

# 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 物理與天文學科

探究精神獎

051813

「球」好撞撞—球體撞擊平面移動及滾動之探討

學校名稱：國立屏東高級中學

作者：  高二 葉承泓  高二 蔡和家  高二 許家菖	指導老師：  彭東亮
---	------------------

關鍵詞：碰撞損耗能量、滾動、移動

## 摘要

我們發現了球撞到平面後有回彈的現象，我們設計了幾個實驗來了解並探討這個現象。本實驗主要探討當球體水平撞擊各個垂直平面之後所損耗的能量、球後續的運動狀態以及兩者之間的關係。我們觀察到:碰撞損耗量與碰撞面材質有關，而碰撞動能損耗率且後續運動狀態與入射速度、球與地面的摩擦係數.....有關，而實驗可看出，當球體撞擊摩擦力越小，且碰撞損耗能量越大的平面，越容易造成球的回彈現象。

## 壹、實驗動機

我們無意間把彈珠撞擊到木製面紙盒，原本我們以為彈珠會沿著原路徑往回彈，結果它竟然瞬間停了下來，到了學校，我們又讓玻璃球撞擊了鐵櫃，發現它彷彿被吸住一般，有的球瞬間停住；有的球則是彈了出來又彷彿「被吸了回去」這與平常所見「球撞牆會幾乎無能量損耗的反彈回來」不同，這使我們很納悶，想知道為何發生這種現象。

## 貳、研究目的

- 一、找出球運轉在各時間點的各项運動量
- 二、求出在碰撞各個材質時的碰撞損耗能量並找出
  - (1)球質量跟碰撞動能損耗率的關係
  - (2)入射速度跟碰撞動能損耗率的關係
- 三、找球的各種可能運動方式之間的數值關係(分界點)
- 四、討論在何種情況下能使球「彷彿被接觸面吸了回去」

## 參、研究設備及器材(如下圖)

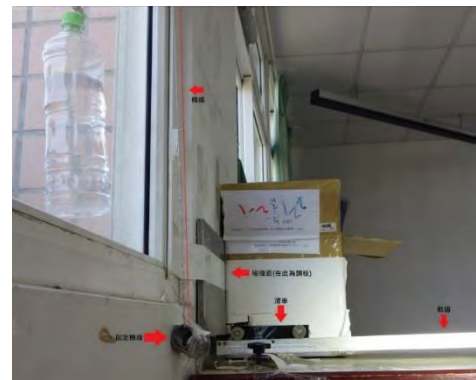
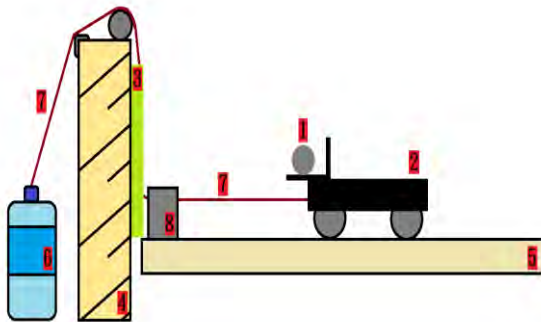
研究器材			用途	研究器材	用途
☐ 玻璃珠			方便觀測球的滾動	☐ WD-40 潤滑油	使球在滑車上不滾動
☐ 鋼珠(5 個不同質量)			實驗球體	☐ 水平儀	讓裝置保持水平
編號	質量(kg)	半徑 r(cm)		☐ 棉線	拉動滑車
1 球	0.00408	0.5		☐ 高速攝影機	拍攝球的軌跡
2 球	0.00836	0.635		☐ 燈光	增加畫面的亮度
3 球	0.01640	0.795		☐ 筆電	處理資料
4 球	0.02184	0.8775		☐☐ 膠帶	固定器材
5 球	0.02833	0.95		☐☐ 電子秤	測量鋼珠質量

☐ 重物(水瓶)	拉動滑車	☐☐ 滑車組(滑車+滑車軌道)	帶動小球
☐ 不鏽鋼板	撞擊面 2	☐☐ 滑車障礙物	使滑車停止
☐ 壓克力板	撞擊面 3	高速攝影機處理程式 Control 2 Series	處理高速攝影機影片
☐ 牆面	撞擊面 4	軟體程式一 Tracker/Excel	資料處理及分析數據



## 肆、研究過程及方法

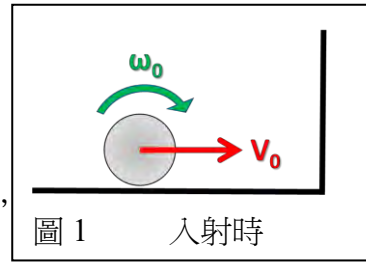
一、**滑車實驗**— 求出球入射速度量值與反彈後速度量值之間的關係，進而求出速度、質量、撞擊面材質對碰撞損耗能量(碰撞損耗率)的影響



實驗裝置圖: 1.鋼球 2.滑車 3.碰撞面 4.牆面 5.滑車軌道 6.水瓶 7.滑車 8.滑車障礙物

實驗方法:在碰撞實驗中，我們想使球在不轉動的情況下撞擊碰撞面，測量出初速與末速後由此推出能量損耗率，因此我們利用滑車帶動鋼珠，在滑車撞擊到障礙物後，球會依慣性飛出；並且為了不使球在撞出去的同時受到摩擦力的影響而轉動，進而造成撞擊碰撞面時因摩擦力而損失多餘的能量，我們在放置球的滑車平面以及碰撞面上抹上 WD-40 潤滑油。拉起繩子使水瓶升高，接下來放下水瓶使滑車往前帶動球撞擊碰撞面，用高速攝影機測量球的初 x 軸速度(即未撞擊碰撞面時的速度)及末 x 軸速度(撞出來後的速度)。依結果分析不同質量、碰撞面材質及不同入射速度之間碰撞損耗量的關係。為了讓每一次實驗，球的入射速度不同，我們會替換不同質量的水瓶，而且每次拉水瓶的高度也不一樣，如此拉動滑車時會有不同的加速度及速度；質量不同的部分我們則是直接換不同質量的球。

二、一維碰撞:首先,先假設下列各圖中向左方為  $x$  軸正向(移動正向),以順時針方向為轉動正向。如圖 1,已知質量為  $m$ ,半徑為  $r$ ,轉動慣量為  $I$  的鋼球以初速度量值  $V_0$ ,初角速度量值  $\omega_0$ ,入射路徑與碰撞面垂直的方向,撞向碰撞面。假設球與碰撞面間的動摩擦係數為  $\mu_k$ ,與接觸面的接觸時間(即接觸面對球之正向力的作用時間)為  $t$ 。圖 2 表示撞到碰撞面的下一瞬間,假設其速度量值為  $V'$ (方向朝左),角速度量值為  $\omega'$ (可能為 0,但若不為 0 則方向為順時針,相關討論請見「陸、問題與討論」),則由「肆、(壹)滑車實驗」可得  $V'$  與  $V_0$  的關係。而由牛頓第二運動定律可知碰撞面對球的平均正向力  $N$  滿足



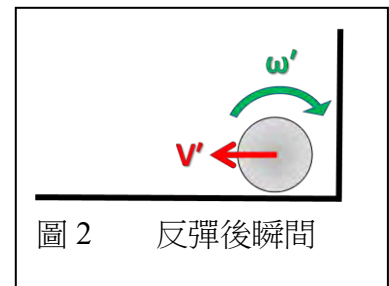
$$N = m \frac{V' - (-V_0)}{t} = m \frac{V' + V_0}{t}$$

若在接觸的  $t$  秒間平均動摩擦力  $f_k$  對球的力矩為  $\tau$ ,則可得到

$$\tau = f_k r = N \mu_k r = m \frac{V' + V_0}{t} \mu_k r = \frac{V' + V_0}{t} m r \mu_k$$

又令  $\alpha$  表示在  $\tau$  作用期間球的角加速度

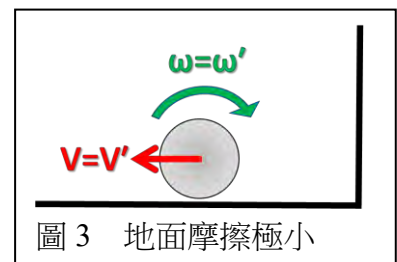
$$\therefore \tau = I \alpha = I \frac{\omega' - \omega_0}{t} \quad \therefore \omega' = \frac{m r \mu_k (V' + V_0)}{I} + \omega_0 \dots \textcircled{5}$$



接著由實驗我們推測因為轉動方向為順時針,移動方向向左,因此此時球不做純滾動(如圖 2),有地面對其摩擦力向右:

(一) 若地面與球之間的摩擦係數  $\mu_k'$  小到可以忽略,則可視為地面對球無摩擦力作用,因此球的速度及轉速皆不變,即球的

末速度  $V = V'$  (方向朝左),末角速度  $\omega = \omega' = \frac{m r \mu_k (V' + V_0)}{I} + \omega_0$  (方



向為順時針),因若要達到純滾動,而球的速度方向朝左時,轉動方向必須順時針,但此處它是逆時針轉,故球無法達到純滾動。(如圖 3)

(二) 若地面與球之間的摩擦係數  $\mu_k'$  較大不能忽略,則地面對球的摩擦力為動摩擦力  $F_k$  向右。由  $F_k$  作用使物體運動及轉動皆產生變化:

1. 以移動的角度來看:摩擦力使球的速度變慢,假設地面對球的正向力為  $N = mg$  (方向朝上),重力加速度為  $g$ ,因為  $F_k = N \mu_k' = mg \mu_k'$  (方向朝右)為定力,所以由等加速度運動公式可得:在  $F_k$  作用期間,以圖 2 的時間點為  $t' = 0$  起算,各個時間點  $t'$  球的速度量值  $V$

(1) 在速度  $> 0$  (即方向朝左)的期間:

$$\therefore -F_k = m \frac{V - V'}{t'} \quad \therefore V = -\frac{F_k t'}{m} + V' \dots \textcircled{1}$$

$\Rightarrow$  速度量值隨時間遞減

(2) 若當摩擦力作用使速度減少到 0 的時間點為  $t' = t_1$ ,則將  $V = 0$ ,  $t' = t_1$  帶入

$$-F_k = m \frac{V - V'}{t'} \Rightarrow -F_k = m \frac{0 - V'}{t_1}$$

可得到

$$t_1 = \frac{m V'}{F_k} = \frac{m V'}{m g \mu_k'} = \frac{V'}{g \mu_k'} \dots \textcircled{2}$$

(3) 若摩擦力繼續作用使速度 $<0$ (方向朝右), 則

$$\therefore -F_k = m \frac{-V - V'}{t'} \quad \therefore V = \frac{F_k t'}{m} - V' \dots \dots \textcircled{3}$$

2. 以轉動的角度來看: 摩擦力使球的角速度變慢, 設地面摩擦力對球所產生的力矩量值為  $\tau'$  因為  $F_k$  為定力, 所以  $\tau' = F_k r$  (方向為逆時針) 為定力矩, 因此球在  $\tau'$  作用下的角加速度為定值, 再由等角加速度運動公式可知在  $\tau'$  作用期間, 以圖 2 的時間點為  $t'=0$  起算, 各個時間點  $t'$  球的角速度量值  $\omega$

(1) 在角速度 $>0$ (即方向為順時針)的期間:

$$\therefore -\tau' = -F_k r = I \frac{\omega - \omega'}{t'} \quad \therefore \omega = -\frac{F_k r t'}{I} + \omega' \dots \dots \textcircled{4}$$

(2) 若當力矩作用使角速度減少到 0 的時間點為  $t'=t_2$ , 則將  $\omega=0$ ,  $t'=t_2$  帶入

$$-\tau' = -F_k r = I \frac{\omega - \omega'}{t'} \Rightarrow -F_k r = I \frac{0 - \omega'}{t_2}$$

得到

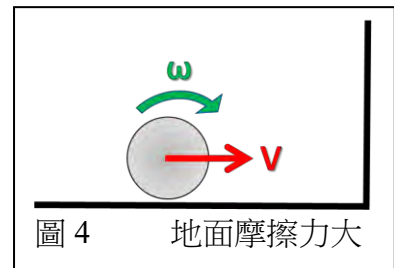
$$t_2 = \frac{I \omega'}{F_k r} = \frac{I \omega'}{mg \mu'_k r} \dots \dots \textcircled{5}$$

(3) 若力矩繼續作用使角速度 $<0$ (方向為逆時針), 則

$$\therefore -\tau' = -F_k r = I \frac{-\omega - \omega'}{t'} \quad \therefore \omega = \frac{F_k r t'}{I} - \omega' \dots \dots \textcircled{6}$$

3. 由②、⑤式, 球最終滾動的可能性有以下 3 種:

(1) 當  $t_1 < t_2$ , 即  $\frac{mV'}{F_k} < \frac{I\omega'}{F_k r} \Rightarrow \frac{mV'}{1} < \frac{I\omega'}{r} \Rightarrow mrV' < I\omega'$  時(如圖 4),



(a) 在此條件下當  $t'=t_1$  時速度量值已為 0, 而角速度量值不為 0 且方向未改變, 因此摩擦力及力矩依然存在且量值及方向不變, 繼續作用於球上, 使得下一瞬間開始球的速度方向改變成朝右且量值漸增, 角速度方向不變(順時針)但量值遞減, 由

$$\begin{cases} V = \frac{F_k t'}{m} - V' \dots \dots \textcircled{3} \\ \omega = -\frac{F_k r t'}{I} + \omega' \dots \dots \textcircled{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \left( \frac{V + V'}{F_k} \right) m = \left( \frac{V + V'}{mg \mu'_k} \right) m = \frac{V + V'}{g \mu'_k} \\ t' = \left( \frac{-\omega + \omega'}{F_k r} \right) I = \left( \frac{-\omega + \omega'}{mg \mu'_k r} \right) I \end{cases}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{V + V'}{g \mu'_k} = \left( \frac{-\omega + \omega'}{mg \mu'_k r} \right) I \Rightarrow V = \left( -\frac{I}{mr} \right) \omega + \frac{I \omega' - mr V'}{mr} \dots \dots \textcircled{7}$$

可得到在以圖 2 的時間點為  $t'=0$  起算, 各個時間點球的速度量值  $V$  與角速度量值  $\omega$  的關係式,

(I) 因為同一顆球之  $m$ 、 $r$ 、 $I$  不變, 故不論  $V_0$  與  $\omega_0$  為何, 只要用同一顆球做碰撞實驗, 不同實驗在各時間點之  $(V, \omega)$  在座標平面上所畫出之  $V-\omega$  圖皆成斜率為  $\left( -\frac{I}{mr} \right)$  的一線性關係(y 截距每次實驗不相同)

(II) 又因為入射之  $V_0$  與  $\omega_0$  在同一次的實驗中固定不變, 再帶入  $V'$  與  $V_0$ 、 $\omega'$  與  $\omega_0$  的關係式後  $V'$  與  $\omega'$  值也跟著固定。因為在同一次的實驗中, 球在反彈後之各個時間點速度量值及角速度量值皆滿足此關係式, 且速度量值與角速度量值會隨時間成連續性函數,

即同一次實驗在各時間點之(V,ω)在座標平面上所畫出之 V-ω 圖為⑦上的一條線段

(b) 假設當 V=ωr 的時間點為 t'=t<sub>r</sub>，由③、④

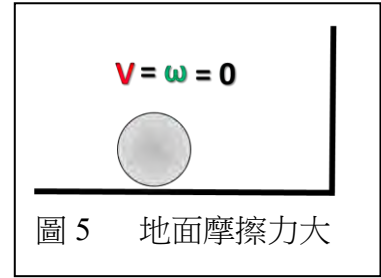
$$\because V=\omega r \text{ 且 } t'=t_r \Rightarrow \frac{F_k t_r}{m} - V' = \left(-\frac{F_k r t_r}{I} + \omega'\right)r$$

$$\Rightarrow \frac{mg\mu'_k t_r}{m} - V' = \left(-\frac{mg\mu'_k r t_r}{I} + \omega'\right)r \Rightarrow t_r = \frac{Im\omega'r + ImV'}{m^2g\mu'_k r^2 + Img\mu'_k} = \frac{I(\omega'r + V')}{g\mu'_k(mr^2 + I)} \dots\dots ⑧$$

此時球開始達到純滾動狀態，摩擦力瞬間減為 0，速度及角速度維持不變。也就是說，球在 t'≥t<sub>r</sub> 的時間中速度及角速度恆為定值

$$\begin{cases} V = \frac{F_k t_r}{m} - V' \\ \omega = -\frac{F_k r t_r}{I} + \omega' \end{cases} \dots\dots ⑥$$

不再隨時間改變。



(2) 當 t<sub>1</sub>=t<sub>2</sub>，即  $\frac{mV'}{F_k} = \frac{I\omega'}{F_k r} \Rightarrow \frac{mV'}{1} = \frac{I\omega'}{r} \Rightarrow mrV' = I\omega'$  時，(如圖 5)

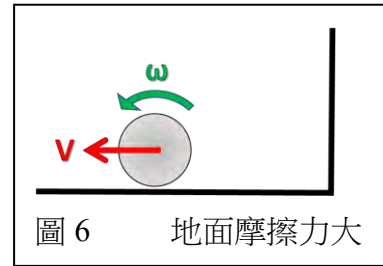
在此條件下當 t'=t<sub>1</sub>=t<sub>2</sub> 時的瞬間速度量值及角速度量值恰好皆變為 0，球瞬間停止運動，呈靜止狀態。

由等加速度運動公式

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

球由撞擊點到停止處的質心移動量(位移)S 為

$$S = V't_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{F_k}{m}\right) t_1^2 = V' \left(\frac{V'}{g\mu'_k}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{F_k}{m}\right) \left(\frac{V'}{g\mu'_k}\right)^2 = \frac{3V'^2}{2g\mu'_k}$$



(3) 當 t<sub>1</sub>>t<sub>2</sub>，即  $\frac{mV'}{F_k} > \frac{I\omega'}{F_k r} \Rightarrow \frac{mV'}{1} > \frac{I\omega'}{r} \Rightarrow mrV' > I\omega'$  時，(如圖 6)

(a) 在此條件下當 t'=t<sub>2</sub> 時角速度量值已為 0，而速度量值不為 0 且方向未改變，因此摩擦力及力矩依然存在且量值及方向不變，繼續作用於球上，使得下一瞬間開始球的角速度改變成逆時針方向且量值漸增，速度方向不變(朝左)但量值遞減，由

$$\begin{cases} V = -\frac{F_k t'}{m} + V' \dots\dots ① \\ \omega = \frac{F_k r t'}{I} - \omega' \dots\dots ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \left(\frac{-V + V'}{F_k}\right) m = \left(\frac{-V + V'}{mg\mu'_k}\right) m = \frac{-V + V'}{g\mu'_k} \\ t' = \left(\frac{\omega + \omega'}{F_k r}\right) I = \left(\frac{\omega + \omega'}{mg\mu'_k r}\right) I \end{cases}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{-V + V'}{g\mu'_k} = \left(\frac{\omega + \omega'}{mg\mu'_k r}\right) I \Rightarrow V = \left(-\frac{I}{mr}\right) \omega - \frac{I\omega' + mrV'}{mr} \dots\dots ⑧$$

可得到在以圖 2 的時間點為 t'=0 起算，各個時間點球的速度量值 V 與角速度量值 ω 的關係式，

(I) 因為同一顆球之 m、r、I 不變，故不論 V<sub>0</sub> 與 ω<sub>0</sub> 為何，只要用同一顆球做碰撞實驗，不同實驗在各時間點之(V,ω)在座標平面上所畫出之 V-ω 圖皆成斜率為  $\left(-\frac{I}{mr}\right)$  的一線性關係(y 截距每次實驗不相同)

(II) 又因為入射之 V<sub>0</sub> 與 ω<sub>0</sub> 在同一次的實驗中固定不變，再帶入 V' 與 V<sub>0</sub>、ω' 與 ω<sub>0</sub> 的關



係式後  $V'$  與  $\omega'$  值也跟著固定。因為在同一次的實驗中，球在反彈後之各個時間點速度量值及角速度量值皆滿足此關係式，且速度量值與角速度量值會隨時間成連續性函數，即同一次實驗在各時間點之  $(V, \omega)$  在座標平面上所畫出之  $V-\omega$  圖為⑦上的一條線段

(b) 假設當  $V=\omega r$  的時間點為  $t'=t_r$ ，由①、⑥

$$\therefore V=\omega r \text{ 且 } t'=t_r \Rightarrow -\frac{F_k t'}{m} + V' = \left(\frac{F_k r t'}{I} - \omega'\right)r$$

$$\Rightarrow -\frac{mg\mu_k' t_r}{m} + V' = \left(\frac{mg\mu_k' r t_r}{I} - \omega'\right)r \Rightarrow t_r = \frac{Im\omega' r + ImV'}{m^2 g\mu_k' r^2 + Img\mu_k' - g\mu_k'(mr^2 + I)} \dots\dots ⑧$$

球開始達到純滾動狀態，此時摩擦力瞬間減為 0，速度及角速度維持不變。也就是說，球在  $t' \geq t_r$  的時間中速度及角速度恆為定值

$$\begin{cases} V = -\frac{F_k t_r}{m} + V' \\ \omega = \frac{F_k r t_r}{I} - \omega' \end{cases}$$

不再隨時間改變。

三、二維碰撞：在二維碰撞中，為了方便計算及表示，我們若將某一向量定義為  $\vec{a}$  時，那麼  $a$  表示  $\vec{a}$  的量值(即  $|\vec{a}|$ )

(一) 若撞擊面與球之間摩擦係數  $\mu_k$  及地面與球之間摩擦係數  $\mu_k'$  皆較大不能忽略：

假設下列俯視圖中向右方為  $x$  軸正向，向下方為  $y$  軸正向，出紙面方向為  $z$  軸正向；側視圖中向右方為  $x$  軸正向，出紙面方向為  $y$  軸正向，向上方為  $z$  軸正向。已知質量為  $m$ ，半徑為  $r$ ，轉動慣量為  $I$  的鋼球以初速度  $\vec{V}_0$ ，初角速度  $\vec{\omega}_0$ ，方向與速度方向互相垂直(我們可將任意角速度以空間中的一向量來表示以右手定則來定出其方向，用長度表示其大小)，入射路徑與碰撞面的法線夾角  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 的方向，撞向碰撞面。假設球與碰撞面間的動摩擦

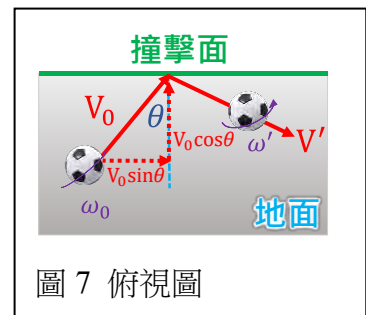


圖 7 俯視圖

係數為  $\mu_k$  (較大不能忽略不計)，與接觸面的接觸時間(即接觸面對球之正向力的作用時間)為  $t$ ，反彈後一瞬間速度為  $\vec{V}'$ 。如圖 7 所示，可將  $\vec{V}_0$  分解成  $\vec{V}_{0x}$  與  $\vec{V}_{0y}$  兩分量，其中  $V_{0x} = V_0 \sin \theta$  與  $V_{0y} = V_0 \cos \theta$ ；將  $\vec{\omega}_0$  分解成  $\vec{\omega}_{0x}$  與  $\vec{\omega}_{0y}$  兩分量，其中  $\omega_{0x} = \omega_0 \sin \theta$  與  $\omega_{0y} = \omega_0 \cos \theta$ 。而由「肆、(壹)滑車實驗」的結果可知  $\vec{V}'$  的  $y$  分量量值為  $V'_y = (am+b) V_0 \cos \theta$ ，而由  $y$  方向可得碰撞面對球的平均正向力  $\vec{N}$  滿足

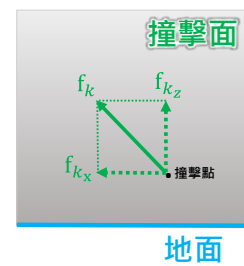


圖 8 側視圖

$$N = m \frac{V'_y - (-V_{0y})}{t} = m \frac{V'_y + V_{0y}}{t}$$

則在接觸的  $t$  秒間平均動摩擦力  $\vec{f}_k$  滿足

$$f_k = N\mu_k = m\mu_k \frac{V'_y + V_{0y}}{t}$$

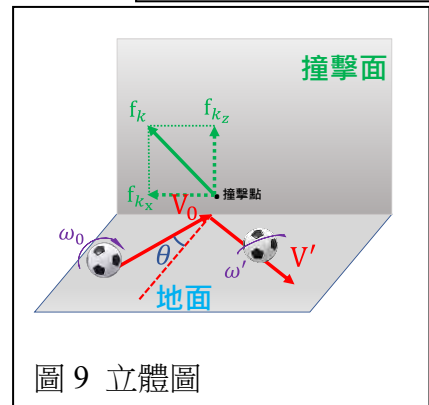


圖 9 立體圖

接著要確認 $\vec{f}_k$ 的方向，可利用球上之球與碰撞面的接觸點瞬間速度方向之反向即為 $\vec{f}_k$ 的方向。

而因質心速度 $\vec{V}_0$ 可分解為 $\vec{V}_{0x}$ 與 $\vec{V}_{0y}$ ，角速度 $\vec{\omega}_0$ 可分解為 $\vec{\omega}_{0x}$ (由切線速度的公式  $V=\omega r$  可造成此點 z 方向(切線)速度為 $\omega_{0x}r=\omega_0r\sin\theta$  (方向向 z 軸負向))與 $\vec{\omega}_{0y}$ (此角速度並不會對此點造成任何方向的切線速度)，故合併起來此點在撞擊撞擊面的前一瞬間其速度向量為 $(V_0\sin\theta, -V_0\cos\theta, -\omega_0r\sin\theta)$ 。

因 $\vec{f}_k$ 只能分解成 x 及 z 方向的分力(y 方向分力為 0)，故 $\vec{f}_k$ 的 x 分量 $\vec{f}_{kx}$ (方向向 x 軸負向)與  $f_k$  的 z 分量 $\vec{f}_{kz}$ (方向向 z 軸正向)滿足 $f_{kx}:f_{kz}=V_0\sin\theta:\omega_0r\sin\theta=V_0:\omega_0r$ ，又 $f_{kx}^2+f_{kz}^2=f_k^2$ ，故 $f_{kx}=\frac{mV_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{t}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}$ ； $f_{kz}=\frac{m\omega_0r\mu_k(V'_y+V_{0y})}{t}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}$ 。其中 $\vec{f}_{kx}$ 會影響速度 $\vec{V}'$ 的 x 分量 $\vec{V}'_x$ 及反彈後一瞬間的角速度 $\vec{\omega}'$ ；而 $\vec{f}_{kz}$ 只會影響 $\vec{\omega}'$ 。

1. $\vec{f}_{kx}$ 對 $\vec{V}'_x$ 的影響:由牛頓第二運動定律，

$$f_{kx}=m\frac{V'_x-V_{0x}}{t}\Rightarrow V'_x=V_0\mu_k(V'_y+V_{0y})\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}+V_{0x}$$

2. $\vec{f}_{kx}$ 對 $\vec{\omega}'$ 的影響: $\vec{f}_{kx}$ 造成 z 方向的力矩，使 $\vec{\omega}'$ 的 z 分量 $\vec{\omega}'_z$ 滿足

$$f_{kx}r=I\frac{\omega'_z-0}{t}\Rightarrow \omega'_z=\frac{mrV_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}$$

3. $\vec{f}_{kz}$ 對 $\vec{\omega}'$ 的影響: $\vec{f}_{kz}$ 造成 x 方向的力矩，使 $\vec{\omega}'$ 的 x 分量 $\vec{\omega}'_x$ 滿足

$$f_{kz}r=I\frac{-\omega'_x-(-\omega_{0x})}{t}\Rightarrow \omega'_x=\omega_{0x}-\frac{mr^2\omega_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}$$

在此 $\omega'_x$ 可能為 0，但若不為 0 則方向為向 x 軸負向，相關討論請見「陸、問題與討論」(如同一維碰撞時  $\omega'$  方向的討論)，而因 $\vec{f}_{kz}$ 作用時間極短，故一般而言 $\vec{f}_{kz}$ 很難使  $\omega'_x$  為 0，因此以下我們只討論當 $\omega'_x\neq 0$  的情形，也就是當

$$\omega_{0x}>\frac{mr^2\omega_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}$$

因此反彈後一瞬間之速度向量 $\vec{V}'$ 為

$$\begin{aligned}\vec{V}'&=(\vec{V}'_x, \vec{V}'_y, \vec{V}'_z)=(V_0\mu_k(V'_y+V_{0y})\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}+V_{0x}, (am+b)V_0\cos\theta, 0) \\ &=((am+b+1)V_0^2\mu_k\cos\theta\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}+V_0\sin\theta, (am+b)V_0\cos\theta, 0)\end{aligned}$$

角速度向量 $\vec{\omega}'$ 為

$$\vec{\omega}'=(\vec{\omega}'_x, \vec{\omega}'_y, \vec{\omega}'_z)=\left(\frac{mr^2\omega_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}-\omega_{0x}, -\omega_0\cos\theta, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$$



$$= \left( \frac{mr^2\omega_0\mu_k(am+b+1)V_0\cos\theta}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}} - \omega_0\sin\theta, -\omega_0\cos\theta, \frac{mrV_0\mu_k(am+b+1)V_0\cos\theta}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}} \right)$$

接著討論若地面與球之間的摩擦係數  $\mu_k$  較大不能忽略時，假設地面對球的正向力為  $\vec{N}'$  滿足  $N'=mg$  (方向朝 z 軸正向)，則地面對球的摩擦力  $\vec{F}_k$  滿足

$$F_k = N'\mu_k' = mg\mu_k'$$

再來我們要討論  $\vec{F}_k$  的方向，在碰撞後一瞬間只要  $\vec{V}'$  與  $\vec{\omega}'$  兩向量不互相垂直，則  $\vec{F}_k$  不與  $\vec{V}'$  互相平行，也不與  $\vec{\omega}'$  互相垂直，故  $\vec{F}_k$  作用後下一瞬間的速度方向與  $\vec{V}'$  不互相平行，轉動方向與  $\vec{\omega}'$  不互相平行。這樣一來造成  $\vec{F}_k$  作用後下一瞬間的地面摩擦力量值雖與碰撞後一瞬間的地面摩擦力量值雖相同 (皆為  $F_k = mg\mu_k'$ )，但方向不一定相同，同理，再過下一瞬間  $\vec{F}_k$  方向可能又將不同，因此在二維碰撞的討論中我們不一定能將地面摩擦力視為定力來做計算。以下，我們將把地面摩擦力分成 x 軸方向的分量  $\vec{F}_{k_x}$  以及 y 軸方向的分量  $\vec{F}_{k_y}$  來分別討論，類似碰撞面對

球的摩擦力方向討論的方法，我們目前已知：在反彈後一瞬間，質心速度  $\vec{V}'$  可分解為  $\vec{V}'_x$  與  $\vec{V}'_y$ ，角速度  $\vec{\omega}'$  可分解為  $\vec{\omega}'_x$  (由切線速度的公式  $V=\omega r$  可造成此點 y 方向(切線)速度為  $\omega'_x r$  (方向向 y 軸負向))、 $\vec{\omega}'_y$  (由切線速度的公式  $V=\omega r$  可造成此點 x 方向(切線)速度為  $\omega'_y r$  (方向向 x 軸負向)) 與  $\vec{\omega}'_z$  (此角速度並不會對此點造成任何方向的切線速度)，故合併起來「球上之球與地面接觸點」在碰撞後一瞬間其速度向量為  $(V'_x - \omega'_y r, V'_y + \omega'_x r, 0)$ 。

因此點的瞬間速度方向之反向即為摩擦力  $\vec{F}_k$  的方向，故  $\vec{F}_k$  可分解成 x 及 y 方向的分力 (z 方向分力為 0) 分別為  $\vec{F}_{k_x}$  及  $\vec{F}_{k_y}$ ，滿足  $F_{k_x}:F_{k_y} = |V'_x - \omega'_y r|:(V'_y + \omega'_x r)$ ，又  $F_{k_x}^2 + F_{k_y}^2 = F_k^2$ ，所以

$$F_{k_x} = |V'_x - \omega'_y r| mg\mu_k' \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}; F_{k_y} = (V'_y + \omega'_x r) mg\mu_k' \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}$$

接著我們希望能找出  $F_{k_x}$  與時間的關係式，這樣一來我們能利用  $F_{k_x}$  對時間關係圖中圖下面積求出某時間內，球所受的衝量及角衝量，進而求出球的速度變化量及角速度變化量。若令碰撞後一瞬間的時間點為  $t'$  (時間軸)=0，則在摩擦力作用的期間中 (即球還未達到純滾動時)，假設某任意時間點  $t'=n$  ( $0 \leq n < t_r$ ， $t_r$  表示開始達到純滾動的時間點)，此時地面摩擦力的 x 分量為

$\vec{F}_{k_{x_n}}$ ，地面摩擦力的 y 分量為  $\vec{F}_{k_{y_n}}$ ，球的 x 方向速度  $\vec{V}''_{x_n}$ ，角速度  $\vec{\omega}''_{x_n}$ ；y 方向速度  $\vec{V}''_{y_n}$ ，角速度  $\vec{\omega}''_{y_n}$ ；而 z 方向不受地面摩擦力影響，故速度  $\vec{V}''_{z_n}$  保持定值 0，角速度  $\vec{\omega}''_{z_n}$  保持定值  $\vec{\omega}'_z$ 。由上述討論可知：

$$\vec{V}''_{x_0} = V'_x; \vec{V}''_{y_0} = V'_y; \vec{\omega}''_{x_0} = -\omega'_x; \vec{\omega}''_{y_0} = -\omega'_y;$$

$$F_{k_{x_0}} = F_{k_x} = |V'_x - \omega'_y r| mg\mu_k' \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}; F_{k_{y_0}} = F_{k_y} = (V'_y + \omega'_x r) mg\mu_k' \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}$$

如同前面摩擦力方向的討論，我們先找出「球上之球與地面接觸點」在此時 (時間點  $t'=n$ ) 之速度向量，求出此時  $\vec{F}_k$  的方向：

1. 若  $\vec{V}''_{x_n}$  方向朝 x 軸正向， $\vec{\omega}''_{y_n}$  方向朝 y 軸負向，且  $V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r > 0 \Rightarrow V''_{x_n} > \omega''_{y_n} r$ ，則「球上之球與地面接觸點」其速度之 x 分量為  $V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r$  (朝 x 軸正向)，故  $\vec{F}_{k_{x_n}}$  朝 x 軸負向：

(1) 若此時  $\vec{V}''_{y_n}$  方向朝 y 軸正向， $\vec{\omega}''_{x_n}$  方向朝 x 軸負向，則「球上之球與地面接觸點」其速

度之  $y$  分量為  $V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r$  (朝  $y$  軸正向)，故  $\overrightarrow{F_{k_{y_n}}}$  朝  $y$  軸負向：

$$\therefore F_{k_{x_n}}^2 + F_{k_{y_n}}^2 = F_k^2$$

$$\therefore F_{k_{x_n}} = mg\mu'_k (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}}; F_{k_{y_n}} = mg\mu'_k (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}}$$

在  $\overrightarrow{F_k}$  作用極短時間  $\Delta t$  ( $\Delta t$  趨近於 0) 後，在  $t' = n + \Delta t$  的時間點，可得：

(a) 若  $\overrightarrow{V''_{x_{n+\Delta t}}}$  方向朝  $x$  軸正向， $\overrightarrow{\omega''_{y_{n+\Delta t}}}$  方向朝  $y$  軸負向， $\overrightarrow{V''_{y_{n+\Delta t}}}$  方向朝  $y$  軸正向， $\overrightarrow{\omega''_{x_{n+\Delta t}}}$  方向朝  $x$  軸負向，則由合力及力矩公式可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{k_{x_n}} = \frac{m(V''_{x_{n+\Delta t}} - V''_{x_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{x_n}} r = \frac{I(-\omega''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{y_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{y_n}} = \frac{m(V''_{y_{n+\Delta t}} - V''_{y_n})}{\Delta t} \\ F_{k_{y_n}} r = \frac{I(-\omega''_{x_{n+\Delta t}} + \omega''_{x_n})}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''_{x_{n+\Delta t}} = V''_{x_n} - \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{y_{n+\Delta t}} = \omega''_{y_n} + \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \\ V''_{y_{n+\Delta t}} = V''_{y_n} - \left( \frac{V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{x_{n+\Delta t}} = \omega''_{x_n} - \left( \frac{V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \end{array} \right.$$

此時「球上之球與地面接觸點」其速度向量為  $(V''_{x_{n+\Delta t}} - \omega''_{y_{n+\Delta t}} r, V''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{x_{n+\Delta t}} r)$

$$= (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right), (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r) \left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right)$$

故  $\overrightarrow{F_{k_{x_{n+\Delta t}}}}$  朝  $x$  軸負向， $\overrightarrow{F_{k_{y_{n+\Delta t}}}}$  朝  $y$  軸負向。

$$\therefore F_{k_{x_{n+\Delta t}}}^2 + F_{k_{y_{n+\Delta t}}}^2 = F_k^2$$

$$\therefore F_{k_{x_{n+\Delta t}}} = mg\mu'_k (V''_{x_{n+\Delta t}} - \omega''_{y_{n+\Delta t}} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_{n+\Delta t}} - \omega''_{y_{n+\Delta t}} r)^2 + (V''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{x_{n+\Delta t}} r)^2}}$$

$$mg\mu'_k (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right)$$

$$\sqrt{\left[ (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right) \right]^2 + \left[ (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r) \left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right) \right]^2}$$

$$mg\mu'_k (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right)$$

$$\left( 1 - \frac{I g\mu'_k + m r^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right) \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}$$

$$= \frac{mg\mu'_k (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} = F_{k_{x_n}}$$

故  $F_{k_x}$ - $t$ '圖在  $t'=n$  處的切線斜率為  $\frac{F_{k_{x_{n+\Delta t}}} - F_{k_{x_n}}}{\Delta t} - \frac{F_{k_{x_n}} - F_{k_{x_{n-\Delta t}}}}{\Delta t} = 0$ ，即  $\overrightarrow{F_{k_x}}$  不隨時間改變而改變

$$\text{同理， } F_{k_{y_{n+\Delta t}}} = mg\mu_k'(V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r) \sqrt{\frac{1}{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} = F_{k_{y_n}}$$

因為  $\overrightarrow{F_{k_{x_n}}}$ 、 $\overrightarrow{F_{k_{y_n}}}$  皆不變，故  $\overrightarrow{F_k}$  的方向不變。

(b) 若  $\overrightarrow{V_{x_{n+\Delta t}}''}$  方向朝 x 軸正向， $\overrightarrow{\omega_{y_{n+\Delta t}}''}$  方向朝 y 軸負向， $V_{y_{n+\Delta t}}'' = 0$ ， $\overrightarrow{\omega_{x_{n+\Delta t}}''}$  方向朝 x 軸負向，則由合力及力矩公式可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{k_{x_n}} = \frac{m(V_{x_{n+\Delta t}}'' - V_{x_n}'')}{\Delta t} \\ -F_{k_{x_n}} r = \frac{I(-\omega_{y_{n+\Delta t}}'' + \omega_{y_n}'')}{\Delta t} \\ -F_{k_{y_n}} = \frac{m(0 - V_{y_n}'')}{\Delta t} \\ F_{k_{y_n}} r = \frac{I(-\omega_{x_{n+\Delta t}}'' + \omega_{x_n}'')}{\Delta t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{x_{n+\Delta t}}'' = V_{x_n}'' - \left( \frac{V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r}{\sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} g\mu_k' \right) \Delta t \\ \omega_{y_{n+\Delta t}}'' = \omega_{y_n}'' + \left( \frac{V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r}{I \sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} mg\mu_k' r \right) \Delta t \\ 0 = V_{y_n}'' - \left( \frac{V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r}{\sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} g\mu_k' \right) \Delta t \\ \omega_{x_{n+\Delta t}}'' = \omega_{x_n}'' - \left( \frac{V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r}{I \sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} mg\mu_k' r \right) \Delta t \end{array} \right.$$

此時「球上之球與地面接觸點」其速度向量為  $(V_{x_{n+\Delta t}}'' - \omega_{y_{n+\Delta t}}'' r, \omega_{x_{n+\Delta t}}'' r)$

$$= ((V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r) \left( 1 - \frac{I g \mu_k' + m r^2 g \mu_k'}{I \sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} \Delta t \right), \omega_{x_n}'' r - \left( \frac{V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r}{I \sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} mg \mu_k' r^2 \right) \Delta t)$$

$$= ((V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r) \left( 1 - \frac{I g \mu_k' + m r^2 g \mu_k'}{I \sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} \Delta t \right), (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r) \left( 1 - \frac{I g \mu_k' + m r^2 g \mu_k'}{I \sqrt{(V_{x_n}'' - \omega_{y_n}'' r)^2 + (V_{y_n}'' + \omega_{x_n}'' r)^2}} \Delta t \right))$$

仿照上面的方法，亦可得到  $\overrightarrow{F_{k_{x_n}}}$ 、 $\overrightarrow{F_{k_{y_n}}}$  皆不變，故  $\overrightarrow{F_k}$  的方向不變。

(c) 若  $\overrightarrow{V_{x_{n+\Delta t}}''}$  方向朝 x 軸正向， $\overrightarrow{\omega_{y_{n+\Delta t}}''}$  方向朝 y 軸負向， $\overrightarrow{V_{y_{n+\Delta t}}''}$  方向朝 y 軸正向， $\omega_{x_{n+\Delta t}}'' = 0$ ，則由合力及力矩公式可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{k_{x_n}} = \frac{m(V''_{x_{n+\Delta t}} - V''_{x_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{x_n}} r = \frac{I(-\omega''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{y_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{y_n}} = \frac{m(V''_{y_{n+\Delta t}} - V''_{y_n})}{\Delta t} \\ F_{k_{y_n}} r = \frac{I(0 + \omega''_{x_n})}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''_{x_{n+\Delta t}} = V''_{x_n} - \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{y_{n+\Delta t}} = \omega''_{y_n} + \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \\ V''_{y_{n+\Delta t}} = V''_{y_n} - \left( \frac{V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ 0 = \omega''_{x_n} - \left( \frac{V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \end{array} \right.$$

此時「球上之球與地面接觸點」其速度向量為 $(V''_{x_{n+\Delta t}} - \omega''_{y_{n+\Delta t}} r, V''_{y_{n+\Delta t}})$

$$= (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g \mu'_k + m r^2 g \mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right), (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r) \left( 1 - \frac{I g \mu'_k + m r^2 g \mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n} + \omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right)$$

仿照上面的方法，亦可得到 $\overline{F_{k_{x_n}}}$ 、 $\overline{F_{k_{y_n}}}$ 皆不變，故 $\overline{F_k}$ 的方向不變。

(2)若此時 $V''_{y_n} = 0$ ， $\overline{\omega''_{x_n}}$ 方向朝 x 軸負向，則「球上之球與地面接觸點」其速度之 y 分量為 $\omega''_{x_n} r$ (朝 y 軸正向)，故 $\overline{F_{k_{y_n}}}$ 朝 y 軸負向，則在  $t'=n+\Delta t$  的時間點滿足 $\overline{V''_{y_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 y 軸負向， $\overline{\omega''_{x_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 x 軸負向，且 $\omega''_{x_{n+\Delta t}} r > V''_{y_{n+\Delta t}}$ (因為若 $\omega''_{x_{n+\Delta t}} r \leq V''_{y_{n+\Delta t}}$ 則表示在  $t'=n$  到  $t'=n+\Delta t$  的期間必有某一瞬間  $t'=j$  ( $n < j \leq n+\Delta t$ ) 滿足  $V''_{y_j} = \omega''_{x_j} r$ ，此時在 y 方向已達到純滾動的條件( $V = \omega r$  且  $\overline{\omega}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向與  $\overline{V}$  反向)，所以在  $t' \geq j$  的期間，在 y 方向上並無地面摩擦力作用，而在此處我們想討論  $t'=n+\Delta t$  的時間點其  $\overline{F_k}$  的方向，故排除已經達成 y 方向純滾動時的情形)

$$\because F_{k_{x_n}}^2 + F_{k_{y_n}}^2 = F_k^2 \quad \therefore F_{k_{x_n}} = mg\mu'_k (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}}; F_{k_{y_n}} = mg\mu'_k \omega''_{x_n} r \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}}$$

在 $\overline{F_k}$ 作用極短時間 $\Delta t$ ( $\Delta t$ 趨近於 0)後，在  $t'=n+\Delta t$  的時間點，若 $\overline{V''_{x_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 x 軸正向， $\overline{\omega''_{y_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 y 軸負向，再加上 $\overline{V''_{y_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 y 軸負向， $\overline{\omega''_{x_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 x 軸負向，且 $\omega''_{x_{n+\Delta t}} r > V''_{y_{n+\Delta t}}$ ，則由合力及力矩公式可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{k_{x_n}} = \frac{m(V''_{x_{n+\Delta t}} - V''_{x_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{x_n}} r = \frac{I(-\omega''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{y_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{y_n}} = \frac{m(-V''_{y_{n+\Delta t}} - 0)}{\Delta t} \\ F_{k_{y_n}} r = \frac{I(-\omega''_{x_{n+\Delta t}} + \omega''_{x_n})}{\Delta t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''_{x_{n+\Delta t}} = V''_{x_n} - \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{y_{n+\Delta t}} = \omega''_{y_n} + \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{I\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \\ V''_{y_{n+\Delta t}} = \left( \frac{\omega''_{x_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{x_{n+\Delta t}} = \omega''_{x_n} - \left( \frac{\omega''_{x_n} r}{I\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \end{array} \right.$$

此時「球上之球與地面接觸點」其速度向量為 $(V''_{x_{n+\Delta t}} - \omega''_{y_{n+\Delta t}} r, -V''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{x_{n+\Delta t}} r)$

$$= ((V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g \mu'_k + m r^2 g \mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right), \omega''_{x_n} r \left( 1 - \frac{I g \mu'_k + m r^2 g \mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (\omega''_{x_n} r)^2}} \Delta t \right))$$

仿照上面的方法，亦可得到 $\overline{F_{k_{x_n}}}$ 、 $\overline{F_{k_{y_n}}}$ 皆不變，故 $\overline{F_k}$ 的方向不變。

(3)若此時 $\overline{V''_{y_n}}$ 方向朝 y 軸正向， $\omega''_{x_n} = 0$ ，則「球上之球與地面接觸點」其速度之 y 分量為 $V''_{y_n}$ (朝 y 軸正向)，故 $\overline{F_{k_{y_n}}}$ 朝 y 軸負向，則在 $t'=n+\Delta t$ 的時間點滿足 $\overline{V''_{y_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 y 軸正向， $\overline{\omega''_{x_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 x 軸正向，且 $\omega''_{x_{n+\Delta t}} r < V''_{y_{n+\Delta t}}$

$$\because F_{k_{x_n}}^2 + F_{k_{y_n}}^2 = F_k^2 \quad \therefore F_{k_{x_n}} = mg\mu'_k (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}}; F_{k_{y_n}} = mg\mu'_k V''_{y_n} \sqrt{\frac{1}{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}}$$

在 $\overline{F_k}$ 作用極短時間 $\Delta t$ ( $\Delta t$ 趨近於 0)後，在 $t'=n+\Delta t$ 的時間點，若 $\overline{V''_{x_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 x 軸正向， $\overline{\omega''_{y_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 y 軸負向，再加上 $\overline{V''_{y_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 y 軸正向， $\overline{\omega''_{x_{n+\Delta t}}}$ 方向朝 x 軸正向，且 $\omega''_{x_{n+\Delta t}} r < V''_{y_{n+\Delta t}}$ ，則由合力及力矩公式可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} -F_{k_{x_n}} = \frac{m(V''_{x_{n+\Delta t}} - V''_{x_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{x_n}} r = \frac{I(-\omega''_{y_{n+\Delta t}} + \omega''_{y_n})}{\Delta t} \\ -F_{k_{y_n}} = \frac{m(V''_{y_{n+\Delta t}} - V''_{y_n})}{\Delta t} \\ F_{k_{y_n}} r = \frac{I(\omega''_{x_{n+\Delta t}})}{\Delta t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''_{x_{n+\Delta t}} = V''_{x_n} - \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{y_{n+\Delta t}} = \omega''_{y_n} + \left( \frac{V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r}{I\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \\ V''_{y_{n+\Delta t}} = V''_{y_n} - \left( \frac{V''_{y_n}}{\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}} g\mu'_k \right) \Delta t \\ \omega''_{x_{n+\Delta t}} = \left( \frac{V''_{y_n}}{I\sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}} mg\mu'_k r \right) \Delta t \end{array} \right.$$

此時「球上之球與地面接觸點」其速度向量為

$$(V''_{x_n+\Delta t} - \omega''_{y_n+\Delta t} r, V''_{y_n+\Delta t} - \omega''_{x_n+\Delta t} r) = (V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r) \left( 1 - \frac{I g \mu'_k + m r^2 g \mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}} \Delta t \right), V''_{y_n} \left( 1 - \frac{I g \mu'_k + m r^2 g \mu'_k}{I \sqrt{(V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r)^2 + (V''_{y_n})^2}} \Delta t \right)$$

仿照上面的方法，亦可得到  $\overrightarrow{F_{k_{x_n}}}$ 、 $\overrightarrow{F_{k_{y_n}}}$  皆不變，故  $\overrightarrow{F_k}$  的方向不變。

2. 若  $\overrightarrow{V''_{x_n}}$  方向朝 x 軸正向， $\overrightarrow{\omega''_{y_n}}$  方向朝 y 軸負向，且  $V''_{x_n} - \omega''_{y_n} r < 0 \Rightarrow V''_{x_n} < \omega''_{y_n} r$ ，則「球上之球與地面接觸點」其速度之 x 分量為  $\omega''_{y_n} r - V''_{x_n}$  (朝 x 軸負向)，故  $\overrightarrow{F_{k_{x_n}}}$  朝 x 軸正向；亦仿照上面的方法，在類似 1. 所述的各種情況 (即 (1) 中的 (a)、(b)、(c) 以及 (2)、(3)) 中，可得到  $\overrightarrow{F_{k_{x_n}}}$ 、 $\overrightarrow{F_{k_{y_n}}}$  皆不變，故  $\overrightarrow{F_k}$  的方向不變。

至此，我們發現在下述各種可能情況中，無論速度、角速度如何隨時間改變， $\overrightarrow{F_k}$  的方向並不隨時間改變，而其 x、y 方向的分量也因此分別為固定向量  $\overrightarrow{F_{k_{x_0}}}$ 、 $\overrightarrow{F_{k_{y_0}}}$ ，可當作定力計算。

1. 若  $V'_x - \omega'_y r > 0 \Rightarrow V'_x > \omega'_y r$ ，又「球上之球與地面接觸點」在碰撞後一瞬間其速度向量為  $(V'_x - \omega'_y r, V'_y + \omega'_x r, 0)$ ，所以其 x 分量方向朝 x 軸正向，y 分量方向朝 y 軸正向，故  $\overrightarrow{F_{k_x}}$  方向朝 x 軸負向， $\overrightarrow{F_{k_y}}$  方向朝 y 軸負向。

我們令  $\overrightarrow{F_k}$  作用使  $V'_y$  減為 0 的時間點為  $t'=t_1$ ，使  $\omega'_x$  減為 0 的時間點為  $t'=t_2$   
則在 y 方向上：

$$\begin{cases} -F_{k_y} = \frac{m(0 - V'_y)}{t_1} \\ F_{k_y} r = \frac{I(0 + \omega'_x)}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{mV'_y}{F_{k_y}} \\ t_2 = \frac{I\omega'_x}{F_{k_y} r} \end{cases}$$

- (1) 若  $t_1 = t_2$ ，即  $\frac{mV'_y}{F_{k_y}} = \frac{I\omega'_x}{F_{k_y} r} \Rightarrow m r V'_y = I \omega'_x$  時，「球上之球與地面接觸點」在  $t'=t_1 = t_2$  的時間點其速度之 y 方向分量變為 0。另外，令 x 方向達到純滾動的時間點為  $t'=t_r$ ，即  $\overrightarrow{F_{k_x}}$  作用了  $t_r$  的時間使得  $V''_{x_{t_r}} = \omega''_{y_{t_r}} r$ ，因為在 x 方向上  $\overrightarrow{F_{k_x}}$  使  $V'_x$  減小，同時使  $\omega'_y r$  增大，如此作用下去，必有某時刻  $t'=s$  滿足  $V''_{x_s} = \omega''_{y_s} r$ ，且  $\overrightarrow{\omega''_{y_s}}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向與  $\overrightarrow{V''_{x_s}}$  反向，故  $t'=t_r$  時的  $\overrightarrow{V''_{x_{t_r}}}$  方向與  $\overrightarrow{V'_x}$  相同， $\overrightarrow{\omega''_{y_{t_r}}}$  方向與  $\overrightarrow{\omega'_y}$  相同。故可得到

$$\begin{cases} -F_{k_x} = \frac{m(V''_{x_{t_r}} - V'_x)}{t_r} \\ -F_{k_x} r = \frac{I(-\omega''_{y_{t_r}} + \omega'_y)}{t_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = \frac{m(V''_{x_{t_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} \\ t_r = \frac{I(\omega''_{y_{t_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x} r} \end{cases} \Rightarrow t_r = \frac{m(V''_{x_{t_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{m(\omega''_{y_{t_r}} r - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{I(\omega''_{y_{t_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x} r}$$



$$\Rightarrow \omega''_{y_{t_r}} = \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2} \Rightarrow t_r = \frac{m(\omega''_{y_{t_r}} r - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{m\left(\frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2} r - V'_x\right)}{-(V'_x - \omega''_{y_{t_r}})mg\mu'_k \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega''_{y_{t_r}})^2 + (V'_y + \omega''_{x_{t_r}})^2}}} = t_1$$

故當  $t'=t_r$  時此球開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是)，且此時速度向量

$$\vec{V}=(V''_{x_{t_r}}, V''_{y_{t_r}}, V''_{z_{t_r}})=\left(\frac{mr^2V'_x + I\omega'_y r}{I + mr^2}, 0, 0\right)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega}=(\omega''_{x_{t_r}}, \omega''_{y_{t_r}}, \omega''_{z_{t_r}})=(0, \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

- (2) 若  $t_1 > t_2$ ，即  $\frac{mV'_y}{F_{k_y}} > \frac{I\omega'_x}{F_{k_y}r} \Rightarrow mrV'_y > I\omega'_x$  時，則在  $t'=t_1$  的時間點， $V''_{y_{t_1}}=0$ ， $\vec{\omega''_{x_{t_1}}}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向朝 y 軸正向，令 y 方向達到純滾動的時間點為  $t'=t_r$  ( $t_2 < t_r < t_1$ )，則此時  $\vec{V''_{y_{t_r}}}$  方向朝 y 軸負向， $\vec{\omega''_{x_{t_r}}}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向朝 y 軸正向，且  $V''_{y_{t_r}} = \omega''_{x_{t_r}} r$ ，可列出

$$\begin{cases} -F_{k_y} = \frac{m(-V''_{y_{t_r}} - V'_y)}{t_r} \\ F_{k_y}r = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{t_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = \frac{m(V''_{y_{t_r}} + V'_y)}{F_{k_y}} \\ t_r = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{F_{k_y}r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{m(V''_{y_{t_r}} + V'_y)}{F_{k_y}} = \frac{m(\omega''_{x_{t_r}} r + V'_y)}{F_{k_y}} = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{F_{k_y}r} \Rightarrow \omega''_{x_{t_r}} = \frac{I\omega'_x - mrV'_y}{I + mr^2}$$

另外，令 x 方向達到純滾動的時間點為  $t'=t'_r$ ，即  $\vec{F}_{k_x}$  作用了  $t'_r$  的時間使得  $V''_{x_{t'_r}} = \omega''_{y_{t'_r}} r$ ，因為在 x 方向上  $\vec{F}_{k_x}$  使  $V'_x$  減小，同時使  $\omega'_y r$  增大，如此作用下去，必有某時刻  $t'=s$  滿足  $V''_{x_s} = \omega''_{y_s} r$ ，且  $\vec{\omega''_{y_s}}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向與  $\vec{V''_{x_s}}$  反向，故  $t'=t'_r$  時的  $\vec{V''_{x_{t'_r}}}$  方向與  $\vec{V}'_x$  相同， $\vec{\omega''_{y_{t'_r}}}$  方向與  $\vec{\omega}'_y$  相同。故可得到

$$\begin{cases} -F_{k_x} = \frac{m(V''_{x_{t'_r}} - V'_x)}{t'_r} \\ -F_{k_x}r = \frac{I(-\omega''_{y_{t'_r}} + \omega'_y)}{t'_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t'_r = \frac{m(V''_{x_{t'_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} \\ t'_r = \frac{I(\omega''_{y_{t'_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x}r} \end{cases} \Rightarrow t'_r = \frac{m(V''_{x_{t'_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{m(\omega''_{y_{t'_r}} r - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{I(\omega''_{y_{t'_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x}r}$$

$$\Rightarrow \omega''_{y_{t'_r}} = \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2} \Rightarrow t'_r = \frac{I\left(\frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2} - \omega'_y\right)}{F_{k_x}r} = \frac{I\sqrt{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}{(I + mr^2)g\mu'_k} = t_r$$

故當  $t'=t_r$  時此球開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是)，且此時速度向量

$$\vec{V}=(V''_{x_{t_r}}, V''_{y_{t_r}}, V''_{z_{t_r}})=\left(V'_x - \frac{I(V'_x - \omega'_y r)}{I + mr^2}, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{I + mr^2} - V'_y, 0\right)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega}=(\omega''_{x_{t_r}}, \omega''_{y_{t_r}}, \omega''_{z_{t_r}})=\left(\frac{I\omega'_x-mrV'_y}{I+mr^2}, \frac{I\omega'_y+mrV'_x}{I+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y+V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$$

(3) 若  $t_1 < t_2$ ，即  $\frac{mV'_y}{F_{k_y}} < \frac{I\omega'_x}{F_{k_y}r} \Rightarrow mrV'_y < I\omega'_x$  時，則在  $t'=t_2$  的時間點， $\omega''_{x_{t_1}}=0$ ， $\vec{V}_{y_{t_1}}$  方向朝 y

軸正向，令 y 方向達到純滾動的時間點為  $t'=t_r$  ( $t_1 < t_r < t_2$ )，則此時  $\vec{V}_{y_{t_r}}$  方向朝 y

軸正向， $\vec{\omega}_{x_{t_r}}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向朝 y 軸負向，

且  $V''_{y_{t_r}} = \omega''_{x_{t_r}} r$ ，可列出

$$\begin{cases} -F_{k_y} = \frac{m(V''_{y_{t_r}} - V'_y)}{t_r} \\ F_{k_y}r = \frac{I(\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{t_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = \frac{m(V''_{y_{t_r}} - V'_y)}{-F_{k_y}} \\ t_r = \frac{I(\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{F_{k_y}r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{m(V''_{y_{t_r}} - V'_y)}{-F_{k_y}} = \frac{m(\omega''_{x_{t_r}}r - V'_y)}{-F_{k_y}} = \frac{I(\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{F_{k_y}r} \Rightarrow \omega''_{x_{t_r}} = \frac{mrV'_y - I\omega'_x}{I + mr^2}$$

另外，令 x 方向達到純滾動的時間點為  $t'=t'_r$ ，即  $\vec{F}_{k_x}$  作用了  $t'_r$  的時間使得  $V''_{x_{t'_r}} = \omega''_{y_{t'_r}} r$ ，因為在 x 方向上  $\vec{F}_{k_x}$  使  $V'_x$  減小，同時使  $\omega'_y r$  增大，如此作用下去，必有某時刻  $t'=s$  滿足  $V''_{x_s} = \omega''_{y_s} r$ ，且  $\vec{\omega}_{y_s}$  所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向與  $\vec{V}_{x_s}$  反向，故  $t'=t'_r$  時的  $\vec{V}_{x_{t'_r}}$  方向與  $\vec{V}_x$  相

同， $\vec{\omega}_{y_{t'_r}}$  方向與  $\vec{\omega}_y$  相同。故可得到

$$\begin{cases} -F_{k_x} = \frac{m(V''_{x_{t'_r}} - V'_x)}{t'_r} \\ -F_{k_x}r = \frac{I(-\omega''_{y_{t'_r}} + \omega'_y)}{t'_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t'_r = \frac{m(V''_{x_{t'_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} \\ t'_r = \frac{I(\omega''_{y_{t'_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x}r} \end{cases} \Rightarrow t'_r = \frac{m(V''_{x_{t'_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{m(\omega''_{y_{t'_r}}r - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{I(\omega''_{y_{t'_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x}r}$$

$$\Rightarrow \omega''_{y_{t'_r}} = \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2} \Rightarrow t'_r = \frac{I\left(\frac{mrV'_x + I\omega'_y}{I + mr^2} - \omega'_y\right)}{F_{k_x}r} = \frac{I\sqrt{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}{(I + mr^2)g\mu'_k} = t_r$$

故當  $t'=t_r$  時此球開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是)，且此時速度向量

$$\vec{V}=(V''_{x_{t_r}}, V''_{y_{t_r}}, V''_{z_{t_r}})=(V'_x - \frac{I(V'_x - \omega'_y r)}{I + mr^2}, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{I + mr^2}, 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega}=(\omega''_{x_{t_r}}, \omega''_{y_{t_r}}, \omega''_{z_{t_r}})=\left(-\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{I + mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{I + mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}}\right)$$

2. 若  $V'_x - \omega'_y r = 0 \Rightarrow V'_x = \omega'_y r$ ，則在 x 方向已達成純滾動的條件，故  $F_{k_x} = 0$ ，因此  $\vec{F}_{k_y} = \vec{F}_k$  而且若最

終球達成純滾動時的速度為 $\vec{V}$ ，角速度為 $\vec{\omega}$ ，則 $\vec{V}$ 的 x 分量 $\vec{V}_x = \vec{V}'_x$ 、 $\vec{\omega}$ 的 y 分量 $\vec{\omega}_y = \vec{\omega}'_y$ 。我們令 $\vec{F}_k$ 作用使 $V'_y$ 減為 0 的時間點為  $t' = t_1$ ，使 $\omega'_x$ 減為 0 的時間點為  $t' = t_2$ ，則在 y 方向上：

$$\begin{cases} -F_k = \frac{m(0 - V'_y)}{t_1} \\ F_k r = \frac{I(0 + \omega'_x)}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{mV'_y}{F_k} = \frac{V'_y}{g\mu'_k} \\ t_2 = \frac{I\omega'_x}{F_k r} = \frac{I\omega'_x}{mg\mu'_k r} \end{cases}$$

- (1) 若  $t_1 = t_2$ ，即 $\frac{mV'_y}{F_k} = \frac{I\omega'_x}{F_k r} \Rightarrow mrV'_y = I\omega'_x$ 時，「球上之球與地面接觸點」在  $t' = t_1 = t_2$  的時間點其速度之 y 方向分量變為 0。故其開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是)的時間點  $t' = t_r = t_1 = t_2$ ，此時速度向量為

$$\vec{V} = (V''_{x_{t_r}}, V''_{y_{t_r}}, V''_{z_{t_r}}) = (V'_x, 0, 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega} = (\omega''_{x_{t_r}}, \omega''_{y_{t_r}}, \omega''_{z_{t_r}}) = (0, \omega'_y, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

- (2) 若  $t_1 > t_2$ ，即 $\frac{mV'_y}{F_k} > \frac{I\omega'_x}{F_k r} \Rightarrow mrV'_y > I\omega'_x$ 時，則在  $t' = t_1$  的時間點， $V''_{y_{t_1}} = 0$ ， $\vec{\omega''_{x_{t_1}}}$ 所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向朝 y 軸正向，令 y 方向達到純滾動的時間點為  $t' = t_r$  ( $t_2 < t_r < t_1$ )，則此時 $\vec{V''_{y_{t_r}}}$ 方向朝 y 軸負向， $\vec{\omega''_{x_{t_r}}}$ 所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向朝 y 軸正向，且 $V''_{y_{t_r}} = \omega''_{x_{t_r}} r$ ，可列出

$$\begin{cases} -F_k = \frac{m(-V''_{y_{t_r}} - V'_y)}{t_r} \\ F_k r = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{t_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = \frac{m(V''_{y_{t_r}} + V'_y)}{F_k} = \frac{V''_{y_{t_r}} + V'_y}{g\mu'_k} \\ t_r = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{F_k r} = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{mg\mu'_k r} \end{cases} \Rightarrow t_r = \frac{V''_{y_{t_r}} + V'_y}{g\mu'_k} = \frac{\omega''_{x_{t_r}} r + V'_y}{g\mu'_k} = \frac{I(-\omega''_{x_{t_r}} + \omega'_x)}{mg\mu'_k r}$$

$$\Rightarrow \omega''_{x_{t_r}} = \frac{I\omega'_x - mrV'_y}{I + mr^2} \Rightarrow t_r = \frac{\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{I + mr^2} r + V'_y}{g\mu'_k} = \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{(I + mr^2)g\mu'_k}$$

此時速度向量為

$$\vec{V} = (V''_{x_{t_r}}, V''_{y_{t_r}}, V''_{z_{t_r}}) = (V'_x, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{I + mr^2} - V'_y, 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega} = (\omega''_{x_{t_r}}, \omega''_{y_{t_r}}, \omega''_{z_{t_r}}) = (\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{I + mr^2}, \omega'_y, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

- (3) 若  $t_1 < t_2$ ，即 $\frac{mV'_y}{F_k} < \frac{I\omega'_x}{F_k r} \Rightarrow mrV'_y < I\omega'_x$ 時，則在  $t' = t_2$  的時間點， $\omega''_{x_{t_2}} = 0$ ， $\vec{V''_{y_{t_2}}}$ 方向朝 y 軸正向，令 y 方向達到純滾動的時間點為  $t' = t_r$  ( $t_1 < t_r < t_2$ )，則此時 $\vec{V''_{y_{t_r}}}$ 方向朝 y 軸正向， $\vec{\omega''_{x_{t_r}}}$ 所造成的「球上之球與地面接觸點」的切線速度之方向朝 y 軸負向，且 $V''_{y_{t_r}} = \omega''_{x_{t_r}} r$ ，可列出

$$\begin{cases} -F_k = \frac{m(V_{y_{tr}}'' - V_y')}{t_r} \\ F_k r = \frac{I(\omega_{x_{tr}}'' + \omega_x')}{t_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = \frac{m(V_{y_{tr}}'' - V_y')}{-F_k} = \frac{V_{y_{tr}}'' - V_y'}{-g\mu_k'} \\ t_r = \frac{I(\omega_{x_{tr}}'' + \omega_x')}{F_k r} = \frac{I(\omega_{x_{tr}}'' + \omega_x')}{mg\mu_k' r} \end{cases} \Rightarrow t_r = \frac{V_{y_{tr}}'' - V_y'}{-g\mu_k'} = \frac{\omega_{x_{tr}}'' r - V_y'}{-g\mu_k'} = \frac{I(\omega_{x_{tr}}'' + \omega_x')}{mg\mu_k' r}$$

$$\Rightarrow \omega_{x_{tr}}'' = \frac{mrV_y' - I\omega_x'}{I + mr^2} \Rightarrow t_r = \frac{\frac{mrV_y' - I\omega_x'}{I + mr^2} r - V_y'}{-g\mu_k'} = \frac{I(V_y' + \omega_x' r)}{(I + mr^2)g\mu_k'}$$

此時速度向量為

$$\vec{V} = (V_{x_{tr}}'', V_{y_{tr}}'', V_{z_{tr}}'') = (V_x', V_y' - \frac{I(V_y' + \omega_x' r)}{I + mr^2}, 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega} = (\omega_{x_{tr}}'', \omega_{y_{tr}}'', \omega_{z_{tr}}'') = (\frac{mrV_y' - I\omega_x'}{I + mr^2}, \omega_y', \frac{mrV_0\mu_k(V_y' + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

3. 若  $V_x' - \omega_y' r < 0 \Rightarrow V_x' < \omega_y' r$ , 又「球上之球與地面接觸點」在碰撞後一瞬間其速度向量為  $(V_x' - \omega_y' r, V_y' + \omega_x' r, 0)$ , 所以其 x 分量方向朝 x 軸負向, y 分量方向朝 y 軸正向, 故  $\vec{F}_{kx}$  方向朝 x 軸正向,  $\vec{F}_{ky}$  方向朝 y 軸負向。仿照 1. 的作法,  $t_1 = \frac{mV_y'}{F_{ky}}$ ;  $t_2 = \frac{I\omega_x'}{F_{ky}r}$

- (1) 若  $t_1 = t_2$ , 則當  $t' = t_r = t_1 = t_2$  時此球開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是), 且此時速度向量為

$$\vec{V} = (V_{x_{tr}}'', V_{y_{tr}}'', V_{z_{tr}}'') = (\frac{mr^2 V_x' + I\omega_y' r}{I + mr^2}, 0, 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega} = (\omega_{x_{tr}}'', \omega_{y_{tr}}'', \omega_{z_{tr}}'') = (0, \frac{mrV_x' + I\omega_y'}{I + mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V_y' + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

- (2) 若  $t_1 > t_2$ , 則當  $t' = t_r = \frac{I\sqrt{(V_x' - \omega_y' r)^2 + (V_y' + \omega_x' r)^2}}{(I + mr^2)g\mu_k'}$  時此球開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是), 且速度向量為

$$\vec{V} = (V_{x_{tr}}'', V_{y_{tr}}'', V_{z_{tr}}'') = (V_x' - \frac{I(V_x' - \omega_y' r)}{I + mr^2}, \frac{I(V_y' + \omega_x' r)}{I + mr^2} - V_y', 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega} = (\omega_{x_{tr}}'', \omega_{y_{tr}}'', \omega_{z_{tr}}'') = (\frac{I\omega_x' - mrV_y'}{I + mr^2}, \frac{I\omega_y' + mrV_x'}{I + mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V_y' + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

- (3) 若  $t_1 < t_2$ , 則當  $t' = t_r = \frac{I\sqrt{(V_x' - \omega_y' r)^2 + (V_y' + \omega_x' r)^2}}{(I + mr^2)g\mu_k'}$  時此球開始達到純滾動(x 及 y 方向皆是), 且此時速度向量為

$$\vec{V} = (V_{x_{tr}}'', V_{y_{tr}}'', V_{z_{tr}}'') = (V_x' - \frac{I(V_x' - \omega_y' r)}{I + mr^2}, V_y' - \frac{I(V_y' + \omega_x' r)}{I + mr^2}, 0)$$

角速度向量為

$$\vec{\omega} = (\omega_{x_{tr}}'', \omega_{y_{tr}}'', \omega_{z_{tr}}'') = (-\frac{I\omega_x' - mrV_y'}{I + mr^2}, \frac{I\omega_y' + mrV_x'}{I + mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V_y' + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$$

以上是球碰撞碰撞面後，達成純滾動之前所有可能發生的情形，我們發現不管是何種狀況，

$$\text{達成純滾動時間點皆可表示為 } t'=t_r = \frac{1\sqrt{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}{(1+mr^2)g\mu'_k}。$$

(二)若撞擊面與球之間的摩擦係數  $\mu_k$  小到可以忽略，但地面與球之間的摩擦係數  $\mu_k'$  較大不能忽略:

可視為撞擊面對球無摩擦力作用，因此球的速度及轉速皆不變，即反彈後一瞬間之球的速度向量  $\vec{V}'$  為

$$\vec{V}' = (\vec{V}'_x, \vec{V}'_y, \vec{V}'_z) = (V_0 \sin \theta, (am+b) V_0 \cos \theta, 0)$$

角速度向量  $\vec{\omega}'$  為

$$\vec{\omega}' = (\vec{\omega}'_x, \vec{\omega}'_y, \vec{\omega}'_z) = (-\omega_0 \sin \theta, -\omega_0 \cos \theta, 0)$$

接著再利用(一)純滾動相關的公式，其中  $\vec{V}'$  帶入  $(V_0 \sin \theta, (am+b) V_0 \cos \theta, 0)$ ， $\vec{\omega}'$  帶入  $(-\omega_0 \sin \theta, -\omega_0 \cos \theta, 0)$  即可得到純滾動之  $t_r$ 、 $\vec{V}$ 、 $\vec{\omega}$  等。

(三) 若撞擊面與球之間的摩擦係數  $\mu_k$  較大不能忽略，但地面與球之間的摩擦係數  $\mu_k'$  小到可以忽略:則由(一)的推導可知反彈後一瞬間之速度向量  $\vec{V}'$  為

$$\vec{V}' = (\vec{V}'_x, \vec{V}'_y, \vec{V}'_z) = ((am + b + 1)V_0^2 \mu_k \cos \theta \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} + V_0 \sin \theta, (am+b) V_0 \cos \theta, 0)$$

角速度向量  $\vec{\omega}'$  為

$$\vec{\omega}' = (\vec{\omega}'_x, \vec{\omega}'_y, \vec{\omega}'_z) = \left( \frac{mr^2 \omega_0 \mu_k (am+b+1) V_0 \cos \theta}{1} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} - \omega_0 \sin \theta, -\omega_0 \cos \theta, \frac{mr V_0 \mu_k (am+b+1) V_0 \cos \theta}{1} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} \right)$$

因地面摩擦力可不計，故球最後以速度  $\vec{V} = \vec{V}'$ ，角速度  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$  運動，並不會達到純滾動。

(四)若撞擊面與球之間摩擦係數  $\mu_k$  及地面與球之間摩擦係數  $\mu_k'$  皆小到可以忽略:

可視為撞擊面對球無摩擦力作用，因此球的速度及轉速皆不變，即反彈後一瞬間之球的速度向量  $\vec{V}'$  為

$$\vec{V}' = (\vec{V}'_x, \vec{V}'_y, \vec{V}'_z) = (V_0 \sin \theta, (am+b) V_0 \cos \theta, 0)$$

角速度向量  $\vec{\omega}'$  為

$$\vec{\omega}' = (\vec{\omega}'_x, \vec{\omega}'_y, \vec{\omega}'_z) = (-\omega_0 \sin \theta, -\omega_0 \cos \theta, 0)$$

又因地面摩擦力可不計，故球最後以速度  $\vec{V} = \vec{V}'$ ，角速度  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$  運動，並不會達到純滾動。

## 伍、研究結果

我們利用高速攝影機拍下 4 種不同材質、不同速度或不同鋼球質量的反彈情形，再用 Tracker 軟體找出球的中心(質心)入射時速度  $V_0$  與反彈後一瞬間速度  $V'$ ，以下是依據不同變因求出  $V'$  與  $V_0$ 、質量  $m$  之間的關係式，以及能量損耗量(動能變化量)與動能損耗率:

首先，我們定義動能損耗率  $E_k\%$ :

$$E_k\% = \frac{\text{動能變化量}}{\text{初動能}} \times 100\% = \frac{\text{末動能} - \text{初動能}}{\text{初動能}} = \frac{E_{kV'} - E_{kV_0}}{E_{kV_0}} = \frac{\frac{1}{2}mV'^2 - \frac{1}{2}mV_0^2}{\frac{1}{2}mV_0^2} = \frac{V'^2 - V_0^2}{V_0^2}$$

一、木板: 先使用木板為碰撞面材質

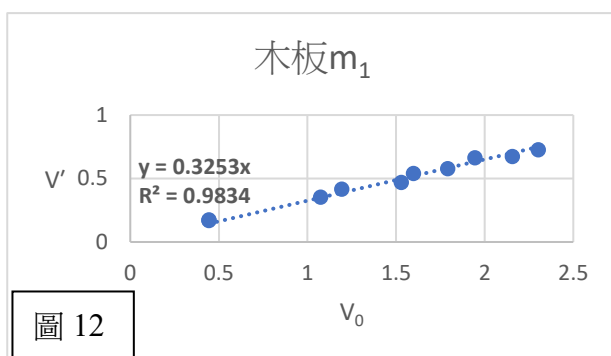
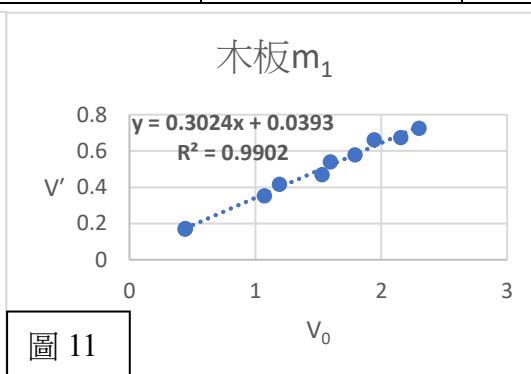
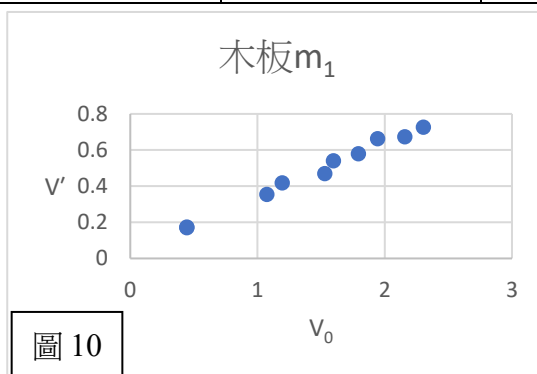
(一) 固定  $m$ ，求  $V_0$  與  $V'$  的關係式:

我們利用同一顆球(質量固定)，滑車由靜止起放，用不同質量的水壺帶動滑車及球，及同一質量水壺但移動長度不同，造成不同之加速度，因而有入射速度的差異，用高速攝影機 Tracker 軟體求出球的  $V_0$  與  $V'$  後，將資料傳入 Excel 進行資料整理與分析，

畫出  $V_0$  與  $V'$  的關係圖(如圖 10)，再求出回歸直線(如圖 11)，此時所求出之直線不通過點，但由於當  $V_0=0$  時， $V'$  亦應為 0，因此我們取一條通過原點的斜直線，(如圖 12)

表一

m <sub>1</sub> =0.0041				
V <sub>0</sub>	V'	E <sub>kV<sub>0</sub></sub>	E <sub>kV'</sub>	E <sub>k</sub> %
1.191874	0.417543	0.002898	0.000356	-87.73%
1.072724	0.354024	0.002348	0.000256	-89.11%
0.443476	0.173737	0.000401	0.000061	-84.65%
0.442732	0.169474	0.000400	0.000058	-85.35%
1.790556	0.578670	0.006540	0.000683	-89.56%
1.528433	0.469279	0.004766	0.000449	-90.57%
2.155875	0.674024	0.009482	0.000927	-90.23%
1.596576	0.540918	0.005200	0.000597	-88.52%
2.301159	0.726137	0.010802	0.001076	-90.04%
1.943491	0.662925	0.007705	0.000897	-88.37%



在其他材質取類似的數時，我們也按照類似作法，取一條通過原點的斜直線。

由圖中可知:當  $m=m_1$  時， $V'=0.3253 V_0$

1.由以上實驗數據可知:在質量固定的情況下  $E_k\%$  為定值，因此可令

$$E_k\% = \frac{V'^2 - V_0^2}{V_0^2} = k(k \text{ 為定值}) \Rightarrow V'^2 - V_0^2 = kV_0^2 \Rightarrow V'^2 = (k+1)V_0^2$$

$\Rightarrow \because V'$  以及  $V_0$  皆為量值，故  $V' \geq 0$  且  $V_0 \geq 0$

$$\text{又 } -1 \leq E_k\% = k \leq 1$$

$$\therefore k+1 \geq 0 \quad \therefore V' = \sqrt{k+1} V_0 \propto V_0$$

因此亦可得知  $V'$  與  $V_0$  的回歸直線應為一條通過原點的斜直線



(二) 固定  $V_0$ ， $m$  與  $V'$  的關係式：

同理，可得以下各質量的數據：

表二

$m_2 = 0.00836$				
$V_0$	$V'$	$E_{k_{V_0}}$	$E_{k_{V'}}$	$E_k\%$
1.074087	0.337609	0.004822	0.000476	-90.12%
0.968627	0.336458	0.003922	0.000473	-87.93%
0.576630	0.223096	0.001390	0.000208	-85.03%
1.680775	0.526441	0.011809	0.001158	-90.19%
1.348730	0.435666	0.007604	0.000793	-89.57%
2.014273	0.674326	0.016959	0.001901	-88.79%
1.565281	0.452271	0.010241	0.000855	-91.65%
2.206765	0.676917	0.020356	0.001915	-90.59%
1.818125	0.566610	0.013817	0.001342	-90.29%
1.240055	0.423456	0.006428	0.000750	-88.34%

表三

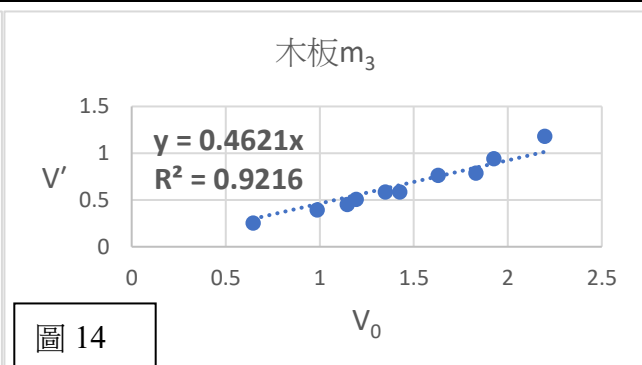
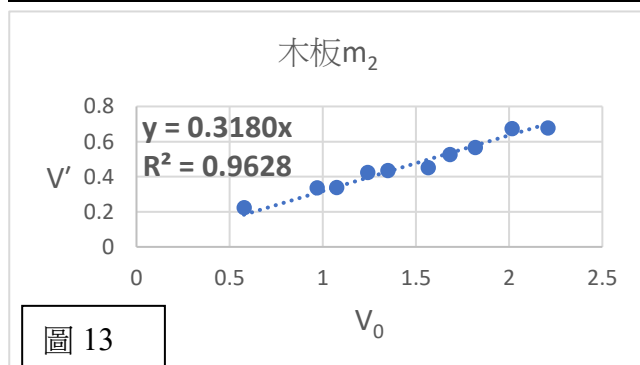
$m_3 = 0.01640$				
$V_0$	$V'$	$E_{k_{V_0}}$	$E_{k_{V'}}$	$E_k\%$
1.145128	0.451888	0.010753	0.001674	-84.43%
0.986357	0.393024	0.007978	0.001267	-84.12%
0.645609	0.253771	0.003418	0.000528	-84.55%
1.629525	0.763918	0.021774	0.004785	-78.02%
1.347397	0.586289	0.014887	0.002819	-81.07%
1.924719	0.942285	0.030377	0.007281	-76.03%
1.424666	0.587248	0.016643	0.002828	-83.01%
2.196392	1.181805	0.039558	0.011453	-71.05%
1.830129	0.788547	0.027465	0.005099	-81.44%
1.193101	0.507963	0.011673	0.002116	-81.87%

表四

$m_4 = 0.02184$				
$V_0$	$V'$	$E_{k_{V_0}}$	$E_{k_{V'}}$	$E_k\%$
1.240306	0.656847	0.016799	0.004711	-71.95%
1.015816	0.483919	0.011268	0.002557	-77.31%
0.674821	0.295355	0.004973	0.000953	-80.84%
1.654709	0.891745	0.029900	0.008684	-70.96%
1.352705	0.674485	0.019982	0.004968	-75.14%
2.021101	1.140315	0.044607	0.014199	-68.17%
1.474610	0.776983	0.023745	0.006592	-72.24%
2.196795	1.329937	0.052699	0.019315	-63.35%
1.685805	0.888460	0.031034	0.008620	-72.23%
1.192465	0.603809	0.015528	0.003981	-74.36%

表五

$m_5 = 0.02833$				
$V_0$	$V'$	$E_{k_{V_0}}$	$E_{k_{V'}}$	$E_k\%$
1.047172	0.462928	0.015533	0.003036	-80.46%
0.542695	0.226594	0.004172	0.000727	-82.57%
0.926601	0.528989	0.012162	0.003964	-67.41%
1.629003	0.926676	0.037589	0.012164	-67.64%
1.253604	0.674286	0.022261	0.006440	-71.07%
1.945484	1.128069	0.053613	0.018026	-66.38%
1.580247	0.886676	0.035373	0.011136	-68.52%
2.153288	1.347643	0.065678	0.025726	-60.83%
1.762004	1.037320	0.043978	0.015242	-65.34%
1.114502	0.630532	0.017595	0.005632	-67.99%



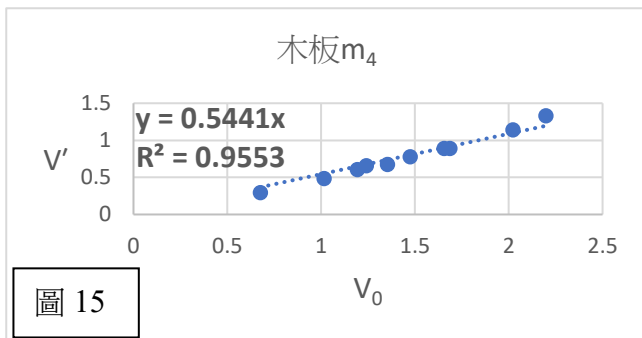


圖 15

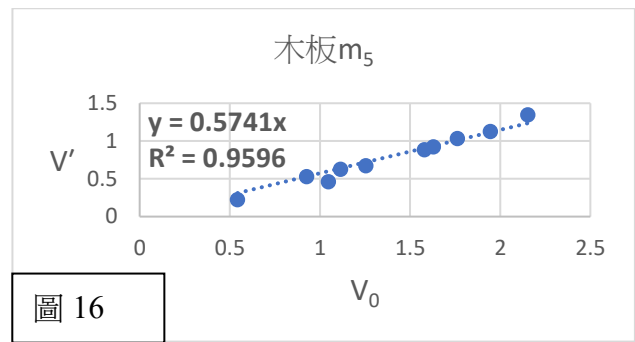


圖 16

1.由以上實驗數據可知：在質量改變的情況下，將各質量( $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $m_4$ 、 $m_5$ ) $E_k\%$ 寫在一起，再取平均值，畫出  $m$  與  $E_k\%$ 的關係圖形，由回歸直線可求出他們之間的關係式：

表六

	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$
$E_k\%$ 數據	-87.73%	-90.12%	-84.43%	-71.95%	-80.46%
	-89.11%	-87.93%	-84.12%	-77.31%	-82.57%
	-84.65%	-85.03%	-84.55%	-80.84%	-67.41%
	-85.35%	-90.19%	-78.02%	-70.96%	-67.64%
	-89.56%	-89.57%	-81.07%	-75.14%	-71.07%
	-90.57%	-88.79%	-76.03%	-68.17%	-66.38%
	-90.23%	-91.65%	-83.01%	-72.24%	-68.52%
	-88.52%	-90.59%	-71.05%	-63.35%	-60.83%
	-90.04%	-90.29%	-81.44%	-72.23%	-65.34%
	-88.37%	-88.34%	-81.87%	-74.36%	-67.99%
平均值	-88.41%	-89.25%	-80.56%	-72.65%	-69.82%

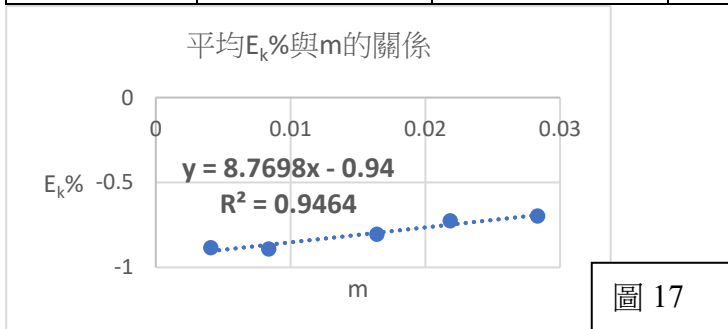


圖 17

由回歸直線可得兩者關係式為：

$$E_k\% = 8.7698m - 0.94 \dots \textcircled{9}$$

2.由各圖中(圖 11~圖 16)可看出  $V_0$ ， $m$  與  $V'$ 的關係：

表七

	$V_0$ 與 $V'$ 的關係
$m_1=0.00408$	$V'=0.3253V_0$
$m_2=0.00836$	$V'=0.3180V_0$
$m_3=0.01640$	$V'=0.4621V_0$
$m_4=0.02184$	$V'=0.5441V_0$
$m_5=0.02833$	$V'=0.5741V_0$

當  $V_0$  相等時， $m$  與  $V'$  的關係如下圖所示:

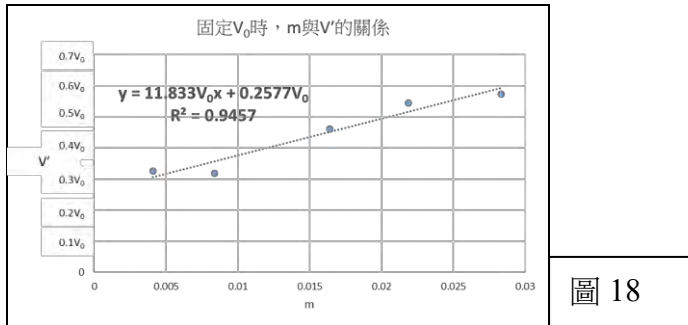


圖 18

由回歸直線可知

$$V' = (11.833 V_0) m + 0.2577V_0 \dots\dots ①$$

由此式子，只要知道球的  $m$  及  $V_0$ ，就可以帶入此式求出  $V'$

二、不鏽鋼板:將碰撞面材質換成不鏽鋼板，其餘步驟與材質為木板時相同

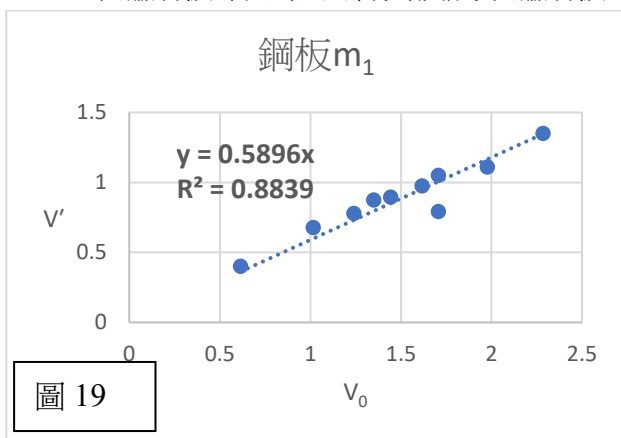


圖 19

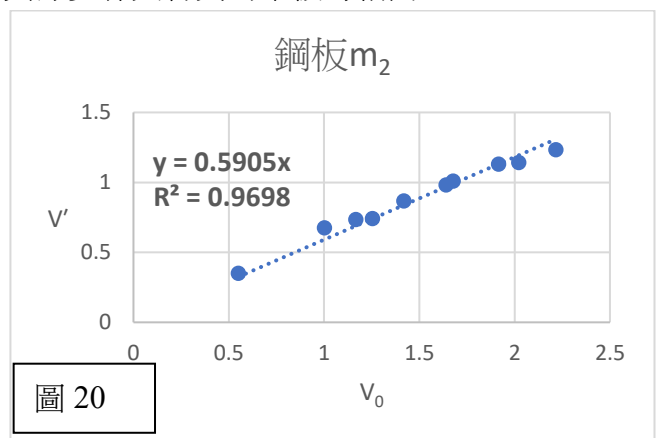


圖 20

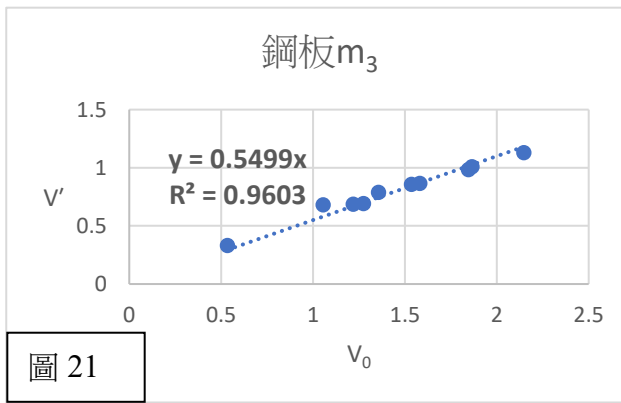


圖 21

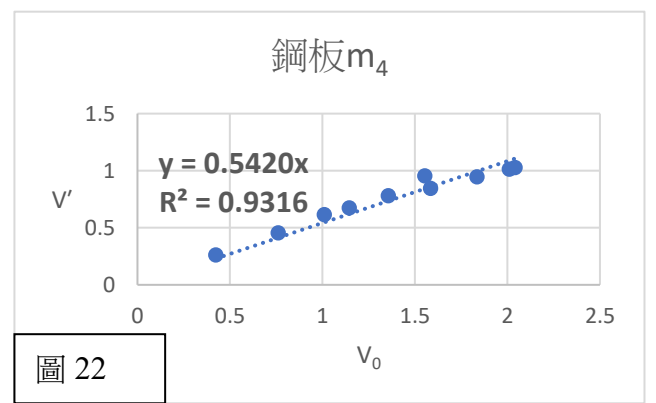


圖 22

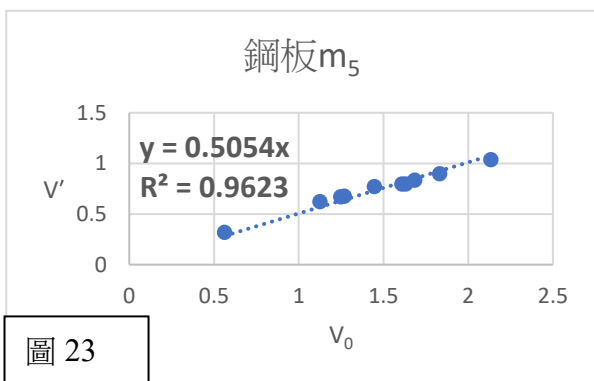


圖 23

(一)由以上實驗數據可知: 在質量改變的情況下，將各質量( $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $m_4$ 、 $m_5$ ) $E_k\%$ 寫在一起，再取平均值，畫出  $m$  與  $E_k\%$  的關係圖形，由回歸直線可求出他們之間的關係式:

(表八)	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>3</sub>	m <sub>4</sub>	m <sub>5</sub>
E <sub>k</sub> %數據	-57.79%	-60.25%	-66.23%	-65.34%	-76.35%
	-55.42%	-54.53%	-58.26%	-62.67%	-75.92%
	-57.03%	-59.11%	-61.60%	-61.39%	-71.63%
	-62.01%	-63.70%	-70.05%	-71.57%	-76.22%
	-60.46%	-62.42%	-70.58%	-66.77%	-75.43%
	-68.35%	-67.91%	-71.59%	-74.49%	-75.38%
	-61.40%	-64.07%	-68.97%	-62.08%	-71.50%
	-65.02%	-69.00%	-72.34%	-74.59%	-71.04%
	-63.41%	-65.00%	-70.84%	-73.45%	-69.40%
	-78.39%	-64.86%	-68.24%	-64.22%	-67.58%
平均值	-62.93%	-63.09%	-67.87%	-67.66%	-73.04%

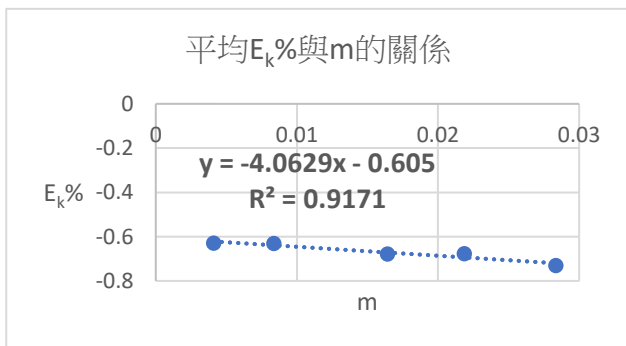


圖 24

由回歸直線可得兩者關係式為：

$$E_k\% = -4.0629m - 0.605 \dots \textcircled{10}$$

(二)由各圖中(圖 19~圖 23)可看出 V<sub>0</sub>，m 與 V'的關係：

(表九)	V <sub>0</sub> 與 V'的關係
m <sub>1</sub> =0.00408	V'=0.5896V <sub>0</sub>
m <sub>2</sub> =0.00836	V'=0.5905V <sub>0</sub>
m <sub>3</sub> =0.01640	V'=0.5499V <sub>0</sub>
m <sub>4</sub> =0.02184	V'=0.5420V <sub>0</sub>
m <sub>5</sub> =0.02833	V'=0.5054V <sub>0</sub>

當 V<sub>0</sub> 相等時，m 與 V'的關係如下圖所示：

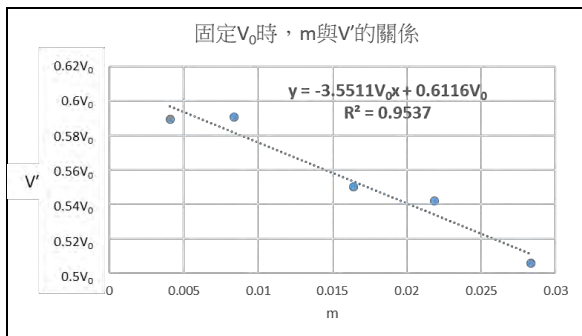


圖 25

由回歸直線可知

$$V' = (-3.5511 V_0) m + 0.6116V_0 \dots \textcircled{2}$$

由此式子，只要知道球的  $m$  及  $V_0$ ，就可以帶入此式求出  $V'$

三、牆面：將碰撞面材質換成牆面(在剛剛的不鏽鋼板後面就是牆面，因此將不鏽鋼板折起即可)，其餘步驟與材質為木板及不鏽鋼板時相同：

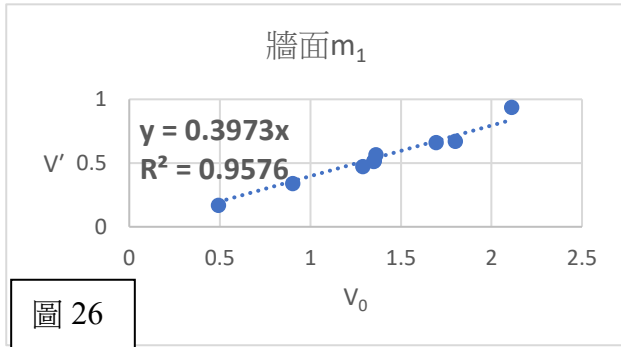


圖 26

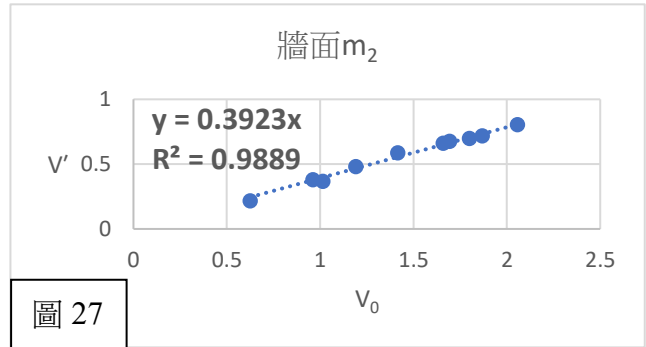


圖 27

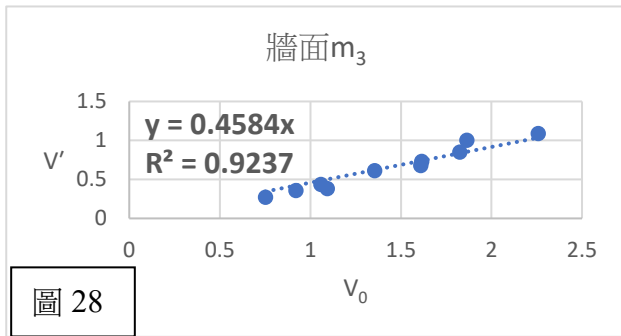


圖 28

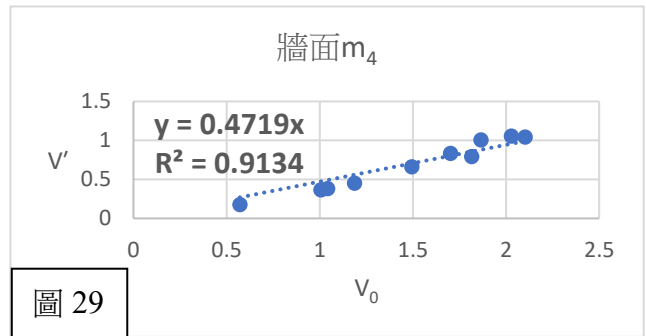


圖 29

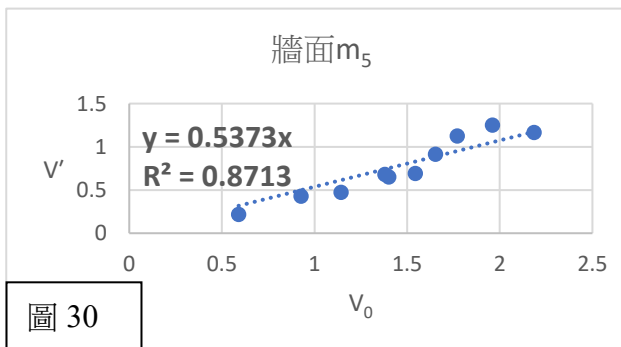


圖 30

(一)由以上實驗數據可知：在質量改變的情況下，將各質量( $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $m_4$ 、 $m_5$ ) $E_k\%$ 寫在一起，再取平均值，畫出  $m$  與  $E_k\%$ 的關係圖形，由回歸直線可求出他們之間的關係式：

(表十)	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$
Ek%數據	-86.61%	-84.70%	-87.71%	-75.51%	-82.87%
	-85.83%	-84.98%	-84.95%	-71.01%	-78.73%
	-88.34%	-83.67%	-87.17%	-86.82%	-86.62%
	-84.80%	-85.25%	-82.25%	-72.91%	-69.46%
	-85.59%	-84.13%	-79.65%	-80.90%	-78.33%
	-82.73%	-84.10%	-78.23%	-75.98%	-59.23%
	-80.33%	-82.79%	-79.48%	-80.43%	-80.01%
	-86.06%	-84.42%	-76.79%	-85.47%	-71.44%
	-85.34%	-88.10%	-71.17%	-86.54%	-59.60%
	-85.07%	-86.89%	-82.99%	-90.40%	-75.70%
平均值	-86.61%	-84.90%	-81.04%	-80.60%	-74.20%

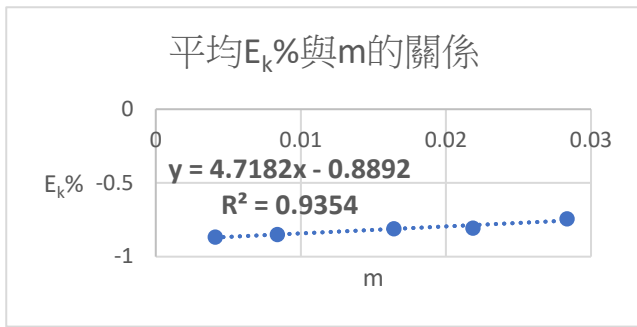


圖 31

由回歸直線可得兩者關係式為：

$$E_k\% = 4.7182m - 0.8892 \dots \textcircled{11}$$

(二)由各圖中(圖 26~圖 30)可看出  $V_0$ ， $m$  與  $V'$  的關係：

表十一

	$V_0$ 與 $V'$ 的關係
$m_1=0.00408$	$V'=0.3973V_0$
$m_2=0.00836$	$V'=0.3923V_0$
$m_3=0.01640$	$V'=0.4584V_0$
$m_4=0.02184$	$V'=0.4719V_0$
$m_5=0.02833$	$V'=0.5373V_0$

當  $V_0$  相等時， $m$  與  $V'$  的關係如右圖所示：

由回歸直線可知

$$V' = (5.8934 V_0) m + 0.3583V_0 \dots \textcircled{3}$$

由此式子，只要知道球的  $m$  及  $V_0$ ，就可以帶入此式求出  $V'$

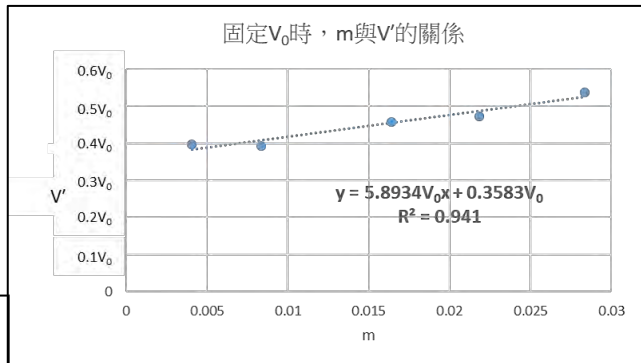


圖 32

四、壓克力板:將碰撞面材質換成壓克力板，其餘步驟與材質為木板及不鏽鋼板、牆面時相同

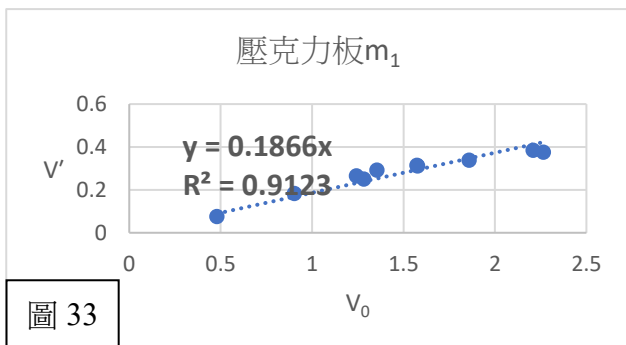


圖 33

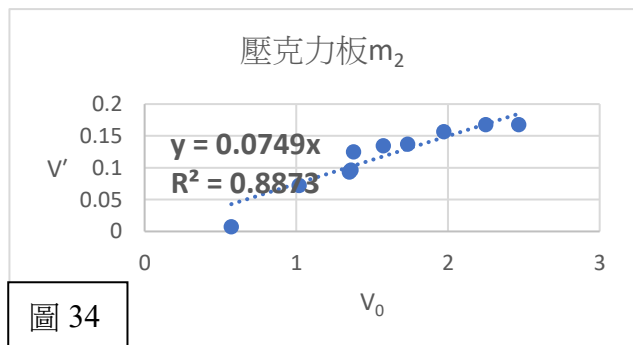
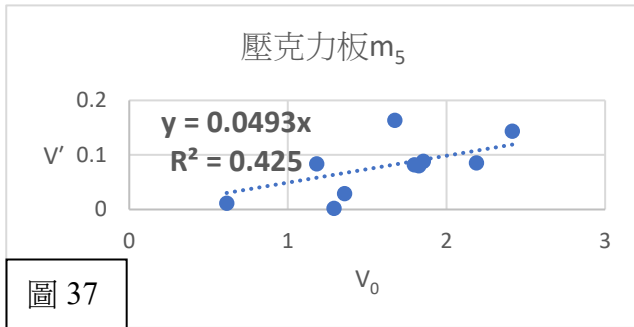
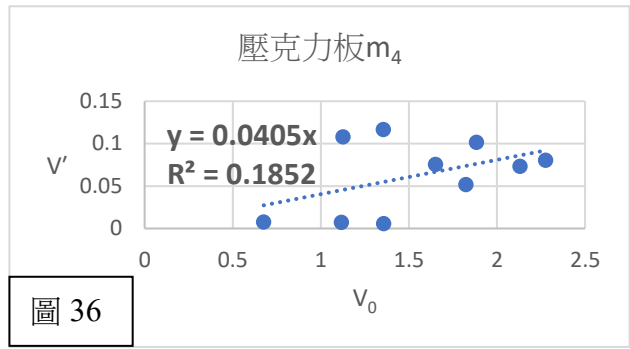
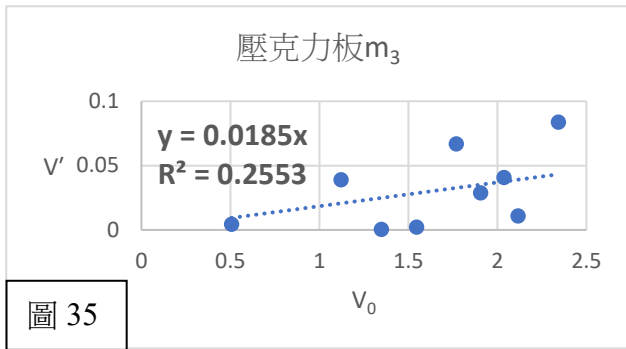


圖 34

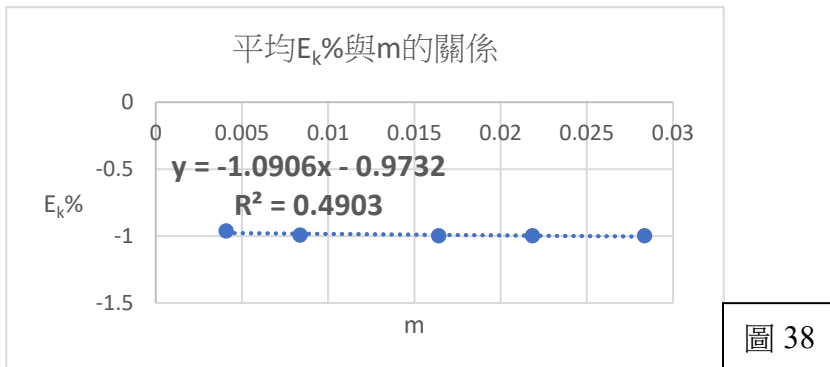




(一)由以上實驗數據可知：在質量改變的情況下，將各質量( $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 、 $m_4$ 、 $m_5$ ) $E_k\%$ 寫在一起，再取平均值，畫出  $m$  與  $E_k\%$ 的關係圖形，由回歸直線可求出他們之間的關係式：

表十二

	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$
$E_k\%$ 數據	-95.34%	-99.52%	-100.00%	-99.26%	-99.05%
	-95.83%	-99.50%	-99.88%	-99.08%	-99.50%
	-96.68%	-99.37%	-99.86%	-99.99%	-99.96%
	-96.19%	-99.17%	-100.00%	-99.92%	-99.79%
	-96.96%	-99.45%	-100.00%	-100.00%	-99.95%
	-96.08%	-99.27%	-99.98%	-99.79%	-99.85%
	-97.23%	-99.54%	-99.87%	-99.88%	-99.81%
	-96.00%	-99.37%	-99.96%	-99.88%	-99.65%
	-97.48%	-99.98%	-99.99%	-99.71%	-99.77%
	-95.45%	-99.50%	-100.00%	-100.00%	-100.00%
平均值	-96.32%	-99.47%	-99.95%	-99.75%	-99.73%



由回歸直線可得兩者關係式為：

$E_k\% = -1.0906m - 0.9732 \dots\dots$  ⑫

(二)由各圖中(圖 32~圖 36)可看出  $V_0$  ,  $m$  與  $V'$ 的關係:

表十三

	$V_0$ 與 $V'$ 的關係
$m_1=0.00408$	$V'=0.1866V_0$
$m_2=0.00836$	$V'=0.0749V_0$
$m_3=0.01640$	$V'=0.0185V_0$
$m_4=0.02184$	$V'=0.0405V_0$
$m_5=0.02833$	$V'=0.0493V_0$

當  $V_0$  相等時,  $m$  與  $V'$ 的關係如右圖所示:

由回歸直線可知

$$V' = (-4.8415 V_0) m + 0.1505 V_0 \dots\dots 4$$

由此式子,只要知道球的  $m$  及  $V_0$ ,就可以帶入此式求出  $V'$  五、

(一)由一、二、三、四、的表格數據,我們可發現同材質碰撞面、同一質量的球,無論初速為何,  $E_k\%$  皆呈一定值。

(二)由圖 17、圖 24、圖 31、圖 38,我們發現同一材質、不同質量的平均  $E_k\%$  與  $m$  之間可能為正向或負向關係,但不同材質的回歸直線之間並無特別關係。

(三)由一、二、三、四、的數據及各圖,我們發現壓克力板的數據最不規律,我們猜測可能是因為壓克力板的  $E_k\%$  太大了,造成無論  $V_0$  大或小,  $V'$  皆很小,而我們的儀器不夠精密,無法測出如此小的數據差異。

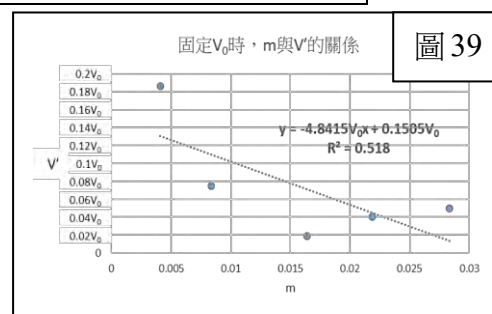


圖 39

## 陸、問題與討論

一、由以上實驗我們發現,在同一顆球且相同  $V_0$  及  $\omega_0$  的前提下,要使得球造成圖 5(速度方向為朝右方,角速度方向為順時針)的情況,必須使  $V'$  較小,  $\omega'$  較大(相較於其他情形)。由於壓克力板的  $E_k\%$  非常大(大多 >95%),會使  $V'$  變得極小,而其表面平滑,摩擦力較小也會讓  $\omega'$  比較大,所以這種材質可說是「 $V'$  小  $\omega'$  大」,但  $F_k$  卻不變(因為  $F_k = mg\mu_k'$  只與球的質量及地面材質有關),所以  $t_1 < t_2$  的可能性大,較可能造成圖 5 的情形。總而言之,像壓克力板這種  $E_k\%$  大,表面摩擦力小的材質很容易造成這種情況。

在「壹、實驗動機」中,我們用球撞擊木製衛生紙盒及鐵櫃時用高速攝影機拍攝後發現結果亦如圖 5 的情形,我們推測可能是因為衛生紙盒沒有靠在牆壁上,因此  $E_k\%$  很大,又衛生紙盒表面塗蠟,故摩擦力較小,所以才能看到圖 5 這種情況。

二、在「肆、研究過程及方法」中,我們曾遇到一個問題:是否能使  $\omega'$  轉動方向為逆時針,但無論我們如何將摩擦力加大(例如使用砂紙或用桌球拍等材質的粗糙表面),我們都無法使球在碰撞後倒轉(頂多只能使得  $\omega'$  接近 0),我們認為可能是當轉速減為 0 時,力矩瞬間消失,無法再作用於球上,也因此球無法倒轉。

## 柒、結論

一、滑車實驗 + 一維碰撞:

(一)球運轉在各時間點的各项運動量:

$$1. \begin{cases} \text{木板: } V' = (11.833V_0)m + 0.2577V_0 \dots\dots \textcircled{1} & (\text{由圖 18 可得}) \\ \text{不鏽鋼板: } V' = (-3.5511V_0)m + 0.6116V_0 \dots\dots \textcircled{2} & (\text{由圖 25 可得}) \\ \text{牆面: } V' = (5.8934V_0)m + 0.3583V_0 \dots\dots \textcircled{3} & (\text{由圖 32 可得}) \\ \text{壓克力板: } V' = (-4.8415V_0)m + 0.1505V_0 \dots\dots \textcircled{4} & (\text{由圖 39 可得}) \end{cases}$$

$$2. \omega' = \frac{mr\mu_k(v'+v_0)}{I} + \omega_0 \dots\dots \textcircled{5}$$

3. 以圖 2 的時間點為  $t'=0$  起算，各個時間點  $t'$  之

$$\begin{cases} mrV' < I\omega': \begin{cases} V = \frac{F_k t'}{m} - V' \dots\dots \textcircled{3} \\ \omega = -\frac{F_k r t'}{I} + \omega' \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}, \text{純滾動時: } \begin{cases} V = \frac{F_k t r}{m} - V' \\ \omega = -\frac{F_k r t r}{I} + \omega' \dots\dots \textcircled{6} \end{cases} \\ mrV' > I\omega': \begin{cases} V = -\frac{F_k t'}{m} + V' \dots\dots \textcircled{1} \\ \omega = \frac{F_k r t'}{I} - \omega' \dots\dots \textcircled{6} \end{cases}, \text{純滾動時: } \begin{cases} V = -\frac{F_k t r}{m} + V' \\ \omega = \frac{F_k r t r}{I} - \omega' \dots\dots \textcircled{7} \end{cases} \\ mrV' = I\omega': V = \omega = 0 \end{cases}$$

4. 綜合上述三點:只要由實驗求出某一材質之  $V'=amV_0+bV_0$ ，則可由  $V_0$ 、 $\omega_0$  及各項數據求得下列各項運動量:

$$(1) \omega' = \frac{mr\mu_k(am+b+1)}{I} V_0 + \omega_0$$

(2) 達到純滾動或靜止後球的各項運動量:

(a)若  $mrV' < I\omega'$

$$\text{則} \begin{cases} V = \omega r = \left( \frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{I+mr^2} mr^2 \right) V_0 + \left( \frac{I r}{I+mr^2} \right) \omega_0 \\ \omega = \left( \frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{I+mr^2} mr \right) V_0 + \left( \frac{I}{I+mr^2} \right) \omega_0 \end{cases}$$

(b)若  $mrV' = I\omega'$ ，則  $V = \omega = 0$

(c)若  $mrV' > I\omega'$

$$\text{則} \begin{cases} V = \omega r = \left( -\frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{I+mr^2} mr^2 \right) V_0 + \left( -\frac{I r}{I+mr^2} \right) \omega_0 \\ \omega = \left( -\frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{I+mr^2} mr \right) V_0 + \left( -\frac{I}{I+mr^2} \right) \omega_0 \end{cases}$$

$$5. \text{純滾動時間點 } t_r = \frac{I(\omega' r + V')}{g\mu_k'(mr^2+I)} = \left( \frac{(am+b)(mr^2\mu_k+I)+mr^2\mu_k}{g\mu_k'(I+mr^2)} \right) V_0 + \left( \frac{I r}{g\mu_k'(I+mr^2)} \right) \omega_0 \dots\dots \textcircled{8}$$

(二)碰撞各個材質時的碰撞損耗能量:

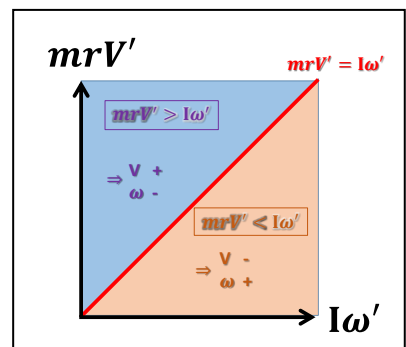
1. 球質量跟碰撞動能損耗率的關係:

$$\begin{cases} \text{木板: } E_k\% = 8.7698m - 0.94 \dots\dots \textcircled{9} \\ \text{不鏽鋼板: } E_k\% = -4.0629m - 0.605 \dots\dots \textcircled{10} \\ \text{牆面: } E_k\% = 4.7182m - 0.8892 \dots\dots \textcircled{11} \\ \text{壓克力板: } E_k\% = -1.0906m - 0.9732 \dots\dots \textcircled{12} \end{cases}$$

2. 入射速度跟碰撞動能損耗率的關係:

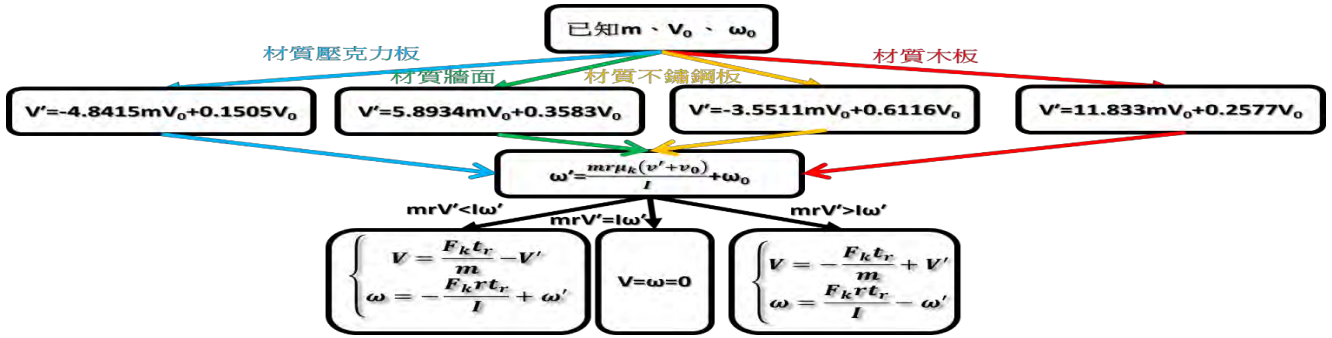
只要碰撞面為同一材質，球的質量固定， $E_k\%$  固定，與  $V_0$  無關

(三)球的各種可能運動方式之間的數值關係(臨界點):(如右圖)



(四)由實驗數據及觀測結果發現:當  $E_k\%$  很大(如超過 95%)且球與碰撞面之間的摩擦係數很小時，比較容易使其達到「球彷彿被接觸面吸了回去」的效果。

(五)由「肆、研究過程及方法」及「伍、研究結果」1. 2. 3.4.可得以下流程圖:



二、二維碰撞:若 $\mu_k$ 及 $\mu'_k$ 皆較大不能忽略:

(一)球運轉在各時間點的各项運動量:

$$1. \begin{cases} \vec{V}' = ((am + b + 1)V_0^2 \mu_k \cos \theta \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} + V_0 \sin \theta, (am + b)V_0 \cos \theta, 0) \\ \vec{\omega}' = (\frac{mr^2 \omega_0 \mu_k (am + b + 1)V_0 \cos \theta}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} - \omega_0 \sin \theta, -\omega_0 \cos \theta, \frac{mrV_0 \mu_k (am + b + 1)V_0 \cos \theta}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}}) \end{cases}$$

2.各情形下達到純滾動時的速度 $\vec{V}$ 以及角速度 $\vec{\omega}$ :

(1)  $V'_x > \omega'_y r$ : (a)  $mrV'_y = I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (\frac{mr^2 V'_x + I\omega'_y r}{1 + mr^2}, 0, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (0, \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{1 + mr^2}, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(b)  $mrV'_y > I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1 + mr^2}, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1 + mr^2} - V'_y, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1 + mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1 + mr^2}, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(c)  $mrV'_y < I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1 + mr^2}, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1 + mr^2}, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (-\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1 + mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1 + mr^2}, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(2)  $V'_x = \omega'_y r$ : (a)  $mrV'_y = I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x, 0, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (0, \omega'_y, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(b)  $mrV'_y > I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1 + mr^2} - V'_y, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1 + mr^2}, \omega'_y, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(c)  $mrV'_y < I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1 + mr^2}, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (\frac{mrV'_y - I\omega'_x}{1 + mr^2}, \omega'_y, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(3)  $V'_x < \omega'_y r$ : (a)  $mrV'_y = I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (\frac{mr^2 V'_x + I\omega'_y r}{1 + mr^2}, 0, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (0, \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{1 + mr^2}, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(b)  $mrV'_y > I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1 + mr^2}, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1 + mr^2} - V'_y, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1 + mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1 + mr^2}, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

(c)  $mrV'_y < I\omega'_x$ :  $\vec{V} = (V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1 + mr^2}, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1 + mr^2}, 0)$ ;  $\vec{\omega} = (-\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1 + mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1 + mr^2}, \frac{mrV_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}})$

3. 純滾動時間點  $t_r = \frac{I\sqrt{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}{(1 + mr^2)g\mu'_k}$

(二)我們發現無論速度、角速度如何隨時間改變， $\vec{F}_k$ 的方向並不隨時間改變，而其 x、y 方向的分量也因此分別為固定向量 $\vec{F}_{kx_0}$ 、 $\vec{F}_{ky_0}$ ，可當作「定力」計算。

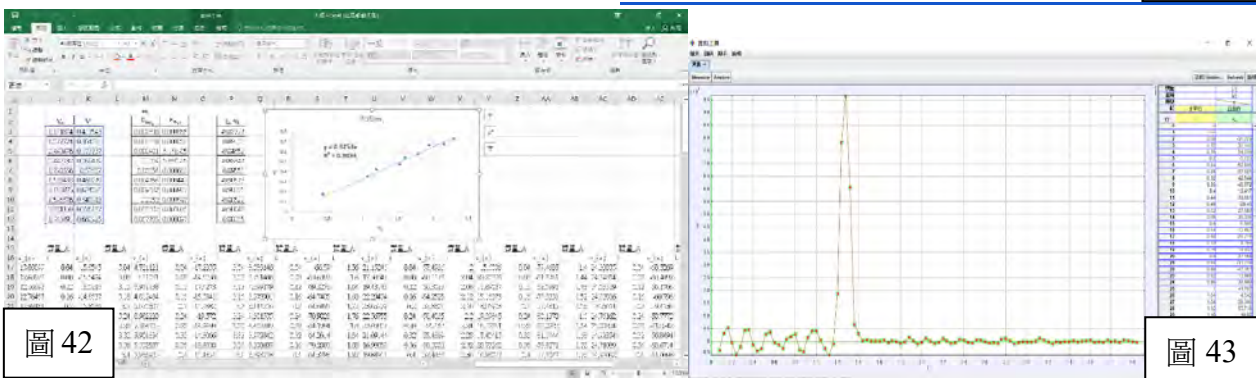
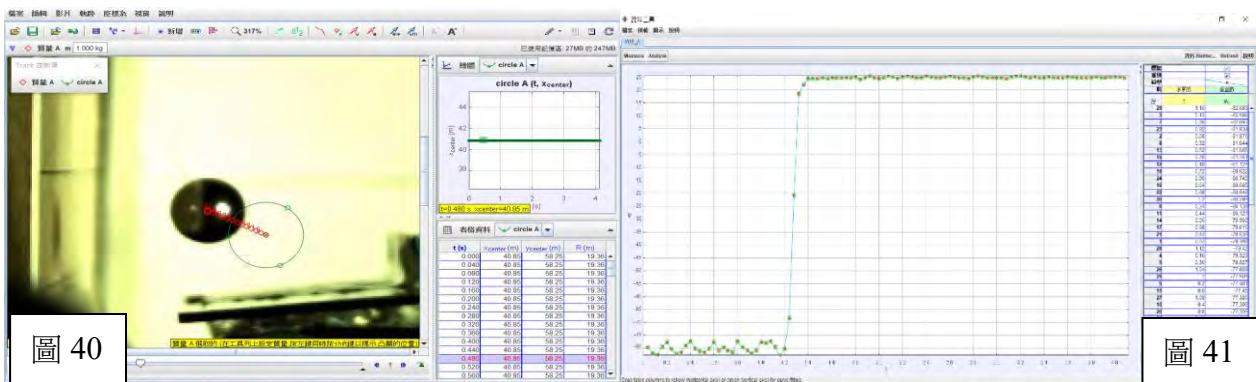
(三)無論是何種情況下，x 方向達成純滾動的時間點「恰好」為 y 方向達成純滾動的時間點，故在  $t' = t_r$  時，球瞬間達成純滾動，地面摩擦力瞬間變為 0，不再作用於球上。

## 捌、參考資料

- 一、高中基礎物理(二) B(翰林版)
- 二、楊仲準·Tracker 軟體 安裝與使用教學·中原大學物理系·取自 [c002.ndhu.edu.tw/ezfiles/25/1025/img/1231/581613291.pdf](http://c002.ndhu.edu.tw/ezfiles/25/1025/img/1231/581613291.pdf)
- 三、東華大學物理學系·Tracker 物理實驗影像分析軟體 使用說明·取自 <http://faculty.ndhu.edu.tw/~phys-exp/files/Tracker-chinese.pdf>
- 四、角速度·維基百科，自由的百科全書·取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%A7%92%E9%80%9F%E5%BA%A6>

## 玖、附錄

- 一、由實驗數據找出  $V_0$  及  $V'$  的方法:我們利用 Tracker 軟體的自動搜尋功能找出球的球心(質心)運動軌跡(如圖 40)，並且，我們拍攝的畫面中，Tracker 內建的校正桿對於畫面中的 2.7 公分為 100 公尺，因此現實中只要把 Tracker 的距離數值乘上 27/100000 即是現實中的距離；時間方面我們拍攝時的 fps 為 2500 張/秒，輸出時又是 25 張/秒，即時間要乘上 1/100，整體來說，速度的數值算出來後還要乘上 27/1000
- 二、數據分析:我們可以用 Tracker 裡的數據(如圖 41)放入 Excel 找到入射與彈出速度的平均值，並直接用 Excel 畫出圖形(如圖 42)
- 三、a-t 圖:如圖 43，我們可以看到球體撞擊碰撞面過程，加速度時變率量值由大(正值)減到 0 再變大(負值)。



## 【評語】 051813

良好的實驗設計與詳實的理论分析，建議可以加強理論與實驗結果之間的連結。



# 摘要

我們發現了球撞到平面後有回彈的現象，我們設計了幾個實驗來了解並探討這個現象。本實驗主要探討當球體水平撞擊各個垂直平面之後所損耗的能量、球後續的運動狀態以及兩者之間的關係。

## 實驗動機

我們無意間把彈珠撞擊到木製面紙盒，原本我們以為彈珠會沿著原路徑往回彈，結果它竟然瞬間停了下來，到了學校，我們又讓玻璃球撞擊了鐵櫃，發現它彷彿被吸住一般，有的球瞬間停住；有的球則是彈了出來又彷彿「被吸了回去」

## 研究目的

- 一、找出球運轉在各時間點的各项運動量
- 二、求出在碰撞各個材質時的碰撞損耗能量並找出
  - (1)球質量跟碰撞動能損耗率的關係
  - (2)入射速度跟碰撞動能損耗率的關係
- 三、找球的各種可能運動方式之間的數值關係(分界點)
- 四、討論在何種情況下能使球「彷彿被接觸面吸了回去」

## 研究過程及方法

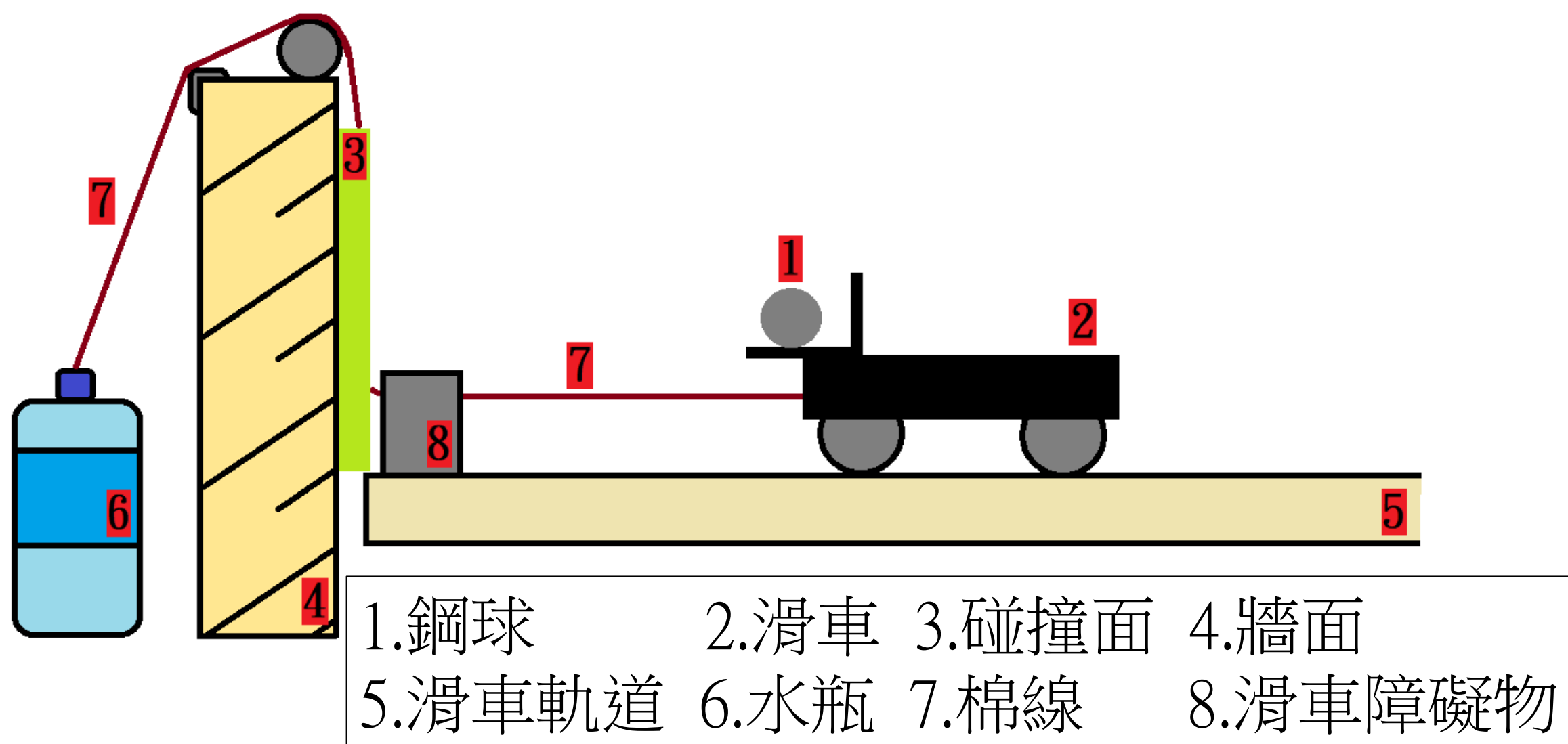
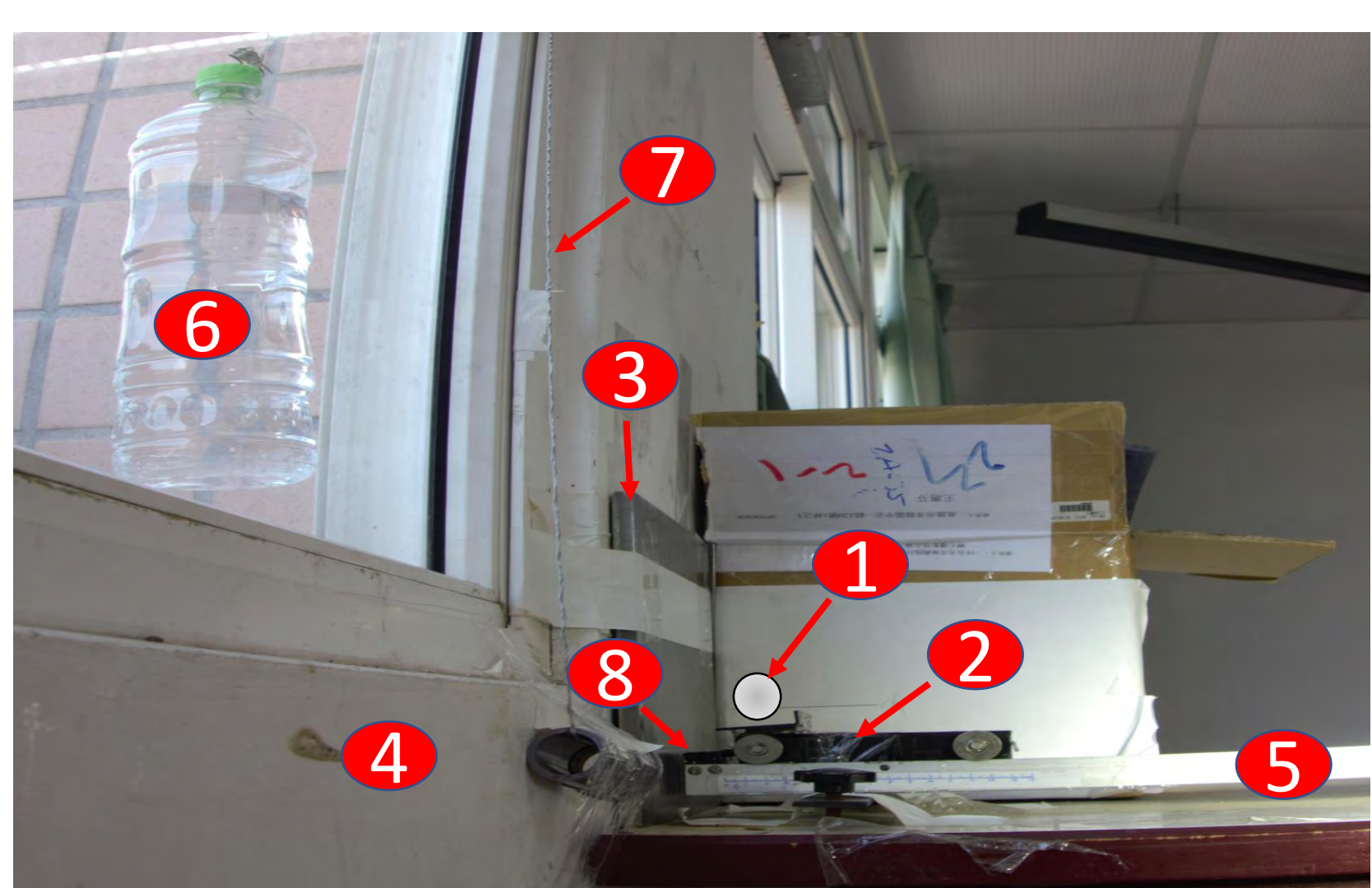
(壹)滑車實驗—求出球入射速度量值與反彈後速度量值之間的關係，進而求出速度、質量、撞擊面材質對碰撞損耗能量(碰撞損耗率)的影響

實驗器材:



**實驗方法:**實驗中，我們想使球在**不轉動的情況下**撞擊碰撞面，**測量出初速與末速**後由此推出能量損耗率，因此我們利用滑車帶動鋼珠，在滑車撞擊到障礙物後，球會依慣性飛出；並且為了不使球在撞出去的同時受到摩擦力的影響而轉動，進而造成撞擊碰撞面時因摩擦力而損失多餘的能量，我們在放置球的滑車平面以及碰撞面上抹上WD-40潤滑油。拉起繩子使水瓶升高，接下來放下水瓶使滑車往前帶動球撞擊碰撞面，用高速攝影機測量球的**初x軸速度(即未撞擊碰撞面時的速度)**及**末x軸速度(撞出來後的速度)**。依結果分析不同**質量**、碰撞面**材質**及不同**入射速度**之間**碰撞損耗量**的關係。為了讓每一次實驗，球的入射速度不同，我們會替換不同質量的水瓶，而且每次拉水瓶的高度也不一樣，如此拉動滑車時會有不同的加速度及速度；質量不同的部分我們則是直接換不同質量的球。

實驗裝置圖:



(貳)理論推導—預測球的未來滾動狀態(速度、角速度、純滾動時間)

一、一維碰撞:(圖一)鋼球以初速度量值 $V_0$ ，初角速度量值 $\omega_0$ ，入射路徑與碰撞面垂直的方向，撞向碰撞面。(圖二)

表撞到碰撞面下一瞬間，速度為 $V'$ ；角速度為 $\omega'$

碰撞面對球的平均正向力 $N$ 滿足

$$N = m \frac{V' - (-V_0)}{t} = m \frac{V' + V_0}{t}$$

撞擊面摩擦力 $f_k$ 對球的力矩為 $\tau$

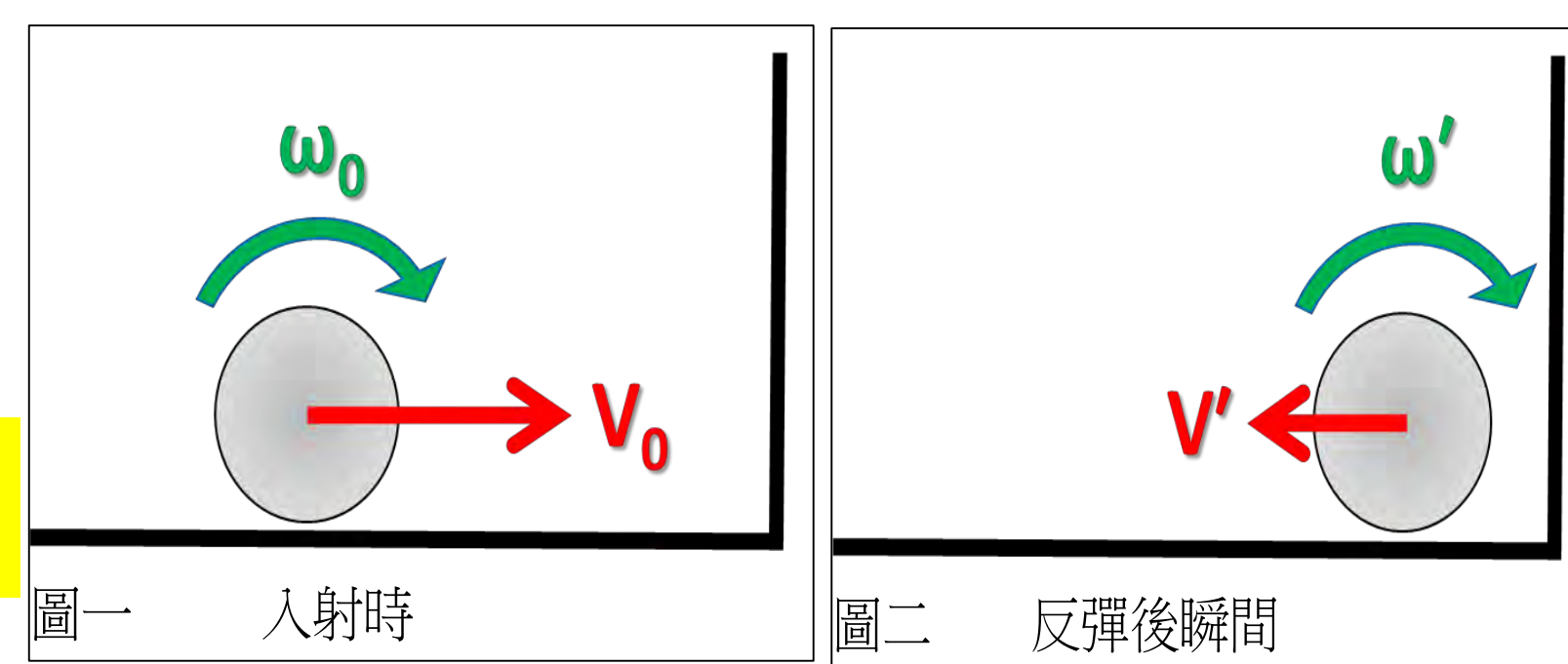
$$\tau = f_k r = N \mu_k r = m \frac{V' + V_0}{t} \mu_k r = \frac{V' + V_0}{t} m r \mu_k$$

$\alpha$ 表示 $\tau$ 作用期間球的角加速度

$$\tau = I \alpha = I \frac{\omega' - \omega_0}{t}$$

可得到 $\omega'$ 與 $\omega_0$ 、 $V_0$ 的關係( $V'$ 則與 $V_0$ 有關~見滑車實驗)

$$\omega' = \frac{m r \mu_k (V' + V_0)}{I} + \omega_0 \dots \dots 5$$



1.以移動來看→地面摩擦力 $F_k$ 使速度逐漸減少(以下皆代入 $-F_k = m \frac{V - V'}{t'}$ ):

(一) 速度 $>0$ (方向朝左)

$$V = -\frac{F_k t'}{m} + V' \dots \dots 1$$

(二)速度減少到0的時間 $t' = t_1$

$$t_1 = \frac{m V'}{F_k} = \frac{m V'}{m g \mu_k} = \frac{V'}{g \mu_k} \dots \dots 2$$

(三)若速度 $<0$ (方向朝右)

$$V = \frac{F_k t'}{m} - V' \dots \dots 3$$

2.以轉動的角度來看→摩擦力使球的角速度變慢(以下皆代入 $-\tau' = -F_k r = I \frac{\omega - \omega'}{t'}$ ):

(一)在角速度 $>0$ (順時針)

$$\omega = -\frac{F_k r t'}{I} + \omega' \dots \dots 4$$

(二)角速度減少到0的時間 $t' = t_2$

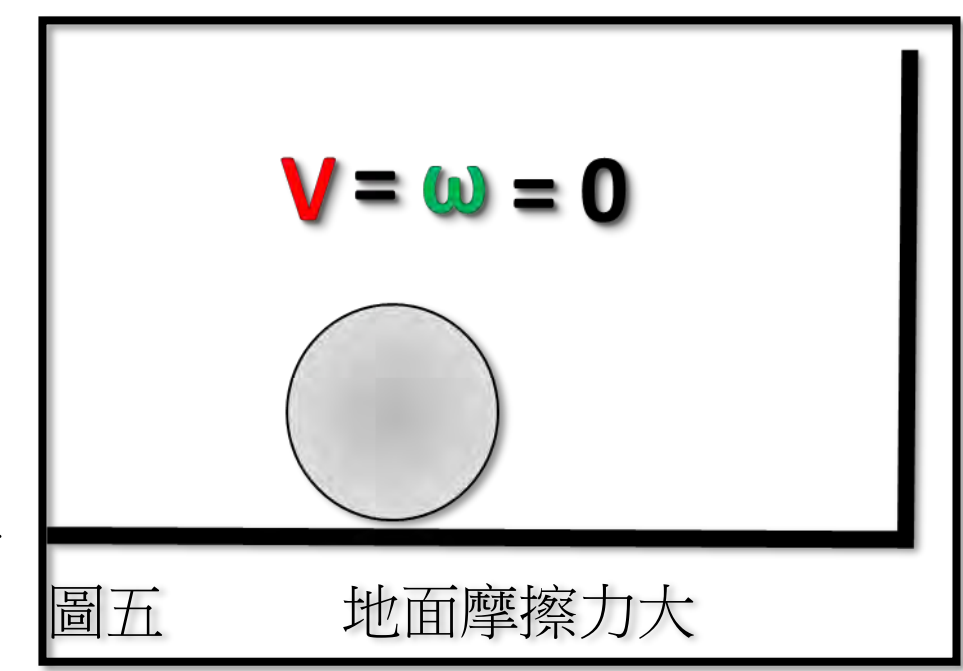
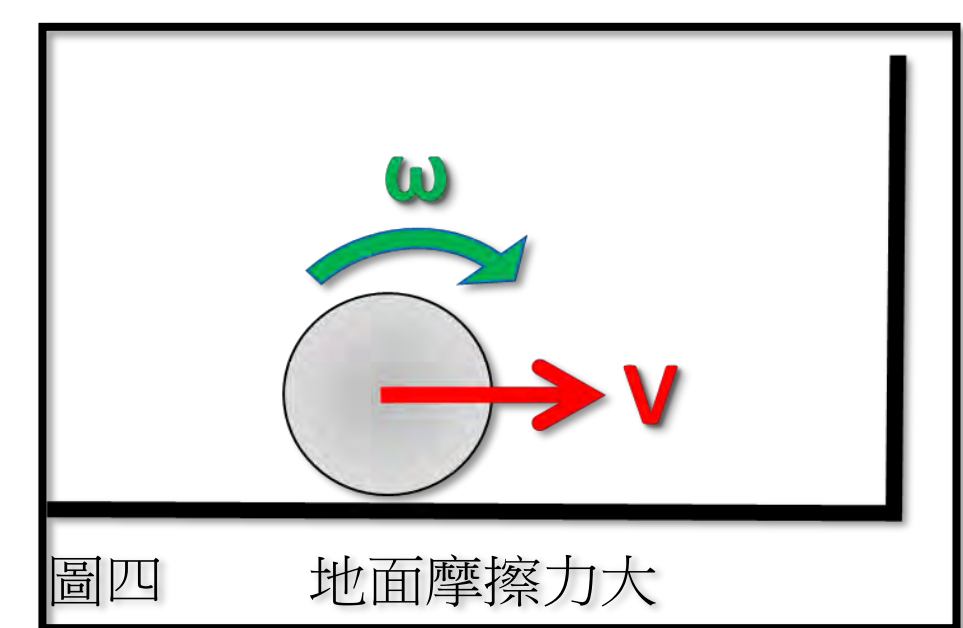
$$t_2 = \frac{I \omega'}{F_k r} = \frac{I \omega'}{m g \mu_k r} \dots \dots 5$$

(三)角速度 $<0$ (逆時針)

$$\omega = \frac{F_k r t'}{I} - \omega' \dots \dots 6$$

3.由2、5式，球最終滾動的可能性有以下3種:

(一)當 $t_1 < t_2$ ，在此瞬間速度量值已為0，角速度量值不為0且向順時針方向。速度繼續朝右且量值漸增，角速度方向不變但量質遞減。(圖四)



$$\begin{cases} V = \frac{F_k t'}{m} - V' \dots \dots 3 \\ \omega = -\frac{F_k r t'}{I} + \omega' \dots \dots 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \left(\frac{V + V'}{F_k}\right) m = \left(\frac{V + V'}{m g \mu_k}\right) m = \frac{V + V'}{g \mu_k} \\ t' = \left(\frac{-\omega + \omega'}{F_k r}\right) I = \left(\frac{-\omega + \omega'}{m g \mu_k r}\right) I \end{cases} \Rightarrow t' = \frac{V + V'}{g \mu_k} = \left(\frac{-\omega + \omega'}{m g \mu_k r}\right) I \Rightarrow V = \left(-\frac{I}{m r}\right) \omega + \frac{I \omega' - m r V'}{m r} \dots \dots 7$$

代表只要用同一顆球，不同實驗在各時間點之 $(V, \omega)$ 在座標平面上所畫出之 $V-\omega$ 圖皆成斜率為 $\left(-\frac{I}{m r}\right)$ 的一線性關係

(b)純滾動時間點:假設當 $V = \omega r$ 的時間點為 $t' = t_r$ ，由3、4:

$$\frac{F_k t_r}{m} - V' = \left(-\frac{F_k r t_r}{I} + \omega'\right) r \Rightarrow \frac{m g \mu_k t_r}{m} - V' = \left(-\frac{m g \mu_k r t_r}{I} + \omega'\right) r \Rightarrow t_r = \frac{I m \omega' r + I m V' - I(\omega' r + V')}{m^2 g \mu_k r^2 + I m g \mu_k} = \frac{I(\omega' r + V')}{g \mu_k (m r^2 + I)} \dots \dots 8$$

在此球達到純滾動，摩擦力減為0，速度及角速度維持不變。也就是說，球在 $t' \geq t_r$ 的時間中速度及角速度恆為定值

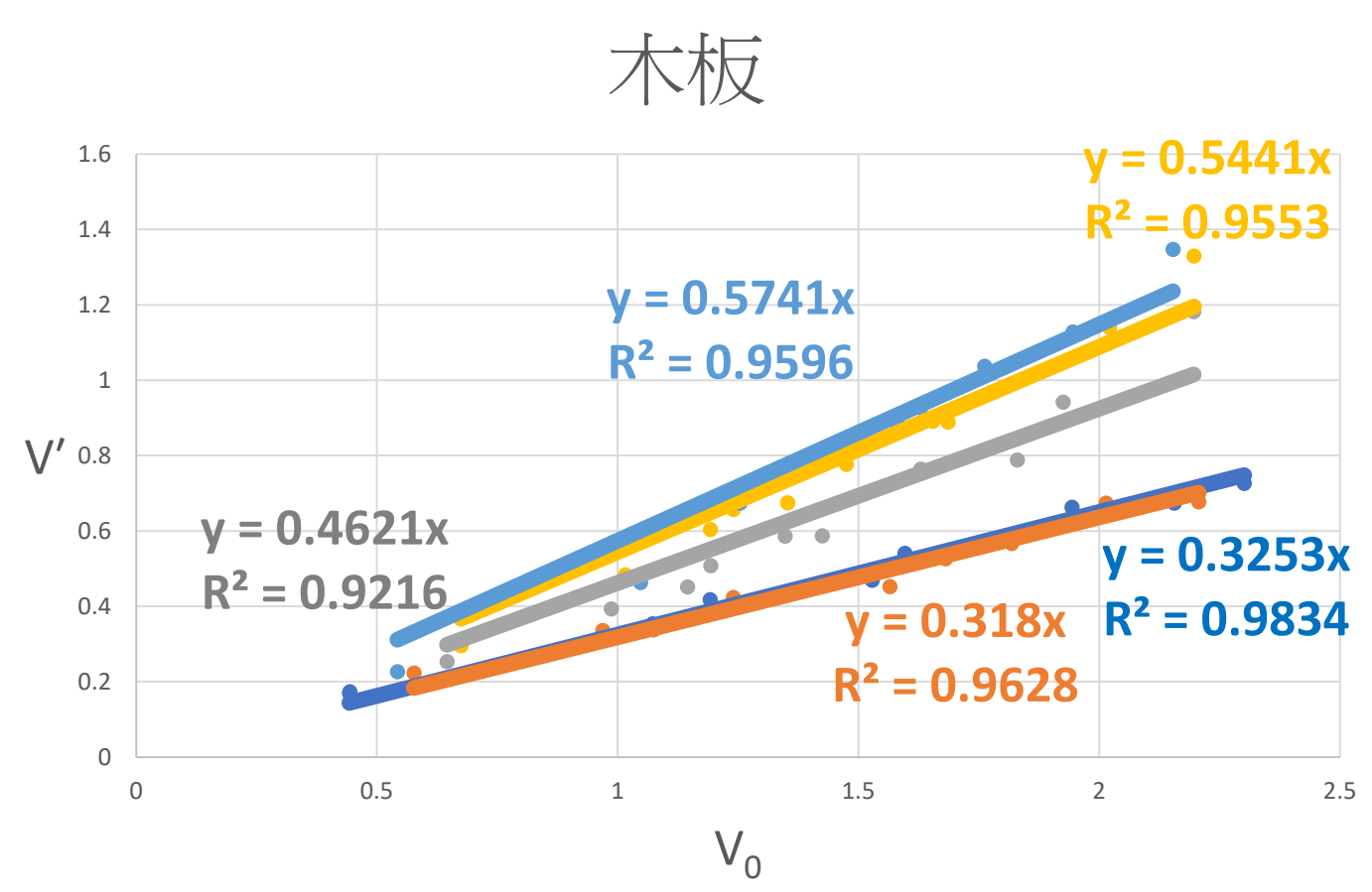
(二)當 $t_1 = t_2$  在此瞬間速度及角速度量值皆變為0，球瞬間停止運動(如圖五)



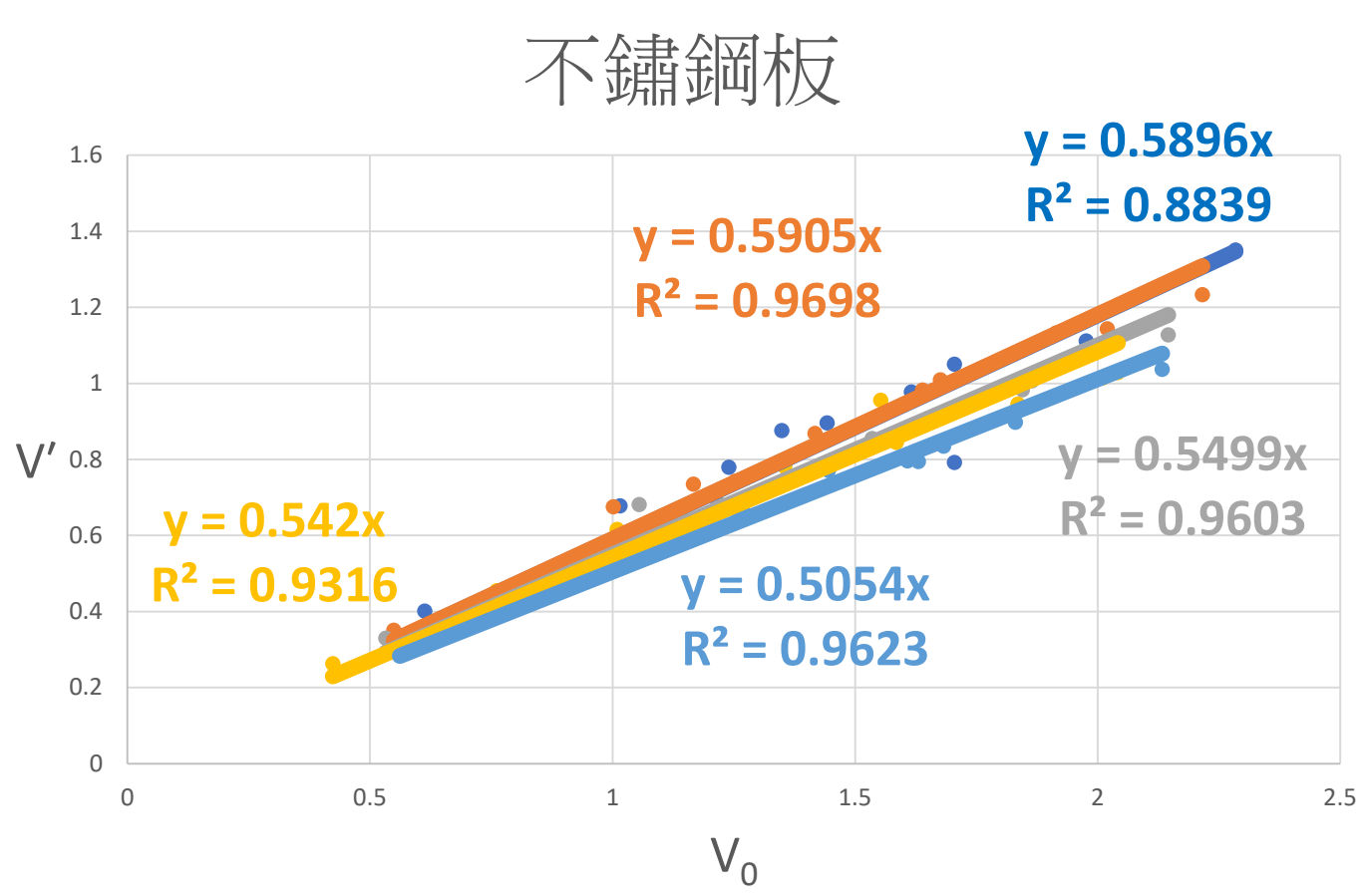
# 研究結果

$$E_k\% = \frac{\text{動能變化量}}{\text{初動能}} \times 100\%$$

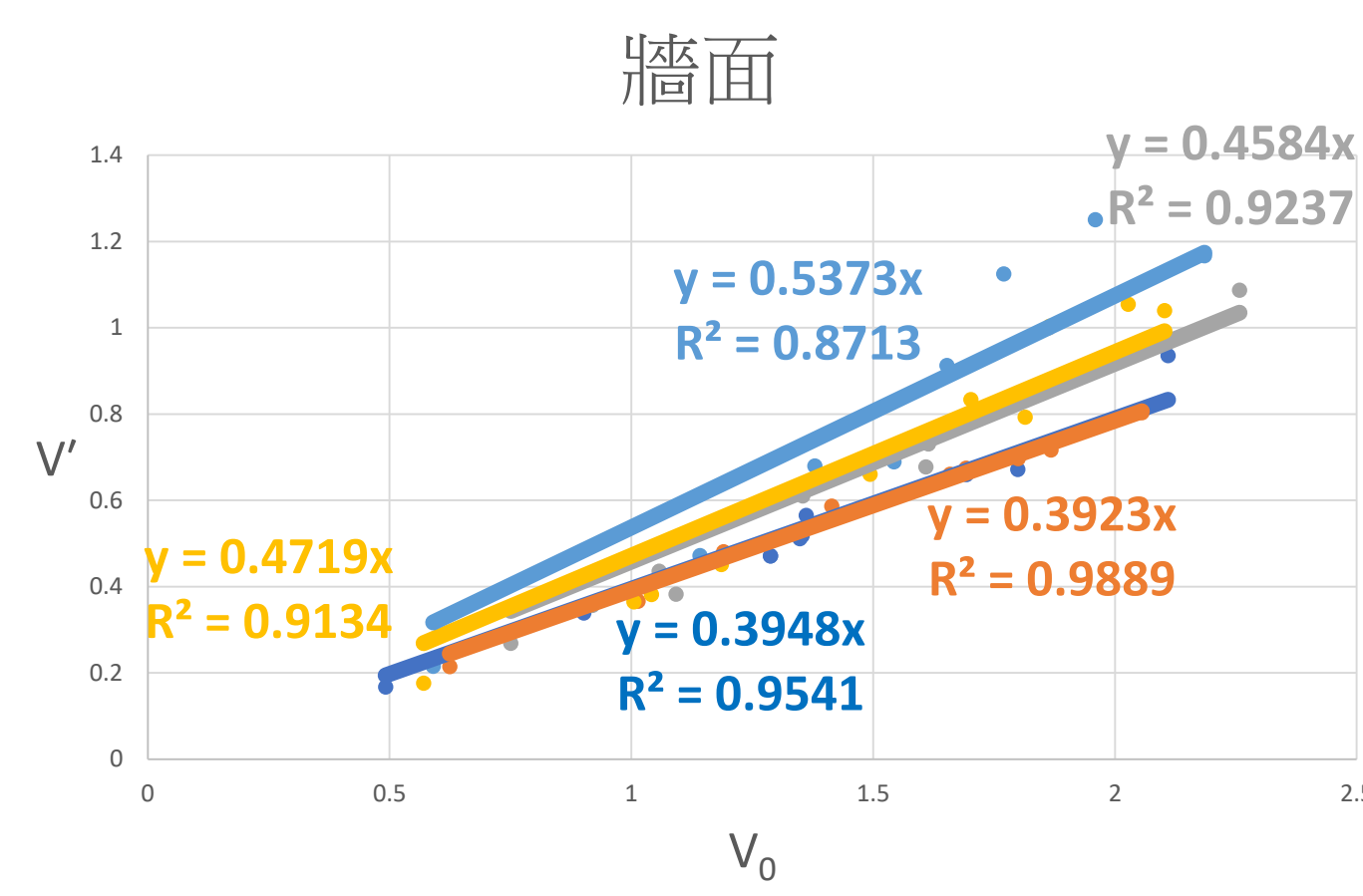
## 1. 木板



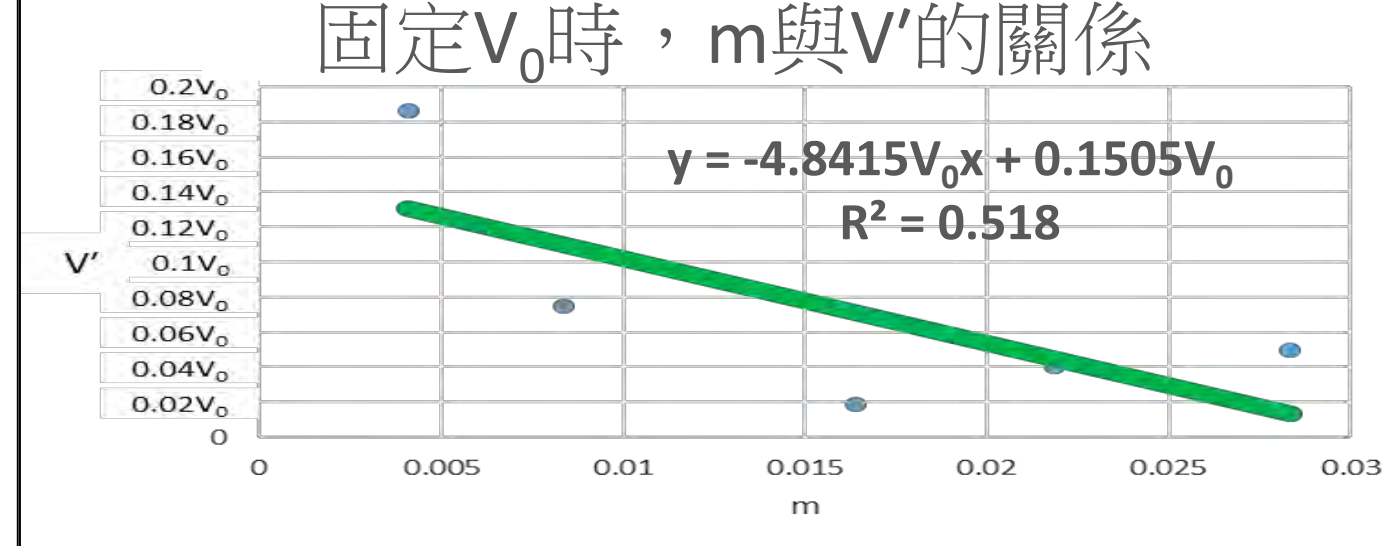
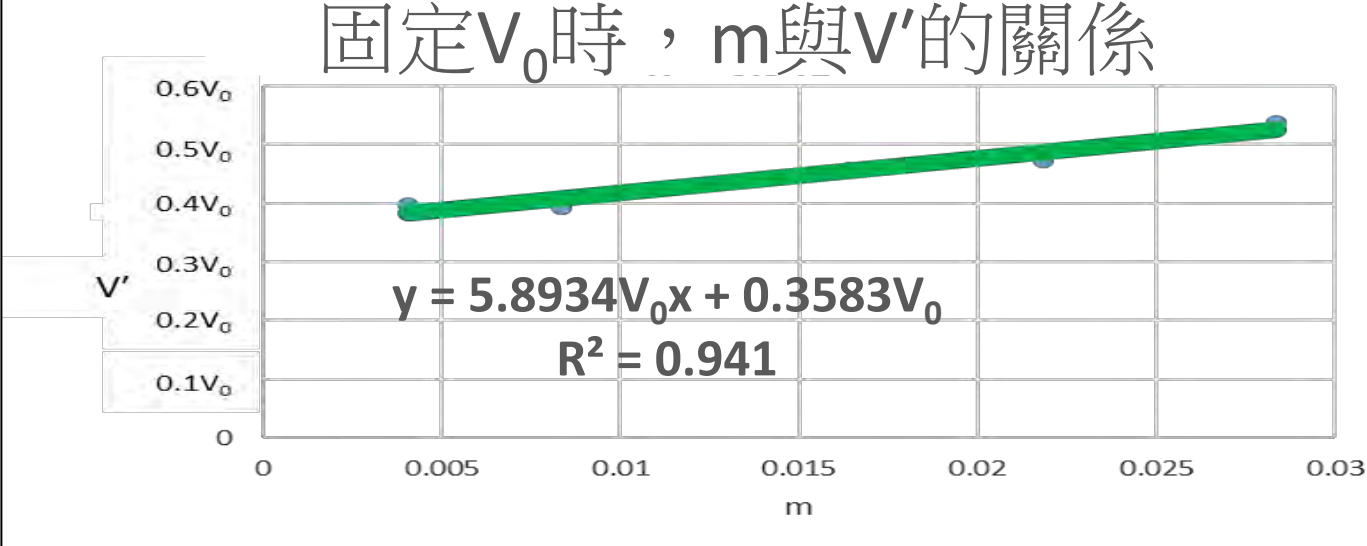
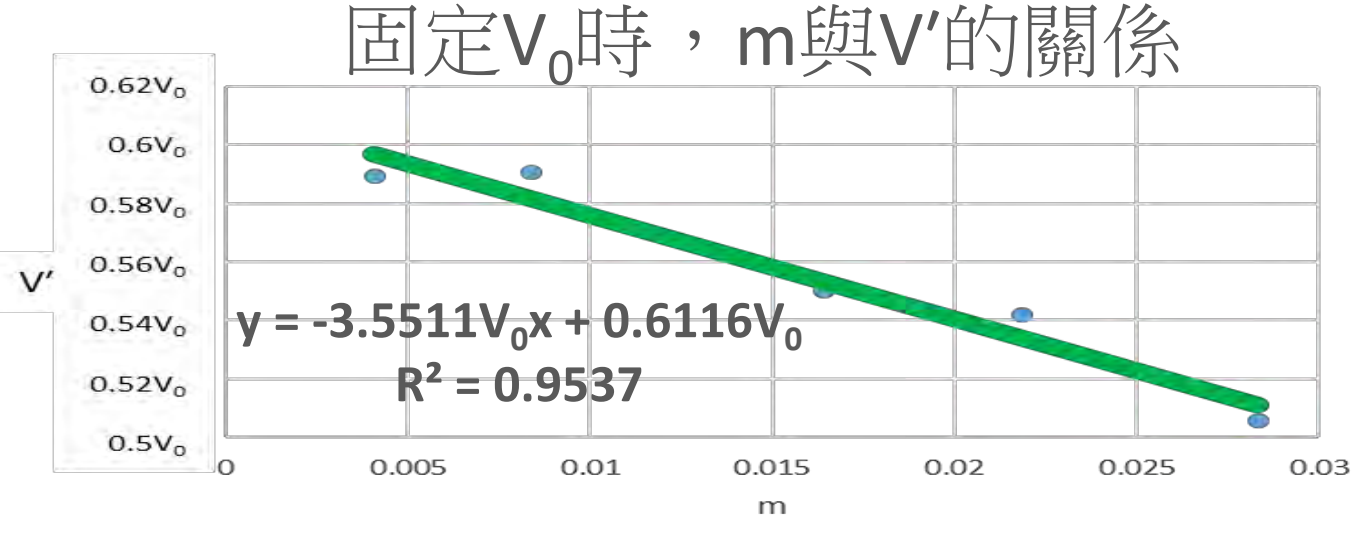
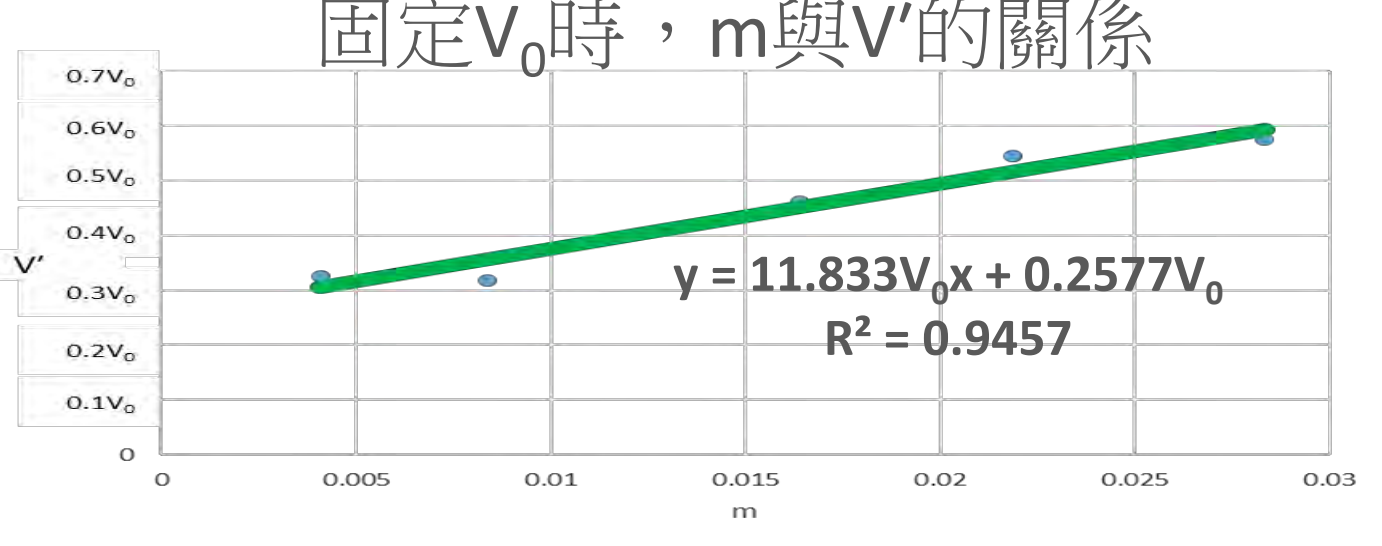
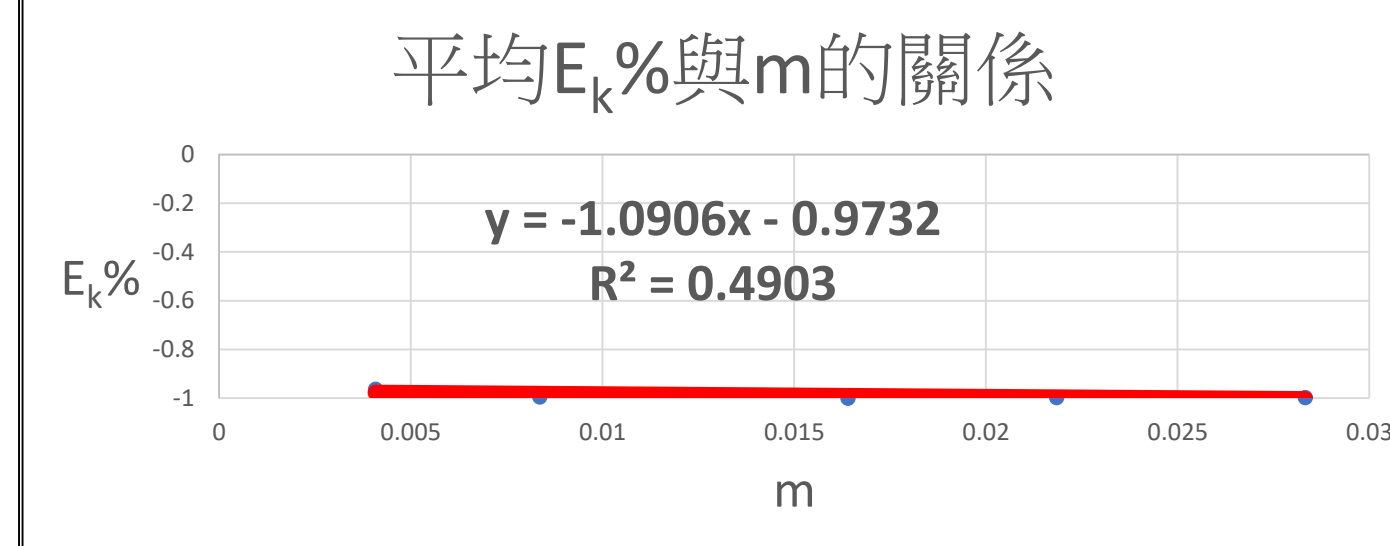
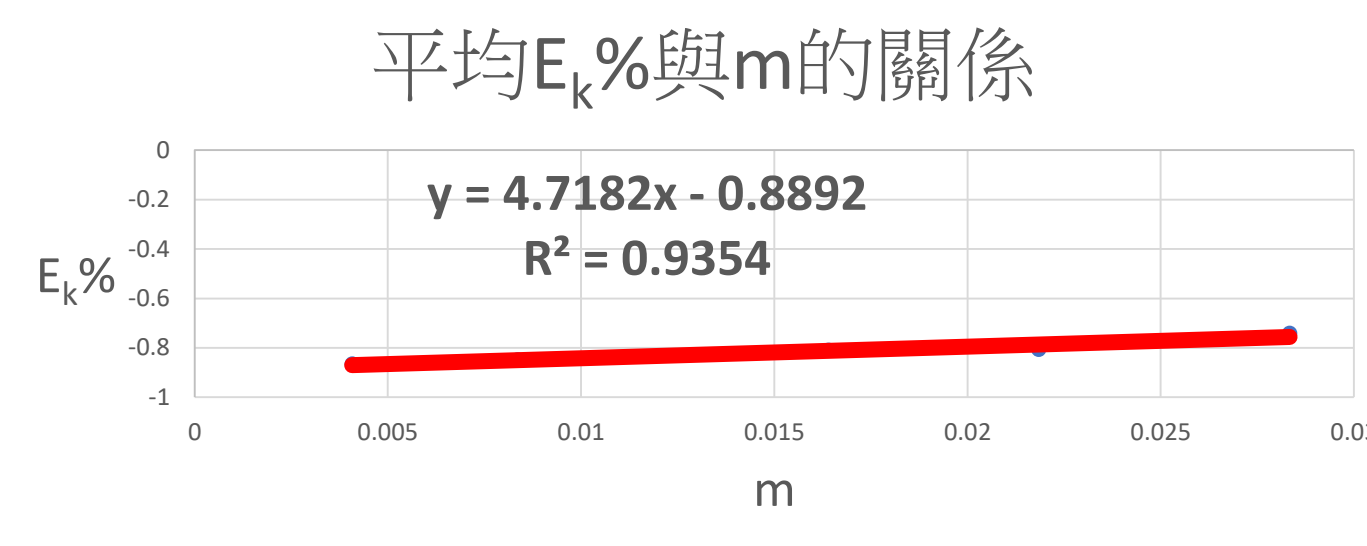
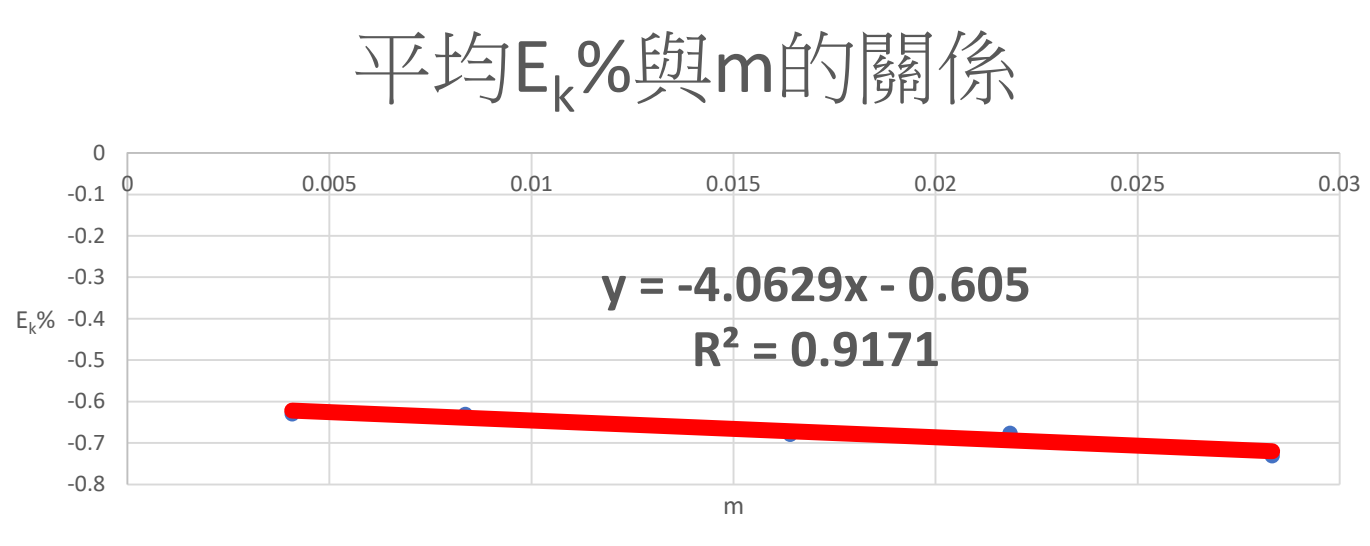
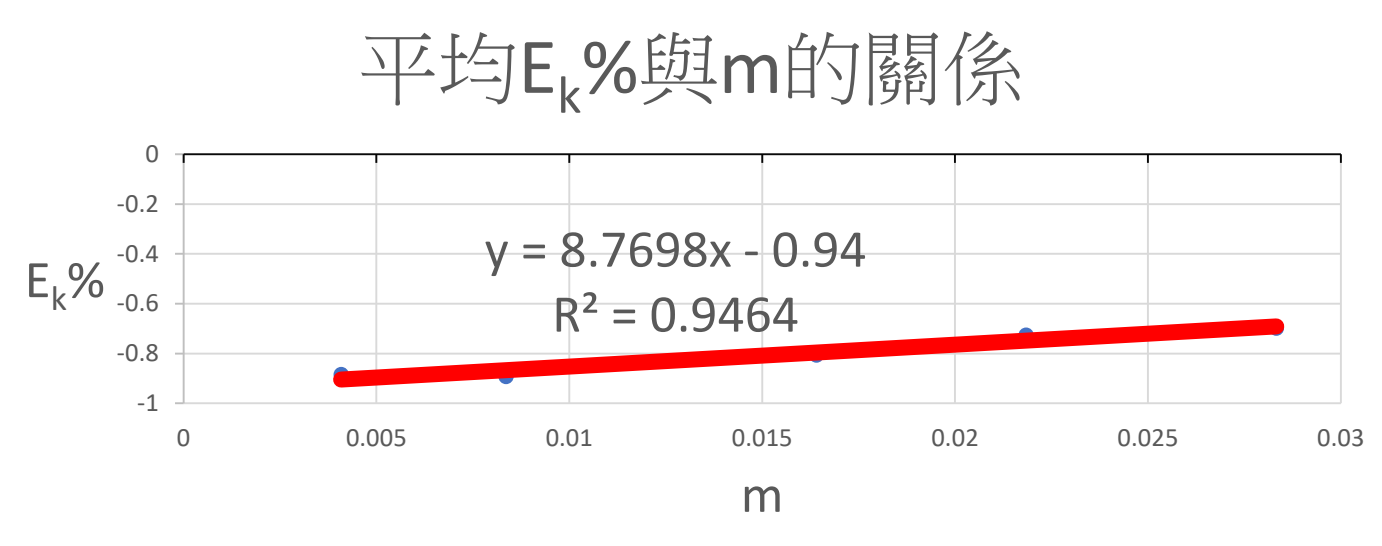
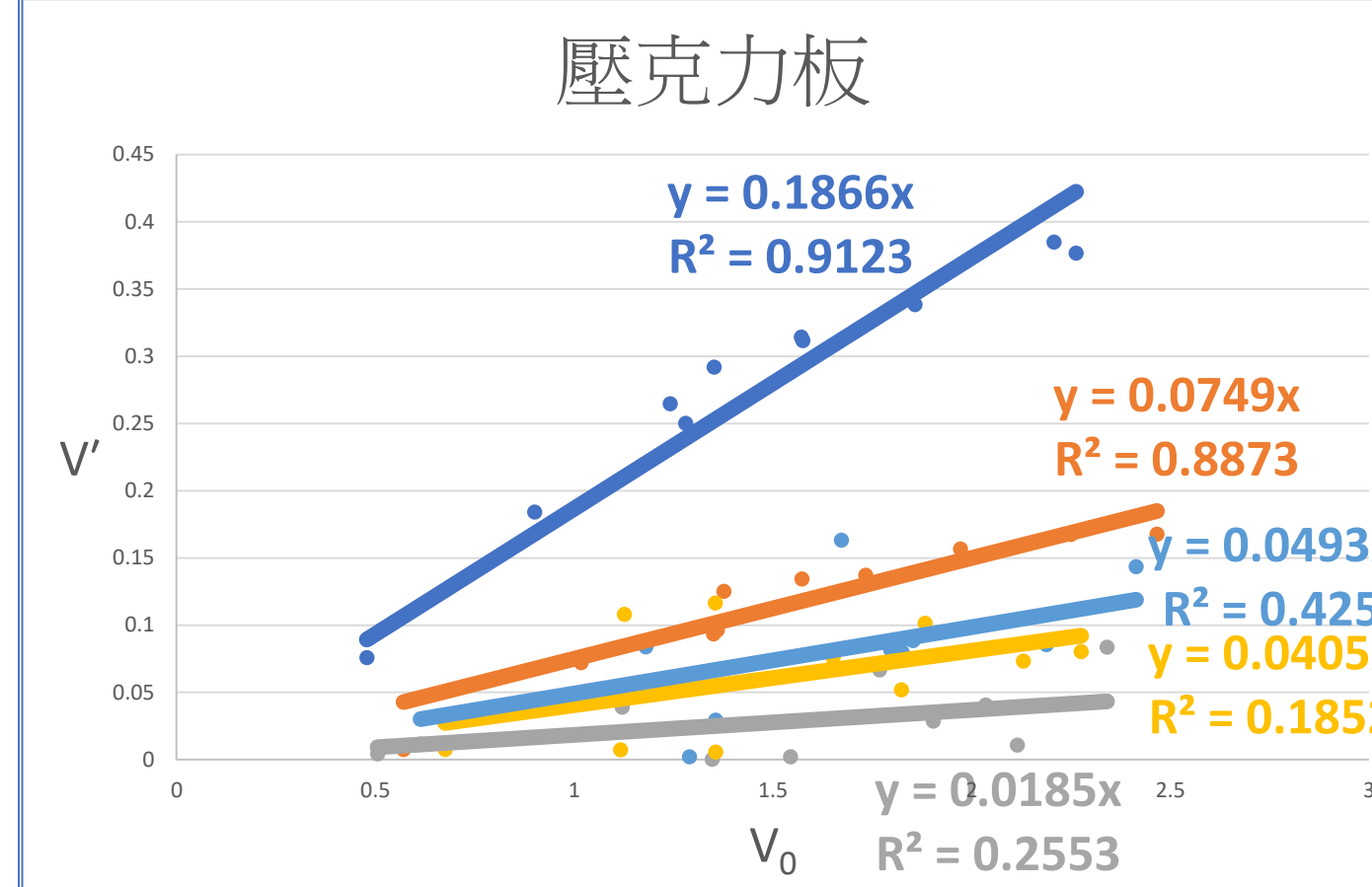
## 2. 鋼板



## 3. 牆面



## 4. 壓克力板



### 一、滑車實驗 + 一維碰撞:

(一)球運轉在各時間點的各项運動量:

- 木板:  $V' = (11.833V_0)m + 0.2577V_0$
- 不鏽鋼板:  $V' = (-3.5511V_0)m + 0.6116V_0$
- 牆面:  $V' = (5.8934V_0)m + 0.3583V_0$
- 壓克力板:  $V' = (-4.8415V_0)m + 0.1505V_0$

$$\begin{cases} \text{純滾動時: } \begin{cases} V = \frac{F_{kt}r}{m} - V' \\ \omega = -\frac{F_{kt}r}{I} + \omega' \end{cases} \\ \text{純滾動時: } \begin{cases} V = -\frac{F_{kt}r}{m} + V' \\ \omega = \frac{F_{kt}r}{I} - \omega' \end{cases} \end{cases}$$

(1)  $\omega' = \frac{mr\mu_k(v'+v_0)}{I} + \omega_0 = \frac{(am+b+1)mr\mu_k}{I}V_0 + \omega_0$

(2) 達到純滾動或靜止後球的各项運動量:

(a) 若  $mrV' < I\omega'$ , 則  $\begin{cases} V = \omega r = \left(\frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{1+mr^2}\right)V_0 + \left(\frac{I}{1+mr^2}\right)\omega_0 \\ \omega = \left(\frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{1+mr^2}\right)V_0 + \left(\frac{I}{1+mr^2}\right)\omega_0 \end{cases}$

(b) 若  $mrV' = I\omega'$ , 則  $V = \omega = 0$

(c) 若  $mrV' > I\omega'$ , 則  $\begin{cases} V = \omega r = \left(-\frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{1+mr^2}\right)V_0 + \left(-\frac{I}{1+mr^2}\right)\omega_0 \\ \omega = \left(-\frac{(am+b)(\mu_k-1)+\mu_k}{1+mr^2}\right)V_0 + \left(-\frac{I}{1+mr^2}\right)\omega_0 \end{cases}$

3. 綜合上述三點: 只要由實驗求出某一材質之  $V' = (aV_0)m + bV_0$ , 則可由  $V_0$ 、 $\omega_0$  及各項數據求得下列各項運動量(如右):

$$4. \text{純滾動時間點 } t_r = \frac{I(\omega' r + V')}{g\mu_k(mr^2 + I)} = \left(\frac{(am+b)(mr^2\mu_k + I) + mr^2\mu_k}{g\mu_k(I + mr^2)}\right)V_0 + \left(\frac{I}{g\mu_k(I + mr^2)}\right)\omega_0$$

(二)碰撞各個材質時的碰撞損耗能量:

- 球質量跟碰撞動能損耗率的關係:
  - 木板:  $E_k\% = 8.7698m - 0.94$
  - 不鏽鋼板:  $E_k\% = -4.0629m - 0.605$
  - 牆面:  $E_k\% = 4.7182m - 0.8892$
  - 壓克力板:  $E_k\% = -1.0906m - 0.9732$
- 入射速度跟碰撞動能損耗率的關係: 只要碰撞面為同一材質, 球的質量固定,  $E_k\%$  固定, 與  $V_0$  無關

(三)球的各種可能運動方式之間的數值關係(臨界點):(如右圖)

(四)由實驗數據及觀測結果發現: 當  $E_k\%$  很大(如超過95%)且球與碰撞面之間的摩擦係數很小時, 比較容易使其達到「球彷彿被接觸面吸了回去」的效果

(五)在同一顆球且相同  $V_0$  及  $\omega_0$  的前提下, 要使得球造成如右圖的情況, 必須使  $V'$  較小,  $\omega'$  較大。由於壓克力板的  $E_k\%$  非常大(大多 >95%), 會使  $V'$  變得極小, 而其表面平滑, 摩擦力較小也會讓  $\omega'$  比較大, 所以這種材質可說是「 $V'$  小  $\omega'$  大」, 但  $F_k$  卻不變(因為  $F_k = mg\mu_k$  只與球的質量及地面材質有關), 所以  $t_1 < t_2$  的可能性大, 較可能造成右圖的情形。總而言之, 像壓克力板這種  $E_k\%$  大, 表面摩擦力小的材質很容易造成這種情況。

### 二、二維碰撞: 若 $\mu_k$ 及 $\mu_k'$ 皆較大不能忽略:

(一)球運轉在各時間點的各项運動量:

$$1. \begin{cases} \vec{V}' = ((am+b+1)V_0\mu_k\cos\theta\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + V_0\sin\theta, (am+b)V_0\cos\theta, 0) \\ \vec{\omega}' = \left(\frac{mr^2\omega_0\mu_k(am+b+1)V_0\cos\theta}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}} - \omega_0\sin\theta, -\omega_0\cos\theta, \frac{mrV_0\mu_k(am+b+1)V_0\cos\theta}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) \end{cases}$$

2. 各情形下達到純滾動時的速度  $\vec{V}$  以及角速度  $\vec{\omega}$ :

(1)  $V'_x > \omega'_y r$ :

(a)  $mrV'_y = I\omega'_x$ :  $\vec{V} = \left(\frac{mr^2V'_x + I\omega'_y}{1+mr^2}, 0, 0\right)$ ;  $\vec{\omega} = \left(0, \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$

(b)  $mrV'_y > I\omega'_x$ :  $\vec{V} = \left(V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1+mr^2}, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1+mr^2} - V'_y, 0\right)$ ;  $\vec{\omega} = \left(\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1+mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$

(c)  $mrV'_y < I\omega'_x$ :  $\vec{V} = \left(V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1+mr^2}, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1+mr^2}, 0\right)$ ;  $\vec{\omega} = \left(-\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1+mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$

(2)  $V'_x < \omega'_y r$ :

(a)  $mrV'_y = I\omega'_x$ :  $\vec{V} = \left(\frac{mr^2V'_x + I\omega'_y}{1+mr^2}, 0, 0\right)$ ;  $\vec{\omega} = \left(0, \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$

(b)  $mrV'_y > I\omega'_x$ :  $\vec{V} = \left(V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1+mr^2}, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1+mr^2} - V'_y, 0\right)$ ;  $\vec{\omega} = \left(\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1+mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$

(c)  $mrV'_y < I\omega'_x$ :  $\vec{V} = \left(V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1+mr^2}, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1+mr^2}, 0\right)$ ;  $\vec{\omega} = \left(-\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1+mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right)$

以上可合併表示為:

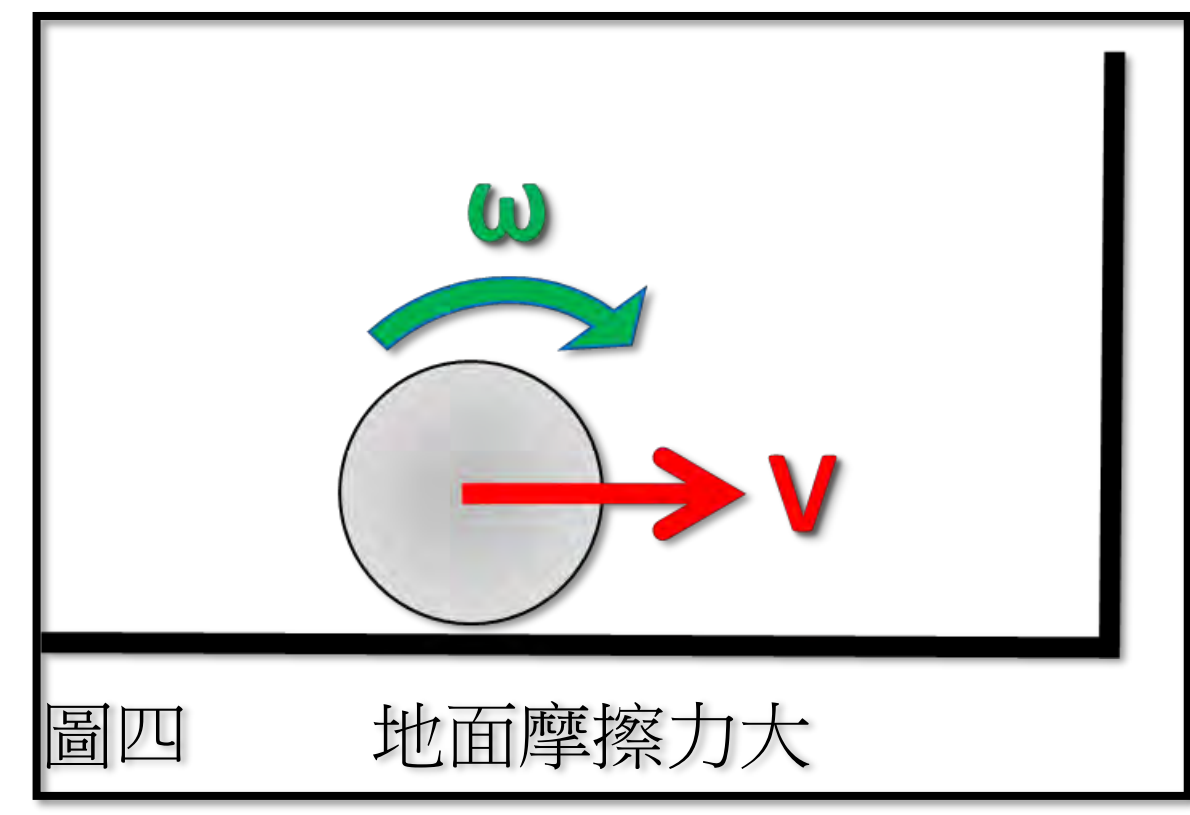
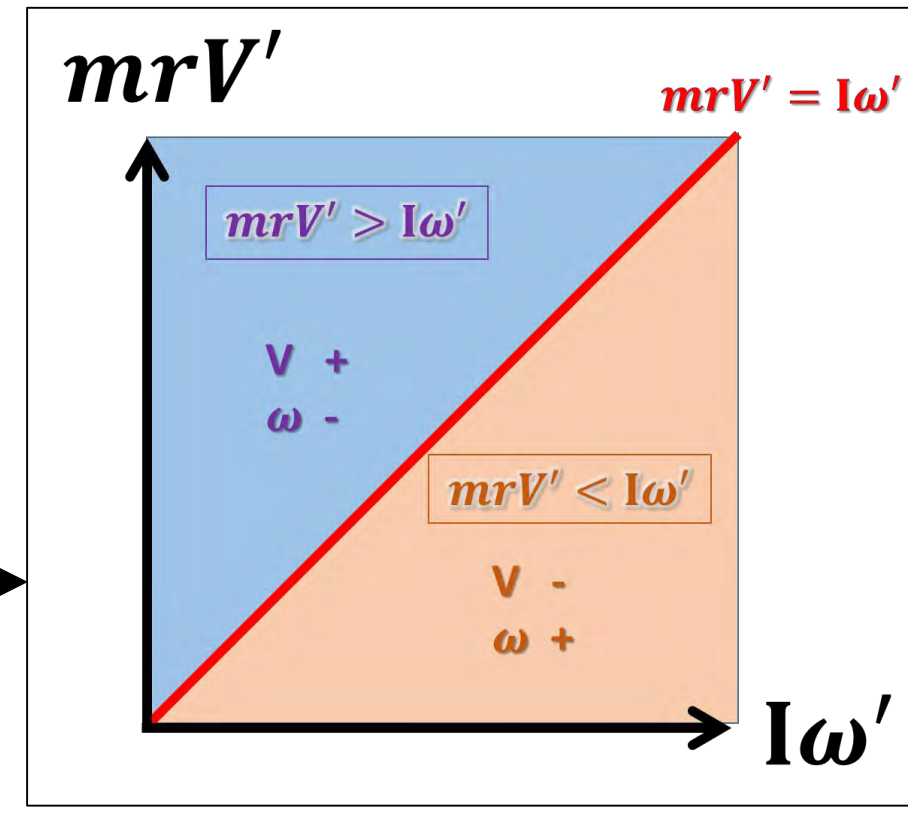
$$\begin{cases} \text{(1) 若 } mrV'_y = I\omega'_x, \text{ 則 } \begin{cases} \vec{V} = \left(\frac{mr^2V'_x + I\omega'_y}{1+mr^2}, 0, 0\right) = \left(\frac{(am+b+1)mr^2V_0\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{r(mrV_0\sin\theta + I\omega_0)}{1+mr^2}, 0, 0\right) \\ \vec{\omega} = \left(0, \frac{mrV'_x + I\omega'_y}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) = \left(0, \frac{(am+b+1)mrV_0\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{mrV_0\sin\theta + I\omega_0}{1+mr^2}, \frac{(am+b+1)mrV_0\mu_k\cos\theta}{I\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) \end{cases} \\ \text{(2) 若 } mrV'_y > I\omega'_x, \text{ 則 } \begin{cases} \vec{V} = \left(V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1+mr^2}, \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1+mr^2} - V'_y, 0\right) = \left(\frac{(am+b+1)mr^2V_0\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{r(mrV_0\sin\theta + I\omega_0)}{1+mr^2}, -\frac{(am+b+1)mV_0\omega_0r^3\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{r[I\omega_0\sin\theta - (am+b)mrV_0\cos\theta]}{1+mr^2}, 0\right) \\ \vec{\omega} = \left(\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1+mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) = \left(-\frac{(am+b+1)mV_0\omega_0r^2\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{I\omega_0\sin\theta - (am+b)mrV_0\cos\theta}{1+mr^2}, \frac{(am+b+1)mrV_0\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{mrV_0\sin\theta + I\omega_0}{1+mr^2}, \frac{(am+b+1)mrV_0\mu_k\cos\theta}{I\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) \end{cases} \\ \text{(3) 若 } mrV'_y < I\omega'_x, \text{ 則 } \begin{cases} \vec{V} = \left(V'_x - \frac{I(\omega'_x - \omega'_y r)}{1+mr^2}, V'_y - \frac{I(V'_y + \omega'_x r)}{1+mr^2}, 0\right) = \left(\frac{(am+b+1)mr^2V_0\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{r(mrV_0\sin\theta + I\omega_0)}{1+mr^2}, \frac{(am+b+1)mV_0\omega_0r^3\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} - \frac{r[I\omega_0\sin\theta - (am+b)mrV_0\cos\theta]}{1+mr^2}, 0\right) \\ \vec{\omega} = \left(-\frac{I\omega'_x - mrV'_y}{1+mr^2}, \frac{I\omega'_y + mrV'_x}{1+mr^2}, \frac{mrV_0\mu_k(V'_y + V_{0y})}{I}\sqrt{\frac{1}{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) = \left(-\frac{(am+b+1)mV_0\omega_0r^2\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{I\omega_0\sin\theta - (am+b)mrV_0\cos\theta}{1+mr^2}, \frac{(am+b+1)mrV_0\mu_k\cos\theta}{(1+mr^2)\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}} + \frac{mrV_0\sin\theta + I\omega_0}{1+mr^2}, \frac{(am+b+1)mrV_0\mu_k\cos\theta}{I\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}}\right) \end{cases} \end{cases}$$

$$3. \text{純滾動時間點 } t_r = \frac{I\sqrt{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}{(1+mr^2)g\mu_k}$$

$$= \frac{1}{(1+mr^2)g\mu_k} \left( \sqrt{\frac{(am+b+1)^2V_0^2\mu_k^2\cos^2\theta}{V_0^2+\omega_0^2r^2} + \frac{2(am+b+1)IV_0\mu_k\cos\theta\{I\omega_0\sin\theta - mr^4\omega_0^2\sin\theta - V_0\omega_0r\cos\theta[(am+b)mr^2+I]\}}{\sqrt{V_0^2+\omega_0^2r^2}}} + I^2[V_0^2\sin^2\theta + (am+b)^2V_0^2\cos^2\theta + \omega_0^2r^2 + 2V_0\omega_0r\sin\theta\cos\theta(am+b-1)] \right)$$

(二)我們發現無論速度、角速度如何隨時間改變,  $\vec{F}_k$  的方向並不隨時間改變, 而其 x、y 方向的分量也因此分別為固定向量  $\vec{F}_{kx_0}$ 、 $\vec{F}_{ky_0}$ , 可當作「定力」計算。

(三)無論是何種情況下, x 方向達成純滾動的時間點「恰好」為 y 方向達成純滾動的時間點, 故在  $t=t_r$  時, 球瞬間達成純滾動, 地面摩擦力瞬間變為 0, 不再作用於球上。





(貳)理論推導—預測球的未來滾動狀態(速度、角速度、純滾動時間)

(三) 當 $t_1 > t_2$  在此角速度量值已為0，速度量值不為0且向左。角速度改變成逆時針方向且量值漸增，速度方向不變但量值遞減。

$$(a) \begin{cases} v = -\frac{F_k t'}{m} + v' \dots\dots 1 \\ \omega = \frac{F_k r t'}{I} - \omega' \dots\dots 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \left(\frac{-v + v'}{F_k}\right) m = \left(\frac{-v + v'}{mg\mu'_k}\right) m = \frac{-v + v'}{g\mu'_k} \\ t' = \left(\frac{\omega + \omega'}{F_k r}\right) I = \left(\frac{\omega + \omega'}{mg\mu'_k r}\right) I \end{cases} \Rightarrow t' = \frac{-v + v'}{g\mu'_k} = \left(\frac{\omega + \omega'}{mg\mu'_k r}\right) I \Rightarrow v = \left(-\frac{I}{mr}\right) \omega - \frac{I\omega' + mr v'}{mr} \dots\dots 8$$

代表只要用同一顆球，不同實驗在各時間點之 $(V, \omega)$ 在座標平面上所畫出之 $V-\omega$ 圖皆成斜率為 $\left(-\frac{I}{mr}\right)$ 的一線性關係

(b) 純滾動時間點: 假設當 $v = \omega r$ 的時間點為 $t' = t_r$ ，由1、6:

$$-\frac{F_k t'}{m} + v' = \left(\frac{F_k r t'}{I} - \omega'\right) r \Rightarrow -\frac{mg\mu'_k t_r}{m} + v' = \left(\frac{mg\mu'_k r t_r}{I} - \omega'\right) r \Rightarrow t_r = \frac{Im \omega' r + Im v'}{m^2 g\mu'_k r^2 + Im g\mu'_k} = \frac{I(\omega' r + v')}{g\mu'_k (mr^2 + I)} \dots\dots 8$$

在此球達到純滾動，摩擦力減為0，速度及角速度維持不變。也就是說，球在 $t' \geq t_r$ 的時間中速度及角速度恆為定值。

二、二維碰撞:(如圖)鋼球質量 $m$ 以初速 $\vec{V}_0$ ，初角速度 $\vec{\omega}_0$ ，入射路徑與碰撞面垂直的方向，撞向碰撞面。撞向碰撞面下一瞬間，速度為 $\vec{V}'$ 、角速度為 $\vec{\omega}'$

入射速度: $\vec{V}_0 = (V_0 \sin\theta, -V_0 \cos\theta, 0)$ ; 入射角速度: $\vec{\omega}_0 = (-\omega_0 \sin\theta, -\omega_0 \cos\theta, 0)$

碰撞面對球的平均正向力 $\vec{N}$ 滿足  $N = m \frac{v'_y - (-v_{0y})}{t} = m \frac{v'_y + v_{0y}}{t}$

碰撞面對球的平均動摩擦力 $\vec{f}_k$ 滿足  $f_k = N \mu_k = m \mu_k \frac{v'_y + v_{0y}}{t}$

球上之球與碰撞面的接觸點瞬間速度 $(V_0 \sin\theta, -V_0 \cos\theta, -\omega_0 r \sin\theta)$

故 $f_{k_x} : f_{k_z} = V_0 \sin\theta : \omega_0 r \sin\theta = V_0 : \omega_0 r$

$$\text{又 } f_{k_x}^2 + f_{k_z}^2 = f_k^2, \text{ 故 } \vec{f}_k = \left(\frac{m V_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{t} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}}, 0, \frac{m \omega_0 r \mu_k (V'_y + V_{0y})}{t} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}}\right)$$

$$\text{反彈後一瞬間} \begin{cases} \vec{V}' = ((am + b + 1)V_0 \mu_k \cos\theta \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} + V_0 \sin\theta, (am + b) V_0 \cos\theta, 0) \\ \vec{\omega}' = \left(\frac{mr^2 \omega_0 \mu_k (am + b + 1) V_0 \cos\theta}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}} - \omega_0 \sin\theta, -\omega_0 \cos\theta, \frac{mr V_0 \mu_k (am + b + 1) V_0 \cos\theta}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}}\right) \end{cases}$$

地面對球的摩擦力 $\vec{F}_k$ 滿足 $F_k = mg\mu'_k$

球上之球與碰撞面的接觸點瞬間速度 $(V'_x - \omega'_y r, V'_y + \omega'_x r, 0)$

故 $F_{k_x} : F_{k_y} = |V'_x - \omega'_y r| : (V'_y + \omega'_x r)$

$$\text{又 } F_{k_x}^2 + F_{k_y}^2 = F_k^2, \text{ 故 } \vec{F}_k = \left(|V'_x - \omega'_y r| mg\mu'_k \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}, (V'_y + \omega'_x r) mg\mu'_k \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}, 0\right)$$

1. 若 $V'_x > \omega'_y r$ :  $\vec{F}_k$ 作用使 $V'_y$ 減為0的時間點為 $t' = t_1$ ，使 $\omega'_x$ 減為0的時間點為 $t' = t_2$

$$\begin{cases} -F_{k_y} = \frac{m(0 - V'_y)}{t_1} \\ F_{k_y} r = \frac{I(0 + \omega'_x)}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{m V'_y}{F_{k_y}} \\ t_2 = \frac{I \omega'_x}{F_{k_y} r} \end{cases}$$

(一) 當 $mr V'_y = I \omega'_x$ ，則 $t_1 = t_2$ ，令 $x$ 方向達到純滾動的時間點為 $t' = t_r$ ， $V''_{x_{t_r}} = \omega''_{y_{t_r}} r$

$$\begin{cases} -F_{k_x} = \frac{m(V''_{x_{t_r}} - V'_x)}{t_r} \\ -F_{k_x} r = \frac{I(-\omega''_{y_{t_r}} + \omega'_y)}{t_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = \frac{m(V''_{x_{t_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} \\ t_r = \frac{I(\omega''_{y_{t_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x} r} \end{cases} \Rightarrow t_r = \frac{m(V''_{x_{t_r}} - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{m(\omega''_{y_{t_r}} r - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{I(\omega''_{y_{t_r}} - \omega'_y)}{F_{k_x} r} \Rightarrow \omega''_{y_{t_r}} = \frac{mr V'_x + I \omega'_y}{I + mr^2}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{m(\omega''_{y_{t_r}} r - V'_x)}{-F_{k_x}} = \frac{m\left(\frac{mr V'_x + I \omega'_y}{I + mr^2} r - V'_x\right)}{-\left(V'_x - \omega'_y r\right) mg\mu'_k \sqrt{\frac{1}{(V'_x - \omega'_y r)^2 + (V'_y + \omega'_x r)^2}}} = t_1$$

$$\text{純滾動時: } \vec{V} = \left(\frac{mr^2 V'_x + I \omega'_y}{I + mr^2}, 0, 0\right); \vec{\omega} = \left(0, \frac{mr V'_x + I \omega'_y}{I + mr^2}, \frac{mr V_0 \mu_k (V'_y + V_{0y})}{I} \sqrt{\frac{1}{V_0^2 + \omega_0^2 r^2}}\right)$$

◎說明 $\vec{F}_k$ 可視為定力(定量值、定方向)

若以碰撞後一瞬間的時間點為 $t'$ (時間軸)=0，某任意時間點 $t'=n$ 之地面摩擦力 $\vec{F}_k$ 的x分量為 $\vec{F}_{k_{xn}}$ ，地面摩擦力的y分量為 $\vec{F}_{k_{yn}}$ ，球的x方向速度 $\vec{V}''_{xn}$ ，角速度 $\vec{\omega}''_{xn}$ ；y方向速度 $\vec{V}''_{yn}$ ，角速度 $\vec{\omega}''_{yn}$

若 $\vec{V}''_{xn}$ 方向朝x軸正向， $\vec{\omega}''_{yn}$ 方向朝y軸負向，若此時 $\vec{V}''_{yn}$ 方向朝y軸正向， $\vec{\omega}''_{xn}$ 方向朝x軸負向，且 $V''_{xn} > \omega''_{yn} r$

「球上之球與地面接觸點」其速度 $(V''_{xn} - \omega''_{yn} r, V''_{yn} + \omega''_{xn} r, 0)$

又 $F_{k_{xn}}^2 + F_{k_{yn}}^2 = F_k^2$

故 $\vec{F}_k = (mg\mu'_k (V''_{xn} - \omega''_{yn} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}}, mg\mu'_k (V''_{yn} + \omega''_{xn} r) \sqrt{\frac{1}{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}}, 0)$

若 $\vec{V}''_{xn+\Delta t}$ 方向朝x軸正向， $\vec{\omega}''_{yn+\Delta t}$ 方向朝y軸負向， $\vec{V}''_{yn+\Delta t}$ 方向朝y軸正向， $\vec{\omega}''_{xn+\Delta t}$ 方向朝x軸負向

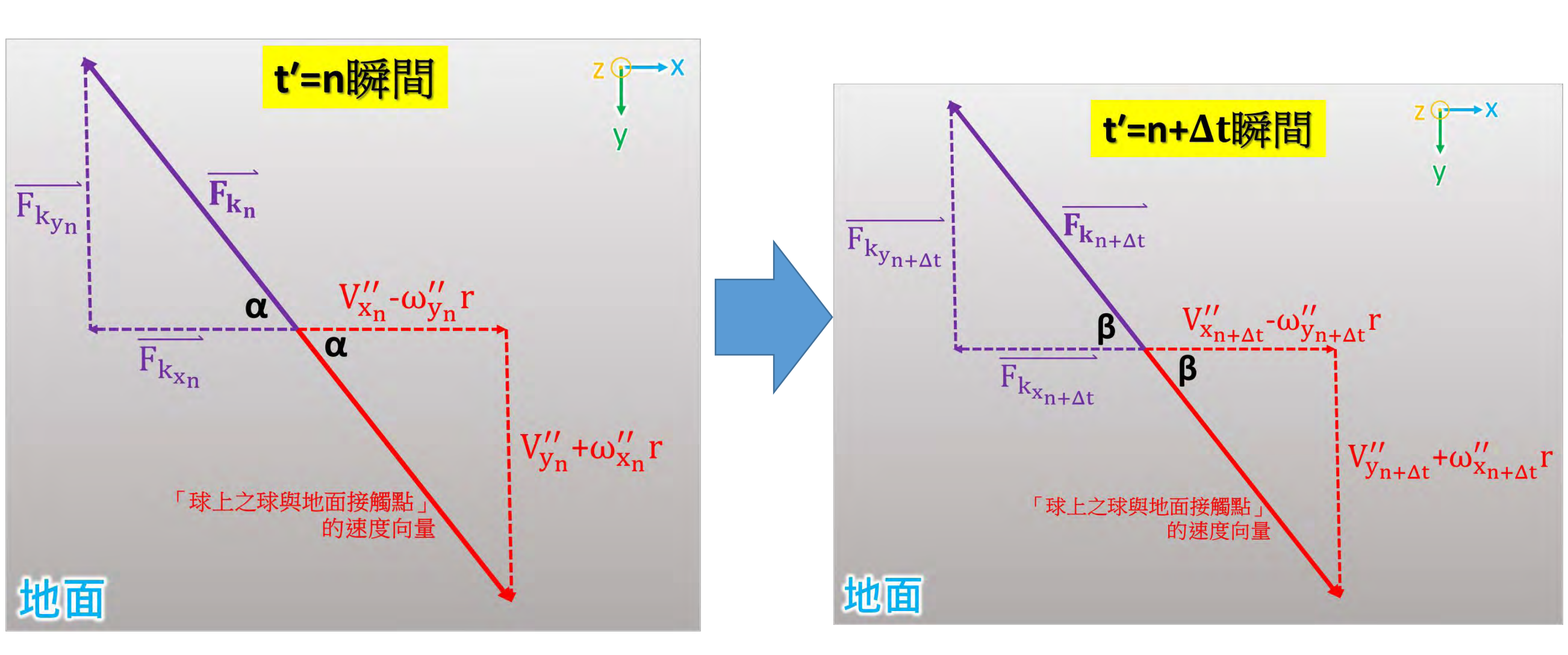
$$\begin{cases} -F_{k_{xn}} = \frac{m(V''_{xn+\Delta t} - V''_{xn})}{\Delta t} \\ -F_{k_{xn}} r = \frac{I(-\omega''_{yn+\Delta t} + \omega''_{yn})}{\Delta t} \\ -F_{k_{yn}} = \frac{m(V''_{yn+\Delta t} - V''_{yn})}{\Delta t} \\ F_{k_{yn}} r = \frac{I(-\omega''_{xn+\Delta t} + \omega''_{xn})}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V''_{xn+\Delta t} = V''_{xn} - \left(\frac{V''_{xn} - \omega''_{yn} r}{\sqrt{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}}\right) g\mu'_k \Delta t \\ \omega''_{yn+\Delta t} = \omega''_{yn} + \left(\frac{V''_{xn} - \omega''_{yn} r}{I \sqrt{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}}\right) mg\mu'_k r \Delta t \\ V''_{yn+\Delta t} = V''_{yn} - \left(\frac{V''_{yn} + \omega''_{xn} r}{\sqrt{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}}\right) g\mu'_k \Delta t \\ \omega''_{xn+\Delta t} = \omega''_{xn} - \left(\frac{V''_{yn} + \omega''_{xn} r}{I \sqrt{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}}\right) mg\mu'_k r \Delta t \end{cases}$$

「球上之球與地面接觸點」其速度向量為 $(V''_{xn+\Delta t} - \omega''_{yn+\Delta t} r, V''_{yn+\Delta t} + \omega''_{xn+\Delta t} r) = (V''_{xn} - \omega''_{yn} r) \left(1 - \frac{I g\mu'_k + mr^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}} \Delta t\right), (V''_{yn} + \omega''_{xn} r) \left(1 - \frac{I g\mu'_k + mr^2 g\mu'_k}{I \sqrt{(V''_{xn} - \omega''_{yn} r)^2 + (V''_{yn} + \omega''_{xn} r)^2}} \Delta t\right)$

又 $F_{k_{xn+\Delta t}}^2 + F_{k_{yn+\Delta t}}^2 = F_k^2$ ，故 $F_{k_{xn+\Delta t}} = F_{k_{xn}}$

故 $\vec{F}_k$ - $t'$ 圖在 $t'=n$ 處的切線斜率為 $\frac{F_{k_{xn+\Delta t}} - F_{k_{xn}}}{\Delta t} = \frac{F_{k_{xn}} - F_{k_{xn}}}{\Delta t} = 0$ ，即 $\vec{F}_k$ 不隨時間改變而改變

∴ $\vec{F}_k$ 可視為定力(定量值、定方向)



實驗架構圖:

