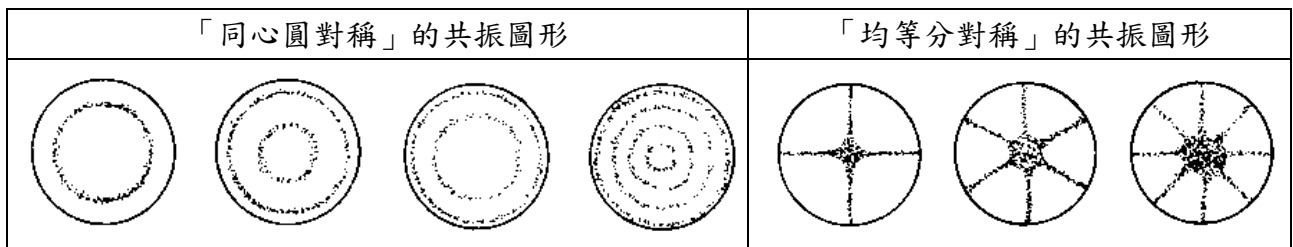
因膠合木板與塑膠瓦楞板的實驗結果相同，所以我們以塑膠瓦楞板做為探究的基礎，由實驗確認，Y 方向的速率高於 X 方向的速率(所以 Y 方向波長較長，模擬圖為參考資料九)，也就是說對稱的圓形板材出現的速率的不同，加上圓形的特殊邊界條件，就無法產生同心圓對稱，但還是會跑出規律性的圖案，只是就難以用模擬的方式完美的找到相符的對應圖。

六、「同心圓對稱」與「均等分對稱」

由參考資料五可得知，圓盤半徑為 R，使用極座標寫出方程式如下：

$$J_n(Kr)[C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)]$$

均勻的同心圓板可由 Bessel function 做模擬解之，其中 J_n 是第 n 階的方程， Kr 則是與第 n 階有關的 m，經由電腦調整不同的參數模擬後，可以得到許多的模擬圖案(參考資料八)：



由實驗的結果可以得知，能得到什麼樣的組合圖案與半徑、材料、質量等等因素都有關係，以真實的情況下，並沒有辦法用一片圓板，就找出全部的圖形，因此材料與大小的選擇，就是找到各式圖案的關鍵，本作品就大緻整理出壓克力板適合振出「同心圓對稱」的圖案，而金屬板較有機會較出「均等分對稱」圖案或是與同心圓混合圖。

七、隨頻率而變的波速擬合

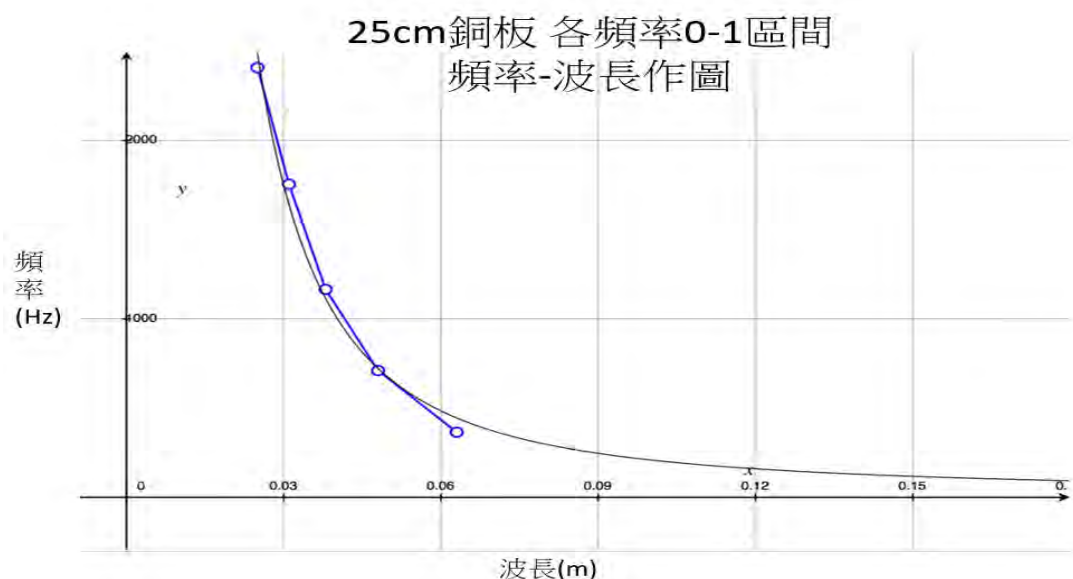
由(參考資料十一)：「不同頻率的聲音在介質中傳播的速度不一樣。這個現象，聲學家們沿用光學中的術語，也將之稱為色散，就是在具有弛豫現象的介質中，低頻聲傳播得要慢些，而高頻聲傳播得相對較快」。對一條理想弦而言，色散關係可寫為(參考資料十)：

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \omega^2 = \frac{T}{\mu} k^2$$

其中 T 為弦的張力， μ 為弦每單位長度的質量。如同真空中的電磁波，理想弦為非色散介質，其相速度與群速度相等，並且與振動頻率無關。至於非理想弦則需考量到硬度的影響，色散關係變為，其中 α 是與弦有關的常數。

$$\omega^2 = \frac{T}{\mu} k^2 + \alpha k^4, \quad \text{其中 } \omega = 2\pi f, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{整理成 } f^2 = \frac{T}{\mu} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + (2\pi)^2 \alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4$$

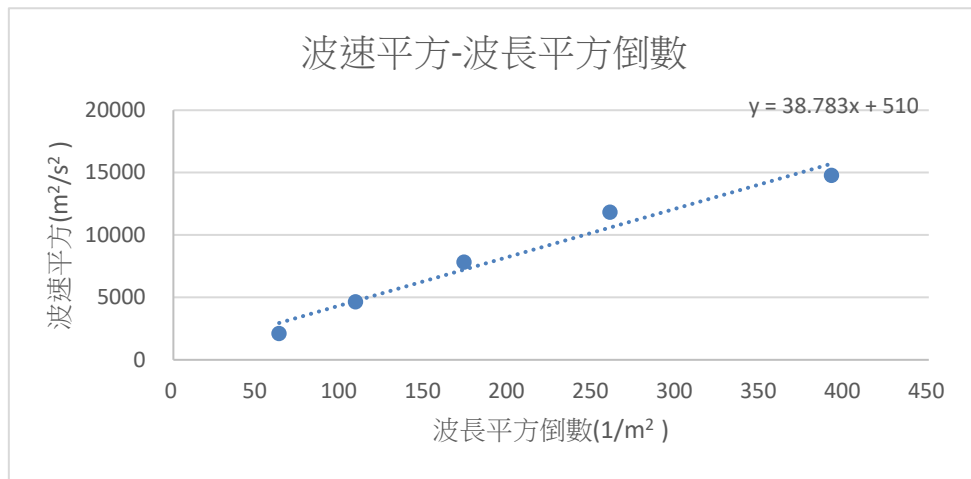
為讓常數固定，針對 25cm 的銅板以各頻率的 0-1 區間做擬合曲線後的函數圖：



常數值： $\frac{T}{\mu} = 207$ ， $(2\pi)^2 \alpha = 2.282$ ，若兩邊同乘 λ^2 得 $v^2 = (\lambda f)^2 = \frac{T}{\mu} + (2\pi)^2 \alpha \frac{1}{\lambda^2}$ ，為了方便換算，在擬合的過程我們皆把單位換為公制單位，整理成表格如下：

25cm 銅板，區間 0-1 的波長平方倒數、波速平方表格

頻率(Hz)	半波長(cm)	波長平方倒數(1/m ²)	波速平方(m ² /s ²)
365	6.3	63	2115
710	4.8	109	4646
1165	3.8	173	7839
1754	3.1	260	11826
2408	2.5	392	14788

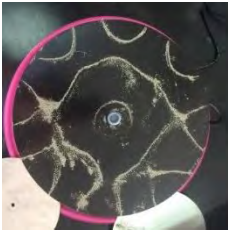



我們假定 $\frac{T}{\mu}$ 為定值，以直線的趨勢線得到常數值： $\frac{T}{\mu} = 510$ ， $(2\pi)^2\alpha = 38.783$ ，與4次的擬合曲線有誤差，且我們在做不鏽鋼板的擬合曲線時，發現誤差會更大，表示這方法雖然可以找到規律與可預測性，但在0-1的節線上張力還是有些許誤差。因為銅板可以讓誤差降到最低(因為大片)，所以由銅板的擬合曲線及趨勢線驗證頻率的改變會影響波速。







八、板材上粉量的探討

由參考資料四：「縱使粒徑尺寸差異很大，大至3 mm(如綠豆)；小到200 μm(如人工砂)，整體而言，隨頻率改變而有所變化的條件之下形成的克拉德尼節線圖案其主體結構是相近的」，因此不同的砂粉是不會影響各材料的共振頻率，所以本文不多做探討。

九、銅板特殊圖案的探討

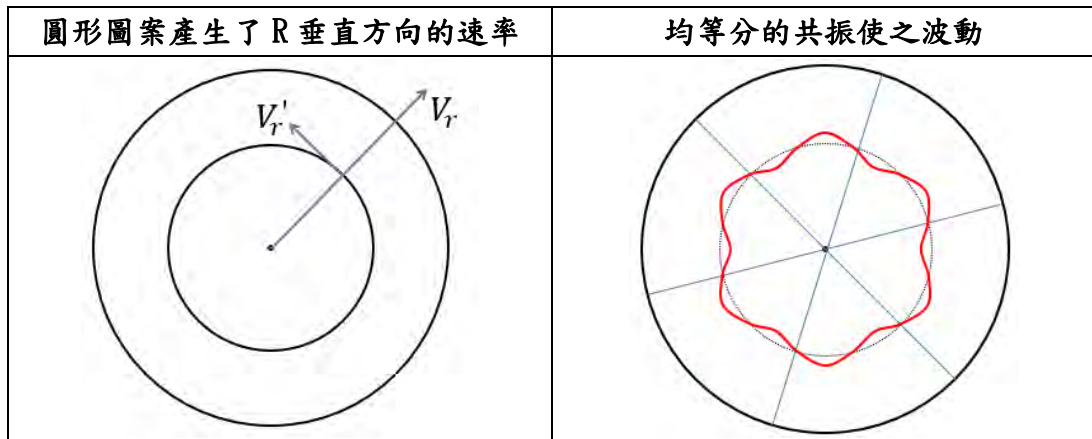
銅板 B	頻率	f=419 Hz	f=500 Hz
	圈數	同心圓 2→3 之間產生	同心圓 2→3 之間產生
	圖形		

本實驗在較低圈數時(通常小於3圈)，容易發現「同心圓對稱」與「均等分對稱」共同存在的圖形，不過我們再深入探討有些「均等分對稱」的圖案，可以發現有類似物質波的形狀，一開始我們以為可以針對物質波這個物理現象進行探討，但多次實驗後發現振出這樣圖案的可重複性很低，於是探究出可能的原因為螺帽頭對稱性的影響，讓原本應該是均分的圖案，在同心圓圈數增加的過程中產生的類物質波的圖案。

螺帽 示意	銅板 A f=662 Hz	17cm 銅板 F=2400 Hz	螺帽 示意	銅板 B f=648.5 Hz	銅板 C f=642.5 Hz
					



由不同數目同心圓圈的頻率變化過程中偶爾成形的圖

我們推測偶爾會發現這種類型共振的原因，主要有金屬板面本身不平整的影響，產生了 r 垂直方向的速率外，螺帽的選用也間接促使「均等分共振」產生波浪狀連線的機會，因而振出類似物質波狀的曲線，而且波長數量與螺帽的邊數有正相關。



十、「同心圓共振」與「均等分共振」在相同頻率時產生

17cm 不鏽鋼板在同心圓的圖案非常難被找出，多次實驗後找到規律後，才去預測出現的頻率為何。做法是聽聲音共振強度變大後，再以手輕觸且控制好振幅，找到同心圓的圖案，因此對於「同心圓」與「均等分」頻率相同時，圖案就非常難被振出。

頻率	f=2286 Hz	f=3891 Hz
說明	3 圈與一字均等分共振同時產生	4 圈與十字均等分共振同時產生
圖形		

陸、 結論

- 一、銅板、壓克力板和不鏽鋼板各區間波速由內往外圈呈現下降的趨勢。
- 二、膠合木板與塑膠瓦楞板的圖形不為同心圓，由兩材質互相對照，可得知是由於內部結構，導致 x 方向和 y 方向的速率不同而產生不為同心圓的圖形。
- 三、由線密度及表面張力兩種推導方式，都能證明與波源距離越遠，波速越慢的實驗結果，並由重力的影響來分析，解釋直線狀材質波速減緩的現象，找出與高三物理課本中理論公式中，一端固定與一端自由的波速與本實驗結果不相符的原因。
- 四、波速會有因頻率提升而增加，考慮非理想弦則需考量到硬度的影響，為色散關係造成的結果，並針對銅板進行擬合曲線，有相似的關係。
- 五、同心圓對稱：圓板的直徑越小時，產生相同圖形需要越高的頻率；反之，若是圓板的直徑越大，則所需的頻率越低。
- 六、均等分對稱：圓板的直徑越小時，產生第 1 個十字均等分對稱圖案的頻率隨之降低。

柒、 展望

希望未來能以我們所找出的這幾種材質其克拉德尼圖形特性為基礎，深入探討結構對波傳遞所造成的影響，尤其是木頭和塑膠瓦楞這種結構具有一定向性之材質，並在未來繼續擴展研究範圍、累積實驗數據，由本科展開始建立完整的資料庫，以求能對相關事業如：建築或工業材料等需要具備抗震、檢測材料的應用層面有所幫助。


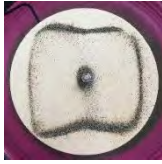





捌、 參考資料

- 一、高涌泉主編。選修物理(上冊)。龍騰文化
- 二、都是駐波，為什麼差這麼多？中華民國第 42 屆中小學科學展覽會作品
- 三、膜上的波扭。中華民國第 49 屆中小學科學展覽會作品
- 四、鄧宇峻(民 94)。研究不同尺寸之顆粒於平板振盪實驗所形成的克拉德尼節線圖案之特徵。國立交通大學理學院應用科技學程 碩士論文
- 五、戴明鳳等編著。一維駐波與二維共振的克拉尼圖案。清華大學普通物理實驗講義
- 六、Wordpressadmin(2016). CHLADNI. <http://www.philippfeichtinger.eu/chladni/>
- 七、Skullsinthestars(2013). Physics demonstrations: Chladni patterns. <https://skullsinthestars.com/2013/05/02/physics-demonstrations-chladni-patterns/>
- 八、5 Men (Eagle) - 13 Cumku (2002). The Chladni Figures and Wavenumbers. <http://fusionanomaly.net/ernstchladni.html>
- 九、Gerald Zani(2017)。取自 <https://wiki.brown.edu/confluence/display/PhysicsLabs/3D40.30+Chladni+Plate>
- 十、維基百科。色散關係。取自：<https://zh.wikipedia.org/wiki/色散关系>
- 十一、蝌蚪君(2015)。什麼是聲音的色散？。來源：科普中國-科學原理一點通網站







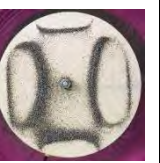
附錄

一、木板(單位 Hz)








直徑 17 公分

f=520	f=570	f=607	f=618	f=700	f=830	f=1060
						

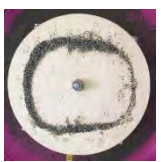
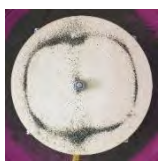
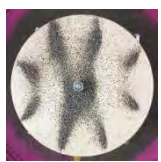




直徑 16 公分

f=540	f=600	f=660	f=700	f=790	f=900	f=1180
						

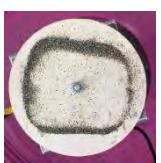
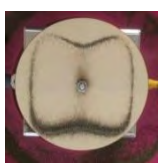
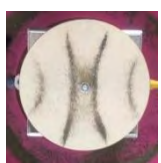
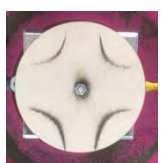
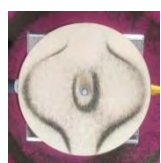

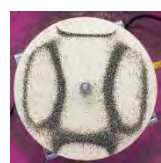
直徑 15 公分

f=570	f=660	f=750	f=810	f=920	f=1130	f=1320
						




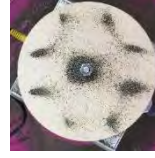

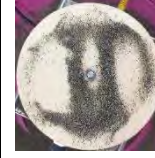
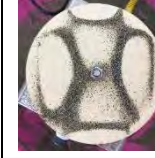
直徑 14 公分

f=660	f=840	f=920	f=950	f=1070	f=1260	f=1600
						

直徑 13 公分

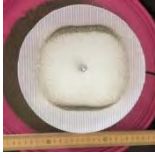




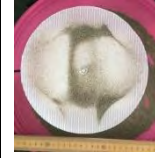
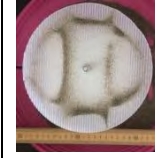
f=720	f=870	f=980	f=1040	f=1130	f=1370	f=1690
						

直徑 12 公分


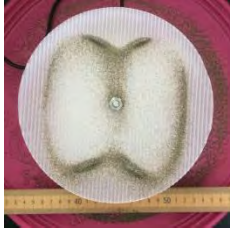
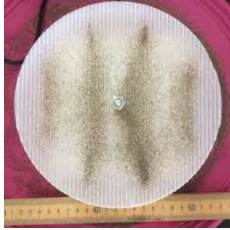
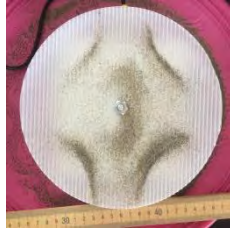
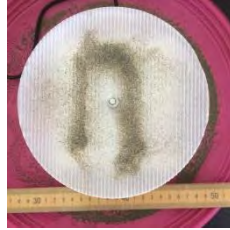
f=1110	f=1220	f=1260	f=1280	f=1440	f=1760	f=2200
						

二、塑膠瓦楞板(單位 Hz)


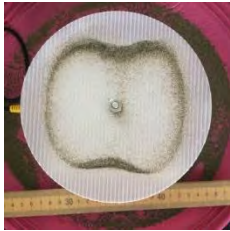
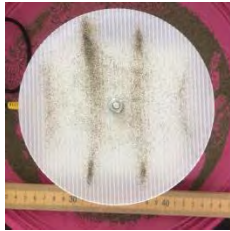
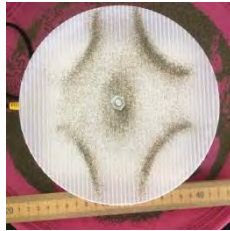
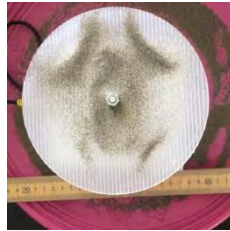
直徑 17 公分

f=370	f=430	f=470	f=540	f=580	f=670	f=750
						

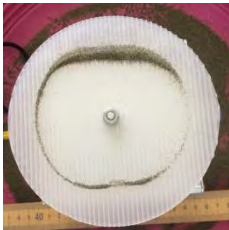

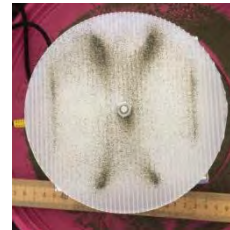
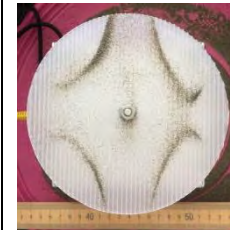

直徑 16 公分

f=390	f=470	f=530	f=610	f=710
				

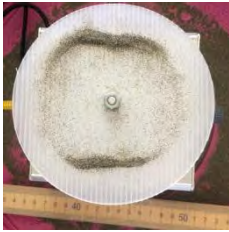
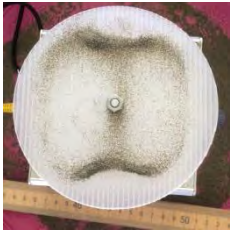
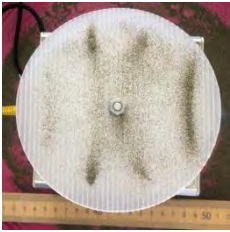
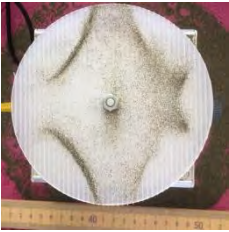
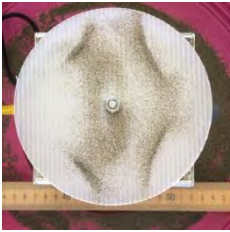
直徑 15 公分

f=410	f=490	f=570	f=650	f=750
				

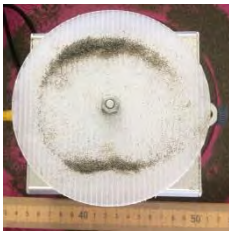
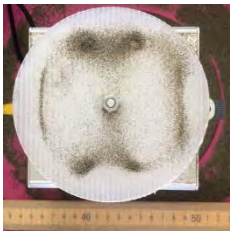
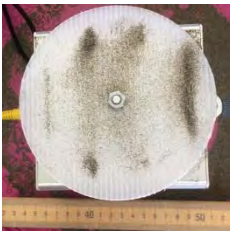
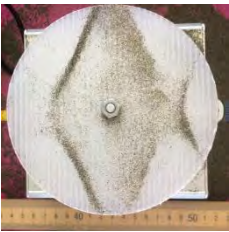
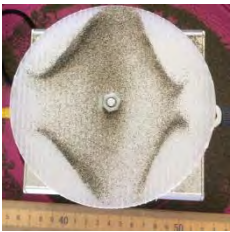
直徑 14 公分

f=500	f=570	f=610	f=720	f=850
				





直徑 13 公分




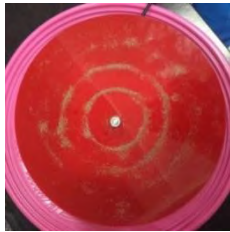
f=580	f=630	f=680	f=770	f=870
				

直徑 12 公分

f=670	f=710	f=750	f=820	f=910
				

三、2mm 厚的壓克力板

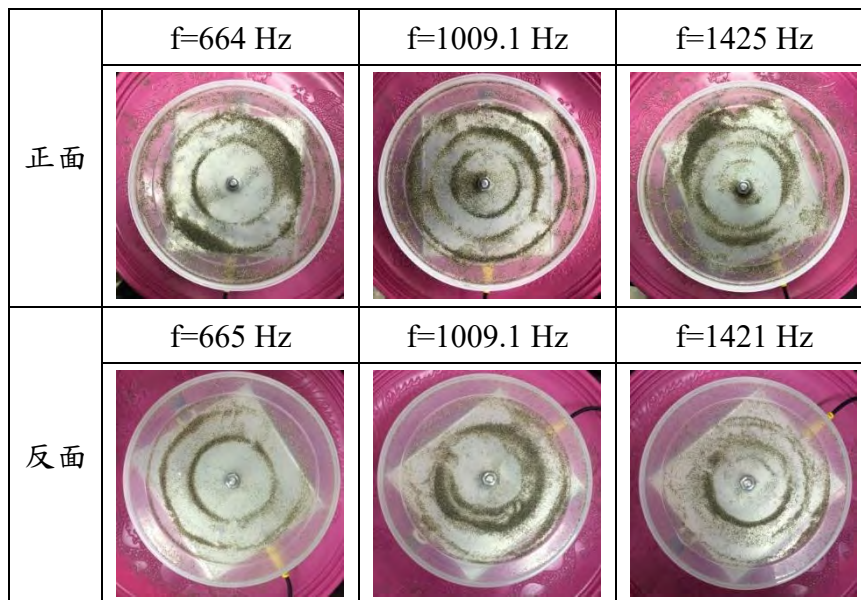
直徑 12cm, f=330Hz	直徑 17cm, f=330 Hz	直徑 17cm, f=670 Hz	直徑 27cm, f=790 Hz
			

直徑 22cm, f=370Hz	直徑 22cm, f=900 Hz	直徑 17cm, f=1661 Hz	直徑 27cm, f=2930 Hz
			

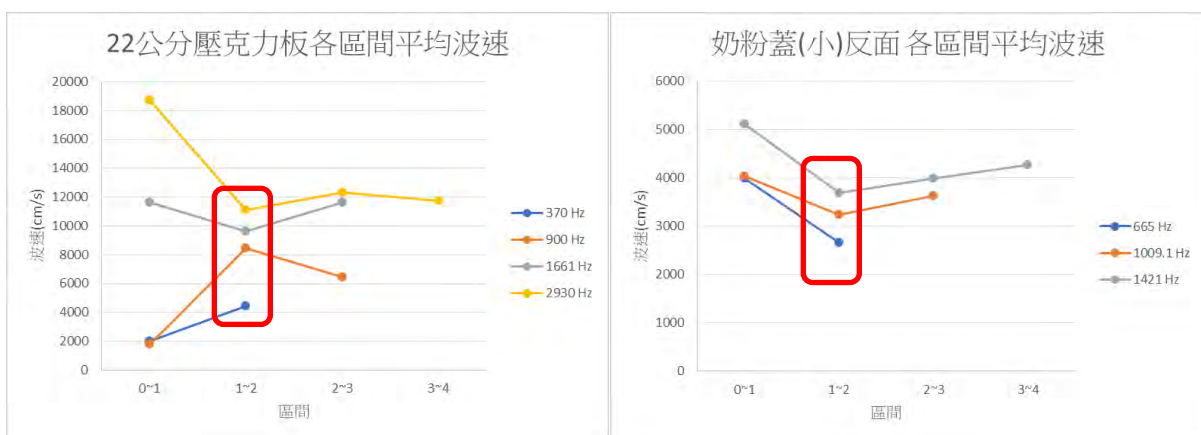
- (1)由以上實驗可以得知，即使是厚重的壓克力圓板一樣只會產生同心圓的圖案。
- (2)我們也發現壓克力板所呈現的駐波半波長並不像銅板一樣有漸漸變小趨勢。
- (3)由於壓克力板的圖形不像銅板的圖形那樣的清楚，往往都是有一定範圍存在，因此在折線圖中可看到一些不全是下降的線段。我們猜測這可能除了與壓克力板的各區間單位密度不同且壓克力條受到重力的拉扯影響較大以外，可能因為波的能量衰退無法完全反彈所導致。

四、奶粉蓋(直徑 15cm)

因為厚重的壓克力板(2mm)發現波速不是均勻增加，為了驗證為能量衰退的影響，我們另找了奶粉蓋來做實驗。由於奶粉蓋的兩個面不同，使我們好奇兩個面做出來的結果會不會一樣，同樣的材質會不會因為面的不同而產生不同的結果?因此我們決定兩面都實驗看看。



- (1)以上的實驗可以得知兩個面的結果並沒有太大的差別，都在相近的頻率可以振出駐波。
- (2)我們也意外的發現用奶粉蓋所做出來的結果和銅板有相反的情況，奶粉蓋上各圈的寬度是由內到外漸漸增大(15 公分正面頻率 1425 例外)，尤其在反面的時候更是明顯，。
- (3)由上面兩張折線圖可看到，奶粉蓋各區間折線圖的線段大致上為上升的趨勢。這樣的情況與前面銅及壓克力兩種材質的結果相當不同，我們猜測這可能是奶粉蓋邊緣多了一圈凸起的塑膠條所致，其可能對正弦波的傳遞方式造成影響，導致回彈或減弱，進而改變圖形，使各區間間距不同於正常的分布情形，並由圖表可觀察出，在 1-2 間的速率有接近的現象。



【評語】 051814

本作品是以振動來探討二維平面的振動穩定模態，其中以圓心對稱的方式可以出現同心圓，但是改為有平行結構之圓板，因其波速會受到影響而出現其他非圓對稱的圖形，作者也發現波速與離圓心遠近而有遞減的結果，是一次較新的研究結果。此作品只對中心為振源做討論，建議若增加振動圓周應會有較多不規則圖形出現。

摘要

本實驗以銅板、不鏽鋼板、壓克力板、膠合木片與塑膠瓦楞板，以雷射雕刻機切割不同直徑圓板來實驗，並以高中物理方式簡化克拉德尼圖形理論，並由各種材料的圓板振出克拉德尼圖案，找到與理論相近的實驗結果。實驗中發現許多與高中物理理論的矛盾之處：

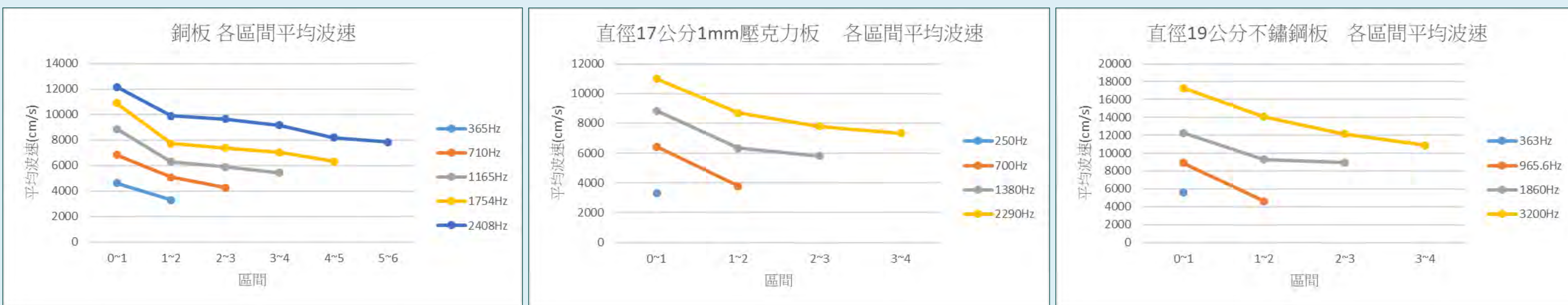
- (1)若要用直線駐波公式找到材料波速，需要經過重力的修正項。
- (2)壓克力片只能振出同心圓的克拉德尼圖案，木片和塑膠瓦楞板則無法振出同心圓圖案。不論任何材料，頻率改變皆會影響波速。

壹 研究動機

「克拉德尼圖形」為各式各樣的共振圖案非常的多，且很多規律性都難以捉摸，所以將研究重點放在其所形成的同心圓的圖形，運用學校創客教室來訂做板子，由試驗不同材質和實驗方式，來對照理論或得到新的發現。

貳 研究過程與結果討論

一、銅板、1mm壓克力板與不鏽鋼板的各區間平均波速比較



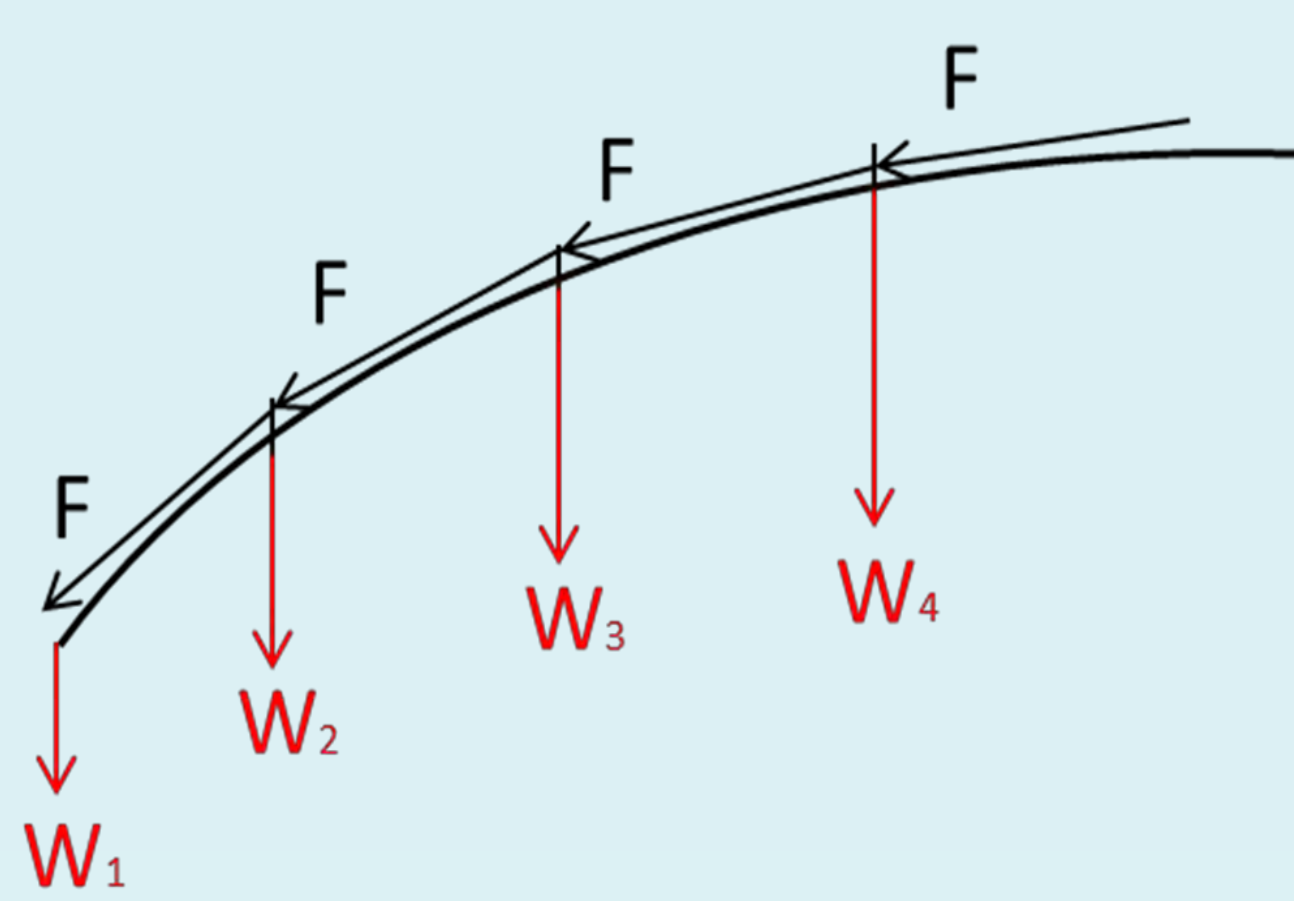
各區間波速隨著與波源處之間距離的增加而變慢。

二、各區間波速變化的理論推導

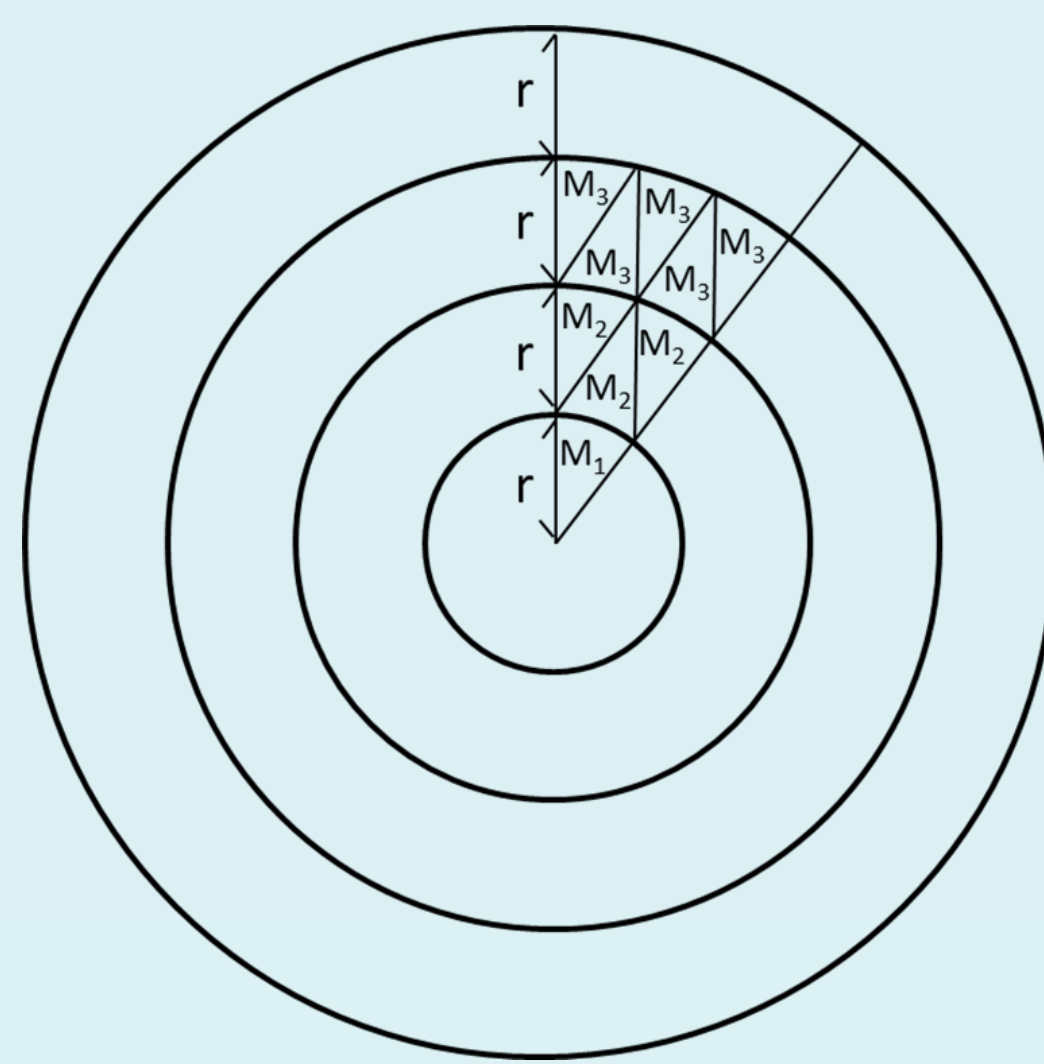
(一)波速討論

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{m}{4L} \sqrt{\frac{F}{u}}$$

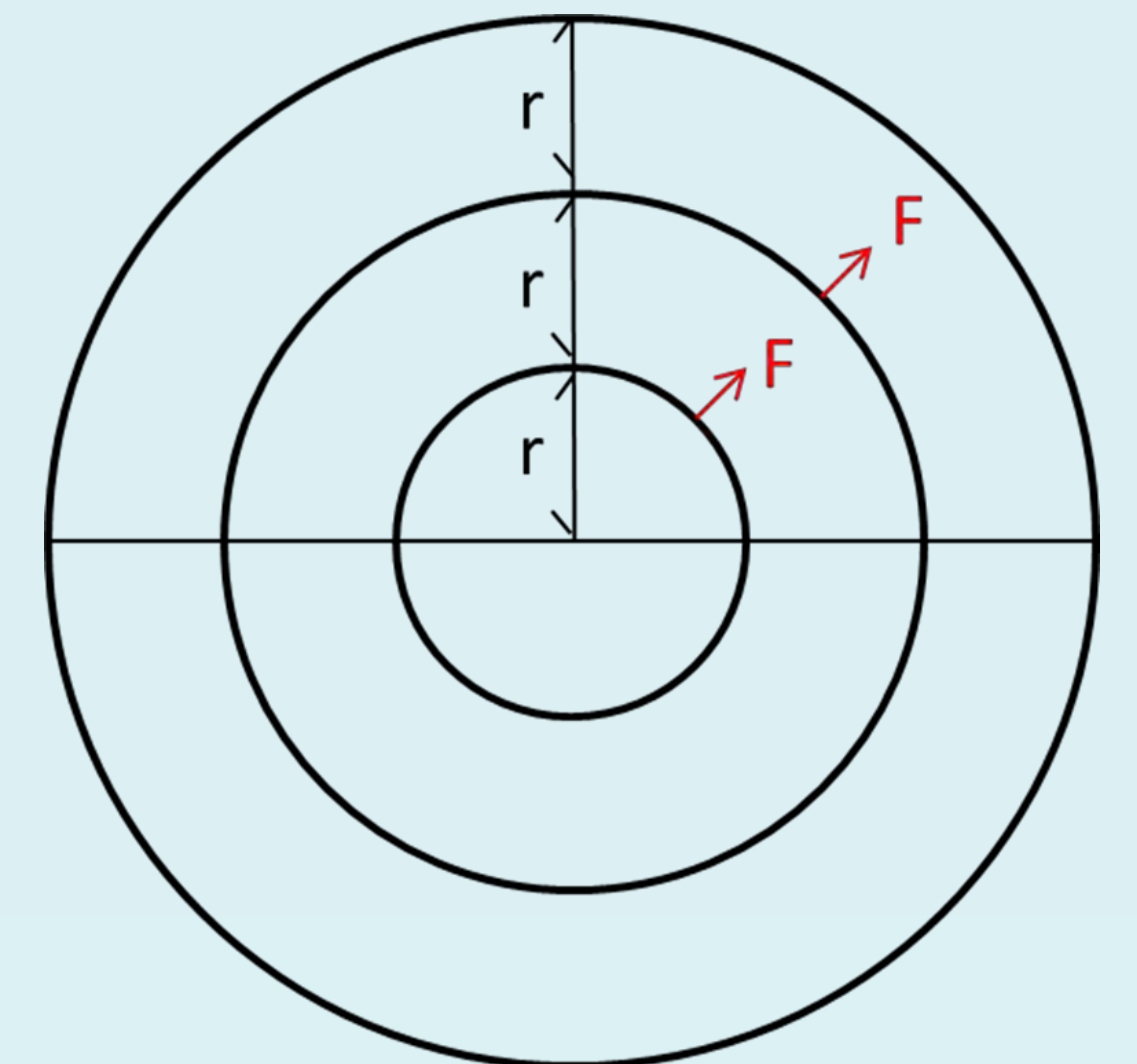
(二)重力對波速



(三)以線密度推導



(四)以表面張力推導

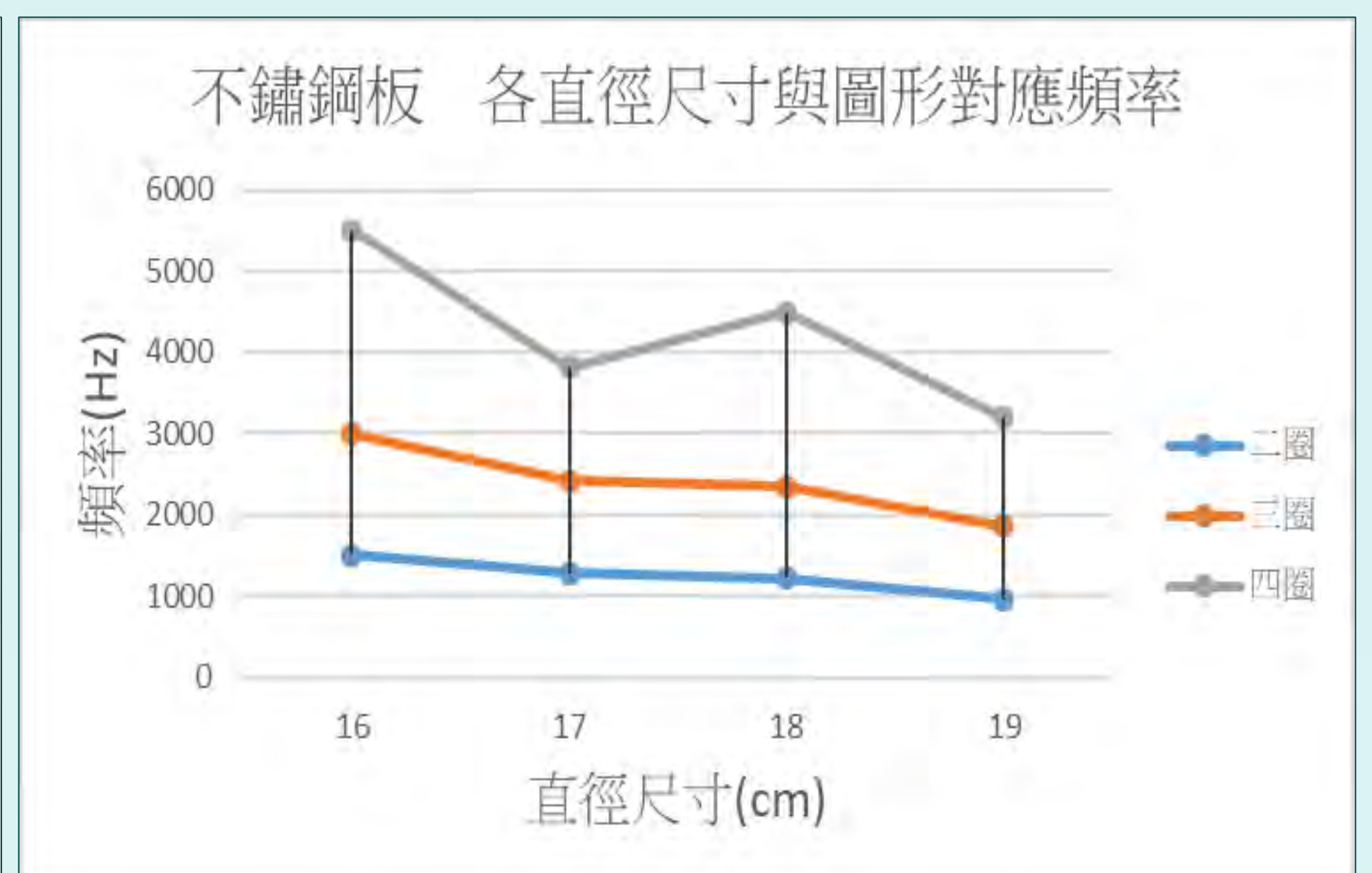
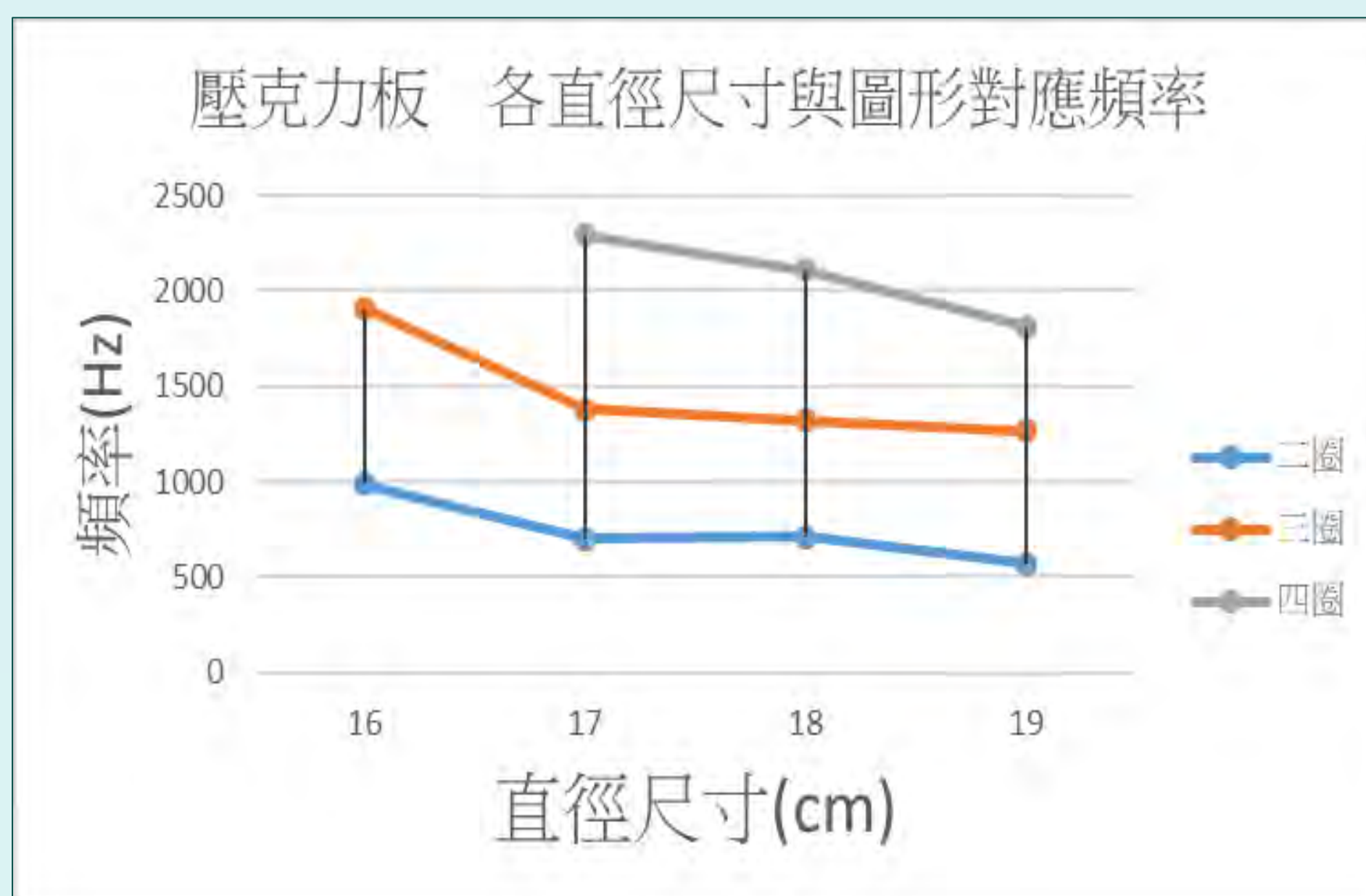
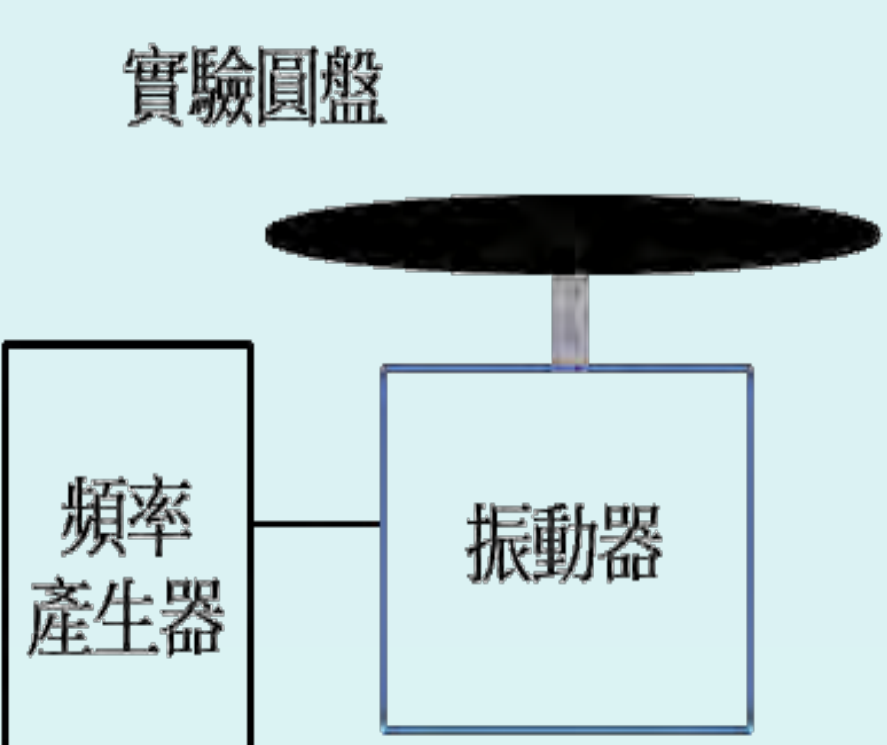


以上的幾種推導方式，都可得出波速呈減緩趨勢，與實驗結果相符。

三、頻率與波速的關係

上面三張折線圖可看出各區間或整體的波速會有因頻率提升而增加的現象。

四、直徑尺寸與頻率

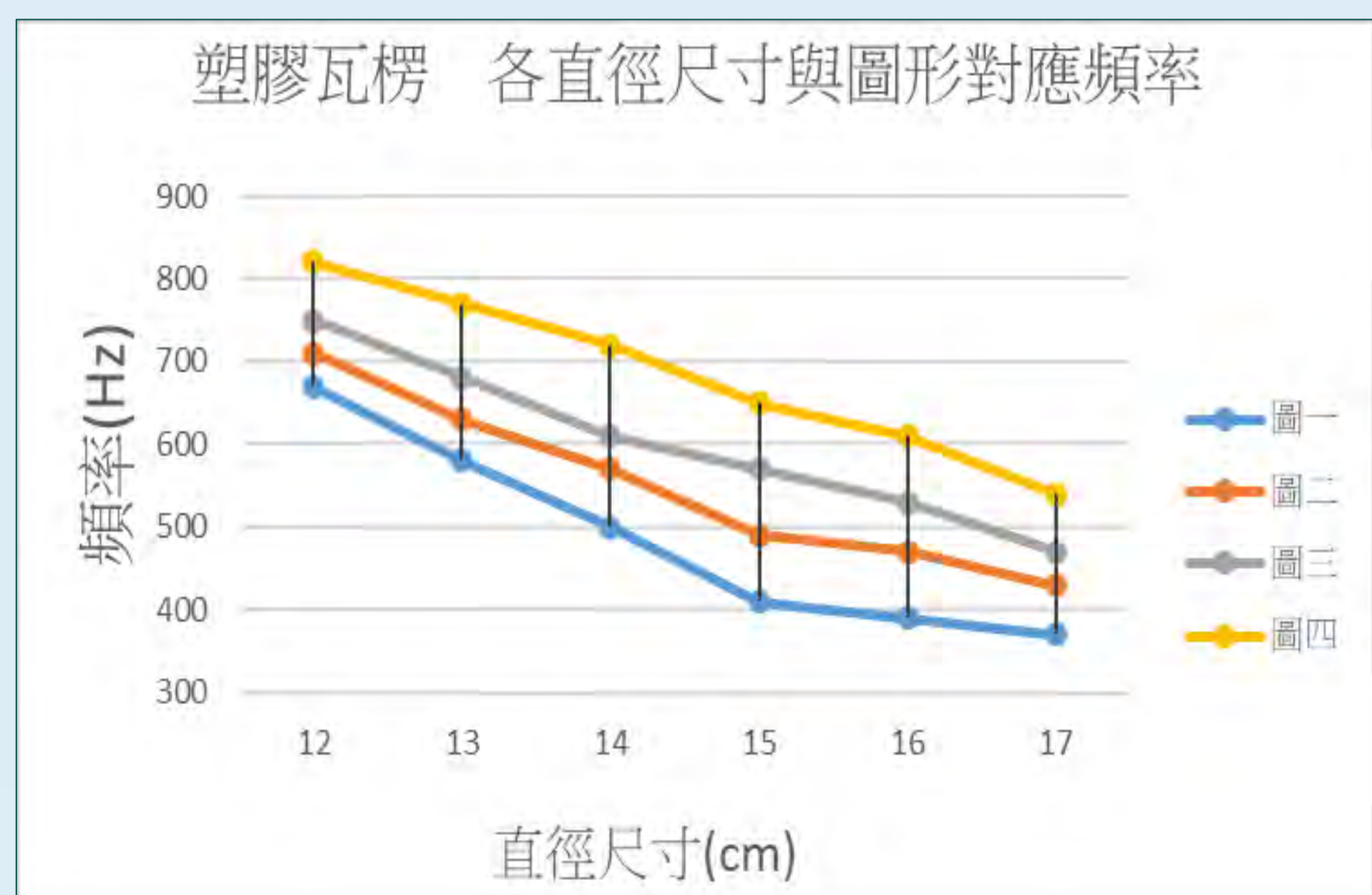
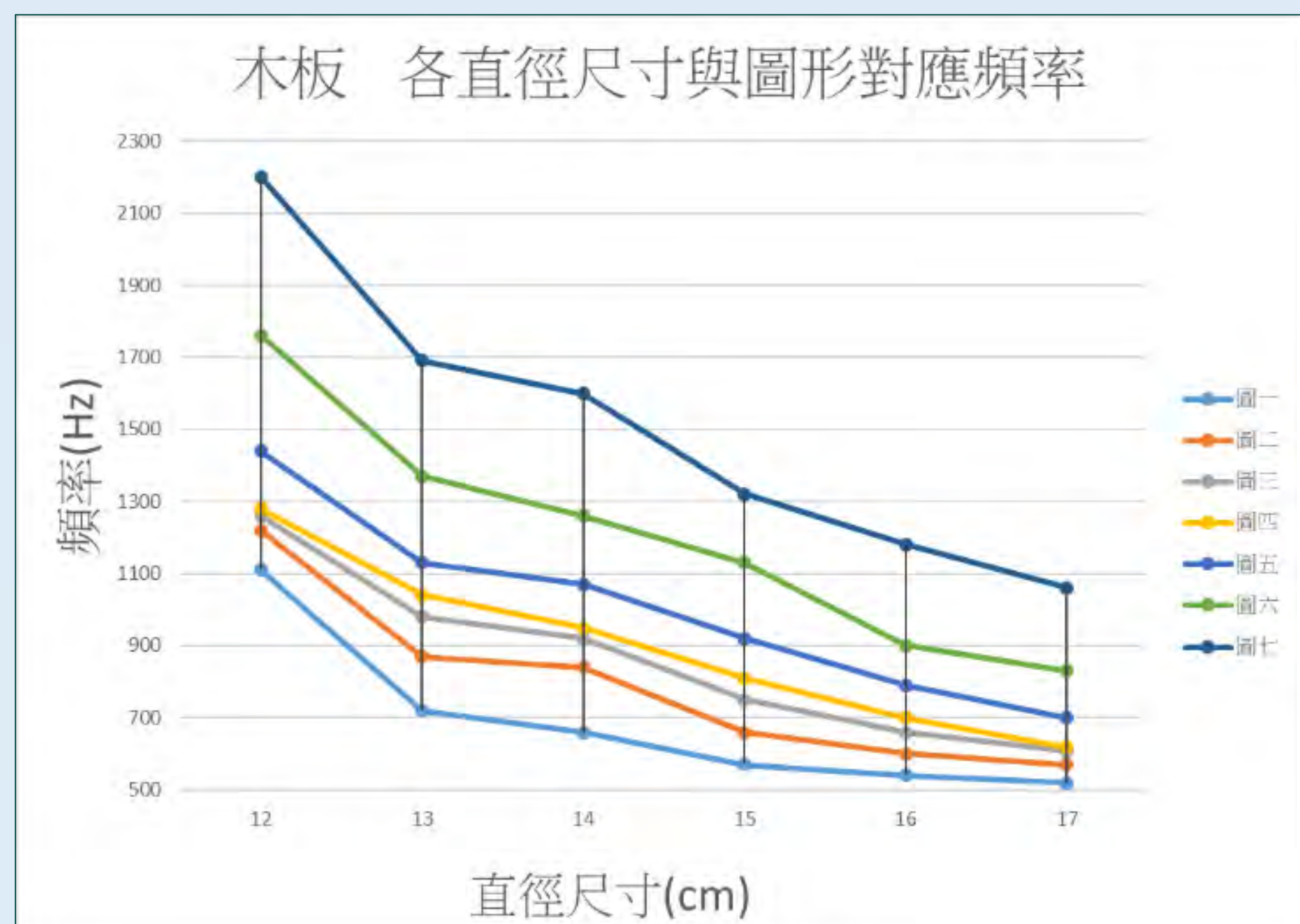
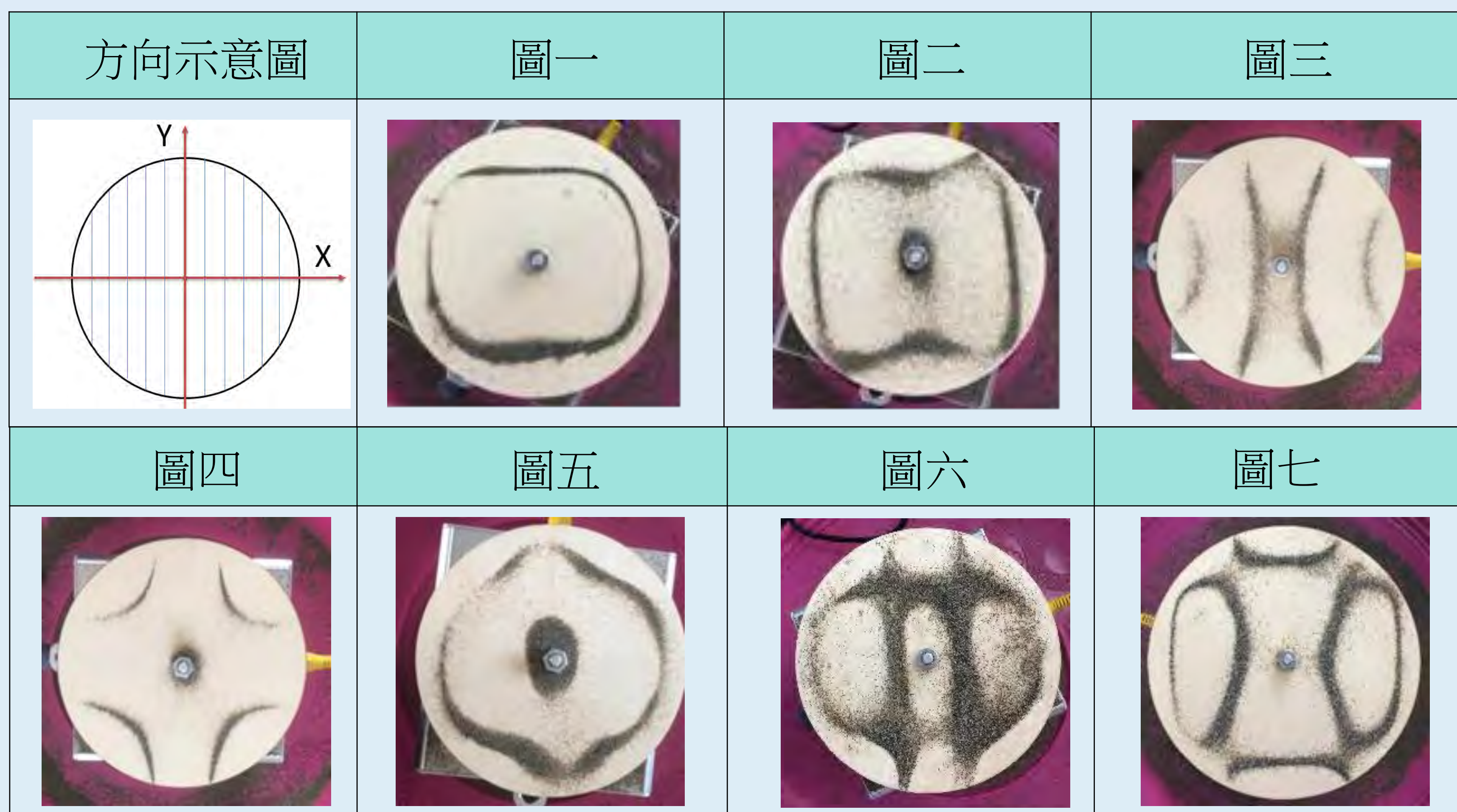


相同的材料，不論各種大小皆可以振出相同的共振圖案，即使是膠合木板與塑膠瓦楞板皆是如此(只是非同心圓)，且由以上四張圖表可以發現當圓板的直徑越小時，需要越高的頻率；反之，若是圓板的直徑越大，則所需的頻率越低。

五、板材上粉量的探討

不同砂粉不會影響材料的共振頻率

六、膠合木板與塑膠瓦楞的圖形討論

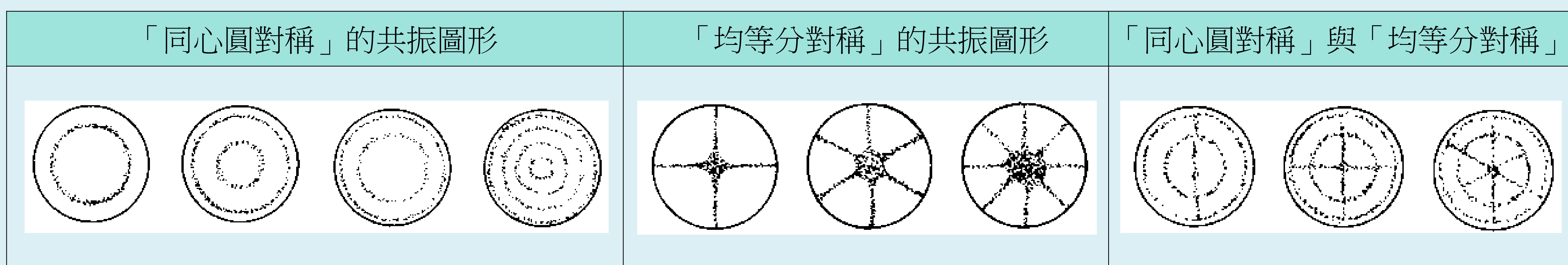


七、「同心圓對稱」與「均等分對稱」

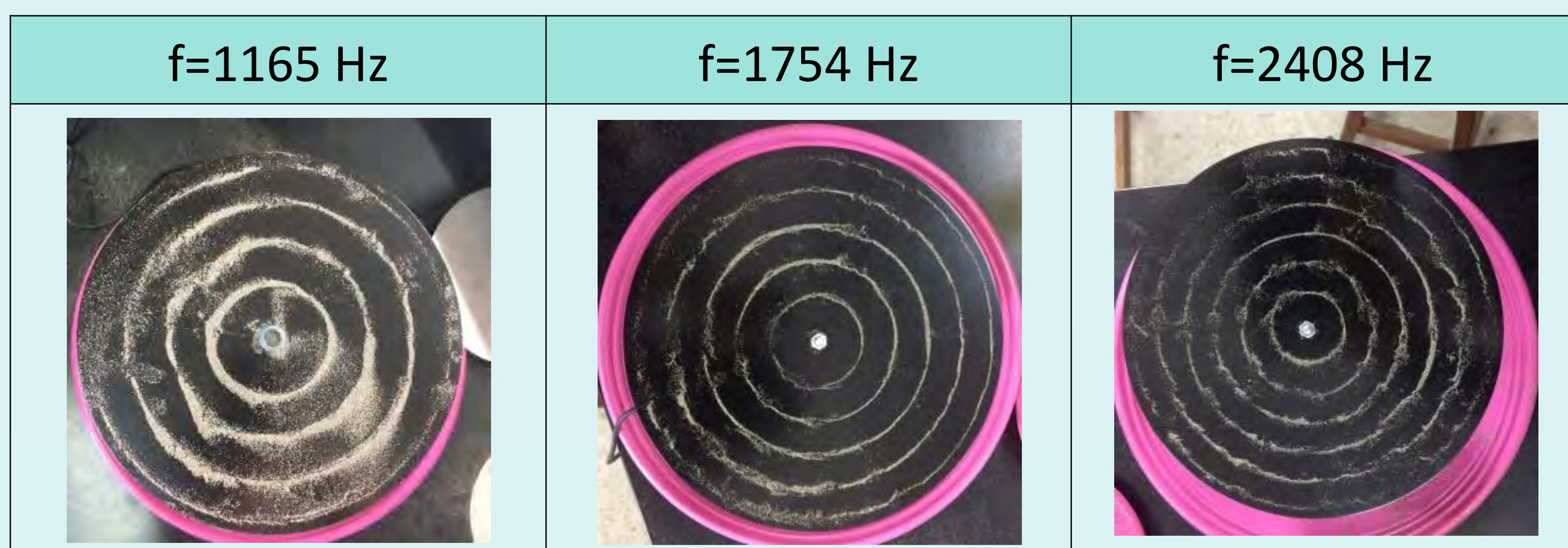
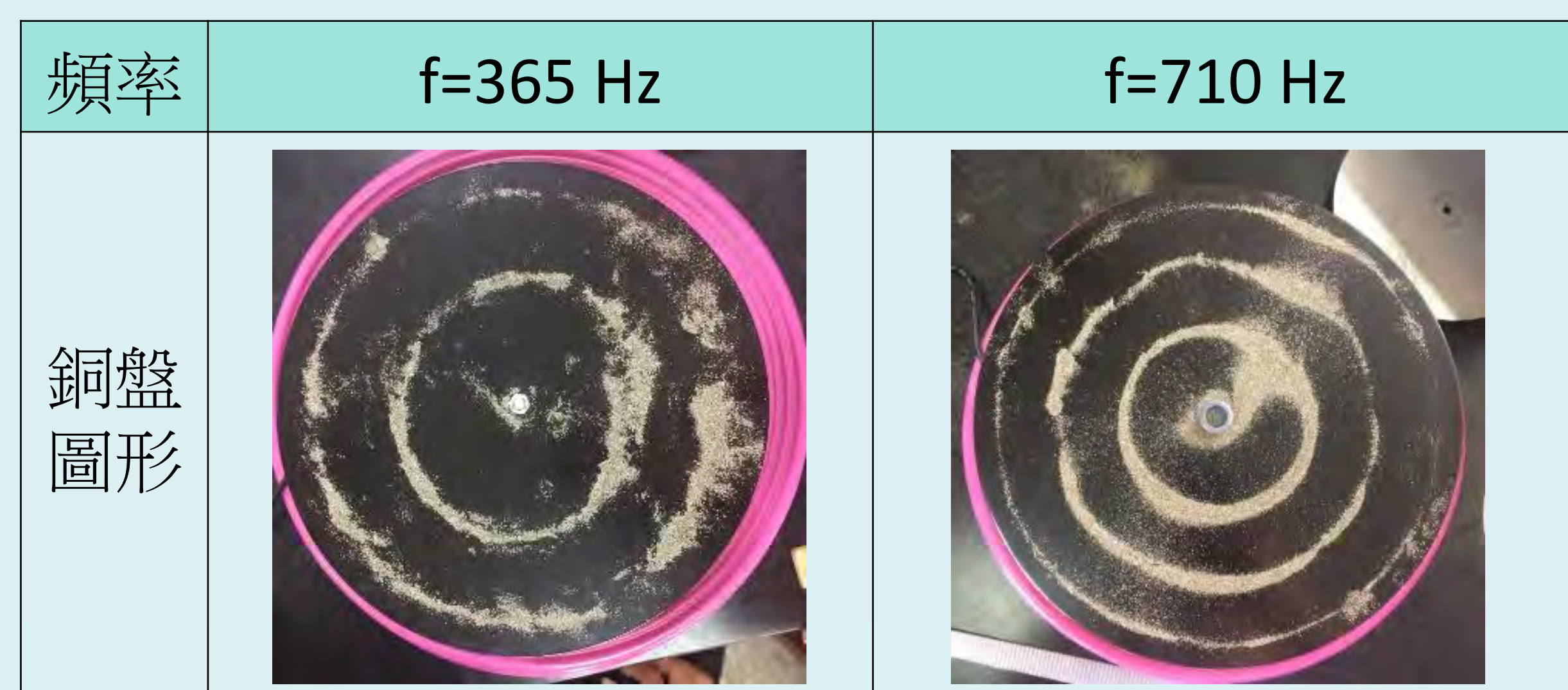
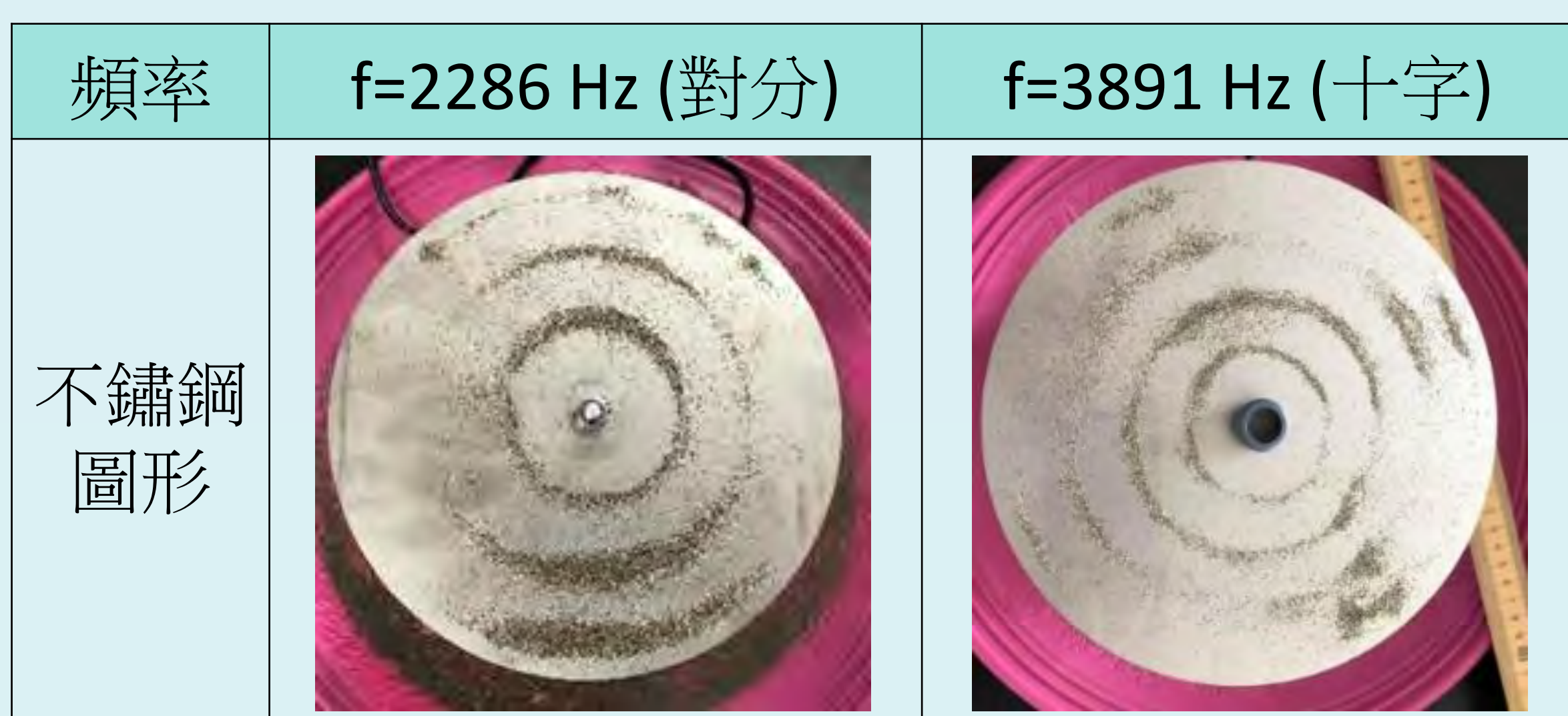
由參考資料五可得知，圓盤半徑為R，使用極座標寫出方程式如下：

$$J_n(K_r)[C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)]$$

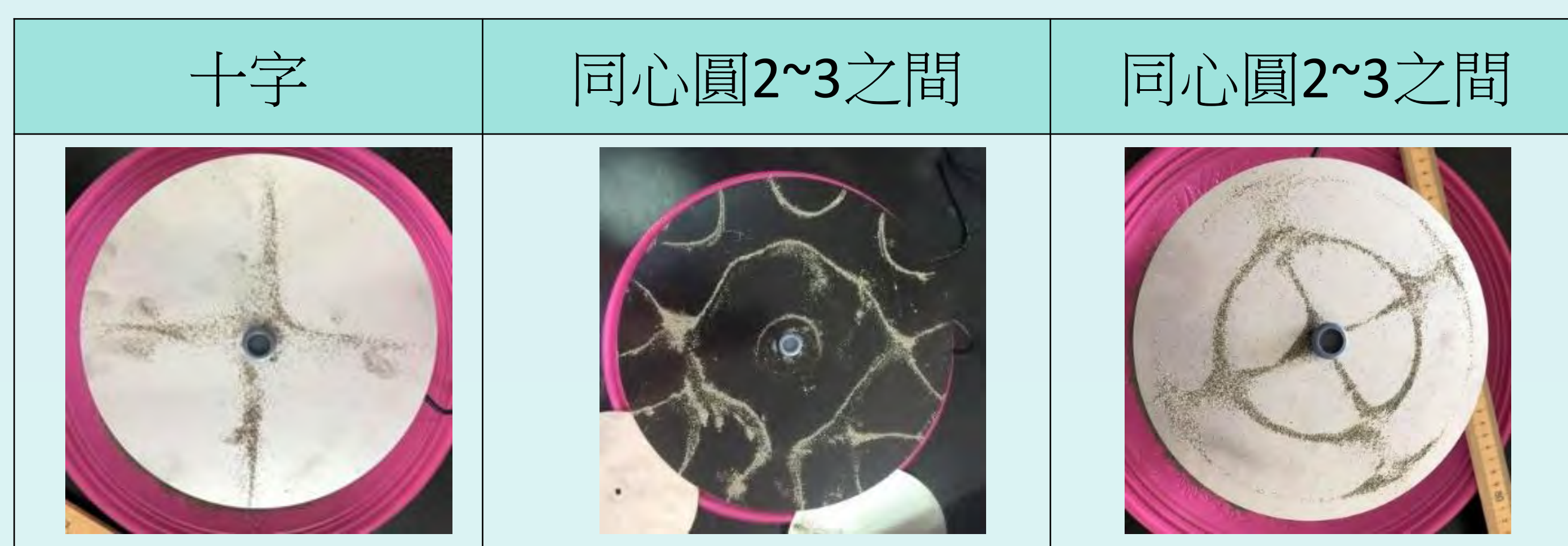
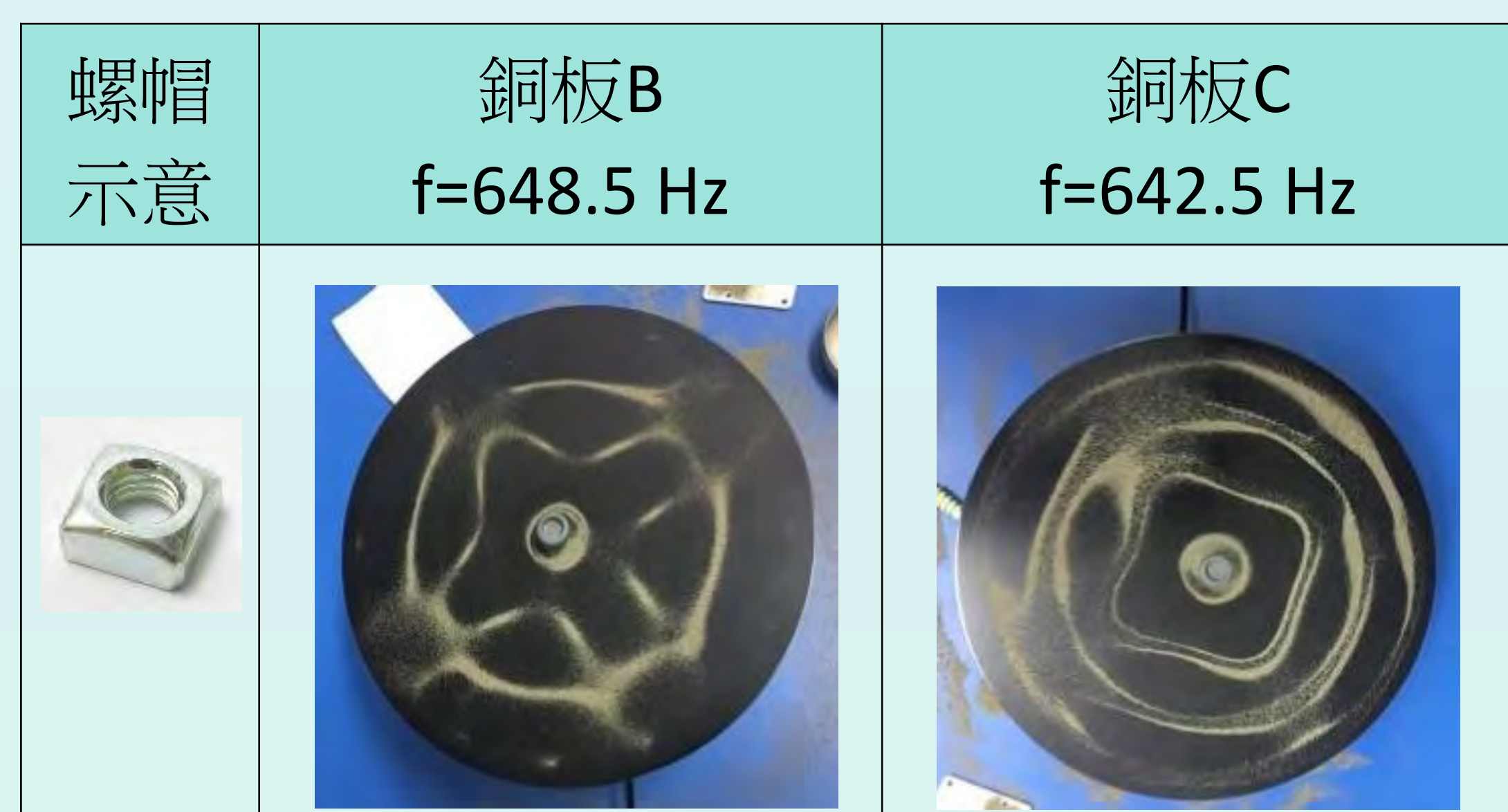
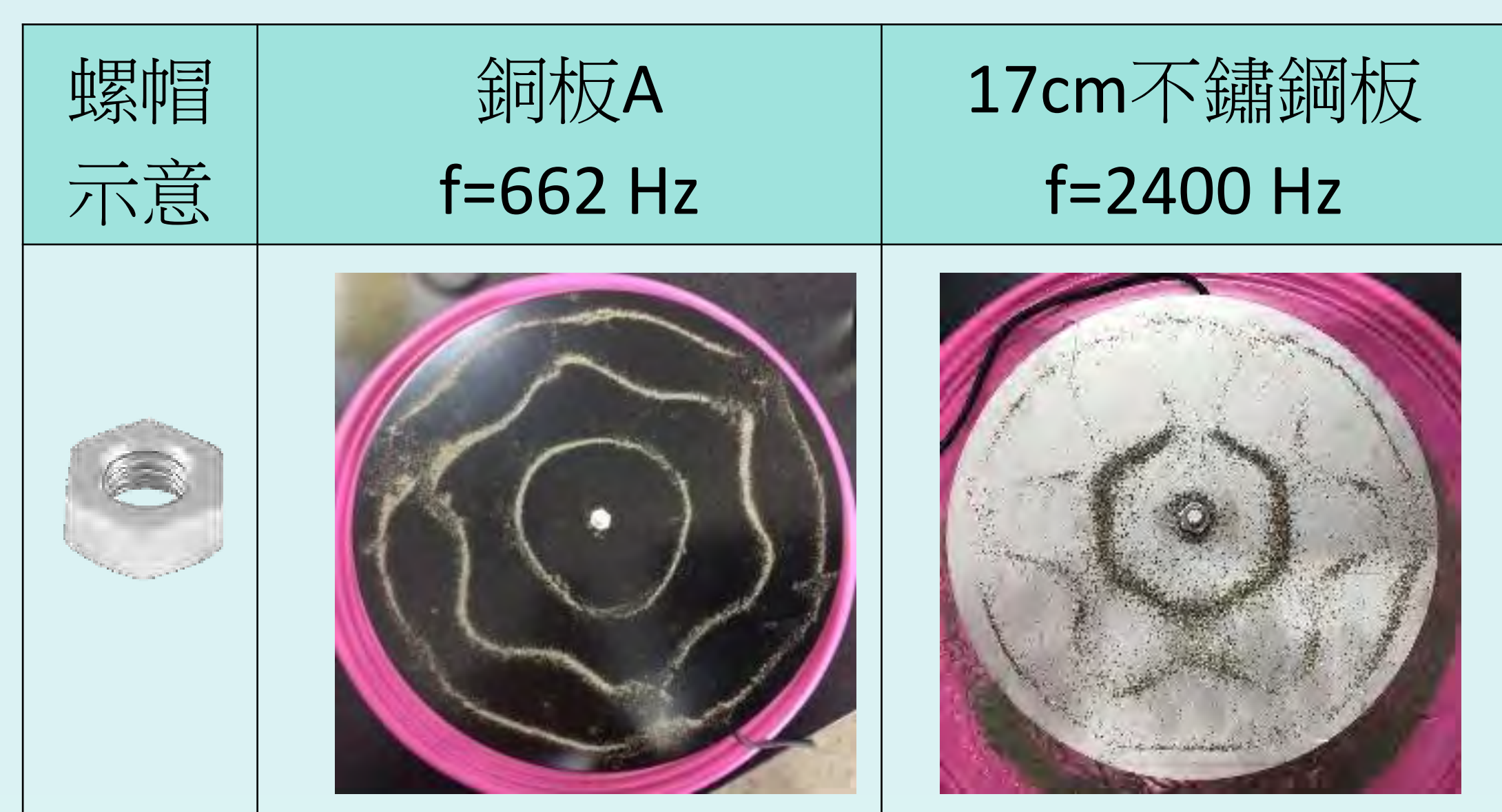
均勻的同心圓板可由Bessel function做模擬解之，其中 J_n 是第n階的方程， K_r 則是與第n階有關的m，經由電腦調整不同的參數模擬後，可以得到許多的模擬圖案(參考資料八)：



八、「同心圓共振」圖案



九、金屬板特殊圖案的探討



十、隨頻率而變的波速擬合

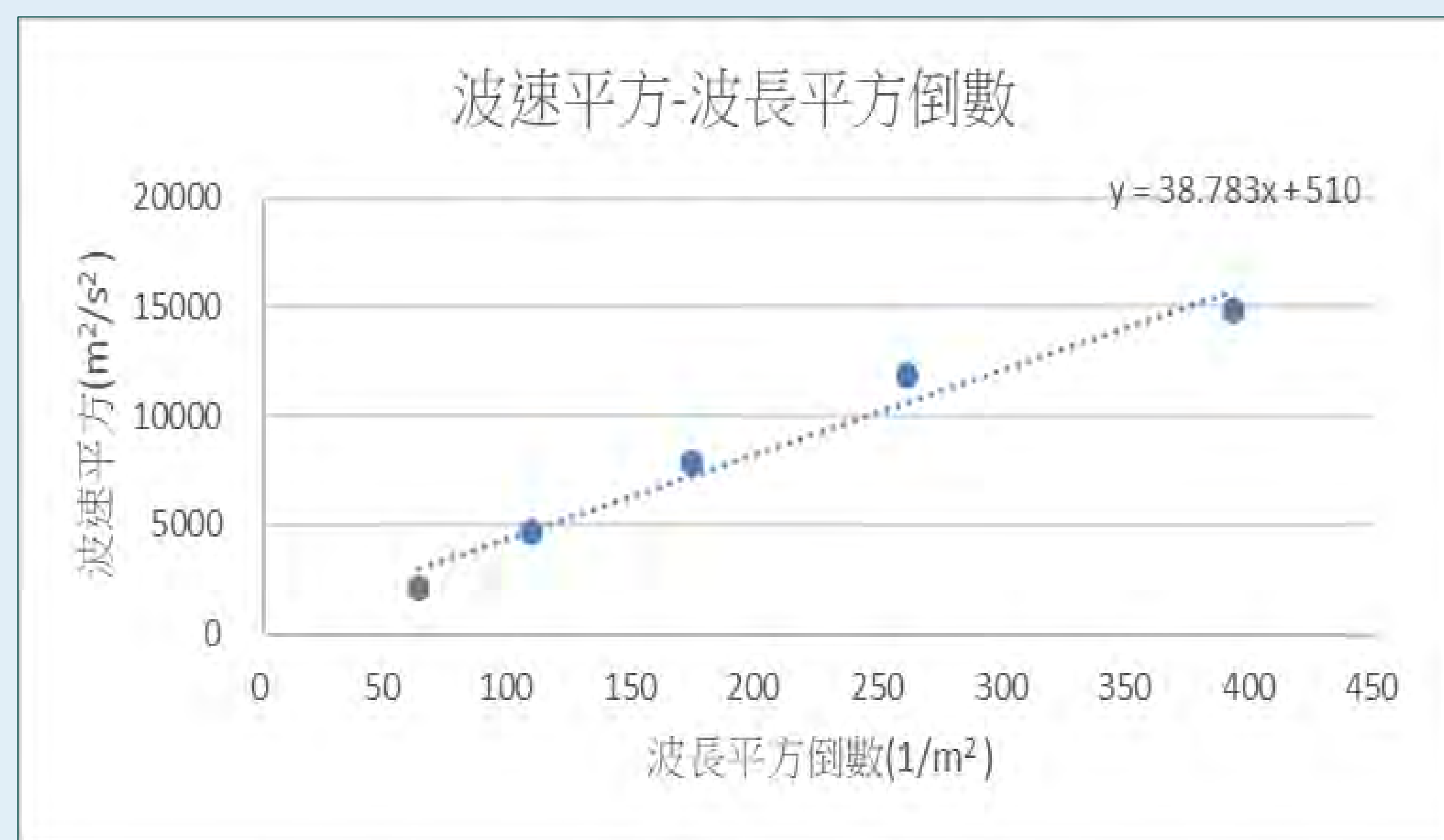
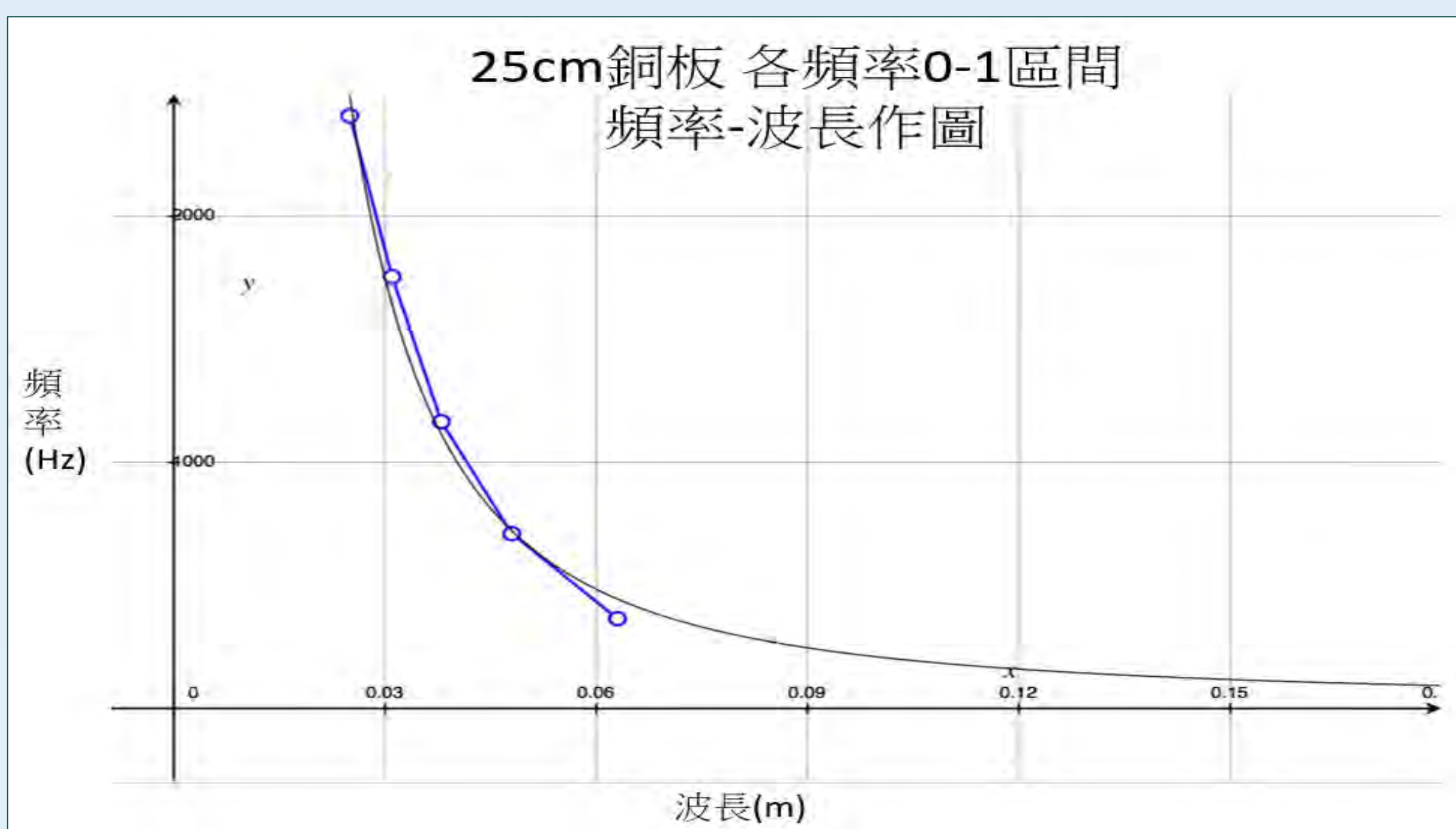
由參考資料十可知對一條理想弦而言，色散關係可寫為：

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad \omega^2 = \frac{T}{\mu} k^2$$

如同真空中的電磁波，理想弦為非色散介質，其相速度與群速度相等，並且與振動頻率無關。至於非理想弦則需考量到硬度的影響，色散關係變為，其中 α 是與弦有關的常數。

$$\omega^2 = \frac{T}{\mu} k^2 + \alpha k^4, \quad \text{其中 } \omega = 2\pi f, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad f^2 = \frac{T}{\mu} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + (2\pi)^2 \alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4$$

$$\text{若兩邊同乘 } \lambda^2 \text{ 得 } v^2 = (\lambda f)^2 = \frac{T}{\mu} + (2\pi)^2 \alpha \frac{1}{\lambda^2}$$



以4次方的擬合曲線得到常數值： $\frac{T}{\mu} = 207$ ， $(2\pi)^2 \alpha = 2.282$ ，

以直線的趨勢線得到常數值： $\frac{T}{\mu} = 510$ ， $(2\pi)^2 \alpha = 38.783$ ，

我們假定 $\frac{T}{\mu}$ 為定值，兩者有誤差，且我們在做不鏽鋼板的擬合曲線時，發現誤差會更大，表示這方法雖然可以找到規律與可預測性，但在0-1的節線上張力還是有些許誤差，但銅板可以讓誤差降到最低（因為大片），並由擬合曲線及趨勢線驗證頻率的改變會影響波速。

參 結論

- 一、銅板、壓克力板和不鏽鋼板各區間波速由內圈往外圈呈現下降的趨勢。
- 二、膠合木板與塑膠瓦楞板的圖形不為同心圓，由兩材質互相對照，可得知是由於內部結構，導致x方向和y方向的速率不同而產生不為同心圓的圖形。
- 三、由線密度及表面張力兩種推導方式，都能證明與波源距離越遠，波速越慢的實驗結果，並由重力的影響來分析，解釋直線狀材質波速減緩的現象，找出一端固定與一端自由的波速與本實驗結果不相符的原因。
- 四、波速會有因頻率提升而增加，考慮非理想弦則需考量到硬度的影響，為色散關係造成的結果，並針對銅板進行擬合曲線，有相似的關係。
- 五、同心圓對稱：圓板的直徑越小時，產生相同圖形需要越高的頻率；反之，若直徑越大，則所需的頻率越低。
- 六、均等分對稱：圓板的直徑越小時，產生第1個十字均等分對稱圖案的頻率隨之降低。