

中華民國第 58 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第二名

051809

後宮「軸環轉」—圓環運動理論之探討

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者： 高一 賴群賢 高一 陳柏旭 高一 鄧惟銘	指導老師： 黃木全
---	------------------

關鍵詞：圓環、進動、移動

摘要

觀察置於軸上的圓環經由傾斜會有顯著的橫向移動，本研究探討此現象並提出相關解釋。經由實驗發現圓盤傾斜角度對橫向移動速度有顯著的影響，且此傾斜角度也表現出了相關於進動的週期現象。透過觀察此圓盤的運動模式，更發現現象和圓環參數有密切相關，藉由攝影並分析圓環各項物理數據，進而推導出理論模型並驗證所假設的想法，解釋軸上圓環運動橫向運動的現象。

壹、 研究動機

在某次上課偶然把橡皮圈套在筆上水平旋轉，突然發現竟可以把筆的旋轉轉換成橡皮筋左右移動的動力，有點類似螺絲釘的螺紋般，並對此現象感到驚奇，究竟為何沒有螺紋的筆竟可以有此現象，於是決定了這個研究探討。



貳、 研究目的

- 一、製作可以達成使圓環此種運動模式的儀器。
- 二、改變圓環角度(θ)以及軸角速度，觀察圓環的移動速度(v)和角速度(ω)。
- 三、改變圓環參數，觀察變數之間的關係變化以及進動現象。
- 四、探究變因之間的關係。
- 五、深入研究震盪現象

參、 研究設備及器材

鐵棍(半徑 $r=0.4\text{cm}$)50cm	圓環 (包含壓克力、木板與紙板)
軸承	強力磁鐵
馬達	直流電供應器
電線	高速攝影相機
熱縮管	Tracker
鋁箔紙	Excel
膠帶、雙面膠	LED 燈管
直尺	奇異筆
美工刀	圓規

表一 器材列表

肆、 研究過程與方法

一、製作裝置

- (一) 以木板為結構主體，做出底板。
- (二) 將軸承用支架安置於木板上兩端，鐵棍一端利用橡皮管接上馬達，並藉由螺絲固定支架於底板上。
- (三) 使用雷射切割在各材料上割下各式參數的圓環，如下表所示。

外徑 (cm)	內徑 (cm)	重量 (g)	材質
5.8	1.0	31.67	壓克力
2.9	1.0	7.05	壓克力
1.5	1.0	1.07	壓克力
3.11	1.5	7.8	壓克力
3.375	2.0	7.54	壓克力
3.695	2.5	7.35	壓克力
1.5	1.0	0.88	木頭

2.9	1.0	5.44	木頭
5.8	1.0	24.90	木頭
1.5	1.0	0.54	厚紙板
2.9	1.0	3.54	厚紙板
5.8	1.0	15.59	厚紙板

表二 圓環參數

二、觀察並分析

- (一) 在軸上上油。
- (二) 啟動裝置，並觀察分析。

三、討論各變數之間的基本關係

(一) 測量軸角速度(ω_1)

1. 軸上利用鋁箔紙做出突出部(圖一橘箭頭)，以膠帶固定，利用高速攝影機搭配 Tracker 逐格分析。



圖一 測量軸角速度

(二) 測量環角速度(ω_2)

1. 用奇異筆於環上做標記(圖二橘箭頭)，並利用高速攝影機搭配 Tracker 逐格分析。

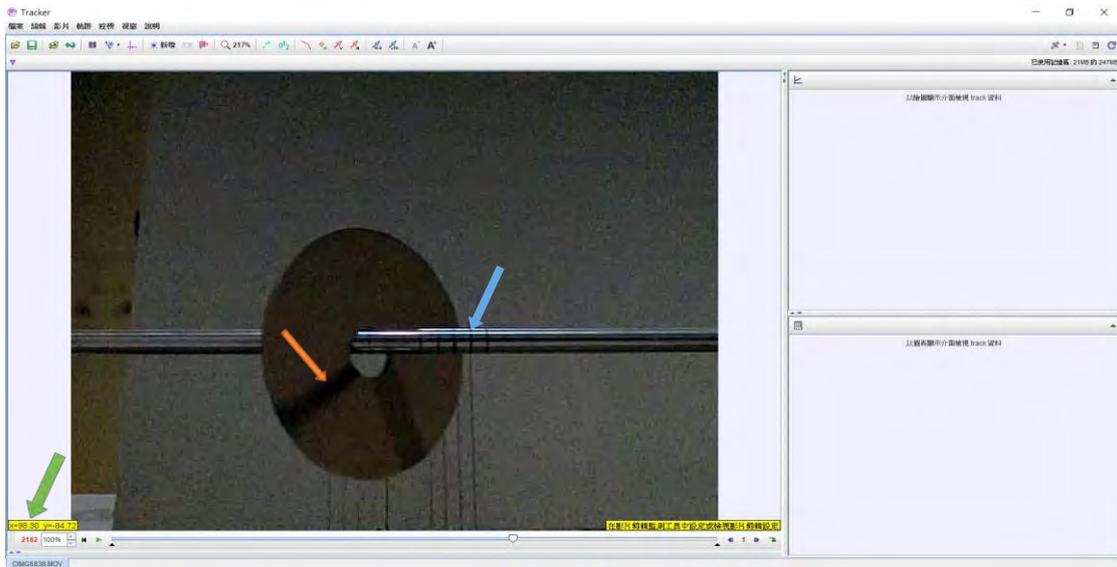
(三) 測量環移動速度(v)

1. 用奇異筆於軸做刻度(圖二藍箭頭)，並利用高速攝影機搭配 Tracker 逐格分析。

(四) 測量環傾斜角度(θ)

1. 利用相機(高速攝影機)拍攝。
2. 利用座標(圖二綠箭頭) 求出圓環側面投影的長寬比並換算成 θ 的三角函數值，再取得 θ 。

(五) 數據分析



圖二 測量 ω 、 v 、 θ

1. 測量數組數據並利用 Excel 分析。

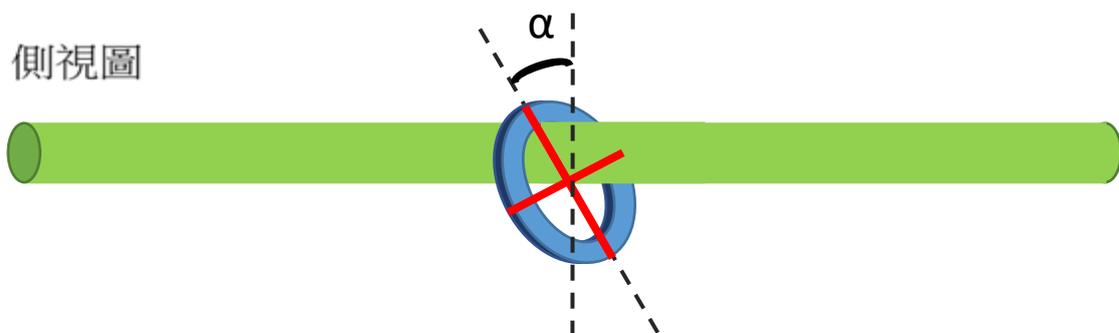
四、 θ 震盪深入研究

(一) 進動現象探討。

1. 一開始用手撥動圓環使之起始角度加大，使進動現象更明顯。
2. 以圓環角動量向量為主要研究對象，測量與解釋量值與方向。

(二) 測量圓環垂直傾斜角(α)

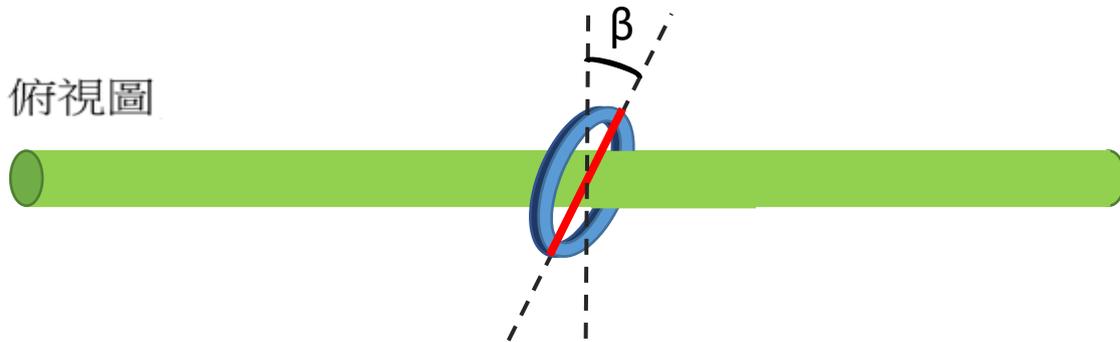
1. 利用高速攝影機搭配 Tracker 逐格分析，影片中會看到一個橢圓圓環投影(如下圖所示)，藉由 tracker 中的量角器去測量角度



圖三 圓環垂直傾斜角(α)之側視圖

(三) 測量圓環側向旋轉角(β)

1. 配合背景條紋格線，Tracker 逐格分析影片中的橢圓圓環投影(如下圖所示)長軸和短軸的比值求出 β 的三角函數值。
2. 測量角度時需去除圓環不在鏡頭中央時所產生之誤差。



圖四 圓環側向旋轉角(β)之俯視圖

(四) 測量進動偏離角(φ)

1. 定義進動偏離角為環角速度和軸角速度之間的夾角。
2. 而 α 為 φ 在垂直地面方向的投影， β 為 φ 在平行地面方向的投影
3. 利用 $\tan \varphi = \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}$ 即可求出進動偏離角

(五) 測量圓環在軸上絕對位置(x)

1. 用奇異筆於軸做刻度(圖二藍箭頭)，並利用高速攝影機搭配 Tracker 逐格分析。

(六) 計算環角動量(L) (單位：g*cm*cm/s)

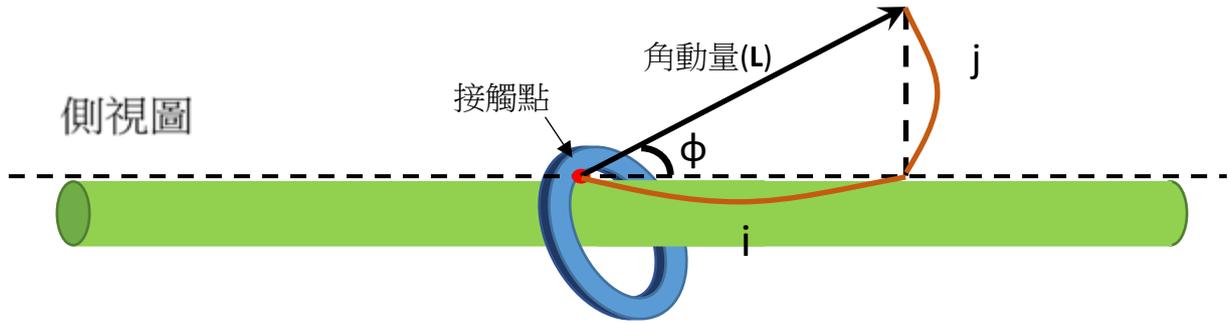
1. 以圓環與軸之接觸點為參考點，利用 Excel，由上述之變數耦合重量，計算出與圓環所在平面垂直之環角動量向量量值。
2. 此向量對比於圓環所在平面，用以標記圓環動態指向。

(七) 計算環角動量平行軸投影量值(i) (單位：g*cm*cm/s)

1. 利用 Excel 由 L 與 ϕ 計算出投影量。

(八) 計算環角動量垂直軸投影量值(j) (單位：g*cm*cm/s)

1. 利用 Excel 由 L 與 ϕ 計算出投影量。



圖五 環角動量(L)之側視圖

伍、 研究結果

一、製作裝置

- (一) 第一代裝置主要由一紙製底板支撐，上固定有軸兩端之軸承、馬達與電源供應器。
- (二) 第二代裝置主要由一木製底板為底，以支架固定軸承，再將馬達和轉速控制器連接，以精準地控制轉速。



圖六 模擬平台(第一代)



圖七 模擬平台(第二代)

二、初步觀察並分析

(一) 觀察

1. 軸轉速(ω_1)越快，環轉速(ω_2)越快
2. 軸轉速(ω_1)越快，環移動速度(v)越快
3. 環傾斜角(θ)越大，環移動速度(v)越大

(二) 假說

1. $\omega_1 \propto \omega_2$
2. $\omega_1 \propto v$
3. ω_2 、 v 與 θ 之三角函數有密切關係

三、討論軸角速度(ω_1)、環角速度(ω_2)、環移動速度(v)與環傾斜角度(θ)之間的關係

(一) 數據 1(外徑 $R=4.0\text{cm}$)

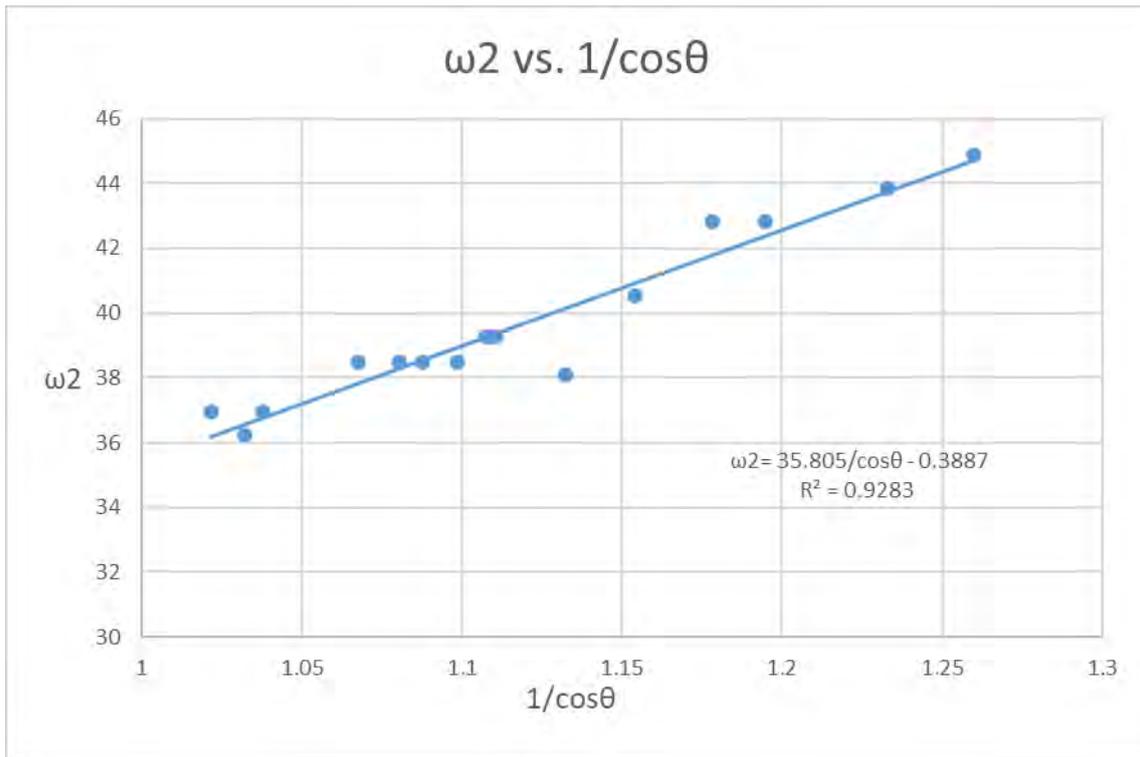
1. 數據($\omega_1, \omega_2, v, \theta$)

$\omega_1(1/s)$	$\omega_2(1/s)$	$\theta(^{\circ})$	$v(\text{cm/s})$	$\omega_1(1/s)$	$\omega_2(1/s)$	$\theta(^{\circ})$	$v(\text{cm/s})$
126.22	67.32	19.42	15.31	68.79	44.88	37.47	20.00
126.22	64.17	10.17	5.95	68.79	42.84	33.20	17.44
126.22	68.54	21.09	17.65	68.79	43.84	35.81	19.35
126.22	67.32	13.23	10.95	68.79	42.84	31.95	17.24
126.22	73.92	32.72	28.30	131.87	68.54	18.40	12.77
68.79	38.08	28.01	12.61	131.87	72.50	28.52	23.08
68.79	36.96	11.81	4.76	131.87	75.40	39.14	30.77
68.79	39.27	25.60	11.54	131.87	67.32	14.96	10.71
68.79	38.47	23.20	11.11	131.87	69.81	24.42	18.75
68.79	39.27	25.45	11.54	131.87	69.81	22.56	17.14
68.79	39.27	25.79	11.54	208.67	103.29	4.66	2.44
68.79	38.47	22.28	10.34	208.67	104.72	14.78	12.77
68.79	40.54	29.96	14.29	208.67	107.71	20.16	22.22
68.79	36.25	14.39	5.77	208.67	107.71	19.52	20.00
68.79	36.96	15.55	6.90	208.67	106.19	21.92	23.08
68.79	38.47	20.51	10.34	208.67	105.45	20.54	20.83
68.79	38.47	24.46	12.00				

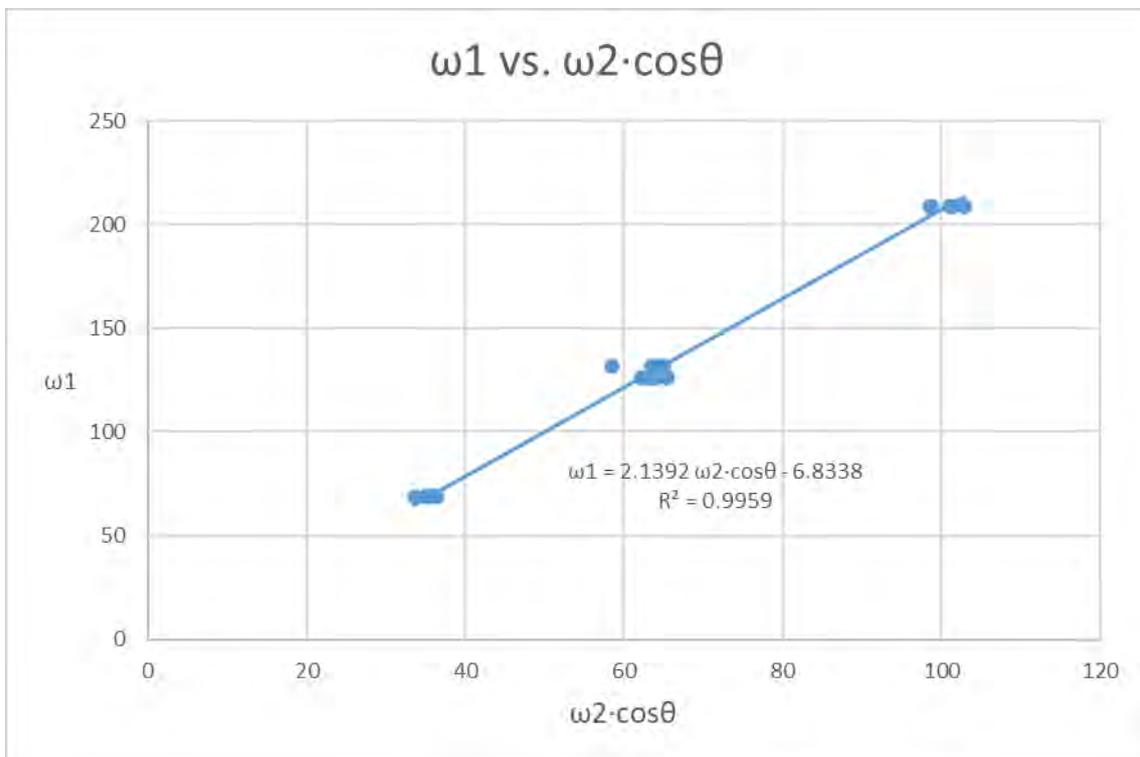
表三 數據($R=4.0\text{cm}$)

圖八 ω_2 與 $1/\cos \theta$ 之關係圖

2. ω_2 與 $1/\cos\theta$ 之關係圖(ω_1 固定為 68.79 弧度每秒)

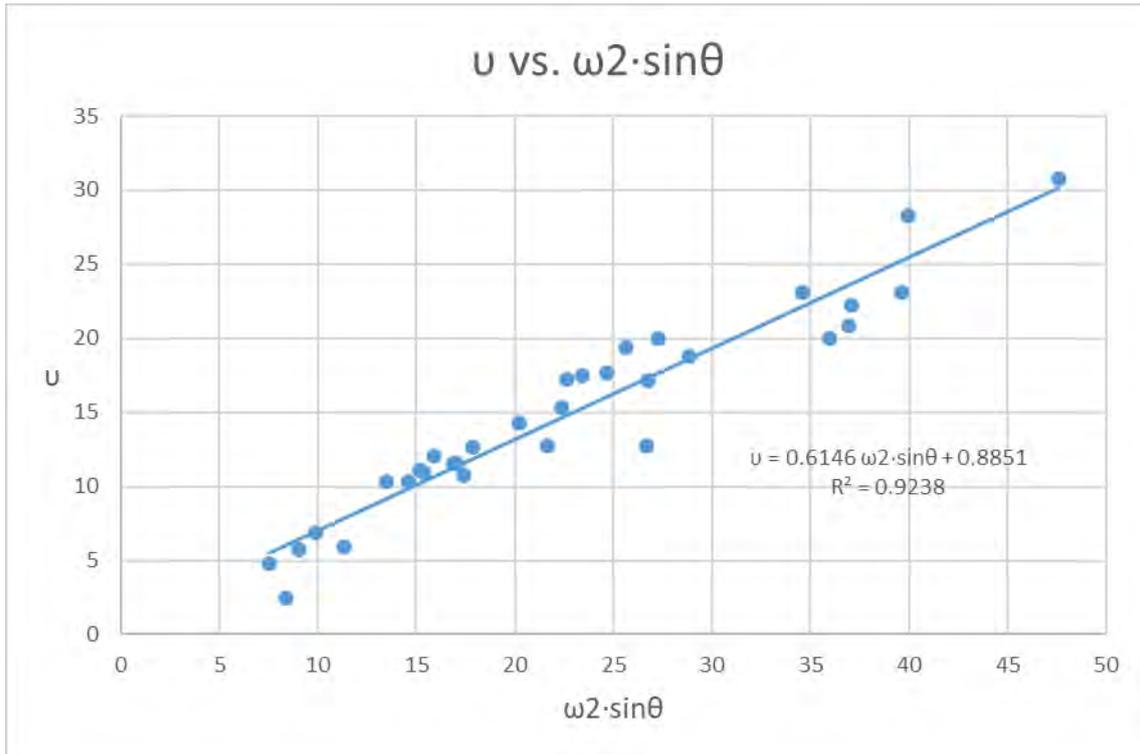


3. ω_1 與 $\omega_2 \cdot \cos\theta$ 之關係圖



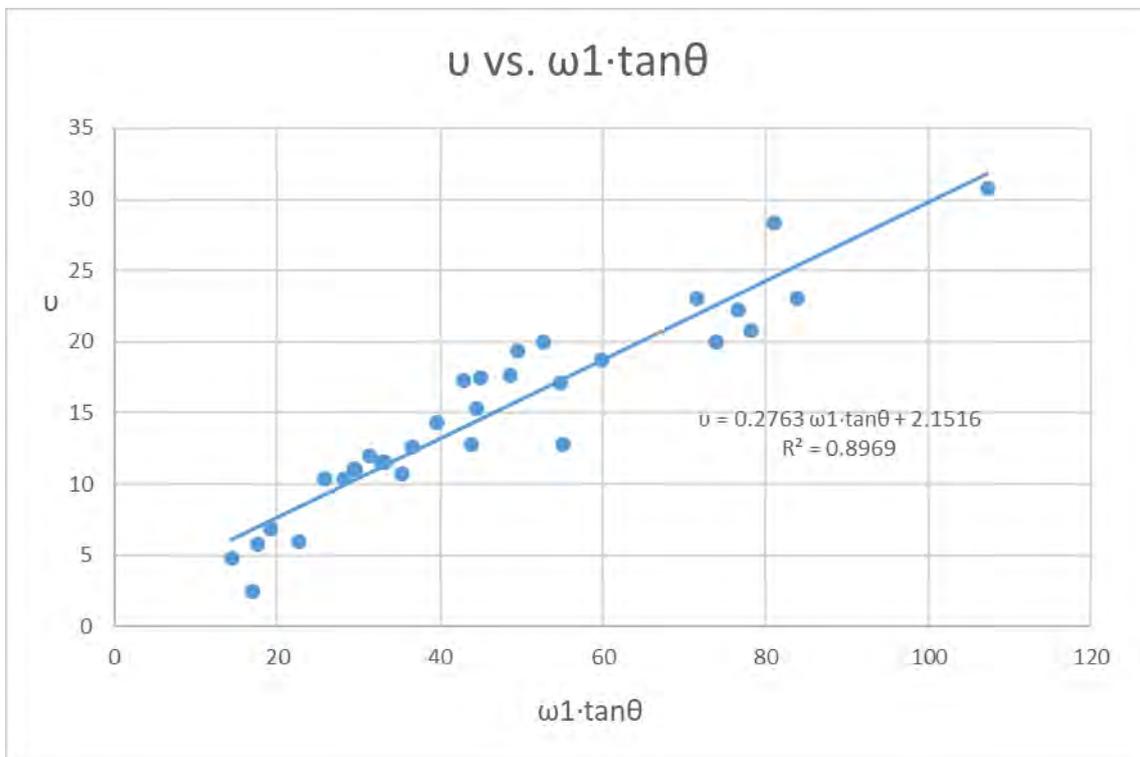
圖九 ω_1 與 $\omega_2 \cdot \cos\theta$ 之關係圖

4. v 與 $\omega_2 \cdot \sin \theta$ 之關係圖



圖十 v 與 $\omega_2 \cdot \sin \theta$ 之關係圖

5. v 與 $\omega_1 \cdot \tan \theta$ 之關係圖



圖十一 v 與 $\omega_1 \cdot \tan \theta$ 之關係圖

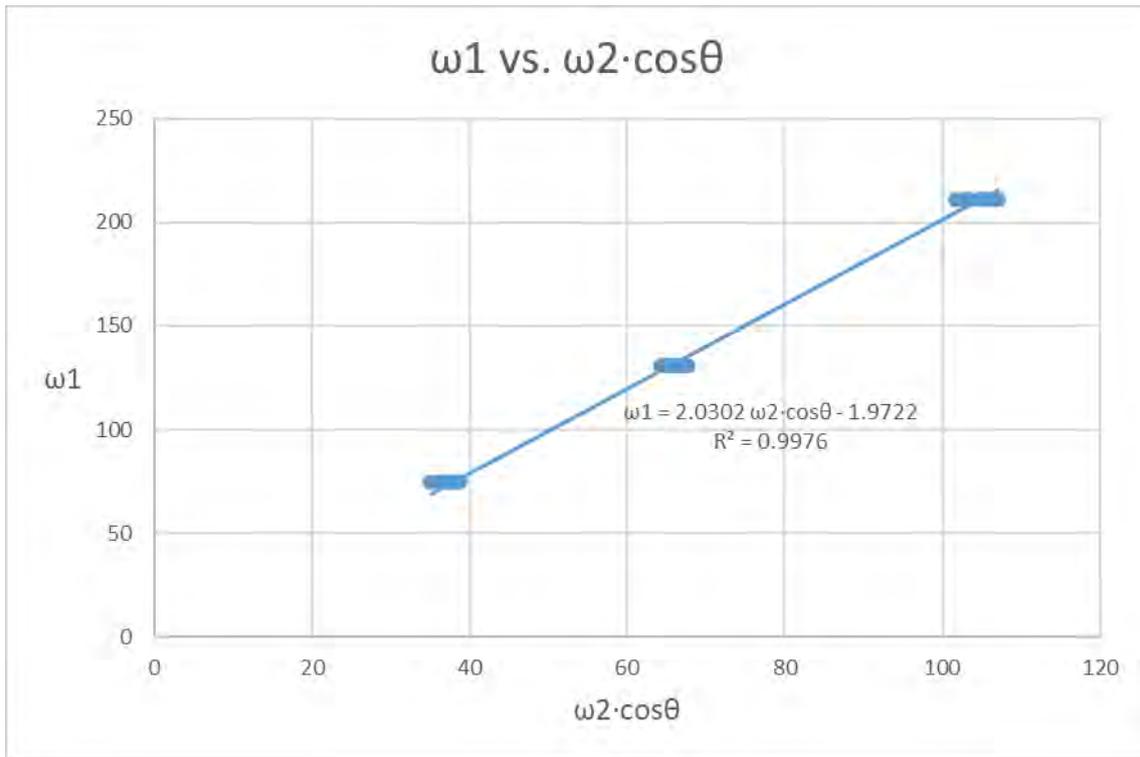
(二) 數據二(外徑 R=1.5cm)

1. 數據

$\omega_1(1/s)$	$\omega_2(1/s)$	$\theta(^{\circ})$	$v(cm/s)$	$\omega_1(1/s)$	$\omega_2(1/s)$	$\theta(^{\circ})$	$v(cm/s)$
130.67	72.50	24.57	21.82	74.65	44.88	30.81	16.67
130.67	68.54	19.72	15.38	74.65	37.70	0.00	0.00
130.67	68.54	16.84	14.46	74.65	40.98	26.99	14.29
130.67	73.92	27.83	24.00	74.65	38.47	13.63	6.00
130.67	72.50	27.53	22.22	74.65	40.11	22.00	12.24
130.67	66.14	9.21	8.57	74.65	38.47	15.37	7.06
130.67	69.17	15.27	15.58	211.20	107.71	13.83	19.83
130.67	71.81	23.54	21.82	211.20	116.00	27.00	41.38
130.67	71.13	23.61	21.05	211.20	110.88	19.11	28.24
130.67	75.40	29.12	27.27	211.20	108.49	20.35	29.63
130.67	67.32	9.54	8.96	211.20	109.27	20.12	28.57
130.67	67.93	13.90	10.91	211.20	109.27	15.10	26.09
130.67	68.54	11.64	10.53	211.20	110.07	13.39	17.39
130.67	68.54	17.69	13.64	211.20	106.19	13.80	23.30
130.67	69.81	14.39	12.50	211.20	116.00	25.51	34.29
130.67	72.50	22.86	21.05	211.20	110.88	15.45	25.53
130.67	69.17	14.53	13.18	211.20	110.07	17.90	27.27
130.67	69.80	19.98	16.00	211.20	107.71	16.64	25.53
74.65	37.33	20.26	10.47	211.20	112.53	20.97	33.33
74.65	36.96	11.54	5.88	211.20	115.11	23.32	32.00
74.65	41.89	25.32	13.04	211.20	107.71	13.28	18.60
74.65	43.84	27.74	15.38	211.20	110.07	14.04	23.30

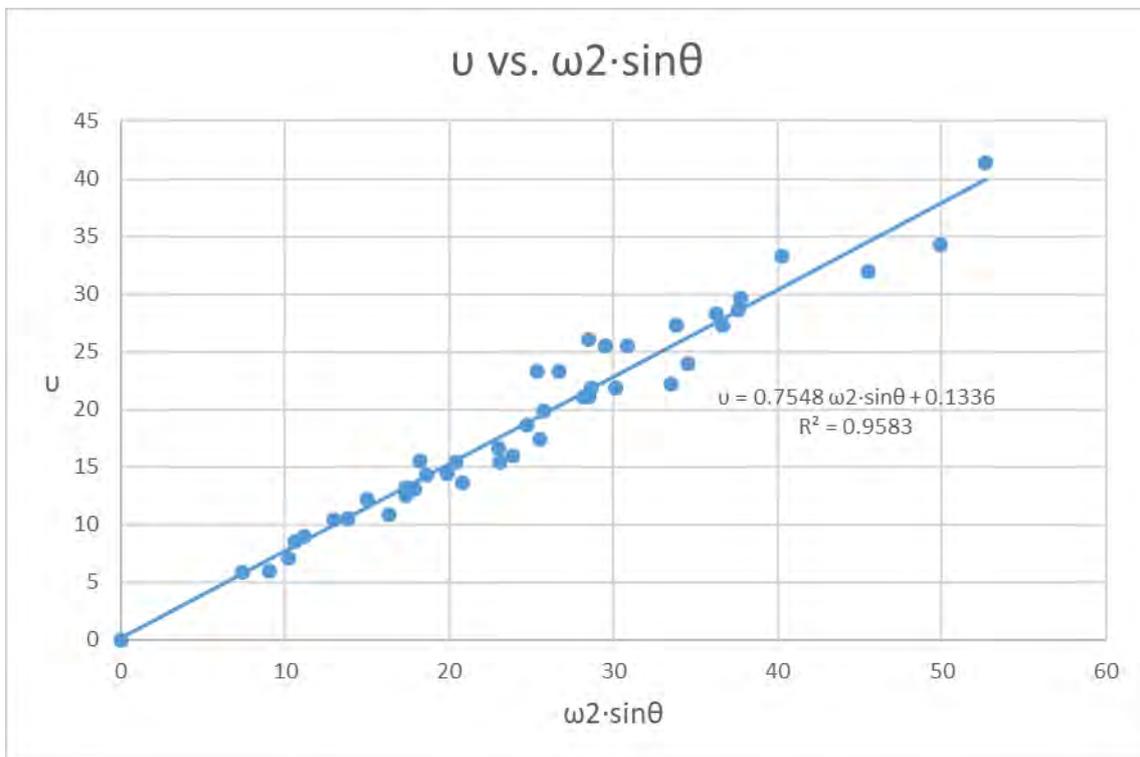
表四 全數據(R=1.5cm)

2. ω_1 與 $\omega_2 \cdot \cos\theta$ 之關係圖



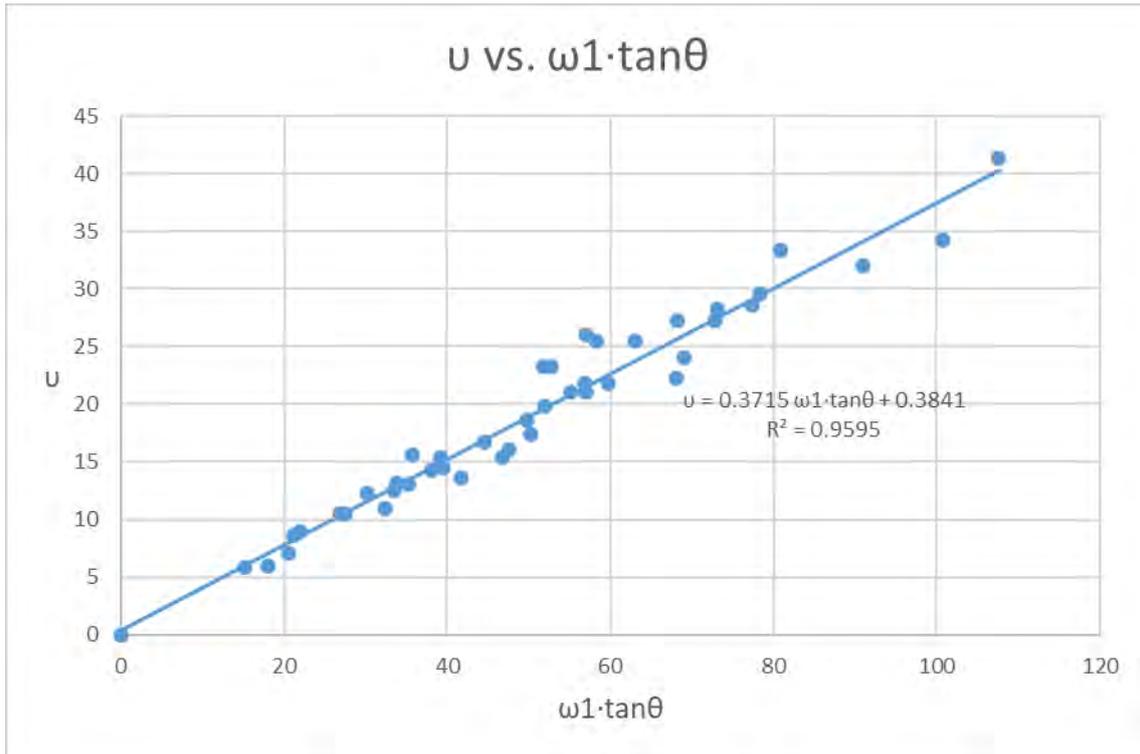
圖十二 ω_1 與 $\omega_2 \cdot \cos\theta$ 之關係圖

3. v 與 $\omega_2 \cdot \sin\theta$ 之關係圖



圖十三 v 與 $\omega_2 \cdot \sin\theta$ 之關係圖

4. v 與 $\omega l \cdot \tan \theta$ 之關係圖



圖十四 v 與 $\omega l \cdot \tan \theta$ 之關係圖

四、 Θ 震盪深入研究

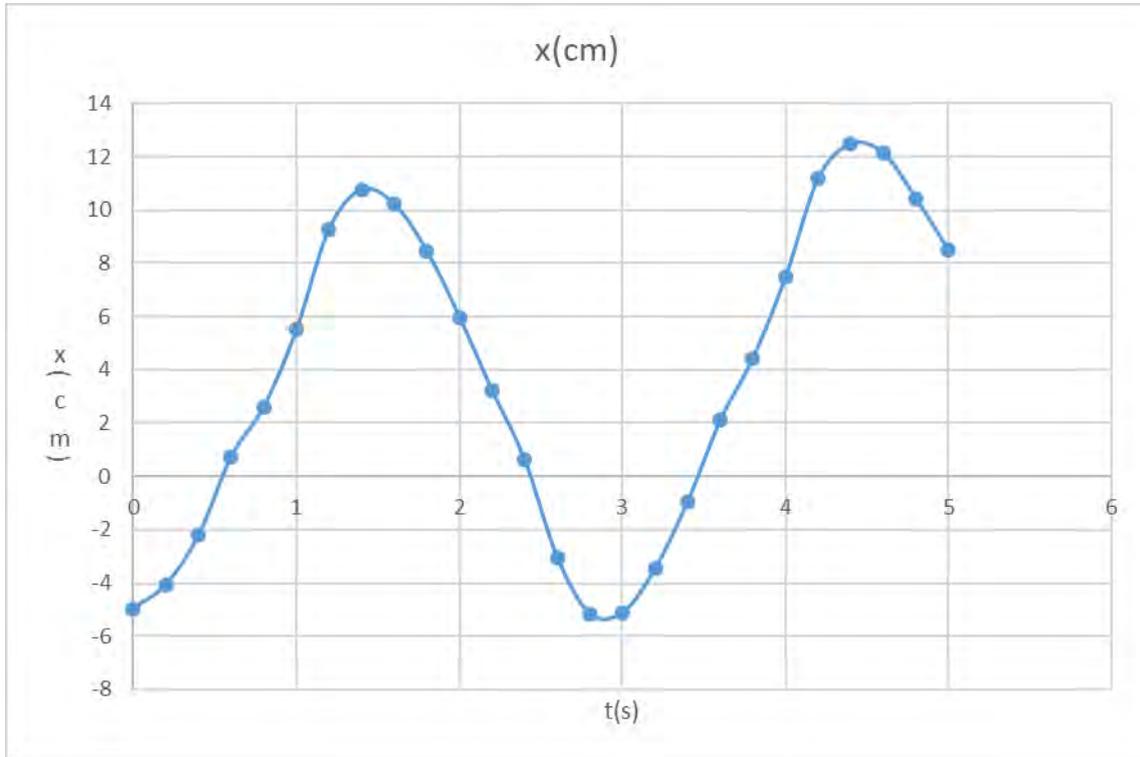
(一) 數據一 $\omega=600\text{rpm} / R=5.8\text{cm} / r=1.0\text{cm} / m=31.67\text{g} / d=55\text{cm}$

t(s)	$\alpha(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	$\varphi(^{\circ})$	x(cm)	L(g*cm*cm/s)	i	j
0.0	34.8	-7.94	35.33	-4.96	18403.76089	10642.61	15014.44
0.2	37.8	4.23	37.93	-4.06	18277.11616	11234.90	14416.31
0.4	38.5	20.31	41.26	-2.21	19435.67484	12817.37	14610.28
0.6	35.5	34.58	44.27	0.74	22138.41654	15453.50	15852.41
0.8	-19.4	50.32	51.47	2.61	28547.11915	22331.89	17782.71
1.0	-37.0	31.77	44.29	5.50	21439.6607	14971.10	15346.83
1.2	-33.8	19.67	37.19	9.28	19356.85978	11700.44	15420.37
1.4	-34.2	9.05	34.92	10.76	18457.09291	10565.43	15133.94
1.6	-35.7	-2.86	35.11	10.22	18250.06086	10496.48	14929.46
1.8	-37.8	-16.23	39.64	8.45	18983.88369	12110.98	14618.89
2.0	-35.9	-30.28	42.92	5.97	21106.90562	14373.30	15456.71
2.2	0.0	-48.35	48.35	3.22	27426.87829	20493.86	18227.33
2.4	34.5	-35.94	44.97	0.61	22513.09298	15910.81	15927.50
2.6	34.4	-22.15	38.54	-3.05	19679.68863	12261.63	15392.94
2.8	31.9	-11.74	33.27	-5.16	18616.77287	10212.88	15565.39
3.0	34.2	0.15	34.20	-5.12	18227.39172	10245.31	15075.53
3.2	35.5	13.79	37.03	-3.46	18768.30798	11302.89	14983.13
3.4	41.1	24.03	44.41	-0.94	19956.94783	13965.62	14256.27
3.6	25.5	61.66	45.27	2.11	38397.28605	27278.61	27022.75
3.8	-21.5	44.66	46.77	4.44	25625.70554	18671.14	17551.79
4.0	-33.5	28.97	40.79	7.49	20834.24214	13610.76	15773.80
4.2	-32.1	21.31	36.45	11.18	19565.03095	11623.99	15737.64
4.4	-31.4	10.10	32.45	12.48	18514.24062	9934.06	15623.43
4.6	-32.1	-1.43	32.12	12.12	18233.00773	9694.38	15442.20
4.8	-33.7	-15.57	35.86	10.42	18921.69289	11084.45	15335.11
5.0	-35.9	-27.76	41.83	8.48	20598.02728	13737.28	15348.15

表五 數據一(θ 震盪與進動)

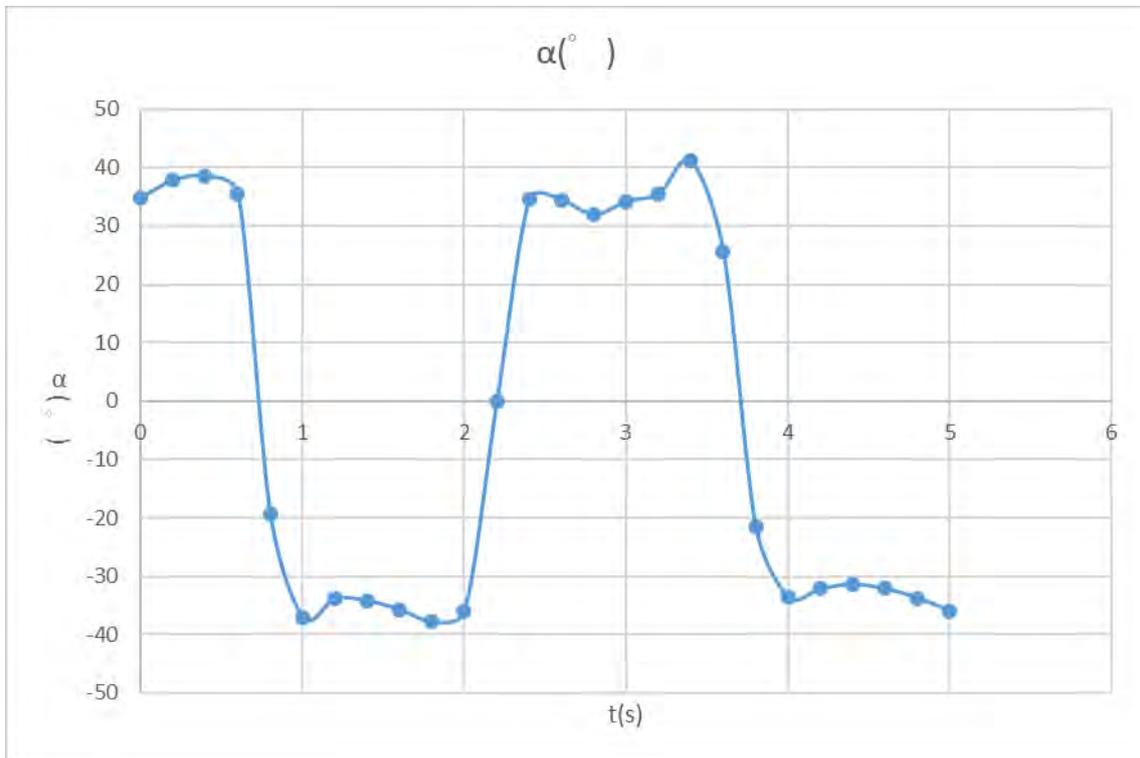
(二) 時間與各變因之關係圖

1. x 與 t 之關係圖



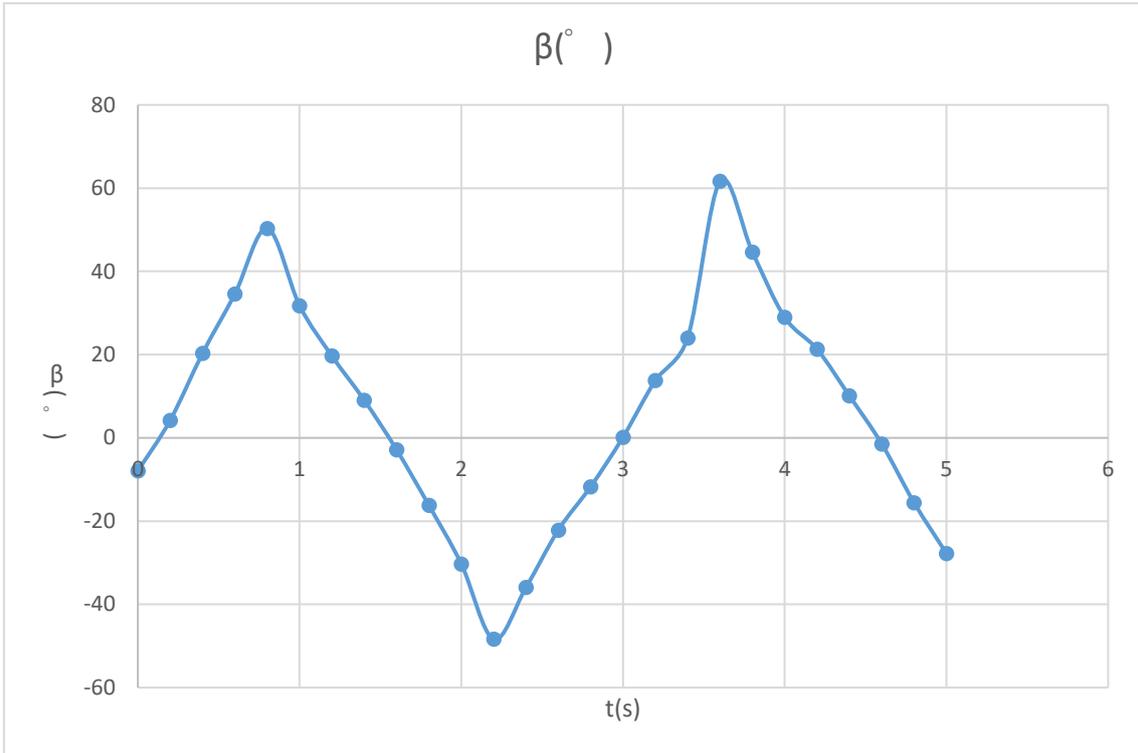
圖十五 x 與 t 之關係圖

2. α 與 t 之關係圖



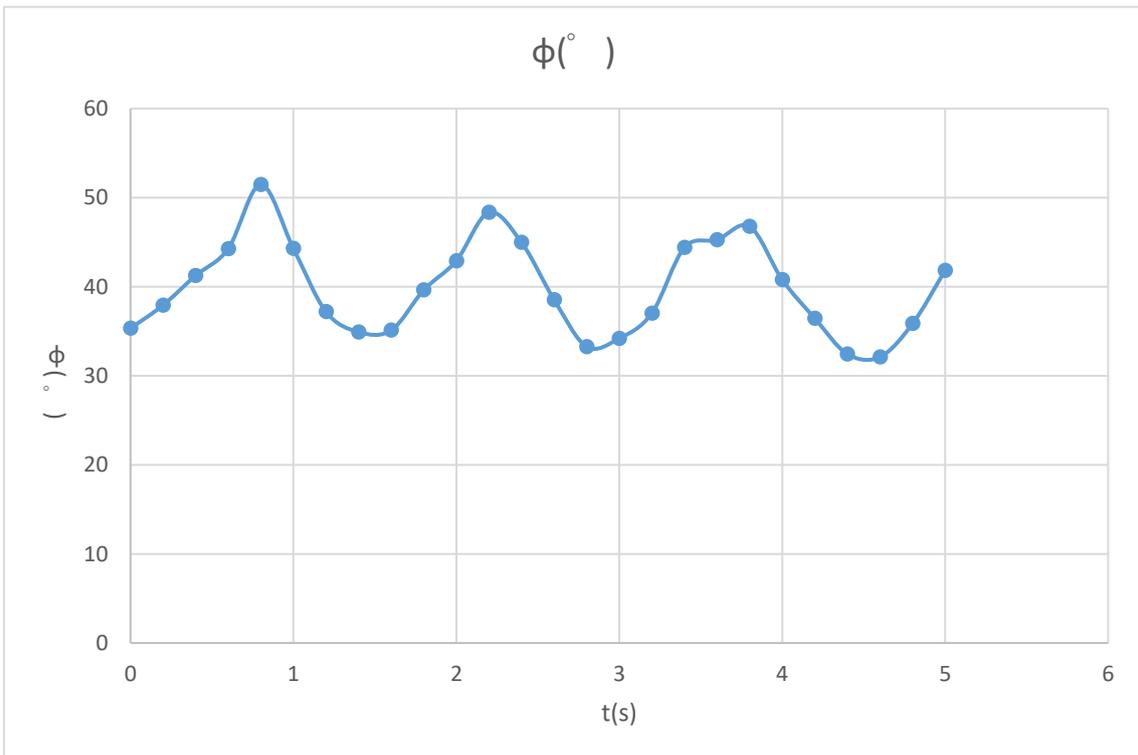
圖十六 α 與 t 之關係圖

3. β 與 t 之關係圖



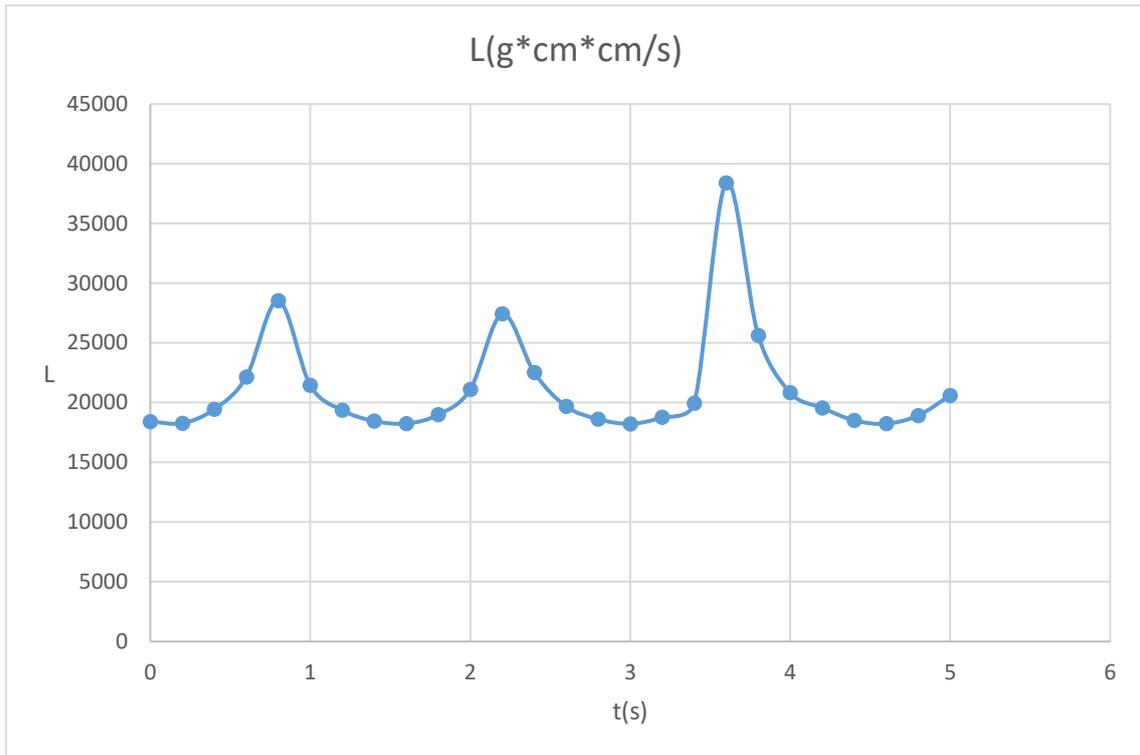
圖十七 β 與 t 之關係圖

4. φ 與 t 之關係圖



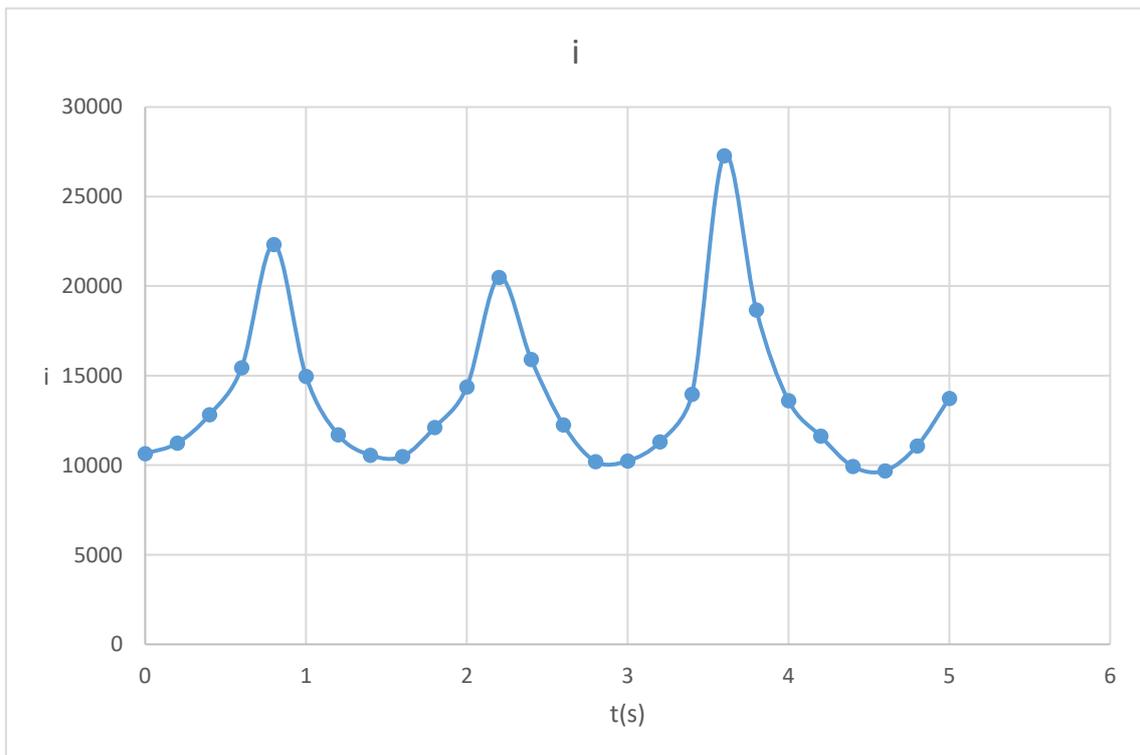
圖十八 φ 與 t 之關係圖

5. L 與 t 之趨勢圖



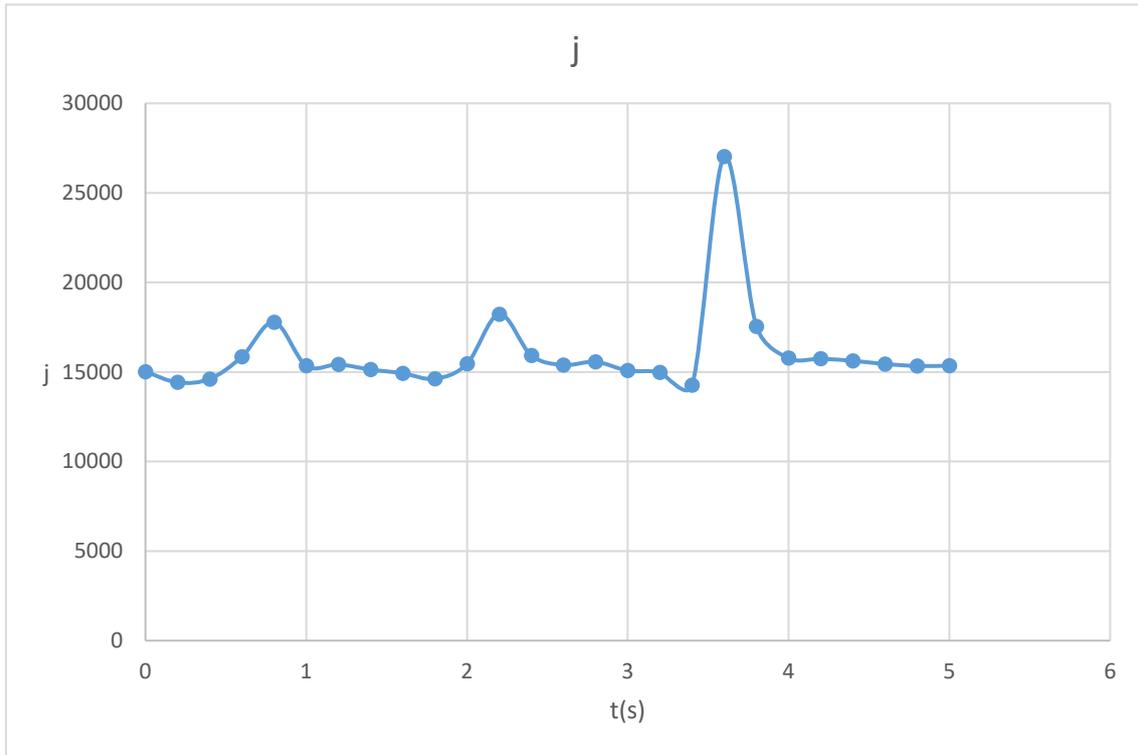
圖十九 L 與 t 之趨勢圖

6. i(平行軸方向角動量分量)與 t 之趨勢圖



圖二十 i 與 t 之趨勢圖

7. j (垂直軸方向角動量分量)與 t 之趨勢圖



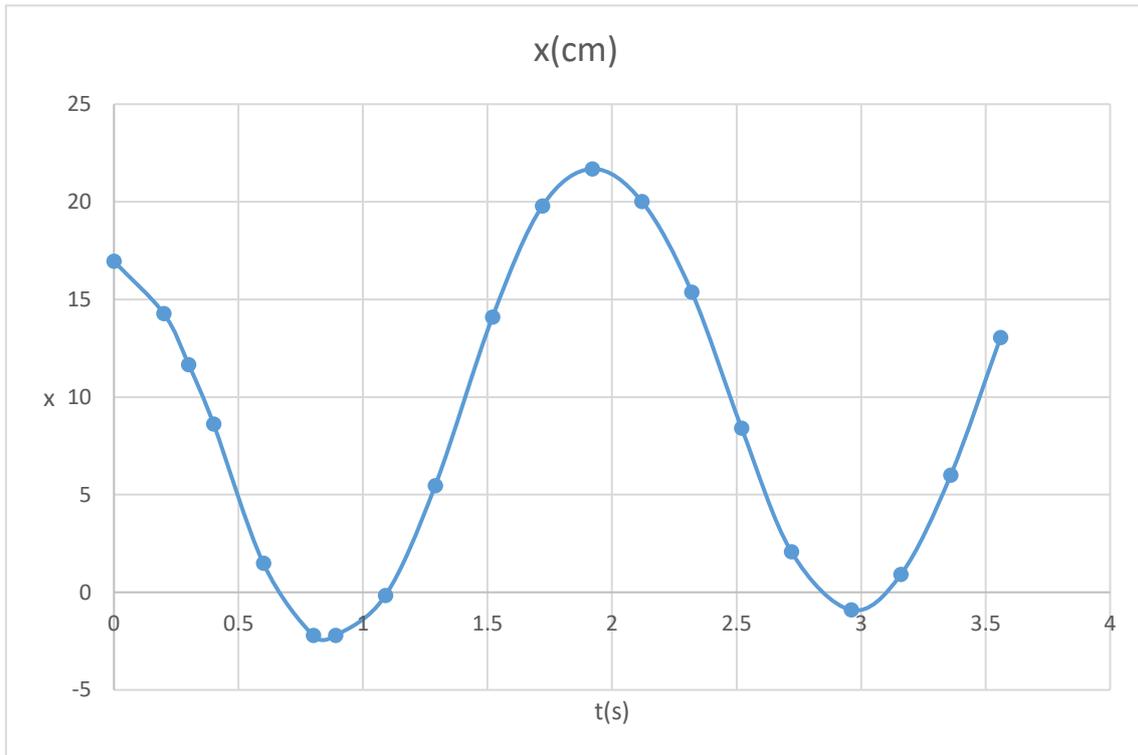
圖二十一 j 與 t 之趨勢圖

(三) 數據二 $\omega=600\text{rpm}/R=3.375\text{cm}/r=2.0\text{cm}/m=7.54\text{g}/d=55\text{cm}$

t(s)	x(cm)	t(s)	x(cm)	t(s)	x(cm)	t(s)	x(cm)
0	16.95455	0.8	-2.20909	1.72	19.78409	2.72	2.080682
0.2	14.27273	0.89	-2.20909	1.92	21.68182	2.96	-0.90114
0.3	11.65909	1.09	-0.16352	2.12	20.01136	3.16	0.915909
0.4	8.614773	1.29	5.461364	2.32	15.375	3.36	6.001136
0.6	1.484091	1.52	14.10227	2.52	8.415909	3.56	13.04545

表六 數據二(θ 震盪與進動)

1. x 與 t 之關係圖

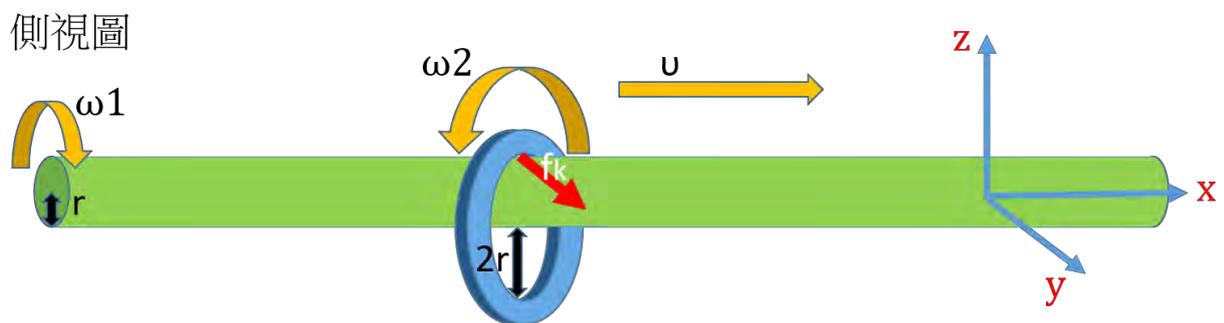


圖二十二 x 與 t 之關係圖

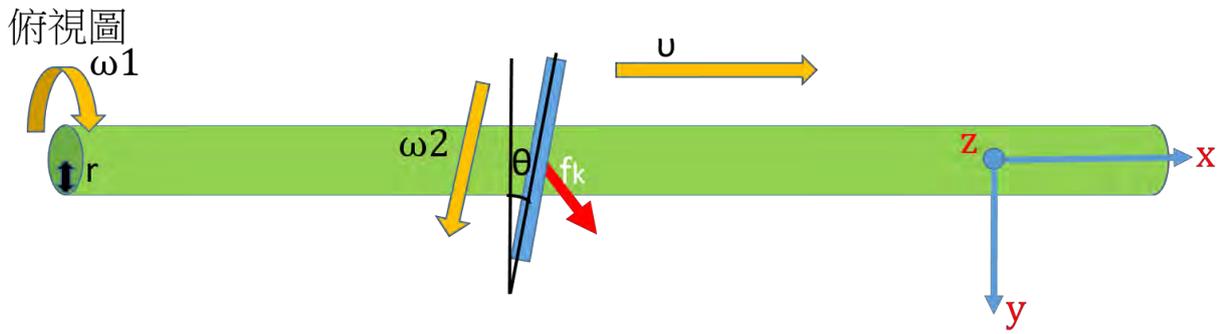
陸、討論

一、理論推導(基本分析)

(一) 基本上，由圖二十二及圖二十三可看出造成環移動及轉動的主因是摩擦力，又摩擦力的方向是環對軸相對速度的反方向，因此先討論相對速度的方向。



圖二十三 環軸系統側面圖



圖二十四 環軸系統俯面圖

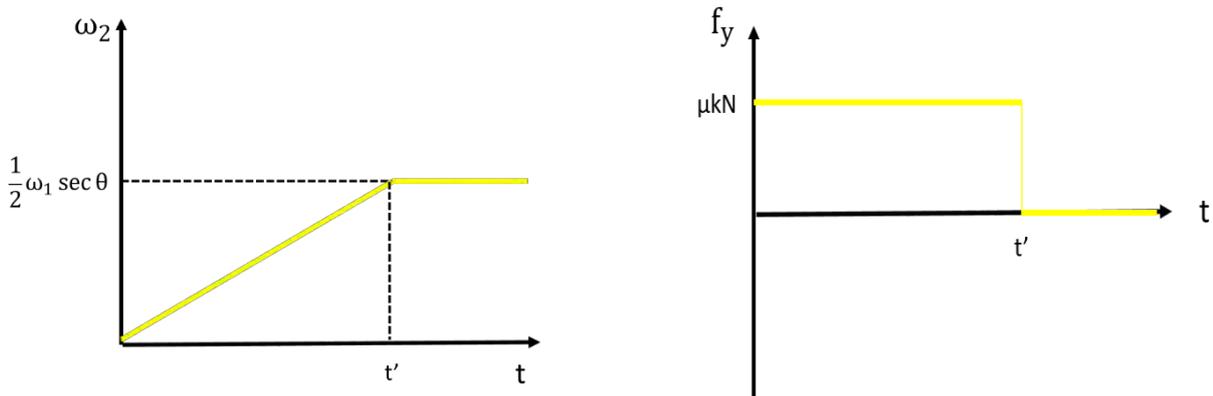
$$\begin{aligned}
 \text{(二) } \vec{v}_r &= \vec{\omega}_2 \times 2\vec{r} + \vec{u} - \vec{\omega}_1 \times \vec{r} \\
 &= (u - \omega_2 2r \times \sin\theta)\hat{x} + (\omega_2 2r \times \cos\theta - \omega_1 r)\hat{y} \text{-----(式一)}
 \end{aligned}$$

因此摩擦力的方向及為此反方向。

(三) y 方向的摩擦力(f_y)將只影響環的轉速(ω_2)；而 x 方向的摩擦力(f_x)將只影響環橫向速度(u)。

(四) 環轉速(ω_2)的平衡

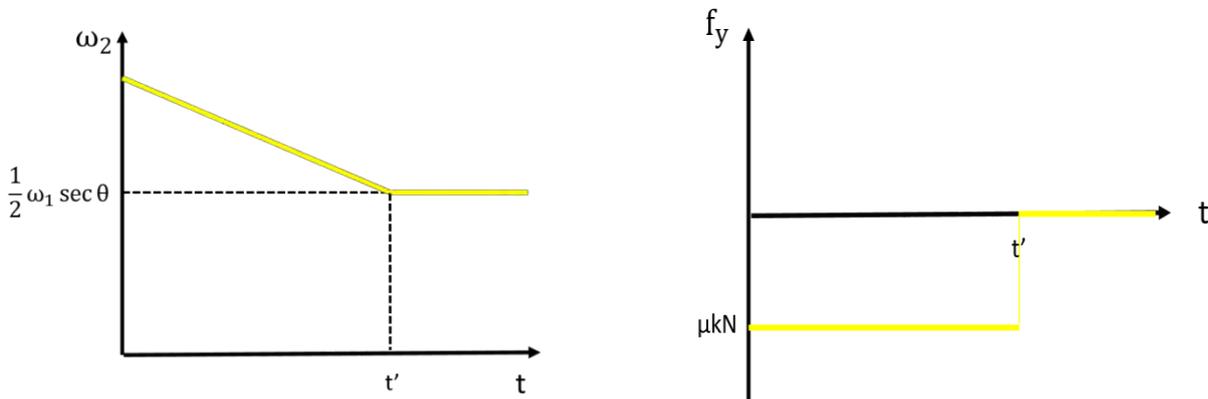
1. 由式一的 y 項可看出，當 ω_2 變成 $\frac{1}{2}\omega_1 \sec\theta$ 時，y 方向的摩擦力將消失，因此當 θ 不變達平衡時， ω_2 將不變。
2. 當 ω_2 低於 $\frac{1}{2}\omega_1 \sec\theta$ 時(圖十三)， \vec{v}_{ry} 將會指向 -y 方向， \vec{f}_y 指向 +y 方向，因此 ω_2 將會增加，直到



$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 \sec\theta$ 時呈穩定狀態。

圖二十五 環轉速增加

3. 當 ω_2 高於 $\frac{1}{2}\omega_1 \sec \theta$ 時， \vec{v}_{ry} 將會指向+y方向， \vec{f}_y 指向-y方向，因此 ω_2 將會下降，直到 $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 \sec \theta$ 時呈穩定狀態。

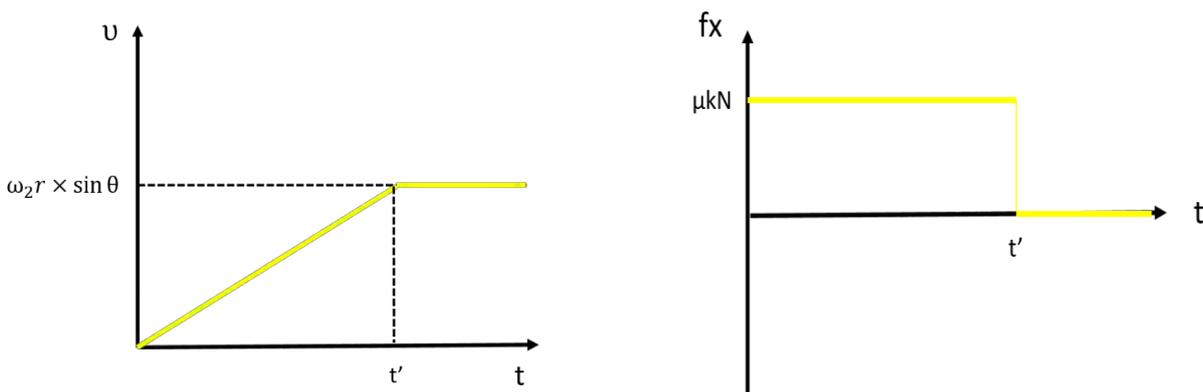


圖二十六 環轉速降低

4. 由圖七、圖八、圖十一可驗證 $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 \sec \theta$ ------(式二)

(五) 環移動速度(v)的平衡

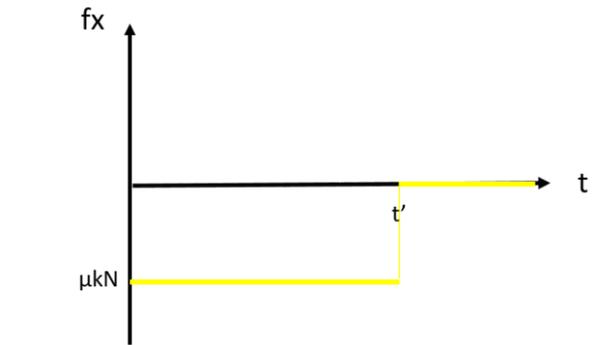
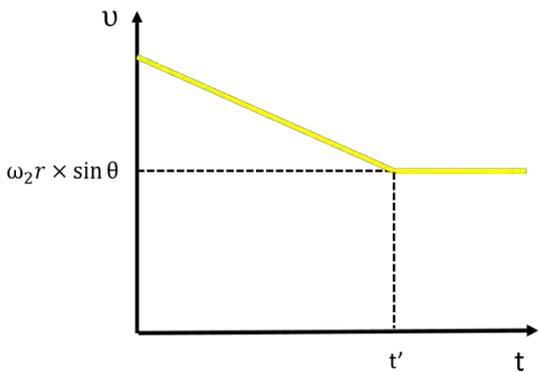
1. 由式一的x項可看出，當v變成 $\omega_2 2r \times \sin \theta$ 時，x方向的摩擦力將消失，因此當 θ 不變達平衡時，v將不變。
2. 當v低於 $\omega_2 2r \times \sin \theta$ 時(圖十四)， \vec{v}_{rx} 將會指向-x方向， \vec{f}_x 指向+x方向，因此v將會增加，直到



$v = \omega_2 2r \times \sin \theta$ 時呈穩定狀態。

圖二十七 環速度增加

3. 當 v 高於 $\omega_2 2r \times \sin \theta$ 時(圖十四), \vec{v}_{rx} 將會指向 $+x$ 方向, \vec{f}_x 指向 $-x$ 方向,



因此 v 將會下降, 直到 $v = \omega_2 2r \times \sin \theta$ 時呈穩定

狀態。

圖二十八 環速度降低

4. 可得 $v = \omega_2 2r \times \sin \theta$ ------(式三)

(六) 結合式二、式三可得到 $v = \omega_1 r \times \tan \theta$ ------(式四)

二、 θ 震盪觀察結果

- (一) 由圖十四可看出當圓環在軸上會有週期性的往復運動, 且於圖十五可看出圓環在平衡點時(圖十中最高點和最低點的中點), 發現 α 會急遽得變化。
- (二) 由圖十六可知當 β 為零度時, α 反而對應到了最大值, 這個趨勢也可以從 φ 的圖形中看出, 而 φ 值的變化相對 α 、 β 的變化來說也相對較小。
- (三) 由圖十七可以看出在圓環運動的一個周期內, φ 出現了兩個完整週期, 且綜合圖十五、十六、十七可看出環的角動量繞著軸轉動, 代表圓環的法向量為繞軸進行陀圓形的旋轉, 產生類進動的現象。
- (四) 由圖十七、十八可以發現圓環的 φ 值及角動量並非一個定值, 但在典型的進動中, 圓環的角動量會維持不變, 因此可知此圓環的運動並非典型的進動, 而是類進動的現象, 而配合圖十七、二十即可之其角動量大致為陀圓

形旋轉。

(五) 圖十八和圖十九和圖二十的趨勢都相似，但圖二十的變化值相對於圖十九的變化值較小，推論是因為兩接觸點力偶造成的力矩比重力造成的力矩小

(六) 由圖十五到圖二十的觀察分析後，我們大致可將此圓環的運動分成兩大方位的循環：

第一種方位：圓環的法向量向軸的上方或下方(垂直於軸的方向觀察)轉動，造成此轉動的原因是由於在圓環和軸非垂直時，圓環和軸其實是有兩個接觸點的，而這兩個接觸點會對圓環產生兩相同方向的且與地面垂直的力矩，使圓環的 β 角逐漸變小(圓環和軸接近垂直)。

第二種方位：圓環的法向量向軸的左方或右方(垂直於軸的方向觀察)轉動，造成此轉動的原因是由於圓環在角速度(ω_2)大於零時，圓環就擁有角動量，此時若圓環的質心不在接觸點點的投影點上時，質心就會對圓環造成力矩，使圓環有一個和角動量指向垂直的力矩，讓角動量轉向，使圓環也隨之轉向。

(七) 但上述的現象是同時進行的，圓環不會只有受到其中一項的作用力，而是兩力周期性的影響，因此圓環的法向量才會產生類進動的橢圓形運動，如第五、六點所述

三、 θ 震盪假說推導

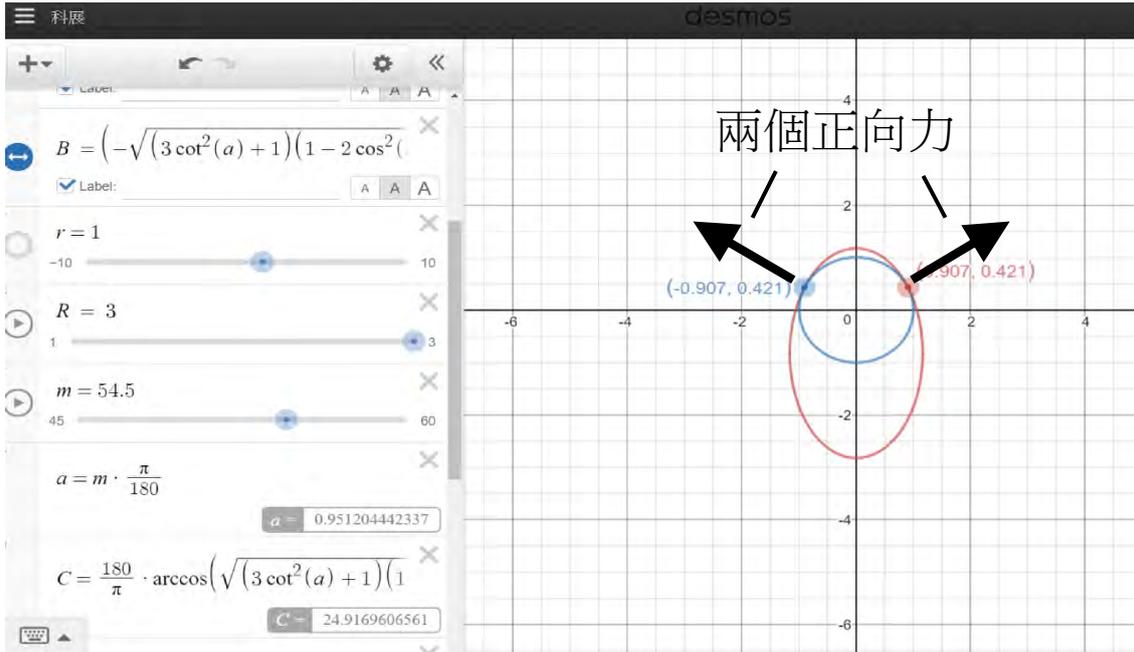
(一) 我們首先假設圓環角動量的進動形狀為橢圓形，但是比較上方的圖表，明顯可知， α 與 β 不符合橢圓形進動之正餘弦波形。

(二) 於是我們進行假說推導，將進動運動分成 x-y 兩方向做為討論，x,y 二者皆垂直於軸。

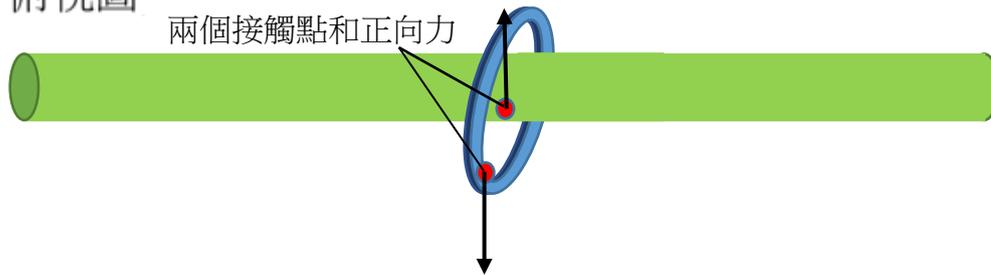
1. 首先討論 y 方向之角動量指向變化(垂直於地面)：

- i. 當圓環在一定角度的傾斜狀況下，圓環與軸的接觸點會由原本理想的一個變成兩個。
- ii. 如下圖所示。然而，在兩個接觸點的狀況下，原本支撐圓環重量的正向力會產生一個令圓環 β 值改變的力矩，進而影響角動量垂直的方向變化。

iii. 圓環的在 β 值變化的轉動慣量： $\frac{1}{4} m(R^2+r^2)$



俯視圖



2. 再來是 x 方向角動量指向變化：
 - i. 當圓環在軸上橫向加速時，圓環的慣性會使圓環的 α 值產生變化，形成一個傾斜的狀態。
 - ii. 而由於圓環質心與接觸點不再同一垂直線上，重力也會產生一個力矩，影響角動量水平的方向變化。

四、誤差分析

(一) 數據一($R=4.0\text{cm}$) vs 數據二($R=1.5\text{cm}$)

1. 圖七僅用來確認 ω^2 與 $\cos \theta$ 之間呈反比關係，因此不分析誤差
2. 由式二可知圖八及圖十一的斜率應為 2
3. 由式三可知圖九及圖十二的斜率應為 $2r=8.0$
4. 由式四可知圖十及圖十三的斜率應為 $r=4.0$

	數據一(R=4.0cm)		數據二(R=1.5cm)	
	誤差(%)	相關係數R ²	誤差(%)	相關係數R ²
式二	6.96	0.9959	1.51	0.9976
式三	23.175	0.9238	5.65	0.9583
式四	30.925	0.8969	7.125	0.9595

表六 數據分析

5. 由表六可明顯看出數據一的誤差較大，且其相關係數較小，後來將外徑變短也觀察到誤差相對地變低，因此我們推斷是空氣阻力使外徑較大的數據一產生誤差。

(二) 實驗過程觀察的現象

1. 除了上述討論的 θ ，有時能觀察到另一方向的傾斜，而這個傾斜會造成 θ 的改變，因此實驗會造成誤差。
2. 另外，因為加速過程中會造成力矩不平衡，而造成 θ 震盪，因此也會造成誤差。

柒、 結論

一、環在轉動的軸上會移動是摩擦力造成的，而由實驗及理論統整出三條式子:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = \frac{1}{2} \omega_1 \sec \theta \text{ -----(式二)} \\ v = \omega_2 2r \times \sin \theta \text{ -----(式三)} \\ v = \omega_1 r \times \tan \theta \text{ -----(式四)} \end{array} \right.$$

捌、 未來展望

- 一、未來可改變此研究中圓環和軸半徑比值為 2 這個固定的變因，使圓盤的運動模式達到可以預測的狀態
- 二、希望能找出方法減少圓盤晃動的不穩定性，例如在空氣阻力較少的環境及在平台上裝設避震器以減少馬達晃動時造成的震動

玖、 參考資料及其他

一、 台灣青年學生物理辯論競賽

<http://typt.phy.ntnu.edu.tw/news/102-2018-reference-kit.html>

二、 Ring Oiler @ Greenwich Village (youtube, iypchile, Feb 22, 2017),

<https://youtu.be/FXULCKpbQWI>

三、 Ring in the rotate rod (youtube, Marut Puangsudrak, Aug 16, 2017),

<https://youtu.be/g46lTMAmNcc>

四、 IYPT2018 Problem 6 Ring Oiler (youtube, Associate Professor Kim, Sep 8, 2017),

<https://youtu.be/Hea-bBTpMqo>

五、 IYPT Ring Oiler (youtube, 윤재훈 , Oct 8, 2017),

<https://youtu.be/a7H60rdsTDw>

六、 Nutation

<http://www2.eng.cam.ac.uk/~hemh1/gyroscopes/nutation.html>

【評語】 051809

本作品探討圓環在轉軸上的運動。作者以仔細的分析工作找出實驗中軸轉速、環轉速、環平移速、環傾斜角等物理量之間的定量關係，也觀察到傾斜角的振盪現象，是一個很好的作品。建議改善實驗誤差的評估與敘述，進一步了解傾斜角的振盪。

摘要

觀察置於軸上的圓環經由傾斜會有顯著的橫向移動，本研究探討此現象並提出相關解釋。經由實驗發現圓盤傾斜角度對橫向移動速度有顯著的影響，且此傾斜角度也表現出了相對於進動的週期現象。透過觀察此圓盤的運動模式，更發現現象和圓環參數有密切相關，藉由攝影並分析圓環各項物理數據，進而推導出理論模型並驗證所假設的想法，解釋軸上圓環運動橫向運動的現象。

研究動機

在某次上課偶然把橡皮圈套在筆上水平旋轉，突然發現竟可以把筆的旋轉轉換成橡皮筋左右移動的動力，有點類似螺絲釘的螺紋般，並對此現象感到驚奇，究竟為何沒有螺紋的筆竟可以有此現象，於是決定了這個研究探討。



研究目的

- 一、製作可以達成使圓環此種運動模式的儀器。
- 二、改變圓環角度(θ)以及軸角速度，觀察圓環的移動速度(v)和角速度(ω_2)。
- 三、改變圓環參數，觀察變數之間的關係變化以及進動現象。
- 四、探究變因之間的關係。
- 五、深入研究震盪現象。

研究設備及器材

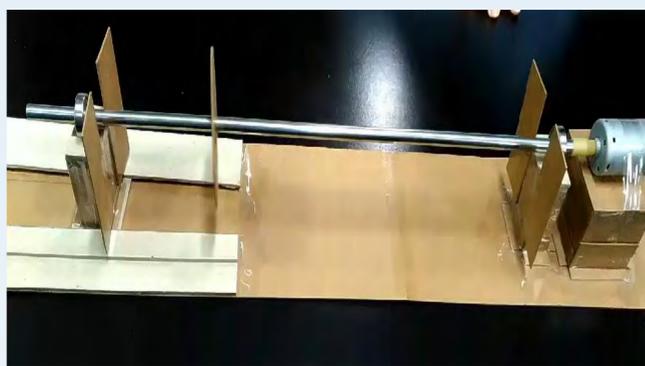
厚紙板	鐵棍(半徑 $r=0.4\text{cm}$)50cm	高速攝影相機
軸承	強力磁鐵	Tracker
馬達	直流電供應器	Excel
電線	膠帶、雙面膠	LED燈管
熱縮管	直尺	奇異筆
鋁箔紙	美工刀	圓規

研究過程與方法

- 一、製作裝置
 - (一) 製作一個能使環轉動於軸的裝置。
 - (二) 使用雷射切割在各材料上割下各式參數的圓環。
- 二、觀察並分析
 - (一) 啟動裝置，並觀察分析。
- 三、討論軸角速度(ω_1)、環角速度(ω_2)、環移動速度(v)與環傾斜角度(θ)之間的關係
 - (一) 利用Tracker的影格功能逐格分析軸、環之速度和座標功能求出圓環側面投影的長寬比並換算成 θ 的三角函數值，再取得 θ ，即可求得 ω_1 、 ω_2 、 v 、 θ 。
 - (二) 再輸入Excel分析數據

研究結果

一. 製作裝置 (如下圖)



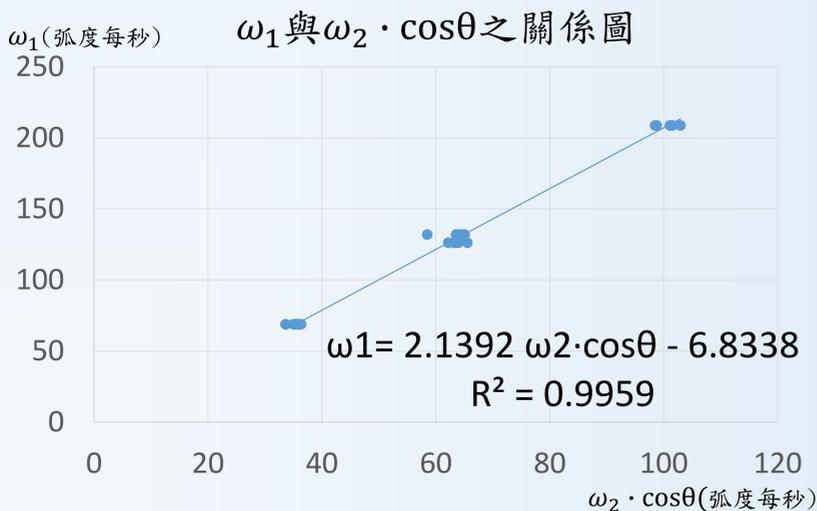
圖三 實驗所用之模擬平台

二. 觀察並分析

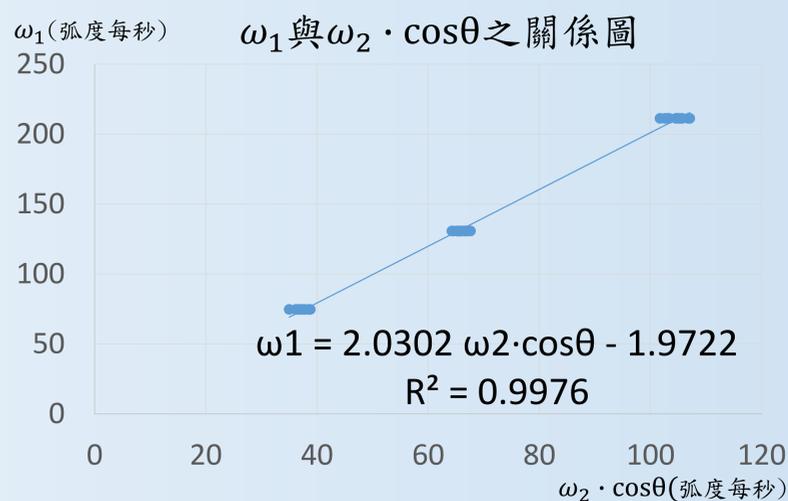
- (一) 觀察
 1. 軸轉速(ω_1)越快，環轉速(ω_2)越快
 2. 軸轉速(ω_1)越快，環移動速度(v)越快
 3. 環傾斜角(θ)越大，環移動速度(v)越大
- (二) 假說
 1. $\omega_1 \propto \omega_2$
 2. $\omega_1 \propto v$
 3. ω_2 、 v 與 θ 之三角函數有正比關係

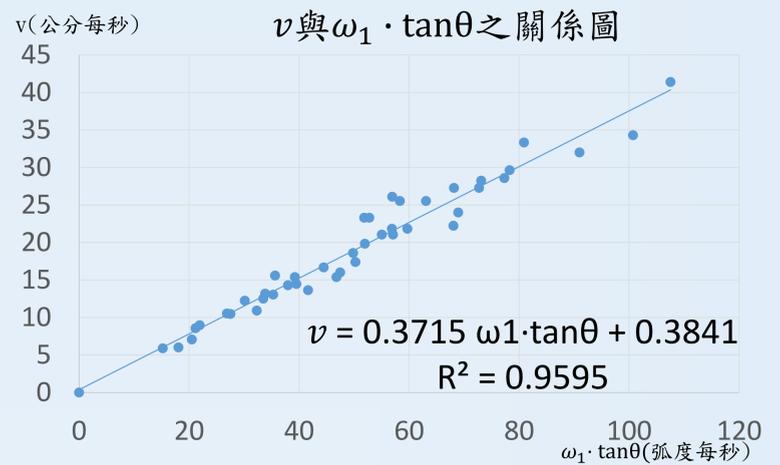
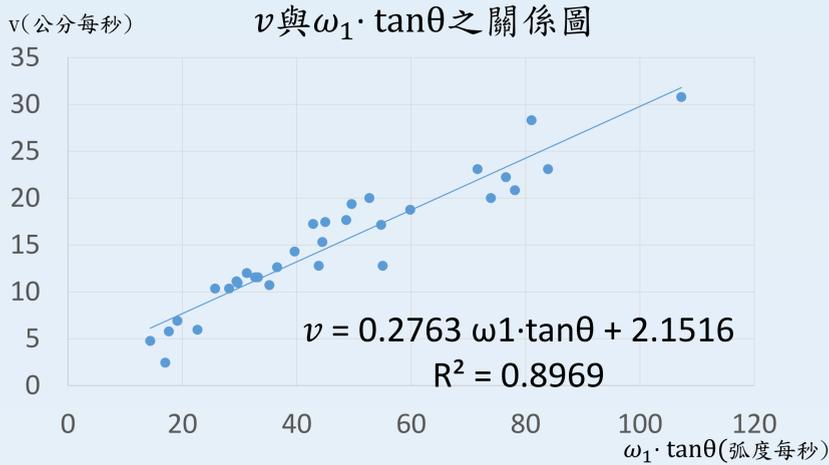
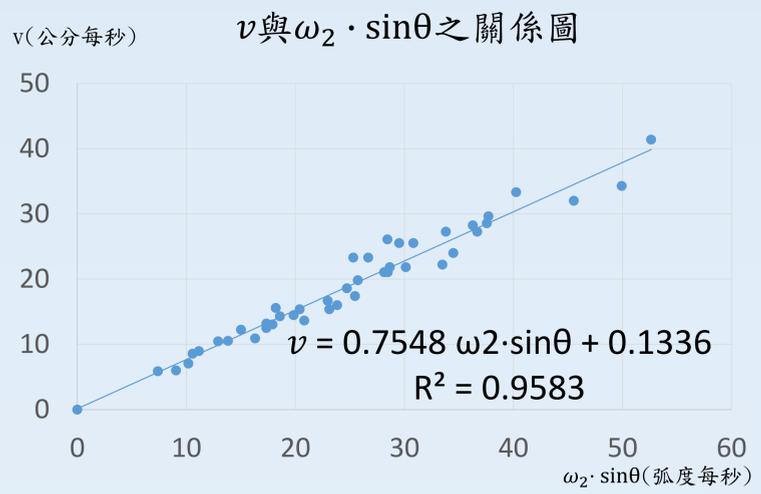
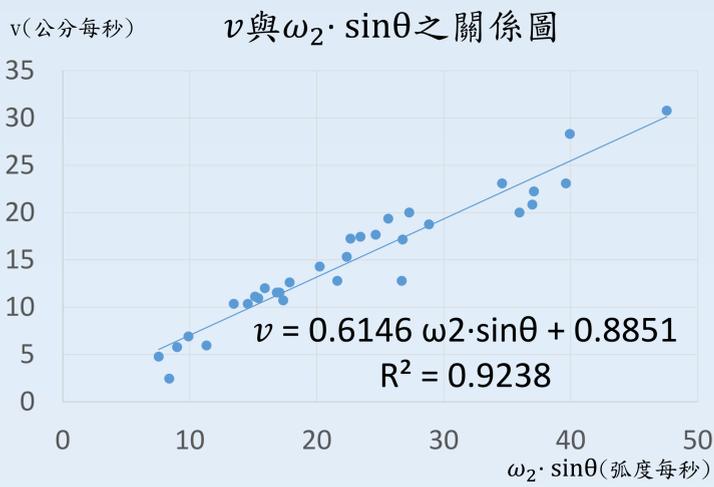
三. 探討軸角速度(ω_1)、環角速度(ω_2)、環移動速度(v)與環傾斜角度(θ)之間的關係

(一)數據一 (外徑 $R = 4.0\text{ cm}$)

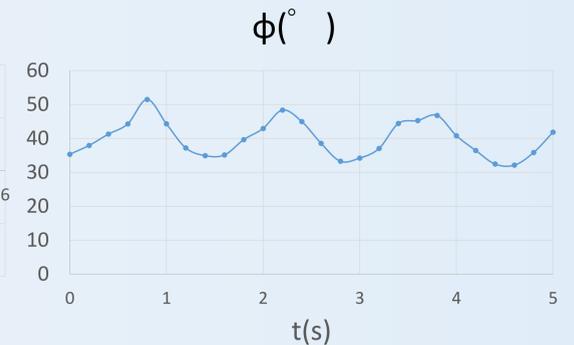
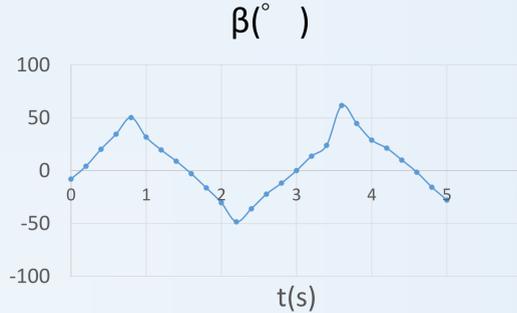
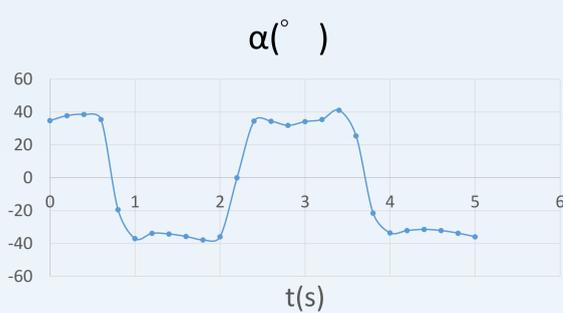
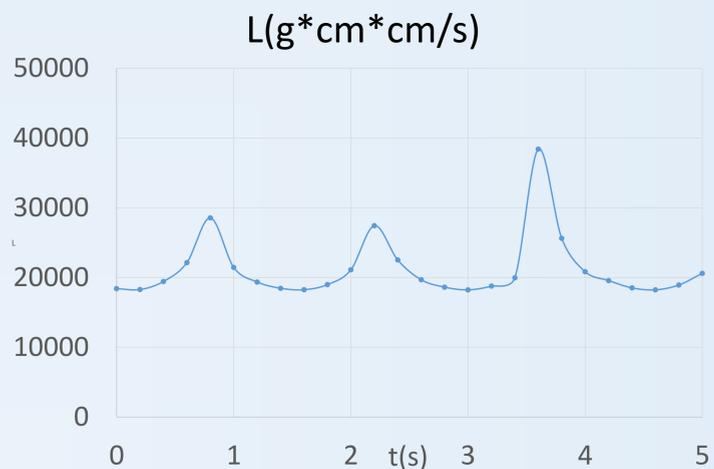
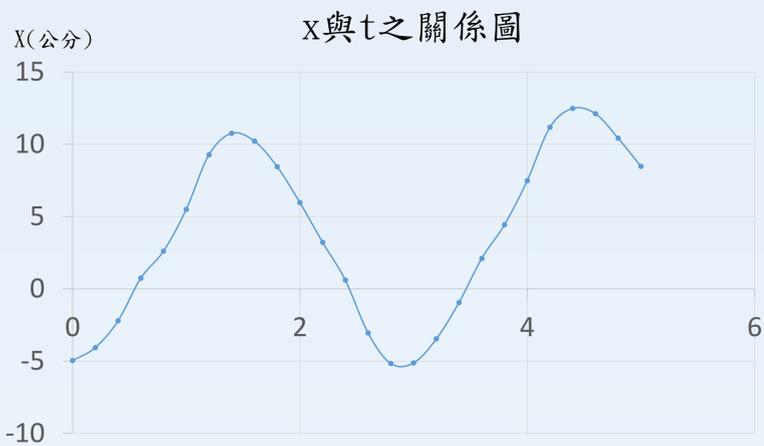


(二)數據二 (外徑 $R = 1.0\text{ cm}$)





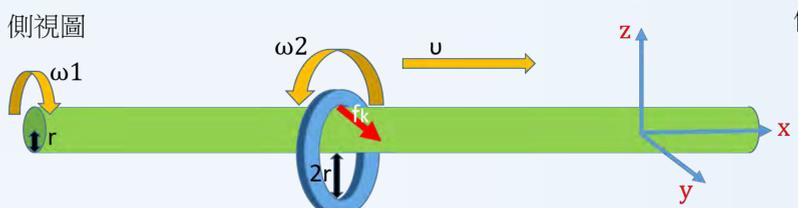
四. θ 震盪深入研究 ($\omega=600\text{rpm} / R=5.8\text{cm} / r=1.0\text{cm} / m=31.67\text{g} / d=55\text{cm}$)



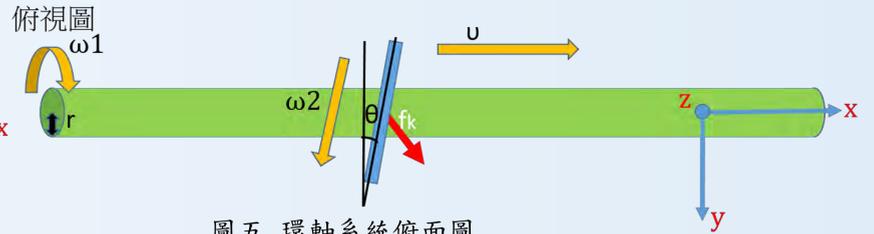
討論

一、理論推導

(一)基本上，由圖十一及圖十二可看出造成環移動及轉動的主因是摩擦力，又**摩擦力的方向是環對軸相對速度的反方向**，因此先討論相對速度的方向。



圖四 環軸系統側面圖



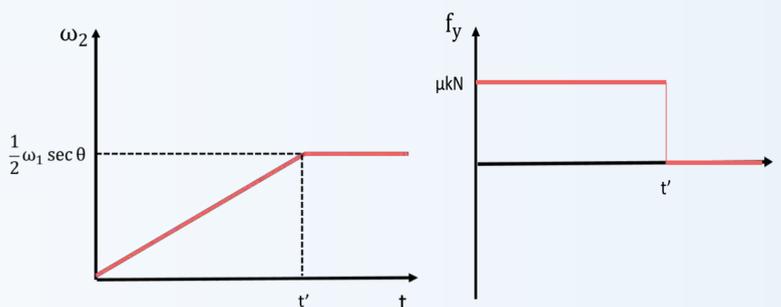
圖五 環軸系統俯面圖

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \vec{\omega}_2 \times 2\vec{r} + \vec{v} - \vec{\omega}_1 \times \vec{r} \\ &= (v - \omega_2 2r \times \sin \theta)\hat{x} + (\omega_2 2r \times \cos \theta - \omega_1 r)\hat{y} \end{aligned} \text{-----(式一)}$$

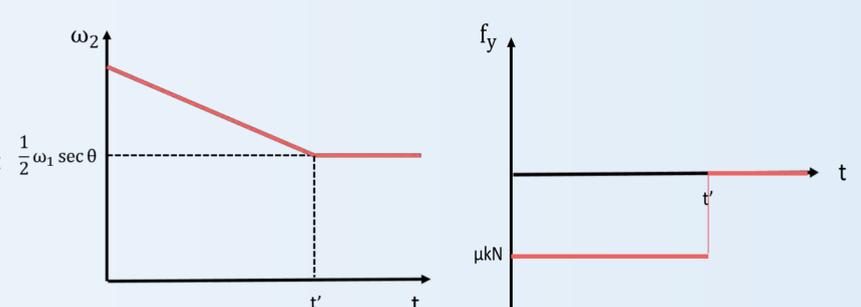
(三) y 方向摩擦力 (f_y) 只影響環轉速 (ω_2)；x 方向摩擦力 (f_x) 只影響環橫向速度 (v)

(四)環轉速 ω_2 的平衡

1. 當 ω_2 變成 $1/2 \times \omega_1 \sec \theta$ 時，y 方向的摩擦力將消失，因此 ω_2 將不變
2. 當 ω_2 低於 $1/2 \times \omega_1 \sec \theta$ 時(圖十三)， \vec{v}_{ry} 將會指向 -y 方向， \vec{f}_y 指向 +y 方向，因此 ω_2 將會增加，直到 $\omega_2 = 1/2 \times \omega_1 \sec \theta$ 時呈穩定狀態；反之亦然(圖十四)。



圖五 環轉速增加



圖六 環轉速降低

3. 由圖四、圖五、圖八可驗證 $\omega_2 = 1/2 \times \omega_1 \sec \theta$ -----(式二)

(五)環移動速度(v)的平衡(同理)

1. 當v變成 $\omega_2 2r \times \sin \theta$ 時，x方向的摩擦力將消失，因此v將不變。
2. 當v低於 $\omega_2 2r \times \sin \theta$ 時(圖十四)， $\overline{v_{rx}}$ 將會指向-x方向， f_x 指向+x方向，因此v將會增加，直到 $v = \omega_2 2r \times \sin \theta$ 時呈穩定狀態；反之亦然。
3. 由圖六、圖九可驗證 $v = \omega_2 2r \times \sin \theta$ -----(式三)

(六)結合式二、式三可得到 $v = \omega_1 r \times \tan \theta$ -----(式四)

二、誤差分析

- (一)數據一的誤差較大，且其相關係數較小，後來將外徑變短也觀察到誤差相對地變低，因此我們推斷是空氣阻力使外徑較大的數據一產生誤差。

	數據一(R=4.0cm)		數據二(R=1.0cm)	
	誤差(%)	相關係數R ²	誤差(%)	相關係數R ²
式二	6.96	0.9959	1.51	0.9976
式三	23.175	0.9238	5.65	0.9583
式四	30.925	0.8969	7.125	0.9595

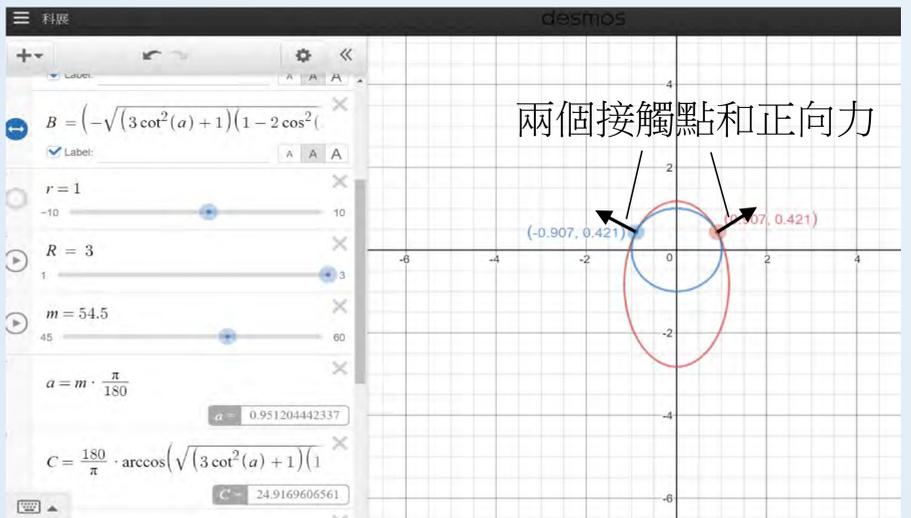
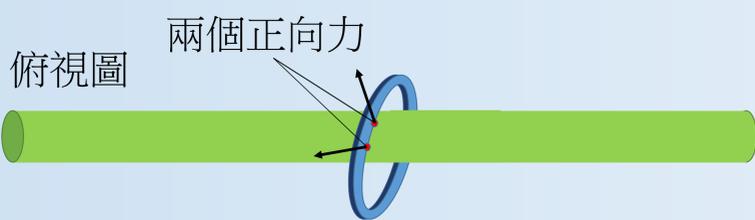
- (二) θ 震盪以及其他現象也是一個造成誤差的原因。

θ 震盪假說推導

我們首先假設圓環角動量的進動形狀為橢圓形，但是比較上方的圖表，明顯可知， α 與 β 不符合橢圓形進動之正餘弦波形。於是我們進行假說推導，將進動運動分成x-y兩方向做為討論，x,y二者皆垂直於軸。

1. 首先討論y方向之角動量指向變化(垂直於地面)：

- i. 當圓環在一定角度的傾斜狀況下，圓環與軸的接觸點會由原本理想的一個變成兩個。
- ii. 如下圖所示。然而，在兩個接觸點的狀況下，原本支撐圓環重量的正向力會產生一個令圓環 β 值改變的力矩，進而影響角動量垂直的方向變化。



2. 再來是x方向角動量指向變化：

- i. 當圓環在軸上橫向加速時，圓環的慣性會使圓環的 α 值產生變化，形成一個傾斜的狀態。
- ii. 而由於圓環質心與接觸點不再同一垂直線上，重力也會產生一個力矩，影響角動量水平的方向變化。

結論

一、環在轉動的軸上會移動是摩擦力造成的，而由實驗及理論統整出三條式子：

$$\begin{cases} \omega_2 = 1/2 \omega_1 \sec \theta & \text{-----(式一)} \\ v = \omega_2 2r \times \sin \theta & \text{-----(式二)} \\ v = \omega_1 r \times \tan \theta & \text{-----(式三)} \end{cases}$$

二、圓在軸上的動態狀況造成之傾斜會影響環原本的角動量，分別有 β 方向與 α 方向，根據當下的 θ 值產生力矩：

1. θ 方向：環與軸之接觸點由一變為二個，兩個接觸點正向力之水平分量因 β 角之作用不作用在同一直線上，產生力偶改變環垂直方向之角動量。
2. 重力方向：環橫向移動之加速度使重心水平位置異於接觸點，重力作用於重心時，產生力矩改變環之垂直軸之水平角動量。

三、環在週期性的 θ 變化下產生繞軸的類進動現象，此現象週期與環之內外徑有關，也造成測量上有一定的難度。

四、未來展望

- (一)未來可改變此研究中圓環和軸半徑比值為2這個固定的變因，使圓盤的運動模式達到可以預測的狀態
- (二)希望能找出方法減少圓盤晃動的不穩定性，例如在空氣阻力較少的環境及在平台上裝設避震器以減少馬達晃動時造成的震動
- (三)希望能做實驗證明 θ 震盪

參考資料

- 一、台灣青年學生物理辯論競賽
- 二、Ring Oiler @ Greenwich Village (youtube, iyptchile, Feb 22, 2017)
- 三、Ring in the rotate rod (youtube, Marut Puangsudrak, Aug 16, 2017)
- 四、IYPT2018 Problem 6 Ring Oiler (youtube, Associate Professor Kim, Sep 8, 2017)
- 五、IYPT Ring Oiler (youtube, 윤재훈, Oct 8, 2017)